

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



UNIVERSITE IBN KHALDOUN  
TIARET



Faculté des Mathématiques et  
d'Informatique

Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse Fonctionnelle et Équation Différentielle ( AFED)

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

*Estimation de paramètres : résolution d'un problème inverse en  
transfert de chaleur, par la méthode de l'état adjoint*

Présenté par

- Zerhouni Kheira
- Saidi Fatiha

soutenue devant le Jury composé de

*Mr Laarabi Abderhman	MCB	Président
*Mr Maazouz Kadda	MCA	Examineur
*Mme Sabit Souhila	MCA	Encadreur

Promotion : 2019 / 2020



## Remerciement

*Nous remercions en premier lieu Dieu le tout puissant qui nous a donné la santé, la force, le courage et la volonté de suivre la formation et de réaliser ce travail. On tient à remercier tout particulièrement nos très chers parents pour leurs soutiens et leurs encouragements et leurs conseils et à notre Directrice de mémoire Madame SABIT.S pour ses bons conseils et sa grande expérience. On adresse nos sincères remerciements à l'ensemble des enseignants de nous avoir formés, guidés, encouragés et dirigés pendant toutes ces années d'études. Enfin, nous remercions vivement toute personne qui a participé de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire professionnel. Un grand merci aussi à nos familles et à nos amis, collègues pour leur partage de connaissances, d'idées, de savoir et pour leur soutien durant ce parcours.*

**MERCI A TOUS.**



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaire</b>	<b>7</b>
1.1	Rappels sur quelques espaces fonctionnels . . . . .	7
1.1.1	Espace vectoriel normé . . . . .	7
1.1.2	Espace de Hilbert . . . . .	8
1.1.3	Espace $L^p(\Omega)$ . . . . .	8
1.2	Notions sur les opérateurs . . . . .	9
1.3	Fonctions convexes et fonctions coercives . . . . .	9
1.4	Théorème de Lax.Milgram . . . . .	10
1.5	Quelque notions sur les matrices . . . . .	10
1.5.1	Transposée d'une matrice . . . . .	10
1.5.2	Matrice jacobienne . . . . .	10
1.6	Notions sur quelques méthodes mathématique . . . . .	11
1.6.1	La méthode des éléments finis . . . . .	11
1.6.2	La méthode des moindres carrés . . . . .	11
1.6.3	La méthode de Newton . . . . .	12
1.6.4	La méthode de gradient . . . . .	12
1.6.5	La méthode de Landweber . . . . .	13
1.6.6	La méthode de Gauss-Newton . . . . .	13
1.6.7	La méthode de Marquardt-Levenberg . . . . .	13
<b>2</b>	<b>L'équation de la chaleur et les conditions aux limites associées</b>	<b>14</b>
2.1	Introduction . . . . .	14
2.2	Définition . . . . .	14

---

2.3	Transfert de chaleur . . . . .	15
2.3.1	Définition : . . . . .	15
2.4	Les trois modes de transfert de chaleur . . . . .	16
2.4.1	Transfert de chaleur par conduction dans les solides . . . . .	16
2.4.2	Transfert de chaleur par convection . . . . .	16
2.4.3	Transfert de la chaleur par rayonnement . . . . .	17
2.5	L'équation de la chaleur stationnaire . . . . .	17
2.5.1	L'équation de la chaleur stationnaire $1D$ : . . . . .	17
2.5.2	L'équation de la chaleur $2D$ stationnaire : . . . . .	18
2.6	L'équation de la chaleur non-stationnaire : . . . . .	18
2.6.1	Cas linéaire . . . . .	18
2.6.2	Cas non-linéaire . . . . .	19
2.7	La solution fondamentale de l'équation de la chaleur $1D$ : . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Les notions de base de problème inverse</b>	<b>22</b>
3.1	Introduction . . . . .	22
3.2	Définition d'un problème inverse . . . . .	22
3.3	Problème inverse lineaire . . . . .	23
3.4	Problème inverse non lineaire . . . . .	23
3.5	Difficultés des problèmes inverse . . . . .	24
3.6	Problèmes bien ou mal posés . . . . .	25
3.7	Différents problème inverse autour d'équation de la chaleur . . . . .	26
3.7.1	Reconstitution de l'état passé . . . . .	26
3.7.2	Identification de la conductivité . . . . .	26
3.7.3	Identification des conditions aux bords . . . . .	26
3.8	La méthode de régularisation de problème inverse mal posé . . . . .	27
3.8.1	La méthode de Tikhonov . . . . .	27
3.9	Méthodes de résolution d'un problème inverse . . . . .	27
3.9.1	Méthodes fréquentielles . . . . .	27
3.9.2	Méthode du fil chaud . . . . .	28
3.9.3	Méthode du plan chaud . . . . .	28
3.9.4	Méthodes non-stationnaires . . . . .	29
<b>4</b>	<b>La méthode de l'état adjoint.</b>	<b>30</b>
4.1	Introduction . . . . .	30

---

4.2	Définition : . . . . .	31
4.3	Méthodes d'évaluation du gradient : . . . . .	32
4.3.1	Méthode de l'état adjoint cas linéaire discrétisé . . . . .	32
4.3.2	Méthode de l'état adjoint cas linéaire continu . . . . .	33
4.3.3	Méthode de l'état adjoint cas incrémental discrétisé . . . . .	33
4.4	Exemple de calcul de gradient : . . . . .	34
4.4.1	Équation elliptique en dimension 1 . . . . .	34
4.4.2	Équation elliptique en dimension 2 . . . . .	37
4.4.3	Équation de la chaleur . . . . .	40

## Résumé

Les problèmes de transmission d'énergie, et en particulier de la chaleur ont eu une importance déterminante pour l'étude.

L'objectif de ce mémoire de master est la mise en oeuvre de la méthode de l'état adjoint pour résoudre un problème inverse en transfert de chaleur, et estimer certains paramètres. Les problèmes inverses sont les recherches de déterminer les causes d'un phénomène en fonction de l'observation de ses effets. La complexité de ce type de résolution réside dans la difficulté à avoir une bonne connaissance du problème direct ainsi que dans l'incertitude des paramètres du système.

Certaines techniques, comme la régularisation des problèmes mal posés ont été mises en place pour aider à la résolution de tels problèmes, qu'ils soient linéaires ou non linéaires.

Face aux divers problèmes inverses nous avons appliqué la méthode de l'état adjoint sur certains problèmes 1D et 2D stationnaire et non stationnaires qui permet de valider la méthode et traiter quelques exemples qui sont cités dans le dernier chapitre.

## Introduction

Les transferts thermique constituent l'un des grands thèmes de recherche actuels qui jouent un rôle important dans des nombreux domaines car il est difficile de trouver un activité humaine où n'intervient pas un échange de chaleur.

Il est bien que les problèmes inverses ne sont pas le fruit du hasard mais issue des phénomènes de la nature et de la vie réelle, Ainsi plusieurs branches de sciences fournissent un grand nombres des problèmes inverses parmi eux les problèmes inverses en thermique qui appartiennent à une classe appelée les problèmes mal posés et cette nature des problèmes inverses se manifeste dans l'instabilité des solutions obtenues et pour stabiliser les solutions il faut utiliser des méthodes de régularisation pour cela il est nécessaire d'introduire des technique numérique de résolution. En effet la méthode la plus efficace pour suivre l'évolution des paramètres c'est l'application de l'état adjoint nous à permis d'assurer la rapidité des calcules. Cette méthode rend le problème indépendant de nombre des paramètres inconnus et ne nécessite la résolution que d'une seul équation ce qui nous permet de raffiner la discrétisation pour mieux capter les phénomènes avec différentes géométries en 2D ou 3D.

La présentation de ce mémoire est structurée en quatre chapitres

Dans le premier chapitre( préliminaire), nous présentons des notions, des définitions et quelques méthodes mathématiques utiliser dans ce travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'équation de la chaleur en séparant le cas stationnaire et non-stationnaire et les conditions aux limites associées et donner quelques rappels concernant les trois mode de transfert de chaleur à la fin de ce chapitre nous parlons à la solution fondamentale de l'équation de la chaleur.

Dans le troisième chapitre nous présentons les notion de base de problème inverse

---

nous insistons sur les problèmes inverses lineaires et les problèmes inverses non lineaires. Ensuite nous déterminons les différents difficultés des problèmes inverses et faire le point sur la méthode de régularisation d'un problème mal pose puis les méthodes de résolution.

Le quatrième chapitre de ce travail est consacré à la méthodes de l'état adjoint tel que on va représenter une description approfondie sur les méthodes d'évaluation de gradient. Ensuite nous appliquons la méthode de l'état adjoint sur trois modlès 1D, 2D stationnaire et non stationnaire.

Ce memoire est clôturée par une conclusion générale.

Dans ce chapitre nous présentons des notations, définitions et des théorèmes utilisés dans ce mémoire.

## 1.1 Rappels sur quelques espaces fonctionnels

### 1.1.1 Espace vectoriel normé

Commençant par rappeler la définition d'un espace vectoriel normé.

**Définition 1.1.** (*Espace vectoriel normé*) Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on appelle norme sur l'espace  $E$  toute application notée  $\|\cdot\|$  définie sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , vérifiant pour tout  $x, y$  dans  $E$  et  $\alpha$  dans  $\mathbb{K}$ .

(i)  $\|x\| = 0$  si seulement si  $x = 0$ .

(ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  (homogénéité).

(iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

**Exemple 1.1.1.** Dans le cas où  $E$  est de dimension  $n$  ( nous l'identifions alors à  $\mathbb{R}^n$  ), les normes suivantes sont les plus utilisées :

-  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

-  $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$

$$- \|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

**Définition 1.2.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Un produit scalaire sur  $E$  est une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$ , notée  $(\cdot, \cdot)$ , possédant les propriétés suivantes :

$$- \forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z).$$

$$- \forall x \in E, (x, x) \geq 0.$$

$$- \forall (x, y) \in E^2, (x, y) = (y, x).$$

$$- (x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

### 1.1.2 Espace de Hilbert

**Définition 1.3. Espace complet :** on dit qu'un espace métrique  $(X, d)$  est complet si toute suite de Cauchy de  $X$  est convergente. Un espace vectoriel normé qui est complet s'appelle espace de Banach.

**Définition 1.4.** Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

### 1.1.3 Espace $L^p(\Omega)$

**Définition 1.5. (Espace  $L^p(\Omega)$ )**

$1 \leq p \leq \infty$ , on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p < \infty \right\}.$$

muni de la norme.

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left( \int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si  $p = \infty$ , on a  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mesurables, vérifiant

$$\exists c > 0 \text{ telle que } |f(x)| \leq c, \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

## 1.2 Notions sur les opérateurs

**Définition 1.6.** ( *Opérateur linéaire* ) Soit  $T$  un opérateur d'un espace normé  $E$  dans un espace normé  $F$ , on dit que  $T$  est linéaire s'il vérifie les conditions suivantes : pour tout  $\varphi_1, \varphi_2$  dans  $E$  et  $\lambda$  dans  $\mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ .

- i)  $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E$  on a,  $T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2)$ .
- ii)  $\forall \varphi \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  on a,  $T(\lambda\varphi) = \lambda T(\varphi)$ .

**Définition 1.7.** ( *Opérateur borné* ) Soit  $A$  un opérateur Linéaire d'un espace normé  $E$  dans un espace normé  $F$ , on dit que  $A$  est borné s'il existe une constante positive  $C$ , telle que :

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E \forall x \in E.$$

**Définition 1.8.** Soit  $E$  un espace de Banach et  $T : E \rightarrow E$  un opérateur.

1.  $T$  est dit **continu** si pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E$  tel que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$  dans  $E$ , la suite  $(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $Tx$ .
2.  $T$  est dit **compact**, si pour tout borné  $B$  de  $E$ ,  $T(B)$  est relativement compact.
3.  $T$  est dit **complètement continu** si  $T$  est continue et si l'image de tout borné  $B$  de  $E$  est relativement compact.
4. Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

*Exemple : L'injection canonique de  $H_0^1(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$  est compacte ( plus généralement, on peut remplacer  $]0, 1[$  par un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^n$  ).*

**Théorème 1.1.** Un opérateur de  $E$  dans  $F$  est compact si et seulement si il est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.

## 1.3 Fonctions convexes et fonctions coercives

**Définition 1.9.** *Fonction convexe* : une fonction  $f$  est convexe sur un intervalle  $I$  si pour tous  $x$  et  $y$  de  $I$ , pour tout  $t$  de  $[0, 1]$  :  $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ .

**Propriétés 1.1.** – si  $f$  est dérivable sur  $I$ ,  $f$  est convexe si et seulement si  $f'$  est croissante.

- si  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$ ,  $f$  est convexe si et seulement si  $f'' \geq 0$ .

**Définition 1.10.** *Fonction coercive* :  $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(u, v) \longrightarrow a(u, v)$$

$a$  une forme bilinéaire,  $a$  est coercive ssi  $\forall u \in H, \exists \alpha > 0$

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2$$

## 1.4 Théorème de Lax.Milgram

**Théorème 1.2.** *Soit  $H$  un espace de Hilbert.  $L$  est une forme linéaire et continue sur  $H$ .*

$$L : H \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \rightarrow L(v)$$

et  $a$  une forme bilinéaire, continue et coercive sur  $H$

$$\text{alors le problème } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H$$

admet une unique solution dans  $H$ .

## 1.5 Quelques notions sur les matrices

### 1.5.1 Transposée d'une matrice

**Définition 1.11.** *On appelle transposée d'une matrice de type  $(n, m)$  et de terme général  $a_{ij}$ , la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de même indice c.a.d  $(a_{ji})$ .*

### 1.5.2 Matrice jacobienne

**Définition 1.12.** *Soit  $f$  une fonction définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ , soit  $a$  un point de  $U$  où  $f$  est différentiable. La matrice jacobienne de  $f$  en  $a$  est la matrice à  $n$  lignes et à  $p$  colonnes donnée par :*

$$J_{n,p}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Dans le cas où  $n = p$  le déterminant de la matrice jacobienne s'appelle déterminant jacobien de  $f$  en  $a$ . Le déterminant de matrice jacobienne intervient dans des

nombreux problèmes concernant l'inversion des fonction holomorphes( inversion locale, fonctions implicites) et aussi dans la formule du changement de variables pour les fontions de plusieurs variables.

## 1.6 Notions sur quelques méthodes mathématique

### 1.6.1 La méthode des éléments finis

**Définition 1.13.** *est une méthode numérique de résoudre certains problèmes. C'est une méthode qui permet de déterminer une solution approchée sur un domaine spatial.*

*La méthode consiste à découper le domaine spatial en petits éléments, également appelés mailles, et à rechercher une formulation simplifiée du problème sur chaque élément, c'est-à-dire à transformer le système d'équations quelconque en un système d'équations linéaires. Chaque système d'équations linéaires peut se représenter par une matrice. Les systèmes d'équations pour tous les éléments sont ensuite rassemblés, ce qui forme une grande matrice; la résolution de ce système global donne la solution approchée au problème.*

**Exemples d'application de la méthode :**

- La résistance des matériaux.
- Le transfert de chaleur.
- L'électromagnétisme.

### 1.6.2 La méthode des moindres carrés

**Définition 1.14.** *La méthode des moindres carrés permet de minimiser l'impact des erreurs expérimentales dans les processus de mesure. Dans le cas le plus courant, le modèle théorique est une famille de fonctions  $f(x, \theta)$  d'une ou plusieurs variables muettes  $x$ , indexées par un ou plusieurs paramètres  $\theta$  inconnus. La méthode permet de sélectionner parmi ces fonctions celle qui reproduit le mieux les données expérimentales. alors la fonction  $f(x, \theta)$  qui décrit( le mieux)les données est celle qui minimise la somme quadratique des déviations des mesures aux prédictions de  $f(x, \theta)$ , si par exemple nous disposons de  $N$  mesures  $(y_i)_{i=1\dots N}$ , les paramètres  $\theta$ (*

optimaux) au sens de la méthode des moindres carrés sont ceux qui minimisent la quantité :

$$s(\theta) = \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i, \theta))^2.$$

$s(\theta)$  peut être considéré comme une mesure de la distance entre les données expérimentales et le modèle théorique qui prédit ces données. La prescription des moindres carrés commande que cette distance soit minimale [2].

### 1.6.3 La méthode de Newton

**Définition 1.15.** La méthode de Newton est basée sur une approximation locale du deuxième ordre de la fonction de coût, pour la fonction de coût approchée (quadratique), le minimum est théoriquement facile à déterminer. Autour du minimum trouvé, la fonction de coût originale est alors à nouveau approchée au deuxième ordre, et ainsi de suite.

Nous décrivons la méthode de Newton pour trouver une racine d'une fonction en une variable, puis la méthode analogue pour la recherche d'un minimum, d'abord en un dimension, puis en  $n$  dimensions [3].

### 1.6.4 La méthode de gradient

**Définition 1.16.** puisque nous cherchons un minimum de la fonction de coût, il est naturel de chercher le nouveau point dans une direction descendante. La direction la plus descendante (localement) est donnée par le gradient. Les méthodes de gradient adoptent alors la direction donnée par le gradient comme direction de la recherche. Différentes méthodes de gradient se distinguent d'après le choix de la longueur de pas :

- Méthode de gradient à pas optimal.
  
- Méthode de gradient à pas fixe.
  
- Méthode de gradient à pas variable.

Pour plus de détails consulter [3].

### 1.6.5 La méthode de Landweber

**Définition 1.17.** *La méthode de Landweber est une méthode itérative( Les méthodes itératives sont des méthodes qui construisent une suite  $(x^m)$  de solutions approchées qui convergent vers la solution désirée). Malheureusement, elle converge trop lentement pour être utilisable en pratique. Pour cette méthode on observe qu'un haute précision demande un nombre large  $m$  d'itération mais la stabilité nous force à garder  $m$  le plus petit possible [4].*

### 1.6.6 La méthode de Gauss-Newton

**Définition 1.18.** *La méthode de Gauss-Newton est une méthode de résolution des problèmes de moindres carrés non linéaires. Elle peut être vue comme une modification de la méthode de Newton dans le cas multidimensionnel afin de trouver le minimum d'une fonction( à plusieurs variables)[3].*

### 1.6.7 La méthode de Marquardt-Levenberg

**Définition 1.19.** *La méthode de Marquardt-Levenberg est une approximation de la méthode de Newton. Dans cette méthode la direction [3] de recherche  $y$  est calculée en résolvant le système :*

$$(J(x_k)^T J(x_k) + \lambda_k I) d_k = -J(x_k)^T r(x_k)$$

où  $\lambda_k$  est un scalaire non négatif et  $I$  la matrice identité de la taille appropriée. La méthode de Marquardt-Levenberg ne nécessite pas de calculer la longueur de pas, le nouveau point est directement obtenu par :

$$x_{k+1} = x_k + d_k.$$

## L'équation de la chaleur et les conditions aux limites associées

### 2.1 Introduction

Les transferts thermiques constituent l'un des grands thèmes de recherche actuels.

