

REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET
Faculté des Mathématiques et Informatique
Département de Mathématiques



Spécialité : Mathématiques

DOMAINE : Mathématiques et Informatique

FILIERE : Mathématiques

SPCIALITE : Analyse Fonctionnelle et Equations Différentielles

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPÔLME DE MASTER

Sujet de mémoire

*Établissement d'un Schéma de type Volumes Finis d'ordre deux pour un
Maillage de type Zohour.*

Présenté par

*Benzahia Habiba

*Rahabi Faten Hamama

*Boulabbes Kheira

Soutenue le 14/10/2020 devant le Jury composé de

*M.Laarabi Abderahman	MCA	Président
*M.Maazouz Kadda	MCB	Examinateur
*M.Sabit Souhila	MCB	Encadreur

Année Universitaire : 2019 \ 2020



Remerciements



En premier lieu, je remercie ALLAH, le tout puissant, qui m'a donné durant toutes ces années la santé, le courage et la volonté pour réaliser ce travail.

J'exprime ma profonde gratitude à Madame Sabit Souhila qui m'a encadré, tout le long de ce mémoire.

Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour son aide consistante, ses conseils précieux et ses remarques objectives. C'est grâce à vous que ce travail a pris cette forme

Je tiens aussi à remercier tout enseignant respectable qui m'a aidé de près ou de loin.

Que soient ,enfin, je tiens à rendre hommage à mes **parents** et à ma famille qui m'ont soutenus et encouragés, je tiens aussi à remercier tous ceux et celles qui de près ou de loin ont comtribué à l'accomplissement de ce travail

Je considère ce mémoire le fruit de cinq ans de travail et déffort, j'espère qu'il vous présente une petite récompense.

Merci pour tout ce que vous m'avez donné : le respect, la joie...

 *Dédicace* 

Rien n'est aussi beau à offrir que le fruit d'un labeur qu'on dédie du fond du coeur à ceux qu'on aime et qu'on remercie en exprimant la gratitude et la reconnaissance durant toute notre existence.

Je dédie ce travail à :

*Mes chers parents "**B.Ahmed , Mhaya Mebarka**" ont sacrifiés leurs vies pour notre bien.*

*Mes frères "**Djamel, Hamza**" et mes soeurs "**Fatiha, Denia, Aicha, Wafa, Rebaiha, Bouchra et Meriem**" et mes chères nièces "**Ahmed, Haytham, Kawthar, Mehammed, Issa, Takwa, Iyad, Safia**".*

*Toute ma famille surtout "**C.Fatiha, B.Asma, M.Rabeh, Z.Djamel, B.Lakhder, M.khadour, Z.khatir, M.Hadjer, M.Chaima, M.Zineb, M.Djamel, B.Aya, B.Israe, B.Asma, M.Ahmed, M,Ibrahim**" et grande mère "**lhaja Denia**" et mon oncle "**Blaid**" et mes amis "**A.Sara, R.Faten Hamama, A.Soumia, K.Mehammed ,L.Omar**" et tous mes amis de la promotion de Mathe.*

Et en dernier, un grand merci à toutes celles et tous ceux qui d'une manière ou d'une autre m'ont aidé et soutenu.

Benzahia Habiba

 *Dédicace* 

C'est avec grand respect et gratitude que je tiens à exprimer toute ma reconnaissance et ma sympathie et dédier ce travail modeste à :

Mes parents "**R.Mehammed , B.Fatiha** ", les mots ne sauraient exprimer l'immense et profonde gratitude que je leur témoigne ici pour leur précieux soutien, pour leur patience, pour avoir crus en moi, pour leurs sourires réconfortants et pour leurs sacrifices qui m'ont permis d'atteindre cette étape dans ma vie et qu'ils m'ont jamais cessé de consentir pour mon instruction et mon bien être.
Que dieu me les gardes et les protège.

Mes frère "**Aiman, Farouk**"
Ma sœur "**Chorouk**"
Toute ma famille surtout "**Aya**"

Tous mes amis "**B.Habiba, B.Khaira , S.Zineb , B.Zahra , B.Sarah G.Somia , B.Narimane , R.Sarah , Z.Fatima , B.Imane , Y.Amel, B.Azhar**"

Tous mes amis de la promotion de Math

Tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Rahabi Faten Hamama

Dédicace

En signe de respect et de reconnaissance

je dedie ce modeste travail à :

Ames parents **B.Ahmed, Y.Khadidja** les plus chers au monde qui m'ont tout donné, encouragement, soutiens et surtout amour, que dieu le tout puissant les protègent.

Ainsi qu'à toute ma belle familles **Yourfae** et **Boulabbes**.

ma très chère soeurs **Fraiha**.

Ames très chères frères **Sidali, Ayoub, Sayf elddine Islam, Amer, Aissa**.
Ames nièces chacun **R.Nedjma, R.Mehammed**.

et mes amies **H.Fadila, B.Nour Elhouda, B.Houria, B.Hanane, Y.Zineb, B.Zahra, B.Denia, B.Abir**.

Et à tous mes amis de prés ou de loin.

Boulabbes Kheira

Table des matières

1	<i>Préliminaires</i>	11
1.1	Introduction	12
1.2	Les espaces L^p	12
1.2.1	Fonction mesurable	12
1.2.2	Fonction intégrable	12
1.2.3	Espace de Lebesgue	12
1.3	Espaces de Sobolev	13
1.3.1	Les espaces H^m	13
1.3.2	L'espace $H_0^1(\Omega)$	13
2	<i>Schéma de type Volumes Finis</i>	16
2.1	Introduction	17
2.2	La méthode des volumes finis	18
2.3	Schéma de Volume fini	18
2.4	Maillages	19
2.5	Exemples de maillages admissibles	20

2.6	Schéma TPFA (Two-Point Flux Approximation)	23
2.6.1	Coercivité :	24
2.6.2	La monotonie :	25
2.7	Méthodes MPFA(Multiple-Point Flux Approximation)	25
2.7.1	Méthode O	27
2.7.2	Méthodes L et G	27
3	<i>Maillage de zohour</i>	29
3.1	Définition de zohour	30
3.2	Présentation simplifiée de Zohour (version 2D, v. 0.9.1)	31
3.2.1	Généralités sur les raffinements de maillages.	31
3.2.2	Principe du mailleur Zohour	36
3.2.3	Signature d'une forme pour la reconnaissance rapide des cellules	40
3.2.4	Le calcul du hessien pour un maillage créé par Zohour	41
4	<i>Application</i>	45
4.1	La Méthodes d'approximation de flux multipoint (MPFA)	46
4.2	Analyse de la méthode des volumes finis proposée	47
4.2.1	Formulation du problème discret	47
4.2.2	L'existence et l'unicité pour une solution du système discret	49
4.2.3	Estimations d'erreur	52
4.3	Analyse Numérique	59
4.3.1	Premier cas test	59
4.3.2	Deuxième cas test	66

Les méthodes de volumes finis sont construites à partir d'une formulation intégrale basée directement sur la forme forte des équations à résoudre. Les intégrales ne portent pas sur tout le domaine dans lequel sont posées les équations, mais sur des cellules disjointes appelées volumes de contrôles.

La méthode des Volumes Finis est de plus en plus employée pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles car elle est facile à mettre en œuvre. Un des ingrédients élémentaires de cette méthode est le calcul des flux aux faces des éléments. Un schéma très simple utilise deux nœuds (**TPFA** = Two-Point Flux Approximation) mais il est, en général, seulement d'ordre un. Il faut alors se tourner vers des schémas plus complexes, appelés **MPFA** (Multiple-Point Flux Approximation) pour obtenir l'ordre deux dans tous les cas.

Zohour lors de la modification du maillage, de nouveaux nœuds apparaissent ; pour cette raison le nom donné à ce maillage l'algorithme est "Zohour "

Nous présentons dans ce mémoire un flux multi-points flexible basé sur un volume fini Méthode d'approximation (méthode MPFA, en bref) affichant de fortes capacités pour gérer les problèmes d'écoulement dans des milieux anisotropes non homogènes.

Lorsque le coefficient de diffusion régissant le flux est une matrice pleine avec composantes constantes, le système discret est symétrique défini positif même si cette matrice n'est que définie positive. De plus, si la diffusion le coefficient est diagonal, le système discret est réduit à deux indépendants systèmes discrets correspondant à des systèmes bien connus centrés sur les cellules et centrés sur des sommets méthodes de volumes finis.

Un résultat des estimations d'erreur sont donnés dans les normes L^2 et L^∞ et dans une norme d'énergie discrète également. Ces résultats ont été confirmés par expériences numériques.

Introduction

Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser à établir un schéma de type Volumes Finis d'ordre deux pour un maillage de type Zohour.

Ce travail est composé de quatre chapitres et une bibliographie. Il est organisé comme suit :

dans le premier chapitre on considère les espaces de Lebesgue et les espace Sobolev qui jouent un rôle assez important dans les chapitres qui suivent. On cite quelques définition et théorème à ces espaces .

Le deuxième chapitre nous allons introduit la méthode de volume fini et l'étude les schéma TPFA (Two-Point Flux Approximation) et MPFA (Multiple-Point Flux Approximation).

Ensuite, le troisième chapitre on explique la définition de Zohour et le principe du mailleur Zohour .

Finalement , le quatrième chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité pour une solution du système discret et estimations d'erreur et les valider avec deux cas tests sous Matlab .

Sommaire

1.1	Introduction	12
1.2	Les espaces L^p	12
1.2.1	Fonction mesurable	12
1.2.2	Fonction intégrable	12
1.2.3	Espace de Lebesgue	12
1.3	Espaces de Sobolev	13
1.3.1	Les espaces H^m	13
1.3.2	L'espace $H_0^1(\Omega)$	13

1.1 Introduction

En général Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque et I un intervalle borné dans \mathbb{R} .

1.2 Les espaces L^p

1.2.1 Fonction mesurable

Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite mesurable si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$$E_\alpha = \{x \in \Omega / f(x) \geq \alpha\}$$

est mesurable au sens de Lebesgue [9, 10].

1.2.2 Fonction intégrable

On dit qu'une fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue si :

$$\int_{\Omega} |f| < \infty$$

1.2.3 Espace de Lebesgue

Soit $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$, On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ mesurable et } |f|^p \text{ intégrable}\}$$

De plus, pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$ on pose :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

si $p = \infty$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, alors on définit $\| \cdot \|_{L^\infty}$:

$$\| f \|_{L^\infty} = \text{supess}(f) = \inf \{ \alpha : |f| \leq \alpha \text{ p.p} \}$$

1.3 Espaces de Sobolev

1.3.1 Les espaces H^m

Définition 1.3.1. (*Espace de Sobolev d'ordre 1*)

On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 l'espace noté $H^1(\Omega)$ telle que :

$$H^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) / \partial_i u \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \}$$

où $\partial_i u$ est définie au sens de la dérivée généralisée [9, 10].

Définition 1.3.2. (*Espace de Sobolev d'ordre m*)

Pour tout entier $m \geq 1$, on appelle espace de Sobolev d'ordre m l'espace noté $H^m(\Omega)$

telle que :

$$H^m(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) / \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq m \}$$

1.3.2 L'espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.3.3. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ ¹ pour la norme $\| \cdot \|_1$ de $H^1(\Omega)$ tel que :

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

Définition 1.3.4. (*Coercive*) Soit V un espace de Hilbert, une forme bilinéaire

$a(u, v)$ sur $V \times V$ est coercive ssi il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$a(u, u) \geq \alpha \| u \|^2, \forall u \in V.$$

1. $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions tests

Remarque 1.3.5. $a(u, v)$ est un forme bilinéaire ssi :

$$\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in V, \forall \beta, \gamma \in \mathbb{R} :$$

$$a(\beta u_1 + \gamma u_2, v_1) = \beta a(u_1, v_1) + \gamma a(u_2, v_1)$$

$$a(u_1, \beta v_1 + \gamma v_2) = \beta a(u_1, v_1) + \gamma a(u_1, v_2)$$

Théorème 1.3.6. (Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert , soit a une forme bilinéaire, continue et coercive sur H . Soit l une forme linéaire continue sur H Alors le problème $a(u, v) = l(v)$ admet un unique solution $u \in H, \forall v \in H$.

Remarque 1.3.7. une forme bilinéaire $a(u, v)$ sur $V \times W$ est continue s'il existe une constante M telle que : $|a(u, w)| \leq M \|u\|_V \|w\|_W, \forall (u, w) \in V \times W$

Théorème 1.3.8. (L'inégalité de Poincaré)

Si Ω est borné dans au moins une direction, alors il existe une constante $C(\Omega)$ telle que $\forall u \in H_0^1(\Omega)$, $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|u\|_{L^2(\Omega)}$.

Remarque 1.3.9. Pour toute fonction u de $H_0^1(\Omega)$ on définit :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

Théorème 1.3.10. (Ostrogradski)

En analyse vectorielle, le théorème de la divergence (également appelé théorème de Green-Ostrogradski ou théorème de flux-divergence), affirme l'égalité entre l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume dans \mathbb{R}^3 et le flux de ce champ à travers la frontière du volume (qui est une intégrale de surface). L'égalité est la suivante :

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Où :

- v est le volume
- ∂v est la frontière de v
- $d\vec{S}$ est le vecteur normal à la surface, dirigé vers l'extérieur et de norme égale à l'élément de surface qu'il représente
- \vec{F} est continûment dérivable en tout point de v
- $\vec{\nabla}$ est l'opérateur nabla : $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F}$.

Schéma de type Volumes Finis

Sommaire

2.1	Introduction	17
2.2	La méthode des volumes finis	18
2.3	Schéma de Volume fini	18
2.4	Maillages	19
2.5	Exemples de maillages admissibles	20
2.6	Schéma TPFA (Two-Point Flux Approximation)	23
2.6.1	Coercivité :	24
2.6.2	La monotonie :	25
2.7	Méthodes MPFA(Multiple-Point Flux Approximation)	25
2.7.1	Méthode O	27
2.7.2	Méthodes L et G	27

2.1 Introduction

Soit la forme simple de l'équation de diffusion [1]

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\Lambda(x)\nabla\bar{u}(x)) = f(x) & x \in \Omega \\ \bar{u}(x) = \bar{u}_b & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Où Ω est le domaine d'étude, f décrit les sources ou puits volumiques, Λ code les propriétés de diffusion du milieu, \bar{u}_b est la condition aux limites fixes et \bar{u} est l'inconnu d'intérêt (pression, saturation, etc.). Bien que très simplifié avec en ce qui concerne les modèles du monde réel, l'équation (2.1) contient déjà certains des principaux questions à traiter lors de la conception et de l'analyse des méthodes numériques pour les processus de diffusion. Les hypothèses sur les données sont

$$\Omega \text{ est un sous-ensemble ouvert polygonal connecté borné de } \mathbb{R}^d, \quad d \geq 1 \quad (2.2)$$

$$f \in L^2(\Omega), \quad \bar{u}_b \in H^{1/2}(\Omega) \quad (2.3)$$

$\Lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ est symétrique, essentiellement borné et coercive

$$(i.e \exists \lambda_-, \lambda_+ > 0 \text{ tels que pour } x \in \Omega \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^d, \lambda_- |\xi|^2 \leq \Lambda(x)\xi \cdot \xi \leq \lambda_+ |\xi|^2) \quad (2.4)$$

(\cdot et $|\cdot|$) sont le produit scalaire euclidien et la norme sur \mathbb{R}^d).

Aucune autre régularité les propriétés sont supposées sur Λ , f ou \bar{u}_b , et la formulation mathématique appropriée de (2.1) est donc, notant par

$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ l'opérateur de trace

$$\begin{cases} \bar{u} \in \{v \in H^1(\Omega) : \gamma(v) = \bar{u}_b\} \\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \Lambda(x)\nabla\bar{u}(x) \cdot \nabla\varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx \end{cases} \quad (2.5)$$

2.2 La méthode des volumes finis

La méthode des Volumes Finis consiste à intégrer, sur des volumes élémentaires, les équations écrites sous forme intégrale. C'est une méthode particulièrement bien adaptée à la discrétisation spatiale des lois de conservation, contrairement aux Eléments finis, et ainsi très utilisée en mécanique des fluides.

Sa mise en oeuvre est simple si les volumes élémentaires ou "volumes de contrôle" sont des rectangles en $2D$, la méthode des volumes finis permet d'utiliser des volumes de forme quelconque et donc de traiter des géométries complexes, contrairement aux Différences Finies [2].

2.3 Schéma de Volume fini

Le principe physique qui conduit à (2.1) est l'équilibre d'une certaine quantité étendue Q (chaleur, masse des composants, etc...) : étant donné un domaine w , la variation de Q à l'intérieur de w provient de la création de Q dans w et de la transfert de Q à travers ∂w [1].

Dans un contexte stationnaire, il n'y a pas de variation de Q et la création volumique à l'intérieur de w doit donc équilibrer la quantité de Q qui laisse w à travers ∂w .

Sous des hypothèses de modélisation, la création de Q à l'intérieur de w a une fonction de densité volumétrique f et le flux de Q à l'extérieur de w a une densité surfacique $-\Lambda(x)\nabla\bar{u}(x)\cdot\mathbf{n}_w(x)$ (loi de Darcy ou Fourier), où \mathbf{n}_w unité normale à ∂w et $\Lambda(x)$ est une matrice de conductivité thermique à matrice définie positive symétrique dans le cas de l'équation de chaleur, matrice de perméabilité dans l'ingénierie des réservoirs. Le bilan massique de Q se lit alors :

$$\int_{\partial w} -\Lambda(x) \nabla \bar{u}(x) \cdot \mathbf{n}_w(x) dS(x) = \int_w f(x) dx \quad (2.6)$$

En utilisant la formule de Stokes sur le côté gauche, en prenant w une balle autour de $x \in \Omega$, en divisant par la mesure de w et en laissant son rayon tendre à 0, on obtient (2.1). Il s'agit de la technique de contrôle du volume "infinitésimale" pour dériver l'équation de diffusion. d'autre part, nous considérons une approche de volume de contrôle "fini" dans laquelle $w = K$ est un ensemble ouvert polygonal (petit mais non infinitésimal), alors (2.6) devient :

$$\sum_{\sigma \text{ bord de } K} \bar{F}_{K,\sigma} = \int_K f(x) dx \quad (2.7)$$

où $\bar{F}_{K,\sigma} = \int_{\sigma} -\Lambda(x) \nabla \bar{u}(x) \cdot \mathbf{n}_K(x) dS(x)$ est le flux de \bar{u} à travers σ .

On peut également remarquer que, si σ est une arête entre deux polygones K et L , alors :

$$\bar{F}_{K,\sigma} + \bar{F}_{L,\sigma} = 0 \quad (2.8)$$

2.4 Maillages

Un maillage de Ω est $(\mathcal{M}, \xi, \mathcal{P})$ où :

- \mathcal{M} est une famille finie de polygones disjoints ouverts non vides (les "volumes de contrôle" ou "cellules") tels que $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{M}} \bar{K}$,

- ξ est une famille finie de sous-ensembles planaires disjoints non vides de Ω (les "arêtes") avec une mesure dimensionnelle positive $(d-1)$. Nous supposons que pour chaque volume de contrôle K , il existe $\xi_K \subset \xi$ tel que $\partial K = \cup_{\sigma \in \xi_K} \bar{\sigma}$. Nous

supposons également que chaque arête $\sigma \in \xi$ appartient à exactement un ou deux ensembles $(\xi_K)_{K \in \mathcal{M}}$.

- \mathcal{P} est une famille de points $(x_K)_{K \in \mathcal{M}}$ tels que, pour chaque K , $x_K \in K$. On note par $|K|$ la mesure d-dimensionnelle de $K \in \mathcal{M}$, par $|\sigma|$ la mesure $(d-1)$ -dimensionnelle de $\sigma \in \xi$ et par $\mathbf{n}_{K,\sigma}$ l'unité normale à $\sigma \in \xi_K$ vers l'extérieur K . Nous divisons également ξ en les bords intérieurs ξ_{int} (sur inclus dans Ω) et les bords extérieurs Ω (sur inclus dans $\partial\Omega$). La taille du maillage est $h_{\mathcal{M}} = \max_{K \in \mathcal{M}} \text{diam}(K)$. Nous prenons également Λ_K une valeur de Λ en K (par exemple $\frac{1}{|K|} \int_K \Lambda$ ou $\Lambda(x_K)$ dans les applications de réservoir, Λ est constant dans chaque cellule K)[1].

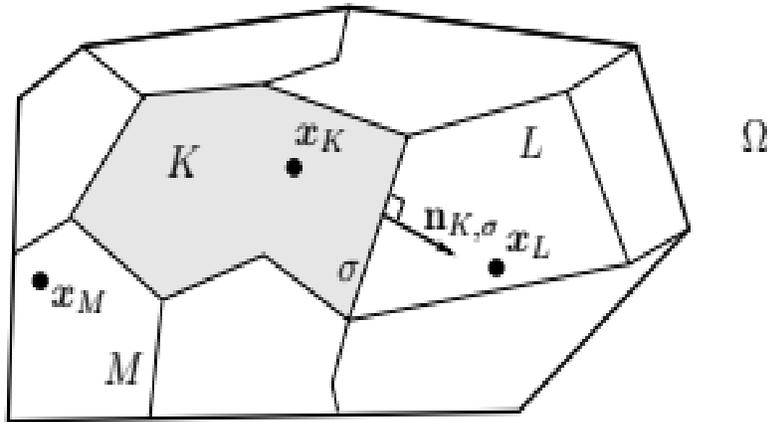


FIGURE 2.1 – un maillage de Ω

2.5 Exemples de maillages admissibles

1. La grille

Soit $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, Soit N le nombre de points de discrétisation dans les directions x et y on prendre $h = \frac{1}{N-1}$, et pour $i, j = 1, \dots, N$ les cellules $K_{i,j}$

sont définies par

$$K_{i,j} =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[\times]y_{j-1/2}, y_{j+1/2}[\text{ avec } x_{i-1/2} = (i-1)h \text{ et } y_{j-1/2} = (j-1)h$$

Les centres $X_{K_{ij}}$ des cellules sont les barycentres des cellules :

$$X_{K_{ij}} = (x_i, y_j)^T \text{ avec } x_i = x_{i-1/2} + \frac{h}{2} = i\frac{h}{2} \text{ et } y_j = y_{j-1/2} + \frac{h}{2} = j\frac{h}{2}$$

2. Maillage triangulaire

On considère une triangulation du domaine Ω , admissible au sens des Eléments Finis : si deux triangles ont une arête commune alors ils ont deux sommets communs.

On suppose que tous les angles des triangles sont plus petits que $\pi/2$. En conséquence, dans un triangle les médiatrices s'intersectent à l'intérieur du triangle. Les volumes de contrôle sont les triangles de la triangulation et les centres x_K des cellules sont choisis comme les centres de masse des triangles i.e. l'intersection des médiatrices (**figure2.2**). Avec l'hypothèse sur les angles, les centres x_K se trouvent à l'intérieur des triangles.

On remarquera qu'une triangulation de Delaunay ne fournit pas nécessairement des triangles ayant tous des angles $\leq \pi/2$

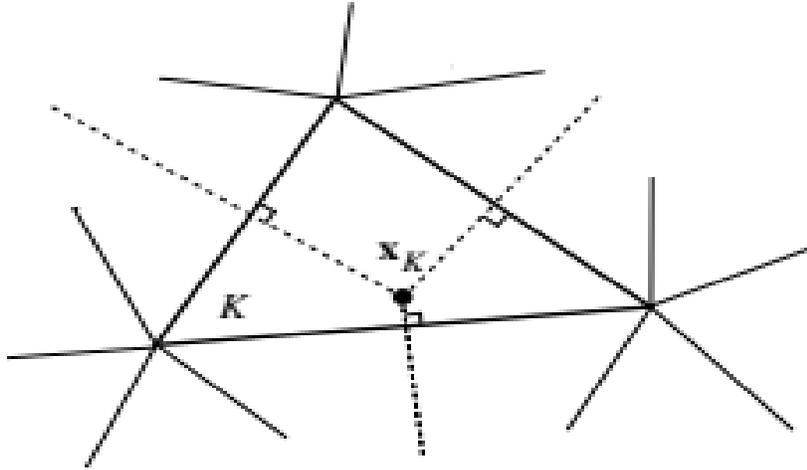


FIGURE 2.2 – Maillage triangulaire. Intersection des médiatrices à l'intérieur des triangles si les angles sont plus petits que $\pi/2$

3. Maillage Voronoï

Soit \mathcal{P} un ensemble de points appartenant au domaine Ω . On définit les cellules de Voronoï par rapport à chaque point $x \in \mathcal{P}$ par :

$$K_x = \{y \in \Omega, |x - y| < |z - y|, \forall z \in \mathcal{P}, x \neq z\}$$

La construction des cellules de Voronoï est basée sur la détermination des régions délimitées par les médiatrices des segments joignant les points de \mathcal{P} (**Figure2.3**).

Les volumes de contrôles K sont choisis comme étant les cellules de Voronoï associées à une triangulation de Delaunay du domaine Ω [8]. A chaque cellule de Voronoï K , on associe le centre $x_K \in K$ qui est un sommet de la triangulation

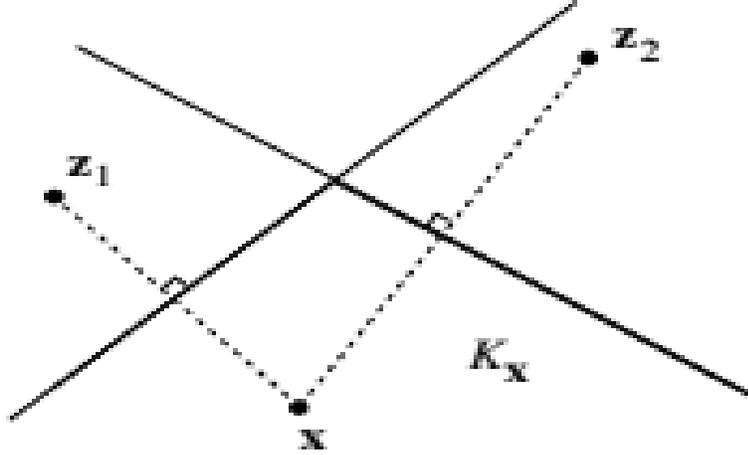


FIGURE 2.3 – Cellules de Voronoï

2.6 Schéma TPFA (Two-Point Flux Approximation)

Soit λ un fonction scalaire, on pose $\Lambda = \lambda(x)Id$ c'est-à-dire le milieu est isotrope ,Nous supposons également les conditions d'orthogonalité suivantes sur le maillage [1] :

$$\begin{cases} \forall \sigma \text{ bord entre deux volumes de contrôle } K, L \in \mathcal{M}, (x_K, x_L) \perp \sigma \\ \forall \sigma \in \xi_{ext} \cap \xi_K, \text{ la demi-ligne } x_K + [0, +\infty) \mathbf{n}_{K,\sigma} \text{ coupe } \sigma \end{cases} \quad (2.9)$$

Dans la (**Figure(2.1)**), par exemple, cette hypothèse est satisfaite par le bord σ entre K et L mais pas par le bord entre K et M .

soit $\{x_\sigma\} = (x_K x_L) \cap \sigma$ (ou $\{x_\sigma\} = (x_K + [0, +\infty) \mathbf{n}_{K,\sigma}) \cap \sigma$), si $\sigma \in \xi_{ext}$, approximations cohérentes des flux pour les petits $h_{\mathcal{M}}$ sont

$$\text{si } \sigma \in \xi_K \cap \xi_L : F_{K,\sigma} = \lambda_K |\sigma| \frac{u_K - u_\sigma}{d(x_K, x_\sigma)} \quad \text{et} \quad F_{L,\sigma} = \lambda_L |\sigma| \frac{u_L - u_\sigma}{d(x_L, x_\sigma)} \quad (2.10)$$

$$si \quad \sigma \in \xi_{ext} \cap \xi_K : F_{K,\sigma} = \lambda_K |\sigma| \frac{u_K - u_\sigma}{d(x_K, \sigma)} \quad (2.11)$$

$$pour \text{ toute } K \in \mathcal{M} : \sum_{\sigma \in \xi_K} F_{k,\sigma} = \int_k f(x) dx \quad (2.12)$$

$$pour \text{ tout bord } \sigma \text{ entre deux distincts } K, L \in \mathcal{M} : F_{k,\sigma} + F_{L,\sigma} = 0 \quad (2.13)$$

où $d(a, b) = |a - b|$, λ_K est la valeur de λ sur K et u_σ se rapproche de $\bar{u}(x_\sigma)$. si $\sigma \in \xi_{ext}$, u_σ est fixé par \bar{u}_b . si $\sigma \in \xi_K \cap \xi_L$, l'inconnu u_σ supplémentaire est éliminé en imposant la conservativité(2.13) des flux et on obtient (voir [3]) :

$$F_{k,\sigma} = \mathcal{T}(u_K - u_L) \quad avec \quad \mathcal{T}_\sigma = \frac{|\sigma|}{d(x_K, x_L)} \frac{\lambda_K \lambda_L d(x_K, x_L)}{\lambda_K d(x_L, x_\sigma) + \lambda_L d(x_K, x_\sigma)} \quad (2.14)$$