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement les équations fondamentales de la chaleur, en séparant les cas stationnaire et non-stationnaire. Nous insisterons également sur les conditions aux limites associées.

Ensuite nous déterminons les modes de transmission de la chaleur et enfin nous parlons de solution fondamentale de l'équation de la chaleur.

### 2.2 Définition

**Définition 2.1.** : Les équations paraboliques [5] sont de type équation de dissipation, on les rencontre la plupart du temps sous la forme d'une équation évolutive du type

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) - \operatorname{div}(q(x)\nabla_x \Phi(t, x)) = h(t, x)$$

où  $q(x) > 0$ . Le terme  $\operatorname{div}(q(x)\nabla_x \Phi(t, x))$  est un terme elliptique par rapport à la variable  $x$ .

Nous allons étudier l'équation unidimensionnelle, avec  $q(x) = k$ ,  $k$  est la diffusivité thermique du matériau.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = h(t, x) \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Les différentes conditions aux limites rencontrées dans les problèmes de thermique :

- Condition aux limites de type Dirichlet homogènes( c'est à dire que la valeur de  $u$  est imposée éaux extrémités  $x = 0$  et  $x = L$ )

$$(P_i) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2(u)}{\partial(x^2)} & \text{pour } x \in [0, L] \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 & \text{pour } t > 0 \\ u(0, x) = c(x) & \text{pour } x \in [0, L] \end{cases}$$

avec  $k$  est la diffusivité thermique du matériau et  $c(x)$  est la répartition de température relative initiale.

- Condition aux limites de type Neumann si le flux thermique est fixé sur une autre partie de la frontière( il est nul dans le cas d'un matériau isolé thermique-ment).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g(t)$$

- Conditions de type Fourier dans le cas le plus général où le flux thermique est proportionnel á la différence de température entre l'extérieur et l'intérieur.

## 2.3 Transfert de chaleur

### 2.3.1 Définition :

La thermodynamique nous apprend que l'énergie peut être transférée à partir interaction entre le système et son environnement, sous forme de chaleur et de travail. Cependant, la thermodynamique ne se préoccupe que de l'état initial et de l'état final du système à l'équilibre.

Un transfert de chaleur au sein d'un système ne se produit que s'il existe des gradients de température entre les différentes parties du système, ce qui implique que celui-ci n'est alors pas à l'équilibre thermodynamique( la température n'est pas uniforme dans tout le système). Au cours de la transformation du système vers un état d'équilibre final, la température va évoluer à la fois en temps et en espace [6].

- Les transferts de chaleur sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température,  $T(x, y, z, t)$ .
- La variation dans le temps en un point  $M(x, y, z)$  du système est donnée par la

dérivée partielle de  $T(x, y, z, t)$  par rapport au temps :  $\frac{\partial T}{\partial t}$

Pendant un intervalle de temps  $dt$ , la variation de température en un point M sera

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt.$$

• La variation dans l'espace à un instant  $t$  est donnée par le gradient de température :

$$\vec{\nabla T} = \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{cases}$$

## 2.4 Les trois modes de transfert de chaleur

### 2.4.1 Transfert de chaleur par conduction dans les solides

Le processus de transfert de chaleur par conduction s'appuie sur un milieu matériel sans mouvement de matière et est dû à des phénomènes physiques microscopiques (agitation des atomes ou des molécules, flux d'électrons libres... ). Il peut être vu comme un transfert d'énergie des particules les plus énergétiques (les particules chaudes qui ont une énergie de vibration élevée) vers les particules les moins énergétiques (les particules froides d'énergie de vibration moins élevée), dû aux collisions entre particules. Dans les solides, le transfert d'énergie peut également se produire sous l'effet du déplacement d'électrons libres dans le réseau cristallin (par exemple pour les métaux). Ainsi les bons conducteurs d'électricité sont en général également de bons conducteurs de la chaleur.

### 2.4.2 Transfert de chaleur par convection

La convection est un mode de transfert de chaleur qui met en jeu, en plus de la conduction, le mouvement macroscopique de la matière. Ce phénomène se produit au sein des milieux fluides en écoulement ou entre une paroi solide et un fluide en mouvement.

### 2.4.3 Transfert de la chaleur par rayonnement

Tout corps matériel émet et absorbe de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique. Le transfert de chaleur par rayonnement entre deux corps séparés par du vide ou un milieu semitransparent se produit par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques, donc sans support matériel. Le phénomène d'émission d'un corps correspond à la conversion d'énergie matérielle (agitation des électrons constituant la matière dont l'intensité dépend de la température) en énergie radiative. Le phénomène d'absorption est la conversion inverse. Pour plus de détails consulter [6].

## 2.5 L'équation de la chaleur stationnaire

Lorsque la température ne dépend plus du temps (régime permanent ou stationnaire), on obtient l'équation suivante :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k\nabla(T)) = f \quad \forall (x, y) \in \Omega \\ +\text{les conditions aux bords sur } \partial\Omega \end{cases}$$

### 2.5.1 L'équation de la chaleur stationnaire 1D :

Rappelons l'équation de la chaleur

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + r$$

La source  $r$  est une grandeur donnée,  $T$  est la température,  $\rho$  est la masse volumique du matériau,  $c_p$  est la capacité thermique massique du matériau,  $k$  la conductivité thermique du matériau,  $t$  le temps. Les deux variables,  $x$  et  $t$  sont deux variables indépendantes [7].

On appellera solution stationnaire la solution obtenue pour un temps assez long. Pour la solution stationnaire, le temps n'est plus un paramètre, la température ne varie plus avec le temps.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

• l'équation stationnaire de la chaleur dans un milieu immobile linéaire homogène avec terme source est :

$$\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + r = 0$$

•L'équation stationnaire de la chaleur dans un milieu immobile linéaire homogène avec terme source et isotrope est donc :

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r = 0$$

### 2.5.2 L'équation de la chaleur 2D stationnaire :

Considérons le problème bidimensionnel stationnaire de la conduction de la chaleur dans un domain [8] rectangulaire  $[0, L_x] \times [0, L_y]$ . Le champ de température  $T(x, y)$  vérifie l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 & (x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \\ T(0, y) = T_g \text{ et } T(L_x, y) = T_d & 0 < y < L_y \\ T(x, 0) = T_b \text{ et } T(x, L_y) = T_h & 0 < x < L_x \end{cases}$$

## 2.6 L'équation de la chaleur non-stationnaire :

Nous allons traiter séparément les cas linéaire( les propriétés thermophysiques ne dépendent pas de la température) et non-linéaire( les propriétés thermophysiques dépendent de  $T$  ) [9].

### 2.6.1 Cas linéaire

Lorsque les propriétés thermophysiques, et notamment la conductivité thermique  $k$ , ne dépendent pas de la température, alors cette équation est équivalente à :

$$\Delta T + \frac{g}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial(T)}{\partial(t)}$$

où  $T$  est la température,  $\rho$  est la masse volumique du matériau,  $c$  est la capacité thermique massique du matériau,  $k$  la conductivité thermique du matériau,  $t$  le temps et  $\alpha = k/\rho c$  est la diffusivité thermique du matériau et qui ne dépend donc pas non plus de  $T$  et  $g$  la distribution de source de chaleur. En l'absence de terme source, on obtient l'équation de la chaleur non-stationnaire sans terme source :

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial(T)}{\partial(t)}$$

### 2.6.2 Cas non-linéaire

Lorsque les propriétés thermophysiques dépendent de la température. On introduira comme dans le cas stationnaire la transformée de Kirchoff  $\phi(T)$

$$\phi(T) = \int_{T_{ref}}^T k(T) dT$$

où  $T_{ref}$  est une température de référence définie arbitrairement.

On obtient alors l'équation de la chaleur non-stationnaire en terme de transformée de Kirchoff :

$$\Delta\phi + g = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Mais cette équation n'est toujours pas linéaire puisque la diffusivité thermique

$$\alpha = \frac{k(T)}{\rho(T)c(T)} = \alpha(T)$$

dépend encore également de  $T$ . Cependant, dans la plupart des cas traités, la dépendance de la diffusivité thermique est beaucoup moins forte que celle de la conductivité et il est d'usage dans la littérature de considérer que la diffusivité est constante tout en prenant en compte les variations de la conductivité.

En l'absence de terme source, l'équation de la chaleur se simplifie comme suit :

$$\Delta\phi = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial\phi}{\partial t}$$

## 2.7 La solution fondamentale de l'équation de la chaleur 1D :

On considère l'équation de la chaleur sur  $\mathbb{R}$  sans terme source

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0 & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0 & \text{ou } u_0 \text{ est donne} \end{cases}$$

On voudrait voir l'évolution d'une quantité de chaleur unitaire concentrée en  $x = 0$ . La quantité de chaleur portée par  $u_0$  (en supposant que la capacité calorifique est  $C_p = 1$ ) est donnée par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx$$

avec  $u_0(x) = \delta_0(x)\beta\gamma$  la masse de Dirac en  $x = 0$

**Proposition 2.1.** *La solution de l'équation de la chaleur :*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0 & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = \delta_0(x) \end{cases}$$

est :

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)$$

On appelle cette solution, la solution élémentaire de l'équation de la chaleur. On la note  $\theta_k(t, x)$ .