L'équation d'équilibre (2.12) des flux discrets (2.11) - (2.14) donne alors un schéma VF¹ pour (2.1) lorsque $\Lambda = \lambda Id$, appelé volume fini d'approximation de flux à deux points (TPFA pour faire court) puisque chaque flux est calculé en utilisant seulement les 2 inconnues de chaque côté du bord

2.6.1 Coercivité :

Supposons que $\bar{u}_b = 0$ et donc que $u_\sigma = 0$ pour tous $\sigma \in \xi_{ext}$. En multipliant l'équation d'équilibre (2.12) par u_K , en sommant sur $K \in \mathcal{M}$ et en regroupant par arêtes (intégration discrète par parties), on obtient, grâce à (2.14),

$$\|u\|_{1,\mathcal{D}}^2 := \sum_{\sigma \in \xi_{int}} \mathcal{T}_\sigma (u_K - u_L)^2 + \sum_{\sigma \in \xi_{int}} \mathcal{T}_\sigma u_K^2 = \int_\Omega f(x) u(x) dx \quad (2.15)$$

où u est la fonction constante par morceaux égale à u_K sur K et, dans les sommes, K et L sont les volumes de contrôle de chaque côté d'un $\sigma \in \xi_{int}$

(on laisse $\mathcal{T}_\sigma = \lambda_k \frac{|\sigma|}{d(x_K, \sigma)}$ chaque fois que $\sigma \in \xi_{ext} \cap \xi_K$). Le côté gauche de (2.15)

1. volume fini

définit une norme H_0^1 discrète $\|u\|_{1, disc}$, disque pour laquelle on peut établir l'inégalité discrète de Poincaré $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq diam(\Omega) \|u\|_{1, disc}$. voir[3]

Le schéma TPFA est donc coercitif (avec une matrice symétrique) et sa convergence peut être prouvée sous les seules hypothèses (2.2) - (2.4). Bien entendu, des estimations peuvent également être obtenues si les données sont plus régulières .

2.6.2 La monotonie :

en injectant (2.11) - (2.14) dans l'équation d'équilibre (2.12), nous obtenons, avec les mêmes conventions qu'en (2.15), pour tous les $K \in \mathcal{M}$

$$\sum_{\sigma \in \xi_{int}} \mathcal{T}_\sigma(u_K - u_L) + \sum_{\sigma \in \xi_{ext}} \mathcal{T}_\sigma u_K = \int_K f(x) dx + \sum_{\sigma \in \xi_{ext}} \mathcal{T}_\sigma u_\sigma \quad (2.16)$$

D'après cette expression, nous pouvons voir que la fonction du schéma peut s'écrire $S(U) = A(u_K)_{K \in \mathcal{M}} - C(u_\sigma)_{\sigma \in \xi_{ext}}$ avec A dominant en diagonale, symétrique et connecté au graphe, et tous les coefficients de C non négatives.

2.7 Méthodes MPFA(Multiple-Point Flux Approximation)

Approximations cohérentes des flux $\overline{F}_{K,\sigma}$. sur les maillages généraux , il faut utiliser des valeurs plus approximatives de \bar{u} (dans les cellules, sur les bords ou aux sommets) que les deux à x_K et x_L de chaque côté de σ moyen simple d'obtenir de telles valeurs consiste à les interpoler à partir d'inconnues de cellule.

Le chemin choisi dans la réf[4] qui introduit, pour chaque bord, des valeurs de cellules supplémentaires situées à des points satisfaisant la condition d'orthogonalité

(2.17)[1]

$$\forall \sigma \text{ entre deux volumes de contrôle } K, L \in \mathcal{M}, \mathcal{D}_{K,\sigma} \cap \sigma = \mathcal{D}_{L,\sigma} \cap \sigma \neq \sigma \quad (2.17)$$

$$\forall \sigma \in \xi_{ext} \cap \xi_K, \mathcal{D}_{K,\sigma} \cap \sigma \neq \emptyset.$$

pour l'arête considérée, puis calculer ces valeurs par des combinaisons convexes de cellules inconnues existantes. Cependant, la construction et la stabilité de ce système ne peuvent être assurés pour des grilles pas trop déformées et des tenseurs pas trop anisotropes. Une autre idée n'est pas d'essayer de récupérer la condition d'orthogonalité (2.17), mais d'utiliser les valeurs supplémentaires pour calculer des gradients approximatifs, qui à leur tour donnent flux approximatifs $F_{K,\sigma}$. Cependant, le calcul des valeurs supplémentaires doit être fait de manière intelligente, en particulier lorsque Λ est discontinu, pour garantir que le flux la conservativité (2.13) est satisfaite.

Les schémas d'approximation de flux multipoints (MPFA) sont basés sur une telle construction. Introduites entre le milieu et la fin des années 90's ces méthodes supposent que la solution est linéaire par morceaux dans certaines sous-cellules autour de chaque sommet, introduisez inconnues de bord supplémentaires et exprimer la variation linéaire de la solution à calculer gradients et donc flux dans ces sous-cellules. Les inconnues de bord sont ensuite éliminées (interpolé en utilisant des inconnues de cellule) en écrivant des équations de continuité pour la solution et les équations de conservativité pour ses flux. Les flux numériques finaux sont cohérents, conservateur et exprimé uniquement en termes d'inconnues cellulaires

autour de chaque sommet.

Une autre la méthode MPFA bien étudiée est la méthode L , introduite dans la Ref[7] pour quadrilatère mailles. les principales différences de la méthode L par rapport à la méthode O sont :

- ★ aucune inconnue de bord ne doit être introduite car le gradient lui-même est les inconnues supplémentaires à éliminer la continuité et la conservativité du sous-flux les équations ne sont écrites que sur 2 arêtes,
- ★ la continuité du linéaire par morceaux
- ★ l'approximation est imposée sur les bords entiers (pas seulement aux points médians des bords)
- ★ les gradients et l'approximation linéaire par morceaux construits sur des sous-cellules $K_\nu, L_\nu \dots$, dépendent de l'arête σ à travers laquelle on veut calculer le flux et sont donc pas commun à tous les sous-flux autour de ν .

Sommaire

3.1	Définition de zohour	30
3.2	Présentation simplifiée de Zohour (version 2D, v. 0.9.1)	31
3.2.1	Généralités sur les raffinements de maillages.	31
3.2.2	Principe du mailleur Zohour	36
3.2.3	Signature d'une forme pour la reconnaissance rapide des cellules	40
3.2.4	Le calcul du hessien pour un maillage créé par Zohour . .	41

3.1 Définition de zohour

Zohour est un algorithme de modification locale d'un maillage, dans lequel on ajoute ou on enlève des noeuds, de manière à conserver le maximum d'information et ainsi éviter de nombreuses interpolations qui pourrait conduire à des erreurs. Au fil des modifications du maillage, on voit ainsi "apparaître" un certain nombre de nouveaux noeuds (ce nombre est en général faible).

Pour cette raison, le nom donné à cette méthode est Zohour, qui signifie "apparition" en arabe. Mais la même orthographe correspond aussi au mot qui signifie "fleurs", et cela montre le lien fort avec le dessin de ce maillage adaptatif quand il est raffiné autour d'un point unique :

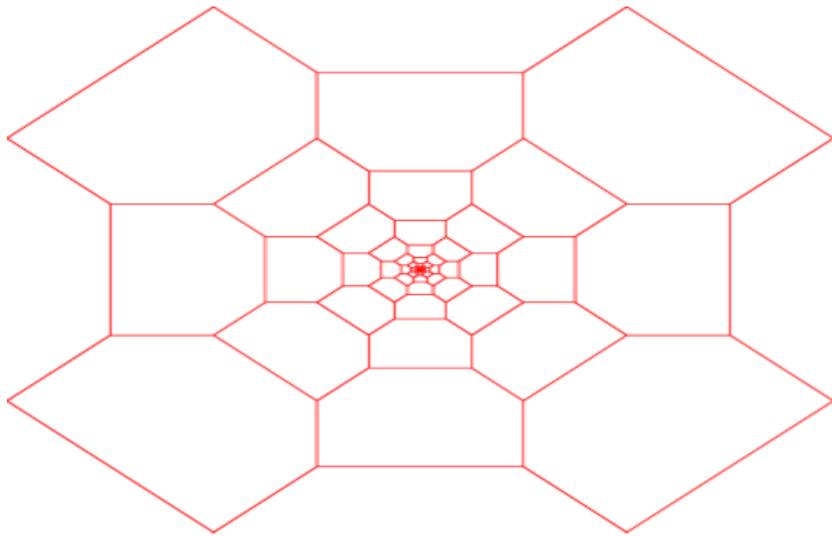


FIGURE 3.1

3.2 Présentation simplifiée de Zohour (version 2D, v. 0.9.1)

3.2.1 Généralités sur les raffinements de maillages.

Zohour est un mailleur adaptatif 2D. Donnons tout de suite quelques définitions :

- Mailleur : programme qui met en oeuvre un algorithme de maillage, permettant de découper un domaine géométrique en un certain nombre de portions plus petites, appelées mailles. Ce découpage doit être une partition exacte : la réunion des mailles correspond exactement au domaine de départ.
- Adaptatif : le maillage s'adapte au calcul d'un problème donné. La plupart du temps, l'adaptation est itérative. Un exemple classique concerne par exemple un maillage dont les mailles vont être d'autant plus petites que leur emplacement est proche d'un certain point, ou d'une certaine zone, du domaine initial.
- 2D : le domaine de départ et toutes les mailles appartiennent à un espace de dimension 2.

Les maillages sont aujourd'hui utilisés quasiment dans toutes les résolutions de problèmes provenant de la discrétisation d'une ou plusieurs équations aux dérivées partielles (Différences finies, éléments finis, éléments frontières, volumes finis, etc. Seules les méthodes de type meshless –par ex. les méthodes de point vortex –n'ont pas besoin de maillage).

Parmi les formes de mailles 2D les plus utilisées, on trouve le rectangle (ou plus généralement le quadrilatère) et le triangle. La représentation d'un maillage 2D peut être :

- Structurée –les mailles sont repérées par deux indices (i,j) et sont par conséquent à 4 côtés.
- Non structurée –les mailles sont d’abord définies, via une table de définition, par les sommets qui les définissent, puis sont reliées aux autres mailles voisines par une table de connectivité. Les mailles ont un nombre arbitraire de côtés, mais souvent elles ont 3 côtés.

La précision de la méthode dépend de la taille des mailles, mais aussi de leur forme. Ainsi, il est connu qu’en Volumes Finis, si on calcule les flux sur les côtés de la maille par une formule simple, alors un maillage rectangulaire donne une meilleure précision qu’un maillage triangulaire quelconque. Un maillage adaptatif répond à la question suivante : “Comment modifier un maillage afin de raffiner les mailles –c’est-à-dire augmenter la finesse de représentation–en des endroits arbitraires?”. Remailler tout le domaine est une possibilité ((**figure(3.2)**)), mais outre le coût d’un remaillage global, il faut aussi interpoler toutes les quantités numériques concernées par le solveur ou l’algorithme à tous les nouveaux points du maillage (on perd aussi en précision).

Une méthode ancienne (et naïve) consistait à partir d’un maillage de carrés (ou de rectangles), puis à les subdiviser en quatre, comme le montre la (**figure(3.3)**). Mais le maillage résultant perd une propriété fondamentale requise pour appliquer la plupart des méthodes de discrétisation : il n’est plus conforme –son unique avantage est de présenter des mailles qui sont toutes carrées.

On s’intéresse ici à la méthode de volumes finis de type “Node-based” des noeuds contiennent la valeur d’une fonction $u(x,y)$. à partir de ces noeuds, on construit un maillage de type Voronoï (partition du plan 2D par l’ensemble des médiatrices

de deux noeuds voisins). Si les noeuds sont répartis sur des lignes horizontales et verticales équidistantes, le diagramme de Voronoï est un maillage de carrés dont les côtés sont également horizontaux et verticaux. Un maillage de Voronoï possède une propriété très intéressante : parce que chaque côté d'une maille appartient à la médiatrice de s noeuds voisins, alors le calcul du gradient de $u(x,y)$ normal à ce côté peut être calculé directement (c'est-à-dire simple, donc efficace) et précise.

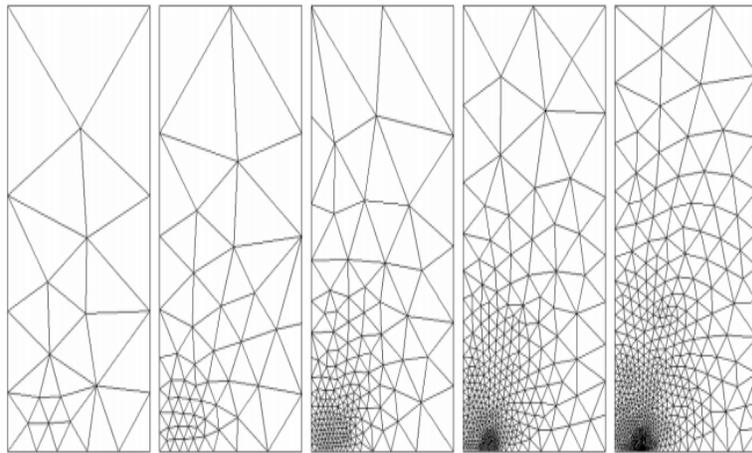


FIGURE 3.2 – Maillages de plus en plus fins au voisinage d'une zone d'intérêt particulière. Ici, le raffinement est global, puisque l'ensemble du maillage est retouché. (exemple tiré de Emerald Insight, internet)

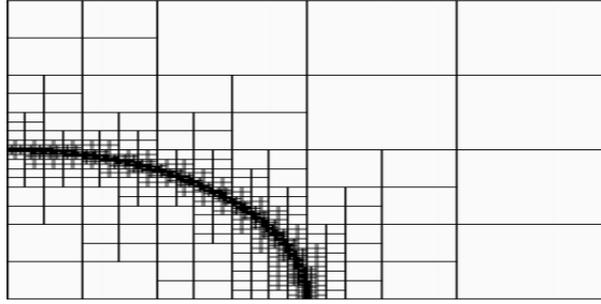


FIGURE 3.3 – Méthode ancienne de raffinement d’un maillage de carrés http://www.dealii.org/developer/doxygen/deal.II/step_12.html. Certains carrés sont découpés en quatre parties égales, de manière récursive. On remarque que le maillage qui en résulte n’est plus conforme.

Zohour est inspiré de HOMARD mais avec un principe différent. HOMARD (dans sa version 2D) raffine un maillage triangulaire, suivant le principe schématisé sur la **figure**(3.4). Le site mentionné ci-dessus montre de nombreux exemple.

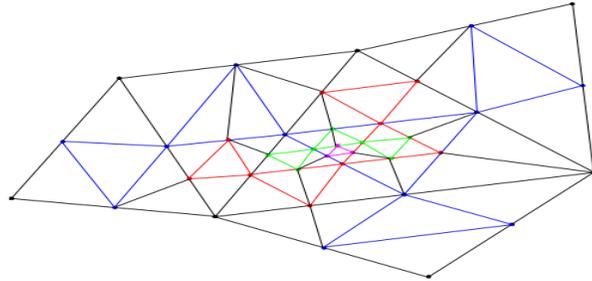


FIGURE 3.4 – Principe de raffinement de HOMARD (EDF), dans sa version 2D triangulaire. Le maillage de base est ici dessiné en noir ; Les triangles sont subdivisés en quatre (niveau bleu), en respectant la même qualité de forme. Puis, récursivement, on peut continuer d’autres niveaux de subdivisions : 2^e niveau (rouge), 3^e niveau (vert), 4^e niveau (magenta), etc. On remarque que, pour garder le maillage conforme, il est nécessaire de couper certains triangles en deux.

Zohour partage aussi plusieurs caractéristiques avec le raffinement de Balmelli et al. (2002)¹, présenté sur la **figure(3.5)**.

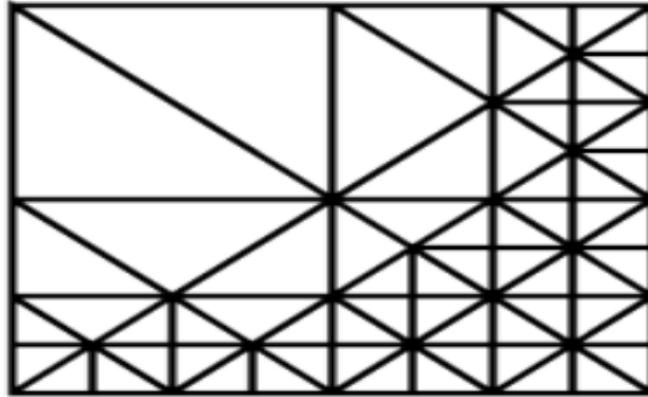


FIGURE 3.5 – Raffinement triangulaire conforme (Balmelli et al., 2002). Tous les triangles sont orientés suivant l’horizontale et la verticale, ce qui donne des avantages certains à l’implémentation informatique. Comme pour notre mailleur Zohour, le domaine de départ ne peut être que rectangulaire.

La spécificité de Zohour est de retrouver si possible des cellules carrées, et avec une bonne progressivité dans la taille des cellules (la plupart des algorithmes adaptatifs ont un facteur 4 en terme de surface², celui de Balmelli et al. (2002) mentionné plus haut 2; Zohour quant à lui a un facteur égal à 1.5 (**la figure3.10** en fin d’annexe) : il est donc très progressif.

1. Balmelli L., Liebling T., Vetterli M., 2002, Computational analysis of mesh simplification using global error, Comp. Geom. : Theory and Application, Elsevier Sciences.

2. Nous mesurons ici la progressivité en nombre de mailles par unité de surface

3.2.2 Principe du mailleur Zohour

On choisit un domaine initial carré, puis on répartit des noeuds suivant des lignes horizontales et verticales équidistantes, y compris la frontière. En fait, le domaine initial peut ne pas être carré, à condition toutefois que les noeuds définissent des cellules carrées.

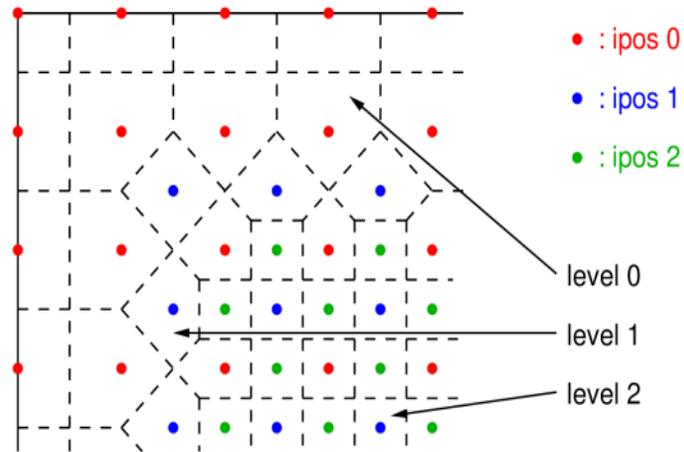


FIGURE 3.6 – Les éléments de base de l’algorithme de Zohour sont les nœuds rouges (de ipos 0) qui sont inamovibles et répartis initialement sur des lignes équidistantes horizontales et verticales. Les nœuds de ipos 1 (en bleu) sont ajoutés à une intersection droite de médiatrices (en pointillées). Les nœuds de ipos 2 (en vert) sont ajoutés à une intersection inclinée de médiatrice, et ainsi de suite. Il faut distinguer la valeur de ipos de celle de level ; ces notions seront définies dans la section 3

Ces nœuds de base sont appelés nœuds de ipos 0 (marqués en rouge sur **la figure 3.6** ci-dessus). Ils ne peuvent en aucun cas être supprimés. Tous les autres nœuds (de ipos supérieur ou égal à 1) qui seront ajoutés par la suite peuvent en revanche être supprimés. Certains nœuds sont posés exactement sur la frontière (voir

par exemple **la figure**3.8).

Les noeuds ajoutés le sont par “couches successives” : d’abord les noeuds de ipos 1, puis ceux de ipos 2, etc. le principe de Zohour est d’ajouter un nouveau noeud uniquement à l’intersection (lignes en pointillés) de quatre angles droits. Au fur et à mesure qu’on raffine les couches (c’est-à-dire après ajouts de nouveaux noeuds de couches supérieurs), on voit apparaître des mailles carrées alternativement droites (horizontaux et verticaux) et inclinées (bords à 45° et 135°).

Les mailles, créées par le diagramme de **Voronoi**, à la limite d’un nouveau ipos peuvent prendre des formes variées. On dénombre ainsi 10 formes différentes pour les mailles internes au domaine; elles sont répertoriées dans **la figure**(3.7). Les autres mailles (qui s’appuient sur des noeuds de frontière ou des noeuds de coin), peuvent avoir des formes encore différentes : on parlera de demi-cellule pour les premières et de quart-de-cellule pour les secondes.

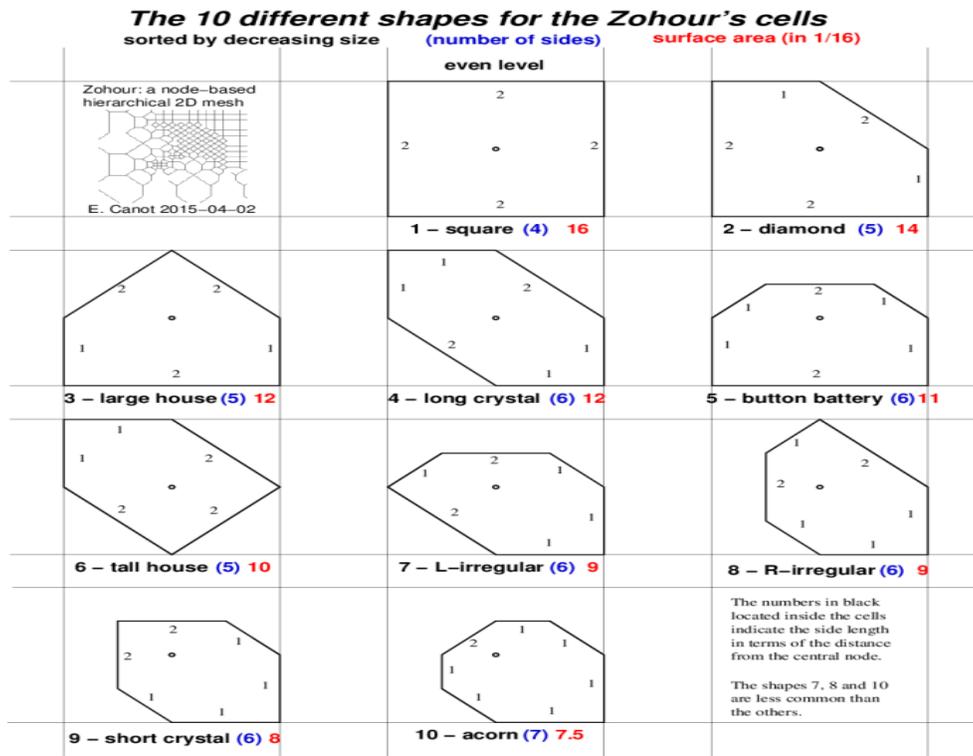


FIGURE 3.7 – Différentes formes de mailles obtenues après des subdivisions (dues aux ajouts de nœuds supplémentaires). Le nom de chacune des formes a été choisie pour rappeler la forme du polygone. Toutes ces formes peuvent être tournées à 90°, 180° ou 270°. La même série existe inclinée à 45°

On trouvera dans les figures(3.8) et (3.9) des exemples de maillages raffinés dans le coin inférieur gauche d'un domaine de base carré.

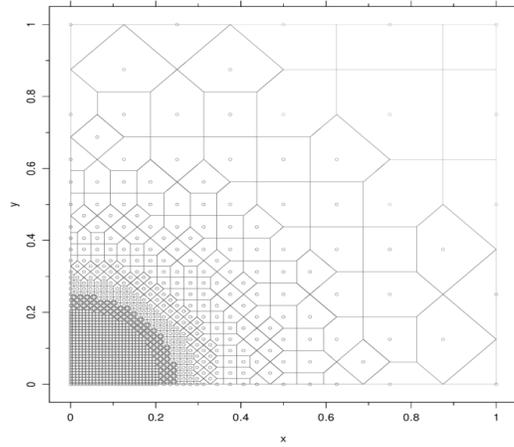


FIGURE 3.8 – Exemple de maillage raffiné par *Zohour* au coin inférieur gauche, qui correspond à un point singulier d’une fonction harmonique. La taille des mailles est d’autant plus petite qu’on se rapproche du point singulier. Les petits ronds représentent la position du nœud interne à chaque cellule.

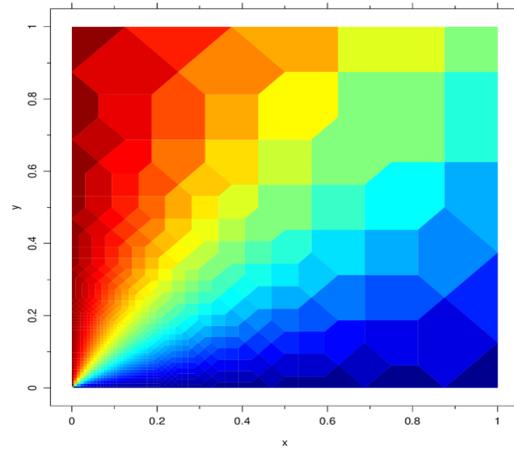


FIGURE 3.9 – Même maillage que celui de la **figure** (3.8), utilisé ici pour représenter en couleurs la solution d’un problème de Laplace singulier au coin inférieur gauche. Conditions limites de type Dirichlet pour les côtés $x = 0$ et $y = 0$, mais avec une discontinuité à l’origine.

3.2.3 Signature d'une forme pour la reconnaissance rapide des cellules

Lors de la mise en oeuvre de la méthode des Volumes Finis à partir d'un maillage de type Zohour, il faut connaître la surface de chaque cellule. Comme on connaît tous les voisins d'une cellule donnée, on pourrait construire le polygone qui définit exactement cette cellule, à partir des médiatrices entre les noeuds voisins (c'est le principe d'une partition de Voronoï), puis calculer la surface de ce polygone. Cette manière de faire a été employée dans les premières versions de Zohour mais conduit à un coût de calcul important.

La version actuelle s'appuie sur la signature des cellules, pour reconnaître rapidement la forme de celles-ci (il n'y a que 10 formes possibles au total, cf. la section précédente). La signature d'une cellule est stockée dans le `type(cell)` (comme précisé dans le listing 1). On la calcule "à la demande". Elle est constituée :

- de huit informations précisant si les voisins N, NE, E, SE, S, SW, W et NW existent (1) ou pas (0), soit 8 bits.
- de huit informations précisant la longueur des côtés Nl, NEl, El, SEl, Sl, SWl, Wl et Nwl. En soustrayant 1 à cette longueur (qui par définition vaut 1 ou 2), on obtient 8 bits.

En comparant la valeur calculée à des signatures de référence (après permutation circulaire éventuelle, voir ci-dessous), on peut en déduire la surface normalisée (valeur en rouge pour chaque cellule de **la figure(3.7)**). Le level de la cellule permet alors de calculer sa surface réelle. La modification d'un bit particulier en Fortran s'effectue avec la fonction `ibset`.

La comparaison entre la signature actuelle et les signatures de référence doit tenir compte du fait que la cellule n'est pas forcément dans la même orientation que celles dessinées en (3.7). On effectue successivement plusieurs shifts sur les bits de la signature pour "tourner" virtuellement la cellule dans les 8 orientations possibles. C'est la fonction Fortran `ishftc` qui permet d'appliquer une permutation circulaire aux bits d'un entier. L'implémentation est programmée dans la routine `quick_cell_area` (10 valeurs de référence).

Le même principe concerne les cellules de bord (routine `quick_cell_area_boundary`, 16 valeurs de référence) et celles de coin (routine `quick_cell_area_corner`, 3 valeurs de référence).

3.2.4 Le calcul du hessien pour un maillage créé par Zohour

Cette section ne relève pas, à proprement parler, de la description du mailleur Zohour, mais de la mise en oeuvre d'une méthode de résolution d'un problème s'appuyant sur un maillage de type Zohour.