**preuve 2.1.** *La fonction*

$$\theta_k(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)$$

est appelée distribution gaussienne autour de 0 (elle a une grande importance en statistique). Elle vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}} \theta_k(t, x) dx = 1$$

ce qui est compatible avec la conservation de la quantité de chaleur. On peut le vérifier par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{l}\right) dx &= \left( \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{l}\right) dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{l}\right) r dr d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( 2\pi l \int_0^{+\infty} \exp(-t) \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\pi l} \end{aligned}$$

On remarque que la fonction  $\theta_k(t, x)$  admet son maximum en 0 qui vaut

$\theta_k(t, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}$  et qui tend vers 0 lorsque  $t$  augmente, Pour une fonction continue  $f(x)$ , l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} f(x)\theta_k(t, x)dx$  est une moyenne pondérée autour de 0 de la

fonction  $f(x)$  et donc

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \int_{\mathbb{R}} f(x) \theta_k(t, x) dx = f(0)$$

On a donc  $\lim_{t \rightarrow 0_+} \theta_k(t, x) = \delta_0(x)$  (au sens des distributions). La condition initiale est donc vérifiée. Vérifions maintenant que  $\theta_k(t, x)$  est solution de l'équation de la chaleur. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_k}{\partial t}(t, x) &= -\frac{1}{4\sqrt{\pi k}} t^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi k}} t^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{4kt^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi k}} t^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) \left(-1 + \frac{x^2}{2kt}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_k}{\partial x}(t, x) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi k}} t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) \left(\frac{2x}{4kt}\right), \\ \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{1}{4k\sqrt{\pi k}} t^{-\frac{3}{2}} \left(-\exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) + x \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) \left(\frac{2x}{4kt}\right)\right) = \frac{1}{k} \frac{\partial \theta_k}{\partial t}(t, x). \end{aligned}$$

**Proposition 2.2.** La solution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0 & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

est :

$$u(t, x) = u_0(x) * \theta_k(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4kt}\right) u_0(y) dy$$

**preuve 2.2.** On a

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} u(t, x) = u_0(x) * \lim_{t \rightarrow 0_+} \theta_k = u_0 * \delta_0(x) = u_0(x)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= u_0(x) * \frac{\partial \theta_k}{\partial t}(t, x) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &= u_0(x) * \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial x^2}(t, x) = u_0 * \frac{1}{k} \frac{\partial \theta_k}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \end{aligned}$$

Des résultats similaires existent en dimensions supérieures. Pour les domaines bornés, on peut adapter la méthode mais c'est plus délicat. C'est pourquoi on utilise la méthode de séparation des variables [5].

## Les notions de base de problème inverse

### 3.1 Introduction

Dans ce travail nous intéresserons aux problèmes inverses et à leurs applications. Dans un premier temps nous présentons la définition d'un problème inverse ainsi que divers exemples d'applications notamment pour des problèmes thermiques. Dans un second temps nous étudierons les principales difficultés de ce type de problème. Ensuite nous parlons sur la notion de problème bien posé, puis nous déterminons la méthode de régularisation de problème inverse mal posé( La méthode de Tikhonov) et finalement donner des méthodes de résolution d'un problème inverse.

### 3.2 Définition d'un problème inverse

Un problème inverse consiste à déterminer une ou plusieurs causes de ce problème en ayant connaissance des effets. On peut opposer les problèmes inverses aux problèmes directs dans lesquels on cherche une solution à partir de paramètres connus. On différencie les problèmes linéaires où l'on se ramène à la résolution d'équation intégrale de première espèce des problèmes non-linéaires qui interviennent dans les équation aux dérivées partielles. On peut considérer plusieurs types de problèmes inverses non linéaires :

- La reconstitution de l'état passé d'un système à partir de son état actuel.
- L'identification de paramètres qui consiste à déterminer un ou plusieurs paramètres du système en connaissant une partie de son évaluation.

Dans ce travail, nous nous intéresserons à l'identification de paramètres pour l'équation de la chaleur [10].

### 3.3 Problème inverse lineaire

Ce chapitre présente une introduction aux méthodes de régularisation les plus courantes comme la méthode de Tikhonov, bien entendu, il n'est pas possible de reconstituer une information manquante, et la régularisation va conduire à une perte de précision sur la solution, que nous essayerons de quantifier en fonction de l'erreur sur les données. Nous verrons qu'il est possible d'analyser la méthode de Tikhonov dans un cadre (variation) très général.

La principale difficulté dans l'application d'une méthode de régularisation à un problème particulier est la détermination du paramètre de régularisation lui-même. Nous dirons quelque mots sur des solutions possibles. Nous terminerons par quelques mots sur méthodes itératives, en analysant le plus simple entre elles, la méthode de Land weber [13].

### 3.4 Problème inverse non linéaire

Considérons un autre type de problème inverse en thermique le problème consiste à déterminer un paramètre dans l'équation de chaleur (équation parabolique). Ce type de problème est un problème inverse non linéaire (aucun lien avec le type de l'équation aux dérivées partielles), donc sa résolution est plus difficile. Considérons le modèle mathématique suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} (\alpha(u(x, t))) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) & 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < 1, \\ -\alpha(u(0, t)) \frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = p(t) & 0 < t < T, \\ \frac{\partial}{\partial x} u(1, t) = q(t) & 0 < t < T, \\ u(0, t) = g(t) & 0 < t < T, \end{cases}$$

Où  $T$  est une constante positive,  $p$  et  $q$  sont des fonctions connues et continues le problème revient à déterminer  $u(x, t)$  ainsi que  $\alpha(u(x, t))$  qui est une fonction continue et positive (pour les raisons physiques et mathématiques). Pour démontrer l'unicité du couple  $(u, \alpha(u))$ , on doit ajouter une dernière condition (c'est à dire donner les valeurs de  $g(t)$ ). Mais la stabilité n'est pas encore assurée ; ce qui donne le caractère mal posé par ce problème. Les étapes qu'on suit pour sa résolution sont premièrement, on linéarise les termes non-linéaires du problème, puis on discrétise le

problème linéaire avec la méthode des différences finis implicite qui est recommandée pour les EDP de type parabolique. Après ces deux étapes, le problème reste toujours mal posé donc la résolution de celui ci nécessite sa transformation en un problème bien posé ; c'est à dire- qu'il faut le régulariser ici, on utilise la méthode des moindres carrés, enfin la résolution numérique qui donne des solutions approchées [13].

### 3.5 Difficultés des problèmes inverse

On peut citer quatre difficultés pour les problèmes inverse :

- Premièrement, la fonction de coût peut être non convexe. Cela entraîne l'existence de minima locaux. La méthode d'optimisation peut donc converger vers n'importe lequel de ces minima.
- La deuxième difficulté réside dans la quantité de données que l'on peut avoir. En effet, un manque de donnée peut entraîner un problème inverse sous déterminé. Il peut donc y avoir plusieurs solution. C'est à dire plusieurs paramètres produisant les mêmes observation.
- La qualité des données peut également être une difficulté. En effet, les donnée peuvent être bruitées et entraîner un manque de continuité que produit une instabilité. On ne peut donc garantir de réussir à résoudre le problème pour les données fortement bruitées.
- La dernière difficulté réside dans le coût de l'algorithme. Va nous forcer résoudre à chaque itération la fonction d'état, c'est à dire une ou plusieurs équation aux dérivées partielles.

On peut voir les données jouent un rôle essentiel dans les problèmes inverses. Malheureusement, les contraintes réelles telles que le nombre d'instruments de mesure ou précision des mesures entraînent généralement des difficultés dans la résolution du problème [10].

## 3.6 Problèmes bien ou mal posés

Dans un livre célèbre, Hadamard a introduit dès 1923 la notion de problème bien posé [13]. Il s'agit d'un problème dont :

- La solution existe.
- Elle est unique
- Elle dépend continûment des données.

Bien entendu, ces notions doivent être précisées par le choix des espace( et des topologies) dans lesquels les données et la solution évoluent.

Dans ce même livre Hadamard laissait entendre( et c'était une opinion répandue jusqu'à récemment) que seul un problème bien posé pouvait modéliser correctement un phénomène physique. Après tout, ces trois conditions semblent très naturelles. En fait, nous verrons que problèmes inverses ne vérifient souvent pas l'une ou l'autre de ces conditions, voir les trois ensembles. Après réflexion, cela n'est pas si surprenant :

- Un modèle physique étant fixé, les données expérimentales dont on dispose sont en général bruitées, et rien ne garantit que de telles données proviennent de ce modèle, même pour un autre jeu de paramètres.
- Si une solution existe, il est parfaitement concevable( et nous le verrons sur des exemples) que des paramètres différents conduisent aux même observations.
- Le fait que la solution d'un problème inverse puisse ne pas exister n'est pas une difficulté sérieuse. Il est habilement possible de rétablir l'existence en relaxant la notion de solution( procédé classique en mathématique).
- La non -unicité est un problème plus sérieux. Si un problème a plusieurs solution, il faut un moyen de choisir entre elles. Pour cela, il faut disposer d'informations supplémentaires( une information a priori).
- Le manque de continuité est sans doute le plus problématique, en particulier en vue d'une résolution approchée ou numérique. Cela veut dire qu'il ne sera pas possible( indépendamment de la méthode numérique) d'approcher de façon satisfaisante la solution du problème inverse, puisque les données disponibles seront bruitées donc proches. Un problème qui n'est pas bien posé au sens de la définition ci-dessus est dit "mal posé". Nous allons en voir un exemple qui, bien que très simple, les difficultés que l'on peut rencontrer dans des situation plus générales.