Étant donné un problème, souvent décrit par un système d'équations aux dérivées partielles, on va chercher à raffiner le maillage en fonction de critères variés, dont le plus fréquent est la variation de la solution. Le hessien H (composé des dérivées secondes d'une fonction f à deux variables x et y) est à la base d'un tel critère de raffinement :

$$H = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2}$$

C'est un invariant de la matrice hessienne, car il s'exprime en fonction de sa trace et de son déterminant, tous deux également invariants.

pour une maille carrée, et en se limitant à l'opérateur laplacien, on montre que l'erreur de discrétisation pour un schéma de type Volume Fini est proportionnel à Hh^2 , Où h est la longueur du côté de la cellule ; on peut donc déduire facilement un critère pour choisir la taille de la maille h en fonction d'une tolérance donnée à l'avance.

En général, l'estimation de H pour une fonction f s'appuyant sur un maillage quelconque est coûteuse. La valeur du Hessien dépend d'une part des valeurs de f , d'autre part de la position relative des noeuds voisins autour d'un noeud donné. On approche la fonction f (connue de manière discrète seulement) par la fonction quadratique suivante, à six degré de liberté :

$$f(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5y^2 + c_6xy$$

Il faut donc trouver au minimum 6 noeuds (en comprenant le noeud central pour lequel on veut calculer le hessien) afin d'établir un système d'équations linéaires à 6 inconnues. Parfois ces 6 noeuds sont maldisposés (leur alignement respectif est tel que le système est singulier) ; dans ce cas on ajoute des noeuds supplémentaires et on calcule la solution par moindres carrés. Une fois les coefficients c_1 à c_6 calculés, on a alors, de manière triviale :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2c_4; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2c_5; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = c_6$$

La plupart des mailles générées par Zohour sont carrées (voir par exemple 3.7).

Comme ces mailles sont facilement détectables grâce à notre structure de données

(type dérivé cell), on peut faire un précalcul et stocké à l'avance l'inverse de la matrice 6×6 mentionnée plus haut.

En choisissant les six nœuds suivants (cas d'un carré centré à l'origine et entouré de quatre autres carrés) :

$$n_1(0, 0); n_2(0, 1); n_3(1, 0); n_4(0, -1); n_5(-1, 0); n_6(1, 1)$$

Dans ce cas, la matrice hessienne est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice bien conditionnée ($cond \simeq 8$) et nous l'avons inversée exactement (à l'aide de Maple). De plus, il suffit de conserver seulement sa partie inférieur :

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarquera que le calcul sera exempt d'erreur d'arrondi, les coefficients étant 1 ou $1/2$, tous deux exactement représentable en base 2. Il faut simplement introduire

le facteur d'échelle de la maille (lié au niveau de subdivisions) et le hessien se calcul

directement par : $2c_4 = (-2f_1 + f_3 + f_5) * \text{facteur}$

$$2c_5 = (-2f_1 + f_2 + f_4) * \text{facteur}$$

$$c_6 = (f_1 - f_2 - f_3 + f_6) * \text{facteur}$$

Pour certains maillages, comme celui montré sur la (3.8), le calcul global du hessien pour l'ensemble est extrêmement rapide et on gagne un facteur allant jusqu'à 1500 par rapport au cas ordinaire où on ne fait pas ces pré-calculs. Pour donner un ordre de grandeur du temps CPU, ce dernier vaut 0.14 secondes (sur un PC de performance moyenne de 2015) pour un maillage comportant environ 1 726 000 noeuds. Ce temps est négligeable devant le temps typique pour résoudre un problème de type Laplacien sur le même maillage (en utilisant des matrices creuses et un solveur creux direct) :10 secondes environ.

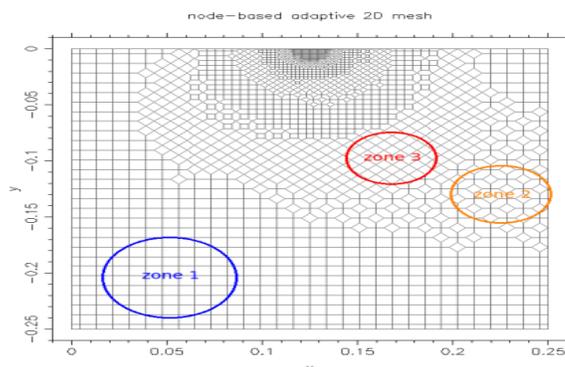


FIGURE 3.10 – Exemple de maillage généré par Zohour et montrant la très bonne progressivité de la taille des mailles. Si dans la zone 1 on compte 4 mailles sur une certaine surface, alors on en compte 6 sur la même surface dans la zone 2, ce qui donne un facteur de progressivité de $3/2$.

Sommaire

4.1	La Méthodes d'approximation de flux multipoint (MPFA)	
	46
4.2	Analyse de la méthode des volumes finis proposée	47
4.2.1	Formulation du problème discret	47
4.2.2	L'existence et l'unicité pour une solution du système discret	49
4.2.3	Estimations d'erreur	52
4.3	Analyse Numérique	59
4.3.1	Premier cas test	59
4.3.2	Deuxième cas test	66

4.1 La Méthodes d'approximation de flux multipoint (MPFA)

La méthodes MPFA peuvent être considérées comme des méthodes de volumes finis de nouvelle génération [11].

Soit l'équation différentielle associée à des conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

$$- \operatorname{div}(D \operatorname{grad} U) = f \quad \text{dans } \Omega \quad (4.1)$$

$$U = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (4.2)$$

telle que :

f est un fonction donné, et Ω est un ouvert donné et $\forall x \in \Omega \quad x = (x_1, x_2)$ et $D = D(x)$, D une matrice symétrique complète décrivant la variation spatiale du coefficient de diffusion où :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{tel que} \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^2 \quad \varepsilon^T D(x) \varepsilon \geq \gamma |\varepsilon|^2 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.3)$$

4.2 Analyse de la méthode des volumes finis proposée

4.2.1 Formulation du problème discret

soit $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, soit $N \in \mathbb{N}^*$

on pose Ω est recouvert d'une grille primaire carrée notée \mathcal{P} dont la taille est $h = \frac{1}{N}$

par contre on note $K_{i,j} = \left[x_1^{i-\frac{1}{2}}, x_1^{i+\frac{1}{2}} \right] \times \left[x_2^{j-\frac{1}{2}}, x_2^{j+\frac{1}{2}} \right]$ où $x_1^{i+\frac{1}{2}} = x_1^{i-\frac{1}{2}} + h$,

$x_2^{j+\frac{1}{2}} = x_2^{j-\frac{1}{2}} + h$, pour $i, j = 1, \dots, N$ avec $x_1^{\frac{1}{2}} = x_2^{\frac{1}{2}} = 0$

D'après la théorie des problèmes de valeurs aux limites, il est clair que sous l'hypothèse supplémentaire suivante :

$$f \in C^m(\overline{\Omega}), \text{ avec } m \in \mathbb{N} \text{ est donné} \quad (4.4)$$

le problème (4.1)(4.2) admet une solution unique φ en $C^{m+2}(\overline{\Omega})$,

posons f est une fonction continue dans $\overline{\Omega}$, Donc φ est une solution unique pour

(4.1) et (4.2) dans $C^2(\overline{\Omega})$, en utilisant une formulation en volume fini du problème

(4.1)-(4.2), nous allons dériver un système discret impliquant $\{u_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq N}$ et

$\left\{ u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right\}_{1 \leq i,j \leq N-1}$ comme des inconnues discrètes censées être des approximations

raisonnables de $\{\varphi_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq N}$ et $\left\{ \varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right\}_{1 \leq i,j \leq N-1}$ respectivement, où

$$\varphi_{i,j} = \varphi(x_1^i, x_2^j) \text{ avec } x_1^i = \frac{x_1^{i-\frac{1}{2}} + x_1^{i+\frac{1}{2}}}{2}, x_2^j = \frac{x_2^{j-\frac{1}{2}} + x_2^{j+\frac{1}{2}}}{2} \text{ et } \varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \varphi(x_1^{i+\frac{1}{2}}, x_2^{j+\frac{1}{2}})$$

intégrons maintenant (4.1) dans le bloc de grille $K_{i,j}$, généralement appelé volume de

contrôle, centré au point (x_1^i, x_2^j) . Application du théorème d'Ostrogradski et d'une

quadrature La formule d'approximation du flux à la frontière de $K_{i,j}$ conduit à la

relation :

$$\begin{aligned}
& D_{21} \left[\varphi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + D_{22} [\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j+1}] + D_{21} \left[\varphi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \varphi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + \\
& D_{22} [\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}] + D_{12} \left[\varphi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + D_{11} [\varphi_{i,j} - \varphi_{i+1,j}] + \\
& D_{12} \left[\varphi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varphi_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + D_{11} [\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}] \\
& \approx \int_{K_{i,j}} f(x) dx \quad \forall 1 \leq i, j \leq N
\end{aligned} \tag{4.5}$$

par les conditions aux limites alors :

$$\varphi_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \varphi_{i+\frac{1}{2},N+\frac{1}{2}} = \varphi_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \varphi_{N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0 \quad 0 \leq i, j \leq N \tag{4.6}$$

et

$$\varphi_{i,0} = \varphi_{0,j} = \varphi_{i,N+1} = \varphi_{N+1,j} = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq N \tag{4.7}$$

Puisque $\varphi = 0$ sur Γ implique $\varphi = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$.

L'équation d'équilibre (4.1) peut être intégrée dans le volume fini $K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = [x_1^i, x_1^{i+1}] \times [x_2^j, x_2^{j+1}]$.

Appliquer une fois de plus Ostrogradski théorème et une formule de quadrature pour approximer le flux sur la frontière de $K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ conduit à la relation suivante :

$$\begin{aligned}
& D_{21} [\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i+1,j+1}] + D_{22} \left[\varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} \right] + D_{21} [\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}] + \\
& D_{22} \left[\varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varphi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + D_{12} [\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i+1,j+1}] + D_{11} \left[\varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varphi_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + \\
& D_{12} [\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}] + D_{11} \left[\varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varphi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] \\
& \approx \int_{K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} f(x) dx \quad \forall 1 \leq i, j \leq N - 1
\end{aligned} \tag{4.8}$$

A partir du système discret fermé (4.5)- (4.8) nous dérivons le problème discret

consistant en à trouver $\{u_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq N}$ et $\left\{u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right\}_{1 \leq i,j \leq N-1}$ alors :

$$\begin{aligned}
 & D_{21} \left[u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + D_{22} [u_{i,j} - u_{i,j+1}] + D_{21} \left[u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + \\
 & D_{22} [u_{i,j} - u_{i,j-1}] + D_{12} \left[u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + D_{11} [u_{i,j} - u_{i+1,j}] + \\
 & D_{12} \left[u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + D_{11} [u_{i,j} - u_{i-1,j}] \\
 & \approx \int_{K_{i,j}} f(x) dx \quad \forall 1 \leq i, j \leq N
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
 & D_{21} [u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1}] + D_{22} \left[u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} \right] + D_{21} [u_{i+1,j} - u_{i,j}] + \\
 & D_{22} \left[u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + D_{12} [u_{i+1,j} - u_{i+1,j+1}] + D_{11} \left[u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + \\
 & D_{12} [u_{i,j+1} - u_{i,j}] + D_{11} \left[u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] \\
 & \approx \int_{K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} f(x) dx \quad \forall 1 \leq i, j \leq N-1
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

on a

$$u_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2},N+\frac{1}{2}} = u_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = u_{N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0 \quad 0 \leq i, j \leq N \tag{4.11}$$

et

$$u_{i,0} = u_{0,j} = u_{i,N+1} = u_{N+1,j} = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq N \tag{4.12}$$

4.2.2 L'existence et l'unicité pour une solution du système discret

La forme matricielle peut être exprimée comme suit :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{cc} \\ U_{vc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{cc} \\ F_{vc} \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

telle que :

$$U_{cc} = \{u_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq N} \text{ et } U_{vc} = \left\{ u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right\}_{1 \leq i,j \leq N-1} \quad (4.14)$$

et où :

- F_{cc} est un sous-vecteur avec des composantes N^2 dépendant du côté droit de (4.9) seulement comme on prend en compte avec (4.11) et (4.12).
- F_{vc} est un sous-vecteur avec $(N-1)^2$ composantes dépendant du côté droit de (4.10) uniquement comme nous tenons compte de (4.11) et (4.12).
- A est une matrice carrée définie positive symétrique $N \times N$, associée à la volume fini centré sur la cellule lorsque D est diagonal, c'est-à-dire : $D_{12} = D_{21} = 0$.
- C est une matrice carrée définie positive symétrique $(N-1) \times (N-1)$ associée à la volume fini classique centré sur les sommets lorsque D est diagonal.
- B est une matrice $N^2 \times (N-1)^2$ et B^T est sa transposée.

Lorsque le coefficient de diffusion D est réduit à une matrice diagonale, le problème discret (4.9)-(4.10) admet la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{cc} \\ U_{vc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{cc} \\ F_{vc} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

danc (4.15) équivalent : $AU_{cc} = F_{cc}$ et $CU_{vc} = F_{vc}$

Puisque A et C sont tous deux définis positivement, l'existence et l'unicité de une solution de (4.15) est assurée. Par conséquent , lorsque D est diagonal, notre formulation fournit plus d'informations sur la solution du problème de diffusion que le formulations classiques en volume fini.

Proposition 4.2.1. *La matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$ associé au problème discret (4.9) -*

(4.10) est symétrique et définie positive.

Le problème discret consistant à trouver $\{u_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq N}$ et $\left\{u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right\}_{1 \leq i,j \leq N-1}$ tel que les équations (4.9)-(4.10) sont satisfaites sous les conditions (4.11) et (4.12), possède une solution unique .

Preuve 4.2.2. On Multiplier (4.9) par $u_{i,j}$ et (4.10) par $u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ et la sommation conduit à (on utilise les notations (4.14)) :

$$\begin{aligned}
 (U_{cc}U_{vc}) \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{cc} \\ U_{vc} \end{pmatrix} = \\
 \{D_{22}(a-b)^2 + D_{21}(c-d)a + D_{21}(d-c)b + D_{11}(c-d)^2 + D_{12}(b-a)d + D_{12}(a-b)c\} \\
 + \{D_{22}(e-d)^2 + D_{21}(a-g)e + D_{21}(g-a)d + D_{11}(a-g)^2 + D_{12}(d-e)g + D_{12}(e-d)a\} + \dots \\
 = \{D_{11}(c-d)^2 + D_{22}(a-b)^2 + D_{12}(c-d)(a-b) + D_{21}(c-d)(a-b)\} \\
 + \{D_{11}(a-g)^2 + D_{22}(e-d)^2 + D_{12}(a-g)(e-d) + D_{21}(a-g)(e-d)\} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

(avec un nombre fini de parenthèses)

où

$$a = u_{i,j} , b = u_{i,j+1} , c = u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} , d = u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} , e = u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} , g = u_{i+1,j} \tag{4.17}$$

Grâce à l'hypothèse (4.3) on déduit de ce qui précède que :

$$\begin{aligned}
 (U_{cc}U_{vc}) \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{cc} \\ U_{vc} \end{pmatrix} &\geq \gamma[(a-d)^2 + (a-b)^2] \\
 + \gamma[(a-g)^2 + (e-d)^2] + \dots &= \gamma \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq N}} \left[(u_{i,j} - u_{i,j+1})^2 + \left(u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right)^2 \right] \\
 + \gamma \sum_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 0 \leq j \leq N}} \left[(u_{i,j} - u_{i+1,j})^2 + \left(u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right)^2 \right] &\geq 0
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Grâce aux relations (4.11) et (4.12) l'égalité est vraie dans (4.18) si et seulement si : $U_{cc} = 0$ et $U_{vc} = 0$,Ainsi la définition positive de la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$ est prouvé.

donc il est clair que le problème discret consistant à trouver

$$U_{cc} = \{u_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq N} \text{ et } U_{vc} = \left\{ u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right\}_{1 \leq i,j \leq N-1} \text{ tel que les équations (4.9) - (4.10)}$$

sont satisfait possède une solution unique.

4.2.3 Estimations d'erreur

Preliminaries

Nous commençons par considérer une autre grille \mathcal{L} (voir **figure**(4.1). Les éléments de \mathcal{L} sont constitués de pastilles L complètement intégrées dans $\bar{\Omega}$. On note Γ_L la frontière de $L \in \mathcal{L}$ et $\mathbf{E}(\mathcal{L})$ l'espace des fonctions v défini presque partout dans \mathbb{R} tel que : v est constant dans $L \in \mathcal{L}$ et nul ailleurs cet espace est évidemment non vide puisque il y a la fonction nulle .

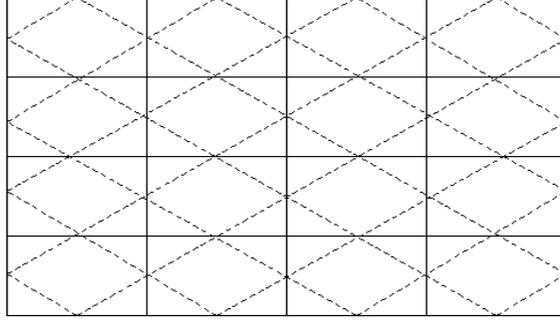


FIGURE 4.1 – Un exemple de grille \mathcal{L} constituée de losanges associés à un rectangle primaire la grille.

Pour tous $v \in \mathbf{E}(\mathcal{L})$

$$\| u \|_{1,h} = \left[\sum_{s \in S} (\Delta_s v) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.19)$$

où

$$(\Delta_s v) = \sum_{\substack{L, K, s, t \\ \Gamma_K \cap \Gamma_L = \{s\}}} |v_L - v_K|^2 \quad (4.20)$$

et où S est l'ensemble des sommets et K, L sont pris dans \mathcal{L} . notons qu'un sommet $s \in S$ pourrait appartenir à la frontière Γ du domaine Dans Ω . Dans ce cas il existe un élément unique L de \mathcal{L} tel que s appartient à la frontière Γ_L de L . Il est donc naturel de définir $(\Delta_s v)$ dans ce cas par $(\Delta_s v) = |v_L|^2$.

la norme définie par (4.19) pourrait être considérée comme une version discrète de $H_0^1(\Omega)$ classique norme. Laissez-nous vous présenter l'espace

$$C_0(\overline{\Omega}) = \{v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est continue et } v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

et l'opérateur suivant :

$$\Pi_Q : C_0(\overline{\Omega}) \rightarrow E(\mathcal{L})$$

$$v \mapsto \Pi_Q v$$

avec

$$[\Pi_Q v](x) = \begin{cases} v(x_L), & \text{si } x \in \text{Int}(L) \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \end{cases}$$

où $L \in \mathcal{L}$ et où $x_L = (x_1^L, x_2^L)$ sont les coordonnées du centre de L . Puisque la solution approchée U_h du problème de diffusion (4.1)-(4.2) est en $C_0(\overline{\Omega})$ nous avons :

$$[\Pi_Q U_h](x) = \begin{cases} U_L, & \text{si } x \in \text{Int}(L) \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \end{cases} \quad (4.21)$$

Définition 4.2.3. Soit v une fonction de $\mathbf{E}(\mathcal{L})$. $v|_\Omega$ est une solution approximative faible pour le problème de diffusion (4.1) - (4.2) s'il existe une solution approchée V de (4.1)-(4.2) de telle sorte que : $v = \Pi_Q V$

Selon cette définition $\Pi_Q U_h$ est une solution approximative faible de (4.1) - (4.2).

Estimations d'erreur

Lors de la prise en compte de l'erreur de troncature, les équations (4.5) - (4.8) sont transformées comme suit :

$$\begin{aligned} & D_{21} \left[\varphi_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - \varphi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right] + D_{22} [\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j+1}] + D_{21} \left[\varphi_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} - \varphi_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right] + \\ & D_{22} [\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}] + D_{12} \left[\varphi_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} - \varphi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} \right] + D_{11} [\varphi_{i,j} - \varphi_{i+1,j}] + \\ & D_{12} \left[\varphi_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - \varphi_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right] + D_{11} [\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}] \\ & = \int_{K_{i,j}} f(x) dx + \sum_{e \in E_{i,j}} h R_{i,j}^e \quad \forall 1 \leq i, j \leq N \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
& D_{21} [\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i+1,j+1}] + D_{22} \left[\varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} \right] + D_{21} [\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}] + \\
& D_{22} \left[\varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varphi_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + D_{12} [\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i+1,j+1}] + D_{11} \left[\varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varphi_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + \\
& D_{12} [\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}] + D_{11} \left[\varphi_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varphi_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] \\
& = \int_{K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} f(x) dx + \sum_{e \in E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} h R_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^e \quad \forall 1 \leq i, j \leq N-1
\end{aligned} \tag{4.23}$$

avec

$$\varphi_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \varphi_{i+\frac{1}{2},N+\frac{1}{2}} = \varphi_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \varphi_{N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0 \quad 0 \leq i, j \leq N \tag{4.24}$$

et

$$\varphi_{i,0} = \varphi_{0,j} = \varphi_{i,N+1} = \varphi_{N+1,j} = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq N \tag{4.25}$$

Où $E_{i,j}$ et $E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ sont des ensembles d'arêtes associés respectivement à $K_{i,j}$ et $K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$, et où $R_{i,j}^e$ et $R_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^e$ désignent l'erreur de troncature associée avec l'approximation du flux sur les arêtes $e_{i,j}$ et $e_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ respectivement.

De plus, sous l'hypothèse $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, l'erreur de troncature satisfait les inégalités suivantes :

$$|R_{i,j}^e| \leq Ch^2 \quad \text{et} \quad |R_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^e| \leq Ch^2 \tag{4.26}$$

donc, en raison de la propriété de conservativité de la formulation en volume fini proposée, nous avons :

$$R_K^e + R_I^e = 0 \tag{4.27}$$

où K et I sont deux volumes de contrôle adjacents tels que $e = \Gamma_K \cap \Gamma_I$.

Une fonction ε_h presque partout dans \mathbb{R}^2

$$\varepsilon_h(x) = \begin{cases} \varepsilon_L & \text{si } x \in \text{Int}(L) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } L \in \mathcal{L} \tag{4.28}$$

où, on a posé $\varepsilon_L = \varphi_L - u_L, \forall L \in \mathcal{L}$. Notez que l'élément L du le maillage \mathcal{L} est nécessaire centré sur un point dont les coordonnées cartésiennes sont de la forme (x_1^i, x_2^j) ou $(x_1^{i+\frac{1}{2}}, x_2^{j+\frac{1}{2}})$, ε_L est un nom générique de $\varepsilon_{i,j}$ ou $\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$.

Remarque 4.2.4. De la relation (4.28), nous voyons que la fonction est en fait dans $E(\mathcal{L})$. Cette fonction exprime l'erreur dans un certain sens et certaines estimations de cette erreur sont données par suit.

On montrer que les $\{\varepsilon_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq N}$ et $\{\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\}_{1 \leq i,j \leq N-1}$ sont une solution d'un problème discret de la forme (4.9)-(4.12). Soustraire (4.9) de (4.22) et (4.10) de (4.23) et réorganiser les termes donne :

$$\begin{aligned} & D_{21} \left[\varepsilon_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + D_{22} [\varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{i,j+1}] + D_{21} \left[\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \varepsilon_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + \\ & D_{22} [\varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{i,j-1}] + D_{12} \left[\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + D_{11} [\varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{i+1,j}] + \\ & D_{12} \left[\varepsilon_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varepsilon_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + D_{11} [\varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{i-1,j}] \\ & = \sum_{e \in E_{i,j}} hR_{i,j}^e \quad \forall 1 \leq i, j \leq N \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} & D_{21} [\varepsilon_{i,j+1} - \varepsilon_{i+1,j+1}] + D_{22} \left[\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}} \right] + D_{21} [\varepsilon_{i+1,j} - \varepsilon_{i,j}] + \\ & D_{22} \left[\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] + D_{12} [\varepsilon_{i+1,j} - \varepsilon_{i+1,j+1}] + D_{11} \left[\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varepsilon_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}} \right] + \\ & D_{12} [\varepsilon_{i,j+1} - \varepsilon_{i,j}] + D_{11} \left[\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varepsilon_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right] \\ & = \sum_{e \in E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} hR_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^e \quad \forall 1 \leq i, j \leq N-1 \end{aligned} \tag{4.30}$$

avec

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \varepsilon_{i+\frac{1}{2},N+\frac{1}{2}} = \varepsilon_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \varepsilon_{N+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = 0 \quad 0 \leq i, j \leq N \tag{4.31}$$

et

$$\varepsilon_{i,0} = \varepsilon_{0,j} = \varphi_{i,N+1} = \varepsilon_{N+1,j} = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq N \tag{4.32}$$

Multiplier (4.29) et (4.30) par $\varepsilon_{i,j}$ et $\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$ respectivement, additionnant sur i,j et réorganiser les termes du côté gauche après sommation cête à cête des deux équations finales, conduit à l'inégalité suivante grâce à (4.3) :

$$\begin{aligned}
 \gamma \|\varepsilon_h\|_{1,h}^2 &\leq \sum_{1 \leq i,j \leq N} \left(h \varepsilon_{i,j} \sum_{e \in E_{i,j}} R_{i,j}^e \right) \\
 &+ \sum_{1 \leq i,j \leq N-1} h \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \left(\sum_{e \in E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} R_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^e \right) \leq h \sum_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N} \\
 &a_{i,j} \left[|\varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{i,j+1}| + |\varepsilon_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}| \right] \\
 &+ h \sum_{0 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N} b_{i,j} \left[|\varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{i+1,j}| + |\varepsilon_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - \varepsilon_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}| \right] \\
 &\leq (\text{double application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\
 &\leq 2h \left[\sum_{1 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N} a_{i,j}^2 + \sum_{0 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N} a_{i,j}^2 b_{i,j} \right] \|\varepsilon_h\|_{1,h}
 \end{aligned}$$

Où

$$\begin{cases} a_{i,j} = \max \left\{ R_{i,j}, R_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} \right\} & \text{pour } 1 \leq i \leq N \text{ et } 0 \leq j \leq N \\ b_{i,j} = \max \left\{ R_{i,j}, R_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right\} & \text{pour } 0 \leq i \leq N \text{ et } 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} R_{i,j} = \max_e |R_{i,j}^e| \quad , \quad R_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \max_e |R_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^e| & \text{pour } 1 \leq i \leq N \text{ et } 0 \leq j \leq N \\ R_{i,j} = \max_e |R_{i,j}^e| \quad , \quad R_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \max_e |R_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^e| & \text{pour } 0 \leq i \leq N \text{ et } 1 \leq j \leq N \end{cases}$$

On en déduit donc, grâce à (4.26), que pour $\varphi \in C^3(\overline{\Omega})$

on a

$$\|\varepsilon_h\|_{1,h} \leq \Lambda h^2 \tag{4.33}$$

comme $\Lambda > 0$ dépendant exclusivement de φ , Ω et γ .

Examinons maintenant une estimation d'erreur pour la norme L^∞ définie sur la espace $\mathbf{E}(\mathcal{L})$ par :

$$\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_L |v_L| \iff \|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{1 \leq i, j \leq N} |v_{i,j}|$$

puisque $\varepsilon_{0,j} = 0$ donc

$$\varepsilon_{i,j} = -\varepsilon_{0,j} + \varepsilon_{1,j} - \varepsilon_{1,j} + \varepsilon_{2,j} - \varepsilon_{2,j} + \dots + \varepsilon_{i-1,j} - \varepsilon_{i-1,j} + \varepsilon_{i,j}$$

D'après l'inégalité de Minkowski, alors :

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{i,j}| &\leq |-\varepsilon_{0,j} + \varepsilon_{1,j}| + |-\varepsilon_{1,j} + \varepsilon_{2,j}| + \dots + |-\varepsilon_{i-1,j} + \varepsilon_{i,j}| \\ &\leq \sum_{m=0}^{i-1} |\varepsilon_{m+1,j} - \varepsilon_{m,j}| \quad \forall 1 \leq i, j \leq N \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_{N+1,j} = 0$ (voir relation (4.32)), l'application des inégalités de Cauchy-Schwarz conduit à :

$$\max_{1 \leq i, j \leq N} |\varepsilon_{i,j}| \leq \sqrt{2} h^{-\frac{1}{2}} \|\varepsilon_h\|_{1,h}$$

en utilisant (4.33), alors

$$\|\varepsilon_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sqrt{2} \Lambda h^{\frac{3}{2}}$$

4.3 Analyse Numérique

Soit $\Omega =]0, 1[^2$ On considérons deux problèmes de Dirichlet de test Dans chaque problème, nous sélectionnons un tenseur de diffusion complète uniforme D et le solution $\varphi(x_1, x_2)$.

Ensuite, nous calculons le côté droit correspondant dans l'équation de continuité (4.1).