## 3.7 Différents problème inverse autour d'équation de la chaleur

### 3.7.1 Reconstitution de l'état passé

On s'intéresse ici à la répartition de la température  $T$  dans un matériau hétérogène occupant un domaine de  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(t, x, y, z) - \operatorname{div}(k \nabla T(t, x, y, z)) = f \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial T}{\partial x} = g \quad \text{sur } \partial\Omega \\ T(0, x, y, z) = T_0(x, y, z) \end{cases}$$

On peut essayer de retrouver la condition initiale  $T_0(x, y, z)$  à partir d'une mesure de  $T$  à un temps donné et on connaissant les paramètres  $\rho, c$  et  $k$  [10].

### 3.7.2 Identification de la conductivité

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(t, x, y, z) - \operatorname{div}(k \nabla T(t, x, y, z)) = f \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial T}{\partial x} = g \quad \text{sur } \partial\Omega \\ T(0, x, y, z) = T_0(x, y, z) \end{cases}$$

Pour l'identification du paramètre  $k$ , on peut par exemple prendre comme : plusieurs mesures de la température à différents moments ainsi qu'en différents points en supposant également que  $\rho$  et  $c$  sont connus [10].

### 3.7.3 Identification des conditions aux bords

Ce problème est celui rencontré par l'entreprise Vallauris. Pour donner une certaine structure à leurs tyaux, il faut le refroidir à une certaine température à un moment donné. On pose donc le système suivant :

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t}(t, x, y, z) - \operatorname{div}(k \nabla T(t, x, y, z)) = f \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial T}{\partial x} = g \text{ sur } \partial\Omega \\ T(0, x, y, z) = T_0(x, y, z) \end{cases}$$

Le but de ce problème inverse est de retrouver les conditions aux bords  $g$  qui sont les conditions de Neumann. L'entreprise connaît les différents paramètres de l'équation d'état :  $\rho$ ,  $c$  et  $k$ , et elle mesure la température en neuf points du tube à différents instants [10].

## 3.8 La méthode de régularisation de problème inverse mal posé

### 3.8.1 La méthode de Tikhonov

Le principe de la régularisation de Tikhonov pour stabiliser le problème inverse mal posé  $kf = g$  est de choisir comme solution l'élément  $f_\alpha$  qui minimise la fonctionnelle

$$|kf - g|^2 + \alpha|f|^2 \quad \alpha > 0$$

L'existence et l'unicité du minimum sont assurées par la coercivité et la stricte convexité de  $f \rightarrow |f|^2$ . Le paramètre  $\alpha$  est appelé paramètre de régularisation et le terme  $|f|^2$  est appelé terme de correction. Le choix du paramètre  $\alpha$  est basé sur un critère d'équation entre l'erreur due au terme de correction et le gain de la stabilité [11].

## 3.9 Méthodes de résolution d'un problème inverse

Pour la détermination des propriétés Thermo-physiques, différentes techniques et méthodes de mesures ont été utilisées. Nous avons résumé ici les principales méthodes [12].

### 3.9.1 Méthodes fréquentielles

Les premières investigations sur les phénomènes thermiques furent celles de A. G. Bell en 1881 qui analysa les phénomènes photo-acoustiques engendrés par l'excitation d'un échantillon par détermination de la conductivité et de la diffusivité thermique. La diffusivité thermique qui caractérise l'aptitude d'un matériau à diffuser la chaleur, reste une propriété intervenant dans tous les processus de transfert

de chaleur en régime non-stationnaire. C'est à dire pour lesquels la température varie avec le temps. La connaissance de ce paramètre est essentielle pour résoudre de nombreux problèmes de transfert thermique.

### 3.9.2 Méthode du fil chaud

Dans les années 1930. B. Satane et S. PyK développent la méthode du fil chaud pour estimer la conductivité thermique. La thermique permet d'identifier directement la conductivité thermique à partir du comportement asymptotique de l'évolution de la température du fil chaud aux temps longs et du formalisme quadripolaire. Le principe de la méthode du fil chaud est le suivant : on dispose un fil résistif sur l'axe d'un échantillon cylindrique de grande longueur et d'extension radiale supposée infinie. L'échantillon, initialement isotherme, est soumis à un flux en créneau, délivré sous forme d'effet joule par le fil résistif. Si le fil est supposé infiniment long et de rayon réglable, le transfert radial et la conductivité thermique peut être identifiée à partir de l'évolution de température en un point donné.

### 3.9.3 Méthode du plan chaud

La méthode du plan chaud est une extension de la méthode du fil chaud à une géométrie plane. Elle permet d'identifier la diffusivité thermique du matériau. Le principe est suivant :

un flux de chaleur uniforme est imposé à l'interface de deux échantillons symétriques de section quelconque et d'extension infinie dans la direction perpendiculaire à l'interface. Ceci est réalisé par la mise en place d'un élément chauffant mince occupant toute la section de l'interface. Les échantillons sont assimilables à un milieu infini si le rapport de leur longueur à l'épaisseur de l'élément chauffant est supérieur à 20. Par ailleurs, les faces latérales des deux échantillons sont isolées et le transfert peut être considéré comme unidirectionnel. La réponse en température au cours du temps est mesurée dans le plan du chauffage par un thermocouple. Le comportement asymptotique aux temps longs, du thermogramme ainsi obtenu, est proportionnel à la racine carrée du temps, le coefficient de proportionnalité étant directement lié à l'effusivité des échantillons. Le comportement aux temps courts est influencé par l'inertie thermique de la sonde (élément chauffant + thermocouple) et par la résistance de contact sonde milieu. Cette méthode permet de mesurer la diffusivité thermique avec une précision de l'ordre de peu que l'intervalle de temps sur lequel est réalisée

l'identification soit correctement choisi de sorte que puissent être négligés les effets inertiels de la sonde aux temps courts et les éventuelles pertes thermiques aux temps longs.

### 3.9.4 Méthodes non-stationnaires

Les travaux de Bell ont été repris en 1961 par Kern en mettant au point la méthode flash. La méthode flash dans son principe, est une technique provisionnelle qui consiste à soumettre la face avant d'un échantillon plan à une impulsion de flux de chaleur de courte durée et à observer l'évolution temporelle de la température en un ou plusieurs points de la face arrière de l'échantillon. Outre l'identification de la diffusivité thermique, elle permet d'accéder indirectement à la conductivité thermique lorsque la capacité massique et la masse volumique sont connues. Les méthodes d'estimation de paramètres liées à la méthode flash sont présentées ci après :

1. Estimation à partir de quelques points du thermographie (méthode des temps partiels).
2. Somme pondérée du thermographie (méthode des moments temporels partiels).
3. Méthode itérative visant à minimisation l'écart quadratique moyen entre théorie et expérience. On va utiliser la méthode flash pour obtenir les profils de la température des différents matériaux exposés un flux thermique et on utilise la troisième méthode pour estimer les fonctions de flux de chaleur.

## La méthode de l'état adjoint.

### 4.1 Introduction

Le troisième chapitre est consacré à la méthode de l'état adjoint. Dans ce chapitre nous allons présenter l'équation adjoint, après nous allons présenter les méthodes d'évaluation du gradient et donner des exemples de calcul de gradient précisément l'équation de la chaleur.

Dans toutes les applications que nous considérerons par la suite, ces espaces seront tous de dimension finie. Il nous paraît toutefois utile de donner les définitions dans ce cadre plus général.

- espace des modèles( ou paramètres)  $M$ .
- l'espace d'état  $U$ .
- l'espace des données( ou observations)  $D$ .

Introduction de l'espace  $U$  permet de rendre explicite la dépendance entre le paramètre et les données. Par contre, existence de l'état ne dispense pas introduire observation, puisqu'il est en général non mesurable.

**L'équation d'état** : relie de façon implicite le paramètre et l'état. Nous l'écrivons

$$F(a, u) = 0 \quad a \in M, u \in U, F(a, u) \in Z \quad (4.1)$$

où  $Z$  est un autre espace de Hilbert,  $F$  définit localement un état unique  $u = u_a$ .

**L'équation d'observation** : extrait de l'état la partie correspondant aux mesures. Ce la sera souvent une injection, rarement l'identité( sauf dans des exemples pure-

ment pédagogiques). Elle s'écrit :

$$d = Hu \quad u \in U \quad (4.2)$$

On fait l'hypothèse simplificatrice que l'observation est un opérateur linéaire, indépendant du paramètre. Si nous injectons la solution de (4.1) dans (4.2), on obtient une application qui relie le paramètre à l'observation. On la note

$$\Phi(a) = d = H(u_a) \quad (4.3)$$

Le problème inverse est alors, étant donnée une observation  $d_{obs}$ , de résoudre l'équation :

$$\Phi(a) = d_{obs} \quad (4.4)$$

## 4.2 Définition :

Soit la fonction de type

$$J(a) = \frac{1}{2} \| \Phi(a) - d_{obs} \|_D^2 \quad (4.5)$$

$$\nabla J(a) = - (\partial_a F(a, u))^* \left( (\partial_u F(a, u))^* \right)^{-1} (H^* (Hu(a) - d_{obs})) \quad (4.6)$$

( la notation  $*$  représente s'inverse de l'adjoint), Il est commode de donner un nom à la quantité à l'intérieur de la seconde parenthèse, et introduire le vecteur  $p$  solution de :

$$\partial_u F(a, u)^* p = -H^* (Hu(a) - d_{obs}) \quad (4.7)$$

On appelle cette équation l'équation adjointe, et  $p$  est l'état adjoint. Une fois cette équation résolue, le gradient se calcule alors par :

$$\nabla J(a) = \partial_a F(a, u)^* p \quad (4.8)$$

Alors Si  $p$  est la solution de l'équation adjointe (4.7), le gradient de  $J$  au point  $a$  est donné par (4.8) où  $u = u(a)$  est la solution de l'équation d'état (4.1) correspondant à  $a$  [13].