La solution approchée considérée est une fonction constante par morceaux L'erreur ε_h est effectuée dans les normes suivantes :

$$\| \varepsilon \|_{1,h} = \left[\sum_{\substack{K,L \\ \exists s \in S \Gamma_L \cap \Gamma_K = \{s\}}} | \varepsilon_L - \varepsilon_K |^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{où } \varepsilon_L = \varphi_L - u_L$$

$$L^\infty - \varepsilon_r = \max_{i,j=1,\dots,N} | \varphi_{ij} - u_{ij} | \quad \text{et } L^2 - \varepsilon_r = \left[\int_{\Omega} (\varphi - u_h)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

avec : $\varepsilon_r = \text{Erreur}$

4.3.1 Premier cas test

$$-div(D grad u) = f \quad \text{dans }]0, 1[^2 \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La solution exacte est :

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1(x_1 - 1)x_2(x_2 - 1)$$

on a

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = (2x_1 - 1)(x_2^2 - x_2) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = (2x_2 - 1)(x_1^2 - x_1) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div}(D\nabla\varphi) &= -\frac{\partial}{\partial x_1} \left[D_{11} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + D_{12} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D_{21} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + D_{22} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \right] \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} [2(2x_1 - 1)(x_2^2 - x_2) + 2(2x_2 - 1)(x_1^2 - x_1)] \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial x_2} [(2x_1 - 1)(x_2^2 - x_2) + 2(2x_2 - 1)(x_1^2 - x_1)] \\
 &= -[4(x_2^2 - x_2) + 2(2x_1 - 1)(2x_2 - 1)] - [4(x_1^2 - x_1) + (2x_1 - 1)(2x_2 - 1)] \\
 &= -4(x_2^2 - x_2) - 3(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) - 4(x_1^2 - x_1) \\
 &= -4x_2^2 - 4x_1^2 + 10x_1 + 10x_2 - 12x_1x_2 - 3
 \end{aligned}$$

Ainsi $f = -4x_2^2 - 4x_1^2 + 10x_1 + 10x_2 - 12x_1x_2 - 3$

Calcule l'inégral

on calcule un integral pour détermine F_{cc} et F_{vc}

on a $K_{i,j} = [x_1^{i-\frac{1}{2}}, x_1^{i+\frac{1}{2}}] \times [x_2^{j-\frac{1}{2}}, x_2^{j+\frac{1}{2}}]$

$$\begin{aligned}
 \int_{K_{i,j}} f(X) dX &= \int_{x_1^{i-\frac{1}{2}}}^{x_1^{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_2^{j-\frac{1}{2}}}^{x_2^{j+\frac{1}{2}}} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\
 &= \int_{x_1^{i-\frac{1}{2}}}^{x_1^{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_2^{j-\frac{1}{2}}}^{x_2^{j+\frac{1}{2}}} (-4x_1^2 + 10x_1 - 4x_2^2 + 10x_2 - 12x_1x_2 - 3) dx_2 dx_1 \\
 &= h \int_{x_1^{i-\frac{1}{2}}}^{x_1^{i+\frac{1}{2}}} (-4x_1^2 + 10x_1) dx_1 + h \int_{x_2^{j-\frac{1}{2}}}^{x_2^{j+\frac{1}{2}}} (-4x_2^2 + 10x_2) dx_2 \\
 &\quad - \int_{x_1^{i-\frac{1}{2}}}^{x_1^{i+\frac{1}{2}}} [6x_1x_2^2]_{x_2^{j-\frac{1}{2}}}^{x_2^{j+\frac{1}{2}}} dx_1 - 3h^2 \\
 &= h \left[\left(\frac{-4}{3}\right)x_1^3 + 5x_1^2 \right]_{x_1^{i-\frac{1}{2}}}^{x_1^{i+\frac{1}{2}}} + h \left[\left(\frac{-4}{3}\right)x_2^3 + 5x_2^2 \right]_{x_2^{j-\frac{1}{2}}}^{x_2^{j+\frac{1}{2}}} \\
 &\quad - \int_{x_1^{i-\frac{1}{2}}}^{x_1^{i+\frac{1}{2}}} 6x_1((x_2^{j+\frac{1}{2}})^2 - (x_2^{j-\frac{1}{2}})^2) dx_1 - 3h^2 \\
 &= h \left(\left(\frac{-4}{3}\right)((x_1^{i+\frac{1}{2}})^3 - (x_1^{i-\frac{1}{2}})^3) + 5((x_1^{i+\frac{1}{2}})^2 - (x_1^{i-\frac{1}{2}})^2) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ h \left(\left(\frac{-4}{3} \right) ((x_2^{j+\frac{1}{2}})^3 - (x_2^{j-\frac{1}{2}})^3) + 5((x_2^{j+\frac{1}{2}})^2 - (x_2^{j-\frac{1}{2}})^2) \right) \\
 &- 3h^2((x_1^{i+\frac{1}{2}} + x_1^{i-\frac{1}{2}})((x_2^{j+\frac{1}{2}} + x_2^{j-\frac{1}{2}}) - 3h^2) \\
 &= h^2 \left(\left(\frac{-4}{3} \right) ((x_1^{i+\frac{1}{2}})^2 + (x_1^{i-\frac{1}{2}})^2 + x_1^{i+\frac{1}{2}}x_1^{i-\frac{1}{2}}) + 5(x_1^{i+\frac{1}{2}} + x_1^{i-\frac{1}{2}}) \right) \\
 &+ h^2 \left(\left(\frac{-4}{3} \right) ((x_2^{j+\frac{1}{2}})^2 + (x_2^{j-\frac{1}{2}})^2 + x_2^{j+\frac{1}{2}}x_2^{j-\frac{1}{2}}) + 5(x_2^{j+\frac{1}{2}} + x_2^{j-\frac{1}{2}}) \right) \\
 &- 3h^2(x_1^{i+\frac{1}{2}} + x_1^{i-\frac{1}{2}})((x_2^{j+\frac{1}{2}} + x_2^{j-\frac{1}{2}}) - 3h^2)
 \end{aligned}$$

on a : $K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = [x_1^i, x_1^{i+1}] \times [x_2^j, x_2^{j+1}]$

de même manière

$$\begin{aligned}
 \int_{K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} f(X)dX &= h^2 \left(\left(\frac{-4}{3} \right) ((x_1^{i+1})^2 + (x_1^i)^2 + x_1^{i+1}x_1^i) + 5(x_1^{i+1} + x_1^i) \right) \\
 &+ h^2 \left(\left(\frac{-4}{3} \right) ((x_2^{j+1})^2 + (x_2^j)^2 + x_2^{j+1}x_2^j) + 5(x_2^{j+1} + x_2^j) \right) \\
 &- 3h^2(x_1^{i+1} + x_1^i)((x_2^{j+1} + x_2^j) - 3h^2)
 \end{aligned}$$

Notre matrices A, B, C et AA dans le cas $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AA = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 8 & -2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 8 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & -2 & 8 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 3 & -3 & 0 & -2 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 3 & -3 & 0 & -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

On a calculé la solution exacte et la solution approchée par méthode MPFA avec matlab, après on a calculé les erreurs L^2 et L^∞ pour différents pas de maillages qu'ils sont situés dans le tableau suivant :

h	erreurL^∞	erreurL^2
0.3333333333333333	0.298197279429887	0.298406090600872
0.1666666666666667	0.070644148292368	0.071354133786225
0.1111111111111111	0.039612918071149	0.035843250508368
0.0833333333333333	0.021046942054008	0.020424910911166
0.0666666666666667	0.012408171890553	0.013576023772278
0.0555555555555556	0.008656022132364	0.008656022132364
0.047619047619048	0.007116067667636	0.007116067667636
0.0416666666666667	0.004982617119410	0.005506296628663
0.037037037037037	0.004391870766313	0.004391870766313
0.0333333333333333	0.003771811081135	0.003587534791372

On a tracé logarithme de l'erreur par rapport à pour les deux erreurs :

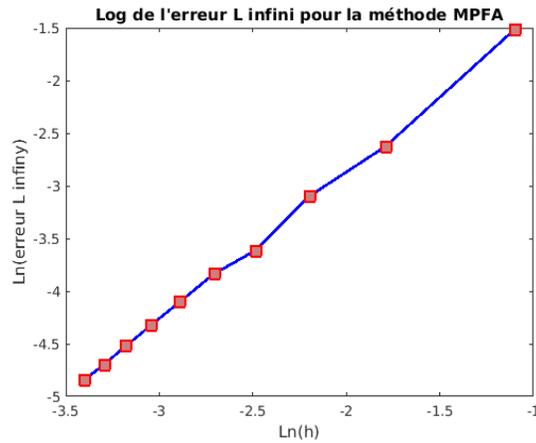


FIGURE 4.2 – Log de l'erreur L^∞ pour la méthode proposée.

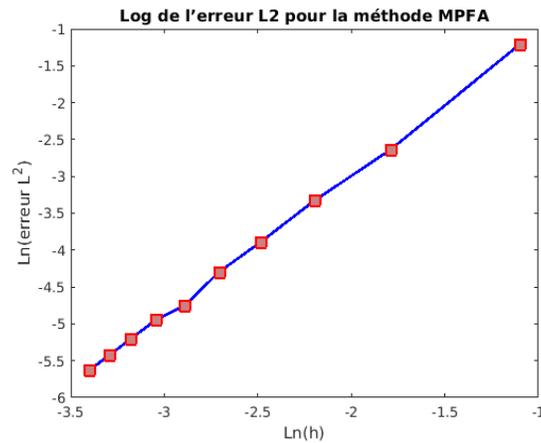
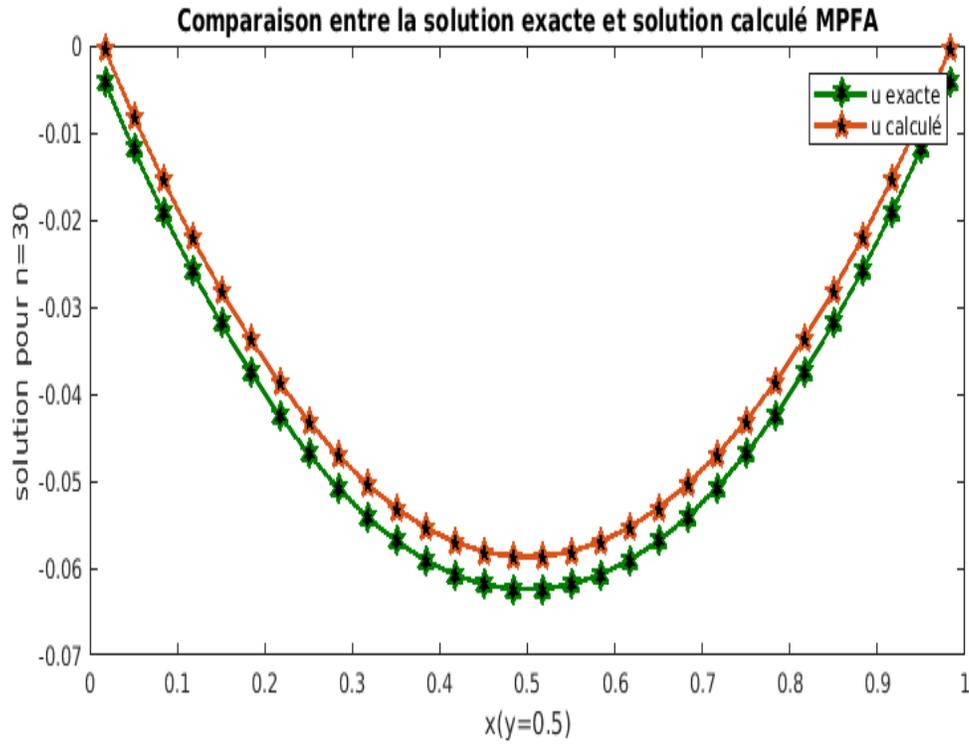


FIGURE 4.3 – Log de l'erreur L^2 pour la méthode proposée.

Remarque 4.3.1. On a : $\|\varepsilon_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sqrt{2}\Lambda h^{\frac{3}{2}}$

Dans notre figure (4.2), si on calcule la pente de ce segment, on trouve 1.92 pour l'erreur L^2 et 1.45 pour L^∞ . alors on a validé les résultats théoriques

Dans la figure suivante une comparaison entre la solution exacte et solution approché et on remarque que la solution calculé est proche de la solution exacte.



4.3.2 Deuxième cas test

$$-\operatorname{div}(D\nabla u) = f \quad \text{dans }]0, 1[^2 \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 100 \end{pmatrix}$$

La solution exacte est :

$$\varphi(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$$

on pose $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(D\nabla\varphi) &= -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(a \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + b \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(c \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + d \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \right) \\ &= -a \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} - b \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} - c \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} - d \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \pi \cos(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} = -\pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = \pi \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = -\pi^2 \cos(\pi x_2) \sin(\pi x_1) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1} = \pi^2 \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2)$$

Donc :

$$-\operatorname{div}(D\nabla\varphi) = -20\pi^2 \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2) + 101\pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$$

Donc

$$f = -20\pi^2 \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2) + 101\pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$$

Calcul de l'intégral

$$K_{i,j} = \left[x_1^{i-\frac{1}{2}}, x_1^{i+\frac{1}{2}} \right] \times \left[x_2^{j-\frac{1}{2}}, x_2^{j+\frac{1}{2}} \right]$$

$$\begin{aligned} \int_{K_{i,j}} f(X) dX &= \int_{x_1^{i-\frac{1}{2}}}^{x_1^{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_2^{j-\frac{1}{2}}}^{x_2^{j+\frac{1}{2}}} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_{x_1^{i-\frac{1}{2}}}^{x_1^{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_2^{j-\frac{1}{2}}}^{x_2^{j+\frac{1}{2}}} (-20\pi^2 \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2) + 101\pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)) dx_2 dx_1 \\ &= 101\pi^2 \int_{x_1^{i-\frac{1}{2}}}^{x_1^{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_2^{j-\frac{1}{2}}}^{x_2^{j+\frac{1}{2}}} \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) dx_2 dx_1 \\ &\quad - 20\pi^2 \int_{x_1^{i-\frac{1}{2}}}^{x_1^{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_2^{j-\frac{1}{2}}}^{x_2^{j+\frac{1}{2}}} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2) dx_2 dx_1 \\ &= 101 \left[\cos \pi x_2 \right]_{x_2^{j-\frac{1}{2}}}^{x_2^{j+\frac{1}{2}}} \left[\cos \pi x_1 \right]_{x_1^{i-\frac{1}{2}}}^{x_1^{i+\frac{1}{2}}} - 20\pi \left[\sin \pi x_2 \right]_{x_2^{j-\frac{1}{2}}}^{x_2^{j+\frac{1}{2}}} \left[\sin \pi x_1 \right]_{x_1^{i-\frac{1}{2}}}^{x_1^{i+\frac{1}{2}}} \\ &= 101 \left[\cos(\pi x_2^{j+\frac{1}{2}}) - \cos(\pi x_2^{j-\frac{1}{2}}) \right] \left[\cos(\pi x_1^{i+\frac{1}{2}}) - \cos(\pi x_1^{i-\frac{1}{2}}) \right] \\ &\quad - 20 \left[\sin(\pi x_2^{j+\frac{1}{2}}) - \sin(\pi x_2^{j-\frac{1}{2}}) \right] \left[\sin(\pi x_1^{i+\frac{1}{2}}) - \sin(\pi x_1^{i-\frac{1}{2}}) \right] \end{aligned}$$

On a

$$\begin{cases} \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{K_{i,j}} f(X) dX &= 101 \left[-2 \sin\left(\frac{\pi x_2^{j+\frac{1}{2}} + \pi x_2^{j-\frac{1}{2}}}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2^{j+\frac{1}{2}} - \pi x_2^{j-\frac{1}{2}}}{2}\right) \right] \\ &\quad \times \left[-2 \sin\left(\frac{\pi x_1^{i+\frac{1}{2}} + \pi x_1^{i-\frac{1}{2}}}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi x_1^{i+\frac{1}{2}} - \pi x_1^{i-\frac{1}{2}}}{2}\right) \right] \\ &\quad - 20 \left[2 \cos\left(\frac{\pi x_2^{j+\frac{1}{2}} + \pi x_2^{j-\frac{1}{2}}}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2^{j+\frac{1}{2}} - \pi x_2^{j-\frac{1}{2}}}{2}\right) \right] \\ &\quad \times \left[2 \cos\left(\frac{\pi x_1^{i+\frac{1}{2}} + \pi x_1^{i-\frac{1}{2}}}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi x_1^{i+\frac{1}{2}} - \pi x_1^{i-\frac{1}{2}}}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\int_{K_{i,j}} f(X)dX = 404 \left[\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right) \right]^2 \sin\left[\frac{\pi x_2^{j+\frac{1}{2}} + \pi x_2^{j-\frac{1}{2}}}{2}\right] \sin\left[\frac{\pi x_1^{i+\frac{1}{2}} + \pi x_1^{i-\frac{1}{2}}}{2}\right] \\ - 80 \left[\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right) \right]^2 \cos\left[\frac{\pi x_2^{j+\frac{1}{2}} + \pi x_2^{j-\frac{1}{2}}}{2}\right] \cos\left[\frac{\pi x_1^{i+\frac{1}{2}} + \pi x_1^{i-\frac{1}{2}}}{2}\right]$$

on a : $K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = [x_1^i, x_1^{i+1}] \times [x_2^j, x_2^{j+1}]$

de même manière

$$\int_{K_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}} f(X)dX = 404 \left[\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right) \right]^2 \sin\left[\frac{\pi x_2^{j+1} + \pi x_2^j}{2}\right] \sin\left[\frac{\pi x_1^{i+1} + \pi x_1^i}{2}\right] \\ - 80 \left[\sin\left(\frac{\pi h}{2}\right) \right]^2 \cos\left[\frac{\pi x_2^{j+1} + \pi x_2^j}{2}\right] \cos\left[\frac{\pi x_1^{i+1} + \pi x_1^i}{2}\right]$$

Notre matrices A, B, C et AA dans le cas $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 202 & -100 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 202 & -100 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 202 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 202 & -100 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -100 & 202 & -100 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -100 & 202 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 202 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -100 & 202 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -100 & 202 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & -20 & 0 \\ -20 & 20 & 20 & -20 \\ 0 & -20 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 202 & -100 & -1 & 0 \\ -100 & 202 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 202 & -100 \\ 0 & -1 & -100 & 202 \end{pmatrix}$$

AA =

```

202 -100  0  -1  0  0  0  0  0  -20  0  0  0
-100 202 -100  0  -1  0  0  0  0  20 -20  0  0
  0 -100 202  0  0  -1  0  0  0  0  20  0  0
 -1  0  0 202 -100  0  -1  0  0  20  0 -20  0
  0 -1  0 -100 202 -100  0  -1  0 -20  20  20 -20
  0  0  -1  0 -100 202  0  0  -1  0 -20  0  20
  0  0  0  -1  0  0 202 -100  0  0  0  20  0
  0  0  0  0  -1  0 -100 202 -100  0  0 -20  20
  0  0  0  0  0  -1  0 -100 202  0  0  0 -20
-20  20  0  20 -20  0  0  0  0  202 -100 -1  0
  0 -20  20  0  20 -20  0  0  0 -100 202  0 -1
  0  0  0 -20  20  0  20 -20  0  -1  0 202 -100
  0  0  0  0 -20  20  0  20 -20  0  -1 -100 202

```

FIGURE 4.4 – La matrice global

On a calculé la solution exacte et la solution approchée par la méthode MPFA avec matlab, après on a calculé les erreurs L^2 et L^∞ pour différents pas de maillages qu'ils sont situés dans le tableau suivant :

h	erreurL^∞	erreurL^2
0.3333333333333333	0.003631114791357	0.161339454422524
0.1666666666666667	0.001376906392298	0.038532828179831
0.1111111111111111	0.000676531772408	0.019115710915666
0.0833333333333333	0.000501244521441	0.009771896461995
0.0666666666666667	0.00039873569162	0.007725376488443
0.0555555555555556	0.000274233228759	0.005000363240845
0.047619047619048	0.000226114944061	0.003626291707593
0.0416666666666667	0.000185190047315	0.003088886154000
0.037037037037037	0.000156376074424	0.002221562013084
0.0333333333333333	0.000148739774943	0.001999126945420

On tracer logarithme de l'erreur par rapport à $\log(h)$:

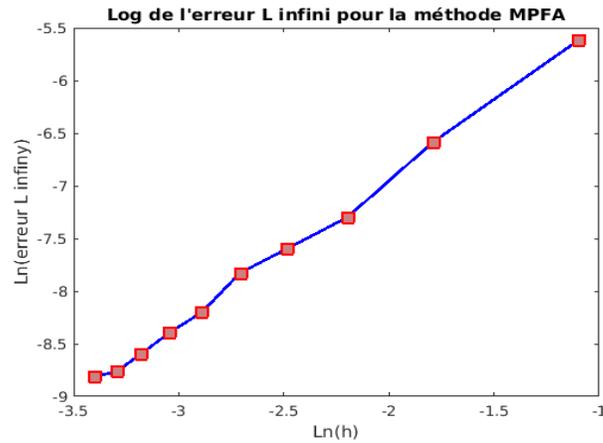


FIGURE 4.5 – Log de l'erreur L^∞ pour la méthode proposée

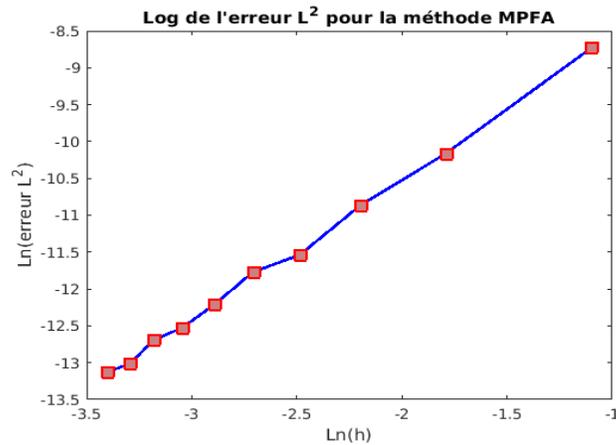
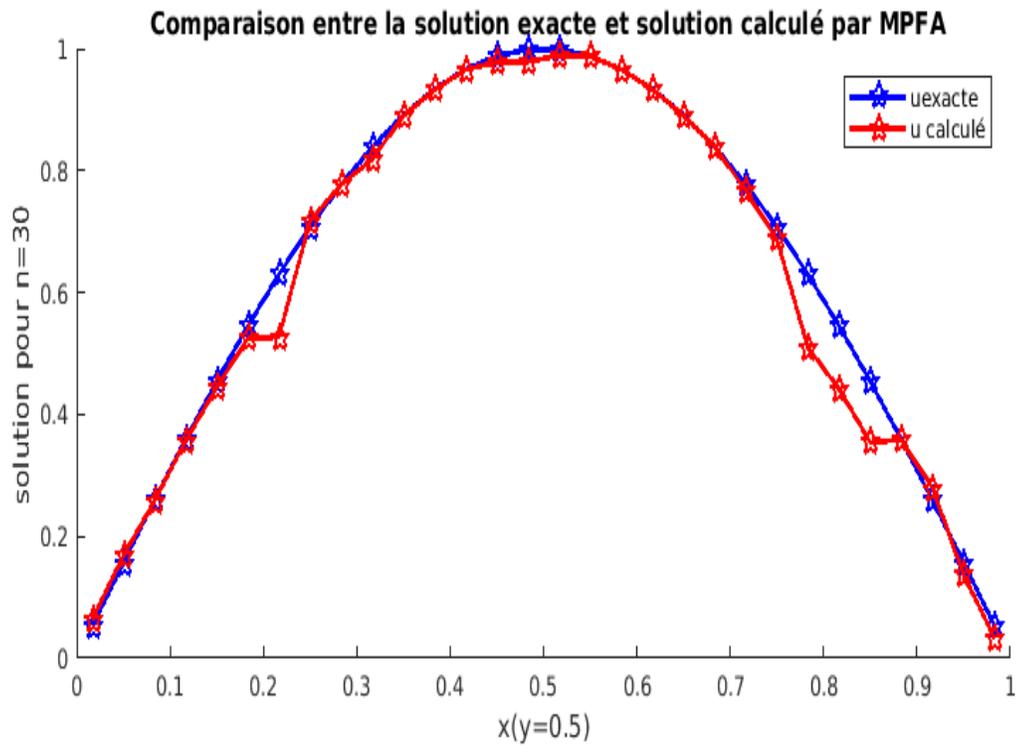


FIGURE 4.6 – Log de l'erreur L^2 pour la méthode proposée

Remarque 4.3.2. On remarque aussi ici que la pente dans le cas L^∞ est 1.43 et dans le cas L^2 est 1.95 qui valide les résultats théorique

On trace la solution exacte et la solution calculé par notre méthode dans la figure suivante :



On remarque que la solution calculé est proche de la solution exacte .

Nous avons présenté dans ce travail une nouvelle méthode MPFA pour résoudre les problèmes d'écoulement en milieu anisotrope non homogène. Cette méthode a montré une grande capacité de calcul, avec une précision satisfaisante, les flux au sein de milieux non homogènes impliquant de fortes anisotropies.

Dans le cadre homogène, les estimations de stabilité et d'erreur ont été prouvées pour la méthode proposée en L^∞ -norme, L^2 -norme. Ces résultats ont été confirmés par des expériences numériques réalisées avec divers exemples. Certaines expériences numériques ont été réalisées avec des exemples extraits de la littérature.

Dans cette connection, la méthode MPFA proposée conduit à un système discret symétrique défini positif. De plus si le coefficient de diffusion est diagonal ce système discret est en fait réalisé de deux systèmes linéaires indépendants correspondant à la cellule bien connue centrée et méthodes de volumes finis centrés sur les sommets.

Abstract

Finite Volumes methods are built from an integral formulation based directly on the strong form of the equations to be solved. Integrals do not relate to the whole field in which the equations are asked, but to disjoint cells called control volumes. The Finite Volumes method is increasingly used for digital resolution partial differential equations because it is easy to implement. One of the elementary ingredients of this method is the calculation of the fluxes at the faces elements. A very simple scheme uses two nodes (TPFA = Two-Point Flux Approximation) but it is, in general, only of order one. We must then turn towards more complex schemes, called MPFA (Multiple-Point Flux Approximation) to get order two anyway.

Zohour when modifying the mesh, new nodes appear ; for this reason the name given to this mesh the algorithm is "Zohour".

We present in this thesis a flexible multipoint flow based on a volume finite Approximation method (MPFA method, in short) showing strong capacities to manage flow problems in inhomogeneous anisotropic media. When the diffusion coefficient governing the flux is a full matrix with components constants, the discrete system is symmetric definite positive even if this matrix is only positive definite. Moreover,

if the diffusion coefficient is diagonal, the discrete system is reduced to two independent discrete systems corresponding to well-known systems centered on cells and centered on vertices methods of finished volumes.

A result of the error estimates are given in the L^2 and L^∞ standards and in a discrete energy standard as well. These results were confirmed by experiments digital.

Bibliographie

- [1] Jerome Droniou. *FINITE VOLUME SCHEMES FOR DIFFUSION EQUATIONS : INTRODUCTION TO AND REVIEW OF MODERN METHODS. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, World Scientific Publishing, 2014, 24 (8), pp.1575-1619.* 10.1142/S0218202514400041. hal-00813613v3
- [2] F. Moukalled , L. Mangani M. Darwish *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics*
- [3] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. Finite volume methods. In P. G. Ciarlet and J.-L. Lions, editors, *Techniques of Scientific Computing, Part III*, Handbook of
- [4] I. Faille. A control volume method to solve an elliptic equation on a two-dimensional irregular mesh. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 100(2) :275 - 290, 1992
- [5] I. Aavatsmark. An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids. *Comput. Geosci.*, 6(3-4) :405–432, 2002. Locally conservative numerical methods for flow in porous media.

- [6] I. Aavatsmark, T. Barkve, O. Bøe, and T. Mannseth. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. I. Derivation of the methods. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19(5) :1700–1716 (electronic), 1998. Ph. Ciarlet J.L. Lions eds, North Holland, 2000, 715-1022.
- [7] I. Aavatsmark, G. T. Eigestad, B. T. Mallison, and J. M. Nordbotten. A compact multipoint flux approximation method with improved robustness. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 24(5) :1329–1360, 2008
- [8] J-F. Scheid. *Volumes Finis*. Année 2017-2018
- [9] Jonathan ROCHAT Sous la direction du professeur B. Dacorogna et O. Kneuss. *Les espaces de Sobolev*
- [10] Eric Blayo. *Notes de cours sur la méthode des éléments finis*. Janvier 2010
- [11] A Njifenjou, I. M. Nguena. *A finite volume approximation for second order elliptic problems with a full matrix on quadrilateral grids : derivation of the scheme and a theoretical analysis*. *International Journal on Finite Volumes*, Institut de Mathématiques de Marseille, AMU, 2006, 3 (2), pp.1-30. fhal- 01120121