## 4.3 Méthodes d'évaluation du gradient :

### 4.3.1 Méthode de l'état adjoint cas linéaire discrétisé

On considère des fonctions  $\mathfrak{S} : p \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathfrak{S}(p) \in \mathbb{R}$   
 $\mathfrak{S}(p)$  dépend de  $p$  à travers la solution  $U(p)$  du problème direct

$$\mathfrak{S}(p) = J(U(p), p)$$

Le problème direct linéaire

$$K(p)U = F(p)$$

L'évaluation de  $\mathfrak{S}$  par dérivation directe : demande  $n + 1$  calculs directs

$$\mathfrak{S}'(p) = J'_1(U(p), p)U'(p) + J'_2(U(p), p)$$

On remplace le calcul des  $n$  solutions dérivées  $\frac{\partial U}{\partial p_i}$  par le calcul d'un état adjoint  $\tilde{U}$  unique tq :

$$K^T \tilde{U} + [J'_1(U, p)]^T = 0$$

Exploitation de la réciprocité entre problèmes dérivée et adjoint :

$$\begin{cases} \tilde{U}(KU'(p) + K'(p) - F'(p)) = 0 \\ (U'(p))^T(K^T \tilde{U} + [J'_1(U, p)]) = 0 \end{cases}$$

$$\implies \tilde{U}^T [K'(p)U - F'(p)] = J'_1(U, p)U'(p)$$

alors :

$$\mathfrak{S}'(p) = \tilde{U}^T [K'(p)U - F'(p)] + J'_2(U(p), p)$$

#### Remarques

- L'état adjoint  $\tilde{U}$  ne dépend que de l'état courant  $U(p)$ .
- Quel que soit le nombre  $n$  de paramètres inconnus : Équation directe donne  $\mathfrak{S}$ ; Équation adjointe donne  $\mathfrak{S}'$ .
- Équation adjointe : matrice transposée  $K^T \rightarrow$  Factorisation de  $K$  réutilisable.

Pour plus de détails voir [14].

### 4.3.2 Méthode de l'état adjoint cas linéaire continu

**Exemple : problème inverse en élasticité linéaire statique**

Structure  $\Omega$  : matériau élastique linéaire, tenseur d'élasticité de référence (ex. matériau sain)  $C_0$ , champ de tenseur d'élasticité réel (ex. dû à endommagement)  $C(x)$  inconnu.

$$\sigma(x) = C(x) : \varepsilon(x)$$

Problème : reconstruire  $C(x)$  inconnu à partir de données aux limites surabondantes

$$\begin{cases} \operatorname{div}(C : \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ C_0 : \varepsilon[u].n = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \\ u = \xi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

problème direct, solution  $u_C$ .

$$\mathfrak{S}(C) = J(u_C; C)$$

$$J(v, C) = \int_{\Omega} j_{\Omega}(v, C) dV + \int_{\partial\Omega} j_{\partial\Omega}(v, C) dS$$

donc par des calculs on aura :

$$\langle \mathfrak{S}', D \rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial j_{\Omega}}{\partial C} : D dV + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial j_{\partial\Omega}}{\partial C} : D dS + \int_{\Omega} \nabla u : D : \nabla w dV.$$

ou  $u$  et  $w$  solutions de problèmes d'élasticité classiques [14].

### 4.3.3 Méthode de l'état adjoint cas incrémental discrétisé

problème incrémental en temps discret de la forme :

$$R_k(U_k; U_{k-1}, p) = 0$$

$U_0$  donnée, alors le gradient de la fonction coût :

$$\mathfrak{S}'(p) = \sum_{k=1}^N \tilde{U}_k^T \partial_p R_k(U_k; U_{k-1}, p)$$

où  $U_k$  est la solution directe et  $\tilde{U}_k$  la solution adjointe [14].

Principales caractéristiques de la méthode de l'état adjoint :

- Exploite un raccourci( calcul de l'état adjoint) permettant d'éviter complètement le calcul de  $U_0(p)$ .
- Efficacité optimale pour évaluer  $\mathfrak{S}'$
- Non adaptée à l'évaluation de matrices jacobiniennes( pour Gauss-Newton ou Marquardt-Levenberg).

## 4.4 Exemple de calcul de gradient :

### 4.4.1 Équation elliptique en dimension 1

Rappelons que l'équation d'état est un problème aux limites en dimension 1 :

$$\begin{cases} -bu''(x) + cu'(x) = f(x), x \in ]0, 1[ \\ u(0) = 0, u'(1) = 0 \end{cases}$$

#### La fonction de coût

$$J_1(b, c) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u(x) - d_{obs}|^2 dx$$

Observation sur tout  $[0, 1]$ .

$$J_2(b, c) = \frac{1}{2} |u(1) - d_{obs}(1)|^2$$

Observation de  $u$  sur adroit de  $[0, 1]$ .

$$J_3(b, c) = \frac{1}{2} |u(1) - d_{obs}(\frac{1}{2})|^2 + \frac{1}{2} |u(1) - d_{obs}(1)|^2$$

Si on mesure sur deux points.

## L'équation variationnelle

On multiplie l'équation par  $s$  avec

$$s \in H^1(0, 1), s(0) = 0$$

Et fait une intégration par partie on trouve :

$$\int_0^1 bu'(x)s'(x) + cu'(x)s(x)dx = \int_0^1 f(x)s(x)dx$$

On utilise Lax-Milgram pour l'unicité et l'existence si  $b$  et  $c$  strictement positif.

## Calcul de gradient

Cas [1] :

$$J_1(b, c) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u(x) - d_{obs}(x)|^2 dx$$

On effectue un développement de Taylor au premier ordre de  $J_1$  par rapport à  $b$  et  $c$

$$J_1(b + \delta b, c + \delta c) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u(x) + \delta u(x) - d_{obs}|^2 = J_1(b, c) + \int_0^1 |u(x) - d_{obs}| \delta d(x)$$

On pose

$$v = \frac{\partial u}{\partial b}, w = \frac{\partial u}{\partial c}$$

On trouve :

$$(02) \begin{cases} -bv''(x) + cv'(x) = u'', x \in ]0, 1[ \\ v(0) = v'(1) = 0 \\ -bw''(x) + cw'(x) = -u', x \in ]0, 1[ \\ w(0) = w'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\delta u = v\delta b + w\delta c$$

On déduit

$$J'_1(b, c) \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \int_0^1 (u(x) - d_{obs})v(x)dx \delta b + \int_0^1 (u(x) - d_{obs})w(x)dx \delta c$$

Donc

$$\nabla J_1(b, c) = \begin{pmatrix} \int_0^1 (u(x) - d_{obs})v(x)dx \\ \int_0^1 (u(x) - d_{obs})w(x)dx \end{pmatrix}$$

Avec

$w, v$  solution de (02)

Cas [2] :

$$\nabla J_2(b, c) = \begin{pmatrix} (u(1) - d_{obs})v(1) \\ (u(1) - d_{obs})w(1) \end{pmatrix}$$

Cas [3] :

$$\nabla J_3(b, c) = \begin{pmatrix} (u(\frac{1}{2}) - d_{obs})v(\frac{1}{2}) + (u(1) - d_{obs})v(1) \\ (u(\frac{1}{2}) - d_{obs})w(\frac{1}{2}) + (u(1) - d_{obs})w(1) \end{pmatrix}$$

## L'état adjoint

Lagrangien, défini dans le cas de  $J_1$  par :

$$L((b, c), u, p) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u(x) - d_{obs}|^2 dx + \int_0^1 (bu''(x) + cu'(x) - f(x))p(x)dx \quad p \in H_0^1((0, 1))$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{\partial L}{\partial b} + \frac{\partial L}{\partial u}v = \int_0^1 u'(x)p'(x)dx + \int_0^1 (u(x) - d_{obs})v(x)dx + \int_0^1 bv'(x)p'(x)dx + cv'(x)p(x)dx$$

$v$  est la solution de (2)

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{\partial L}{\partial c} + \frac{\partial L}{\partial u}w = \int_0^1 u'(x)p(x)dx + \int_0^1 (u(x) - d_{obs})wdx + \int_0^1 bw'(x)p'(x) + cw'(x)p(x)dx$$

$w$  est un solution de (2)

Si on peut choisir  $p$  tq :

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0$$

alors

$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{\partial L}{\partial b} = \int_0^1 u'p'(x)dx$$

Le choix de  $p$

$$\frac{\partial L}{\partial u} s = 0 \iff \int_0^1 (u(x) - d_{obs})s(x) + \int_0^1 bs'(x)p'(x) + \int_0^1 cs'(x)p(x)dx = 0 \quad \forall s \in H_0^1 \iff$$

$$\begin{cases} -bp''(x) - cp'(x) = -(u(x) - d_{obs}) \\ p(0) = 0, bp'(x) + cp(1) = 0 \end{cases}$$

L'équation adjoint de [1] on peut trouver aussi que :

$$\frac{\partial J}{\partial c} = \frac{\partial L}{\partial c} = \int_0^1 c'p(x)dx$$

\*Dans le cas [2] : l'équation adjoint

$$\begin{cases} -bp''(x) - cp'(x) = 0, & x \in ]0, 1[ \\ p(0) = 0, bp'(1) + cp'(1) + cp(1) = -(u(1) - d_{obs}(1)) \end{cases}$$

\*Dans le cas [3] :

$$\begin{cases} -bp''(x) - cp'(x) = -(u(\frac{1}{2})) - d_{obs}(\frac{1}{2})\delta(x - \frac{1}{2}), & x \in ]0, 1[ \\ p(0) = 0, bp'(1) + cp(1) = -(u(1) - d_{obs}(1)) \end{cases}$$

## 4.4.2 Équation elliptique en dimension 2

Soit  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ , nous considérons le problème :

$$(*) \begin{cases} -div(a\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ a \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

tq :

$\Gamma_D$  et  $\Gamma_N \subset \partial\Omega$ ,  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\Gamma_N)$ .

### La fonction de coût

$$J(a) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} |u_{a|\Gamma_N} - d_{obs}(x)|^2 d\gamma(x)$$

Formulation variationnelle de ce problème est :

$$\int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx + \int_{\Gamma_N} g(x) v(x) d\gamma(x). \quad \forall v \in U$$

D'après théoreme de Lax Milgram le problem (\*) admet un unique solution  $U$ .  
 $U = \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ .

-Nous approchons l'équation d'état par la méthode d'élément fini. On va approcher  $U$  par  $U_h$ .

$U_h = \{u_h \in C^0(\Omega), u_{h|K} \in \mathbb{P}^1, \forall K \in T_h, u_h = 0 \text{ sur } \Gamma_D\} \subset U$ .

Où  $T_h$  un triangulation régulière, de plus on approche  $a$  par  $a_h$  et  $d_{obs}$  par  $d_h$ .

-Après la discrétisation le problème(\*) se ramené à un système linéaire

$$F(a, u_h) = K(a)u_h - L = 0$$

où le vecteur inconnu  $u_h$ , la matrice de rigidité  $K(a)$  et le second membre  $L$  sont définis de la façon suivante :

pour  $K(a)$  : la matrice  $K(a)$  peut-être définie implicitement par l'égalité :

$$\begin{aligned} \forall (u_h, v_h) \in U_h, v_h^t K(a) u_h &= \int_{\Omega} a_h(x) \nabla u_h(x) \nabla v_h(x) dx \\ &= \sum_{T \in T_h} a_T \int_T \nabla u_h(x) \nabla v_h(x) dx \end{aligned}$$

Pour  $L$  : le second membre se calcule également par assemblage à partir de l'égalité :

$$\forall v_h \in U_h, v_h^t L = \int_{\Omega} f(x) v_h(x) dx + \int_{\Gamma_N} g(x) v_h(x) d\delta(x)$$

-passons maintenant a l'observation : l'opérateur d'observation représente par un matrice  $H \in R^{N_h \times N_T}$  définie par :

$$d_h^t(Hu_h) = \int_{\Gamma_N} u_h(x)d_h(x)d\gamma(x). \quad \forall u_h \in U_h \text{ et } d_h \in D_h$$

Et

$$\begin{aligned} J(a_h) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_N} |u_h(a_h)(x) - d_h(x)|^2 d\gamma(x) \\ &= \frac{1}{2} (Hu_h(a_h) - d_h)^t M (Hu_h(a_h) - d_h) \end{aligned}$$

Où la matrice  $M$  est définie par :

$$\forall (d_h, e_h) \in D_h \quad e_h^t M d_h = \int_{\Gamma_N} d_h e_h d\gamma(x)$$

Il est pratique de repartir de la définition variationnelle de  $K(a_h)$  :

$$v_h^t (K'(a_h) \delta a_h) u_h = \sum_{T \in \mathfrak{S}_h} \delta a_T \int_T \nabla u_h(x) \nabla v_h(x) dx$$

L'équation adjoint s'écrit par :

$$K(a_h)^t p_h = -H^t (Hu_h - d_h)$$

Où  $u_h$  est solution de l'équation d'état, et le gradient s'en déduit alors par :

$$\begin{aligned} \delta a_h^t \nabla J(a_h) &= \delta a_h^t \partial_{a_h} F(a_h, u_h)^t p_h \\ &= p_h^t \partial_{a_h} F(a_h, u_h) \delta a_h \\ &= p_h^t (K^t(a_h) \delta a_h) u_h \\ &= \sum_{T \in \mathfrak{S}_h} \delta a_T \int_T \nabla u_h(x) \nabla p_h(x) dx \end{aligned}$$

Les dérivées partielles de  $J$  sont données par :

$$\frac{\partial J}{\partial a_T} = \int_T \nabla u_h(x) \nabla p_h(x) dx = |T| (\nabla u_h \nabla p_h)|_T$$

Puisque les gradients sont constants sur chaque triangle du maillage.

L'équation variationnelle :

$$\int_{\Omega} a_h(x) \nabla v_h(x) \nabla p_h(x) dx = \int_{\Gamma_N} (H u_h(x) - d_h(x)) v_h(x) d\gamma(x), \forall v_h \in U_h$$

Il est facile de se convaincre que cette dernière équation est une formulation variationnelle discrétisée de l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a \nabla p) = 0 & \text{dans } \Omega \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ a \frac{\partial p}{\partial n} = d_{obs} - u & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

### 4.4.3 Équation de la chaleur

Dans ce exemple nous considérons une discrétisons de l'équation de la chaleur par éléments finis en espace et différences finies en temps. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $T > 0$ . Nous considérons le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(a \nabla u) = f & \text{sur } \Omega \times ]0, T[ \\ u(x; t) = 0 & \text{sur } \Gamma_D \times ]0, T[ \\ a \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_N \times ]0, T[ \\ u(x; 0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (4.9)$$

Où  $f \in (0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))$ ,  $g \in (0, T; \mathbb{L}^2(\Gamma_N))$  et  $u_0 \in \mathbb{L}^2(\Omega)$  sont des fonctions données.

### La fonction de coût

$$J(a) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_N} |u - d_N|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x; T) - d_T|^2 dx \quad (4.10)$$

Avec  $d_N \in \mathbb{L}^2(0; T; \Gamma_N)$  et  $d_T \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ .

## La formulation faible

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in L^2(0, T; V) \cap C^0(0, T; H) \text{ tel que} \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t)v + \int_{\Omega} a \nabla u(t) \nabla v = \int_{\Omega} f(t)v + \int_{\Gamma_N} g(t)v. \quad \forall v \in V, P.P. \text{ sur } ]0, T[ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Avec  $H = L^2(\Omega)$  et  $V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$

## Le problème direct

Premièrement, on va faire une discrétisation en temps, pour une partition  $0 = t^0 < t^1 \dots < t^K = T$ ,  $\Delta t^{\frac{k+1}{2}} = t^{k+1} - t^k$ , donc la solution de (4.9) deviennent de plus en plus régulières au cours du temps, d'autre part nous posons que :

$$u_h^{\frac{k+1}{2}} = \frac{u_h^k - u_h^{k+1}}{2}; \quad k = 0, \dots, K-1.$$

Avec ces notations, le problème direct est :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u_h = (u_h^0, u_h^1, \dots, u_h^K) \in U_h^{K+1}, \text{ tel que pour tout } v_h \in U_h \\ I_{\Omega}^h \left( \frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t^{\frac{k+1}{2}}} v_h \right) + I_{\Omega}^h \left( a_h \nabla u_h^{\frac{k+1}{2}} \nabla v_h \right) = I_{\Omega}^h \left( f_h^{\frac{k+1}{2}} v_h \right) + I_{\Gamma_N}^h \left( g_h^{\frac{k+1}{2}} v_h \right) \\ I_{\Omega}^h (u_h^0 v_h) = I_{\Omega}^h (u_0 v_h), \quad \forall v_h \in U_h \end{cases} \quad (4.12)$$

où  $f_h^{\frac{k+1}{2}}$  et  $g_h^{\frac{k+1}{2}}$  sont des approximations de  $f_h$  et  $g_h$  à l'instant  $t^{\frac{k+1}{2}}$ .

## Le lagrangien

$$\begin{aligned}
 L_h(a_h, u_h, p_h) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{K-1} I_{\Omega}^h \left\{ \frac{1}{2} (|u_h^k - d_h^k|^2 + |u_h^{k+1} - d_h^{k+1}|^2) \right\} \Delta t^{\frac{k+1}{2}} + \frac{1}{2} I_{\Gamma_N}^h (|u_h^K - d_T|^2) \\
 &+ \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ I_{\Omega}^h \left( \frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\Delta t^{\frac{k+1}{2}}} p_h^{\frac{k+1}{2}} \right) + I_{\Gamma_N}^h (a_h \nabla u_h^{\frac{k+1}{2}} \nabla p_h^{\frac{k+1}{2}}) \right\} \Delta t^{\frac{k+1}{2}} \\
 &- \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ I_{\Omega}^h (f_h^{\frac{k+1}{2}} p_h^{\frac{k+1}{2}}) \right\} + I_{\Gamma_N}^h (g_h^{\frac{k+1}{2}} p_h^{\frac{k+1}{2}}) \Delta t^{\frac{k+1}{2}}
 \end{aligned}$$

## L'équation adjointe

Nous noterons  $p_h = (p_h^{\frac{1}{2}}, \dots, p_h^{\frac{K-1}{2}})$  le multiplicateur. L'équation adjointe est :

$$\frac{\partial L_h}{\partial u_h} \delta u_h = 0, \quad \forall \delta u_h = (0, \delta u_h^1, \dots, \delta u_h^K) \in U_h^{K+1} \quad (4.13)$$

Nous obtenons donc, pour  $\delta u_h \in U_h^{K+1}$  :

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^K \frac{1}{2} I_{\Omega}^h \{ (u_h^k - d_h^k) \delta u_h^k + (u_h^{k+1} - d_h^{k+1}) \delta u_h^{k+1} \} \Delta t^{k+1/2} + I_{\Gamma_N}^h ((u_h^K - d_T) \delta u_h^K) \\
 &+ \sum_{k=0}^{k-1} \left\{ I_{\Omega}^h \left( \frac{\delta u_h^{k+1} - \delta u_h^k}{\Delta t^{k+1/2}} p_h^{k+1/2} \right) + I_{\Omega}^h (a_h \nabla \delta u_h^{k+1/2} \nabla p_h^{k+1/2}) \right\} \Delta t^{k+1/2} = 0
 \end{aligned}$$

Nous pratiquons ensuite une intégration par parties discrète, c'est-à-dire un décalage d'indices, de façon à faire apparaître  $\delta u_h^k$  en facteur. L'équation (4.13) précédente devient

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^K \frac{1}{2} I_{\Omega}^h \{ (u_h^k - d_h^k) \delta u_h^k + (u_h^{k+1} - d_h^{k+1}) \delta u_h^{k+1} \} \Delta t^{k+1/2} + I_{\Gamma_N}^h ((u_h^K - d_T) \delta u_h^K) \\
 &+ \sum_{k=0}^K I_{\Omega}^h (\delta u_h^k p_h^{k-1/2}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K I_{\Omega}^h (a_h \nabla \delta u_h^k \nabla p_h^{k-1/2}) \Delta t^{k-1/2} \\
 &- \sum_{k=0}^{K-1} I_{\Omega}^h (\delta u_h^k p_h^{k+1/2}) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{K-1} I_{\Omega}^h (a_h \nabla \delta u_h^k \nabla p_h^{k+1/2}) \Delta t^{k+1/2} = 0
 \end{aligned}$$

Choisissons donc  $\delta u_h = (0, \dots, v_h, \dots, 0)$  et pour  $k = 1, \dots, K - 1$ . Alors  $\Delta t^k = \frac{1}{2}(\Delta t^{k-1/2} + \Delta t^{k+1/2})$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta t^k I_{\Gamma_N}^h(u_h - d_h) + I_{\Omega}^h(v_h p_h^{k+1/2}) - I_{\Omega}^h(v_h p_h^{k-1/2}) + \frac{\Delta t^{k+1/2}}{2} I_{\Omega}^h(a_h \nabla v_h p_h^{k+1/2}) \\ + \frac{\Delta t^{k-1/2}}{2} I_{\Omega}^h(a_h \nabla v_h p_h^{k-1/2}) = 0 \end{aligned}$$

D'après (4.12), nous obtenons

$$\begin{aligned} I_{\Omega}^h\left(\frac{p_h^{k-1/2} - p_h^{k+1/2}}{\Delta t^k} v_h\right) + I_{\Omega}^h\left\{a_h \left(\frac{\Delta t^{k-1/2}}{2\Delta t^k} \nabla p_h^{k-1/2} + \frac{\Delta t^{k+1/2}}{2\Delta t^k} \nabla p_h^{k+1/2}\right) \nabla v_h\right\} \\ = -I_{\Gamma_N}^h((u_h^k - d_h^k)v_h), \forall v_h \in U_h \end{aligned}$$

Il reste un degré de liberté : choisissons  $\delta u_h = (0, \dots, v_h)$  alors :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t^{K-1/2}}{2} I_{\Gamma_N}^h((u_h^K - d_h^K)v_h) + I_{\Omega}^h((u_h^K - d_T)v_h) \\ + I_{\Omega}^h(v_h p_h^{K-1/2}) + \frac{1}{2} I_{\Omega}^h(a_h \nabla v_h p_h^{K-1/2}) = 0 \end{aligned}$$

## L'état adjoint

L'équation précédent, y compris la condition finale ci-dessus, correspond à une discrétisation ( consistante) de l'équation de la chaleur rétrograde :

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(a \nabla p) = 0 & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_D \times ]0, T[ \\ a \frac{\partial p}{\partial t} = -(u - d_N) & \text{sur } \Gamma_N \times ]0, T[ \\ p(x, T) = -(u(x, T) - d_T) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

## Le gradient

Nous pouvons enfin calculer le gradient de  $J_h$  :

$$\delta J_h = \frac{\partial L}{\partial a_h} = \sum_{k=0}^{K-1} I_{\Omega}^h \left( \delta a_h \nabla u_h^{k+1/2} \nabla p_h^{k+1/2} \right) \Delta t^{k+1/2} \quad (4.14)$$

Ce qui donne, en revenant à la définition de  $I_\Omega^h$ , la dérivée partielle par rapport aux éléments de  $a_h$  :

$$\frac{\partial J_h}{\partial a_T} = |K| \sum_{k=0}^{K-1} \Delta t^{k+1/2} \left( \nabla u_{h|T}^k + \nabla u_{h|T}^{k+1} \right) \nabla p_{h|T}^{k+1/2} \quad (4.15)$$

## Conclusion

L'objectif principale que nous nous sommes fixé dans cette étude est la mise en oeuvre d'une méthode de l'état adjoint pour résoudre un problème inverse en transfert de chaleur.

Par ailleurs la complexité de ce type des problèmes nécessite l'utilisation des méthodes de régularisation pour aider à la résolution, en effet le sujet traité nous a permis d'appliquer la méthode de l'état adjoint sur quelques exemples de problèmes inverses stationnaires qui ont validé la performance de la méthode pour l'estimation des paramètres .

Enfin, l'étude de cette méthode nous permet de définir les paramètres inconnus. Quant on peut appliquer cette méthode en médecine pour savoir les causes des maladies nouvelles . Et devant l'importance de ce sujet d'avenir qui représente une introduction aux problèmes inverses en transfert de chaleur nous espérons ouvrir une porte à d'autres études plus détaillées.

## Bibliographie

- [1] <https://fr.m.wikibooks.org>.
- [2] <https://fr.m.wikipedia.org>.
- [3] Peter Sturm, Outils mathématique-Optimisation, INRIA Rhône-Alpes, Projet MOVI, <http://www.inrialpes.fr/movi/people/Sturm>.
- [4] Teniou Nihed, L'étude d'une classe de problèmes mal posés, Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat en sciences, Université Mentouri - Constantine, 3 juillet 2012.
- [5] Aude Rondepierre et Adeline Rouchon, Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles, Étude théorique, 2ème année IC Département STPI, Année 2012-2013.
- [6] Sophie Mergui, TRANSFERTS THERMIQUES, LICENCE DE MECANIQUE 2EME ANNEE MODULE 2A101, Université de SORBONNE.
- [7] P.Y. Lagrée, Equation de la Chaleur, version 13 mars 2010, Consulter : <http://www.lmm.jussieu.fr/lagree/COURS/MECAVENIR> le cours complet de thermique de P.-Y. Lagrée.
- [8] Eric Goncalvès da Silva. Méthodes et Analyse Numériques. Engineering school. Institut Polytechnique de Grenoble, 2007, pp.99. [cel-00556967](https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00556967). <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00556967>, HAL 18 Jan 2011.
- [9] Guy-Laurent LAGIER, APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS DE FRONTIERE A LA RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE DE CONDUCTION DE LA CHALEUR MULTIDIMENSIONNEL : REGULARISATION PAR TRONCATURE DE SPECTRE, Ins-

- titut National Polytechnique de Grenoble Ecole Doctorale de Mécanique et Energétique, 9 Novembre 1999.
- [10] Cédric Marinel, Résolution de problèmes inverses en thermique, Master 1 Mathématiques Calcul Haute Performance Simulation, Université de Lille, 14 mai 2018.
- [11] C.CHARLES, INTRODUCTION AUX PROBLÈMES INVERSEES, Notes des Statistique et d'informatique 2014/1, Université de Liège – Gembloux Agro-Bio Tech, Unité de Statistique, Informatique et Mathématique appliquées à la bioingénierie GEMBLOUX( Belgique).
- [12] BOULAADJOUL Younes, ESTIMATION DE FONCTIONS EN CONDUCTION INVERSE, Universite MHAMED BOUGARA Boumerdes, Departement Energetique, Boumerdes2011.
- [13] Michel Kern.Problèmes inverses :aspects numériques.Engineering school.1999 à 2002, Écolesupérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, 2002, pp.138. cel-00168393v2, Michel kern@inria.fr.
- [14] – Marc Bonnet, Identification et inversion, Unité de Mathématiques Appliquées POems, UMR 7231 CNRS-INRIA-ENSTAENSTA, PARIS, France, Master DSMSC, 2014\_2015.  
– [www.ensta.fr/mbonnet/index/enseignement.html](http://www.ensta.fr/mbonnet/index/enseignement.html).
- [15] DIDIER AUROUX, PROBLÈMES INVERSEES POUR L'ENVIRONNEMENT, M2 MATHÉMATIQUES, Université de NICE SOPHIA ANTIPOLIS, 2010-2011.

## Abstract

Problems of transmission of energy, and in particular heat, have had decisive importance for the study.

The objective of this master thesis is the implementation of the adjoint state method to solve an inverse problem in heat transfer, and to estimate some parameters. Inverse problems are the searches to determine the causes of a phenomenon based on observation of its effects. The complexity of this type of resolution lies in the difficulty of having a good knowledge of the direct problem as well as in the uncertainty of system parameters.

Some techniques, such as the regularization of ill-posed problems, have been put in place to help solve such problems, whether linear or not.

Faced with the various inverse problems, we have to apply the method of the adjoint state on certain stationary and instationary 1D and 2D problems which allows to validate the method and to treat some examples which are cited in the last chapter.