Ministère De L̕enseignement Superieur Et De La Rechreche Scientifique

Université Ibn Khaldoun - Tiaret

Préparée au Département des Mathématiques

présenté par

***Amrane Amina**

***Belakhdar fatima zohra**
***Reddah bochra**

Spécialité : Mathématique

Option : Annalyse Fonctionnelle et équation différentielle

sujet de Mémoire
Étude de quelques problèmes aux limites d'équations différentielles implicites d'ordre fractionnaires

Mémoire de fin D'étude Pour Obtenir

Le diplome de Master

présenter et Soutenue publiquement le 30/09/2020

devant le jury composé de

***MOKHTARI MOKHTAR**	**MAA**	**Président**
***SOUID MOHHAMED SAID**	**MCA**	**Encadreur**
*** SOFRANI MOHAMMED**	**MCA**	**Examinateur**

Remerciement

✓ Nous remercions avant tous ALLAH qui nous a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

✓ Nous tenons à remercier sincèrement **Mr Souid Mohammed Said** non seuleument pour avoir accepté de nous encadré et aussi nous faire profiter de ses connaissance mais aussi pour sa patience et pour le totale confience qu'il nous a accordé .

✓ Nous remercions vivement **Dr Mokhtari Mokhtar** de l'honneur qu'il nous fait en président ce jury .

✓ Nous remercions également **Dr Sofrani Mohammed** pour l'honneur qu'il fait d'avoir accepeter l'examen de ce travail.

✓ Enfin nous adressons nos remerciements à tous ceux qui ont contribué par leurs conseils ou leurs encouragements à l'aboutissement de ce travail : nos famille, nos amies, nos professeurs.

Dédicace

★ *Je rend grâce à dieu m'avoir donner le courage et la volonté pour terminer mes études*

★ *A mes trés chèrs parents qui ont toujours été là pour moi*

★ *A mon père* ***MAHDI*** *pour sa patience et les efforts qu'il a faits pour moi*

★ *A ma mère qui ma soutenu avec tendresse et prié pour moi à chaque pas*

★ *A mon mari ,ma bien aimée, qui m'a soutenu ,compris ,encouragé et patient avec moi*

★ *A me soeurs et mon frére*

★ *Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encourager, et tout ma famille AMRANE,* *HAMAIDI*

★ *A tous mes amies, mes profs, mon encadreur*

Amrane Amina

Dédicace

★ *A mes chers parents pour toutes leurs sacrifices ,leurs amour, leur tendresse, leurs prières tout au long de mes études.*

★ *A ma mère qui ma soutenu avec sa tendresse et son affectation .*

★ *A mon père qui m'a aidée à affronter les difficultés .*

★ *Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encourager, qui étaient toujours à mes cotés, et qui m'ont accompagnaient durant mon parcours universitaire, mes amies, collègues d'études.*

★*Je dédie ce mémoire.*

Belakhdar Fatima Zohra

Dédicace

★ *A ma chère mère et mon chèr père qui m'ont soutenis dans la réussite de mes études.*

★ *A mes fréres pour leurs encouragement permanentes ,et leur soutien morale.*

★ *A ma famille qui ont toujours là pour moi .*

★ *A toutes mes amies qui m'encouragent à tout moment et pour leur soutenu tout au long de ma carrière universitaire.*

★ *Je vous dis merci.*

Reddah Bochra

Table des matières

1 Preliminaire **12**

1.1 Quelques concepts sur le calcul fractionnaire 15

1.2 Quelques théorèmes du point fixe 18

2 Fonction de Green **21**

2.1 Introduction 21

2.2 Bref Historique 21

2.3 Définition de la fonction de Green 22

2.3.1 L'existence et unicité de la fonction de Green . . . 23

2.3.2 Méthode de Calcul la fonction de Green 24

2.3.3 Existence et unicité d'une solution : 24

2.3.4 Exemples 25

2.4 Réducation d'un problème aux limites à une équation intégrale 26

3 Applications **29**

3.1 Introduction 29

3.2 Application 1 29
3.2.1 Existence de solutions 30
3.2.2 Exemple 41
3.3 Application 2 42
3.3.1 Existence de solutions 43
3.3.2 Unicité du solutions 49
3.3.3 Exemple 51

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est de présenter des résultats d'éxistence et d'unicité des solutions de quelques problèmes aux limites pour les équations différentielles implicites non linéaire à dérivée fractionnaire au sens de Caputo et au sens de Hadamard.
Tous les problèmes étudiés sont considères dans un espace de Banach.
La technique utilisée c'est de ramener l'étude de notre problème à la recherche d'un point fixe d'un opérateur intégral convenablement construit.
Parfois il y a intérêt à réduire la résolution d'un problème aux limites à la résolution d'une équation intégrale.
Dans ce mémoire on va expliquer comment un problème aux limites peut s'écrire via une fonction de Green, comme une équation intégrale.
C'est pourquoi, la question de prouver l'éxistence des solutions d'un problème aux limites se réduit à prouver l'existence de solution d'une équa-

tion intégrale.Pour cette raison,en appliquant des théorèmes de point fixe tels que le théorème de Banach, Schauder et de Leray-Schauder. Étant donnés un ensemble M et un opérateur $T : M \to M$, ces théorèmes donnent certaines conditions sous lesquelles T admet un point fixe dans M.

La théorie du point fixe est au cœur de l'analyse non linéaire appliquée aux équations différentielles et intégrales puis qu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans beaucoup de problèmes non-linéaires différents. Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base en montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations.
Ce **mémoire** est composé de trois chapitres.

Dans **le premier Chapitre** (intitulé **"Préliminaire"**), nous donnons notations, définitions, quelques concepts sur le calcul fractionnaire consèrnant la dérivée de Caputo et de Hadamard, et dans la dernière section on donne quelques théorèmes du point fixe (Le théorème du point fixe de Banach, Schauder, Leray-Schauder).

Le deuxième chapitre est consacré à quelques notions de base concernant les questions d'existence et d'unicité de la fonction de Green et aussi nous illustrant par quelques exemples la réducation d'un problème aux limites à une équation intégrale.

Dans **le troisième chapitre** nous présentons deux applications pour illustrant l'éxistence et l'unicité des solutions du problème aux limites d'équations différentielle fractionnaire implicite non linéaire.

Dans la première application nous examinons l'existence et l'unicité de solutions au problème aux limite suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t), ^{c}D^{\alpha}y(t)), pour\ \ tout\ \ t \in J = [0, T],\ T > 0,\ 1 < \alpha \leq 2, \tag{1}$$

$$y(0) = y_0,\ y(T) = y_1, \tag{2}$$

où $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivé fractionnaire au sens de Caputo, $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donner et $y_0,\ y_1 \in \mathbb{R}$.

La deuxième application présente une étude de l'existence et l'unicité de problème aux limite suivant :

$$^{H}\mathcal{D}^{\alpha}y(t) = f((t, \log(t))^{1-\alpha}y(t), ^{H}\mathcal{D}^{\alpha}y(t)),\ pour\ tout\ t \in J_1 := [a, b],\ 0 < \alpha \leq 1, \tag{3}$$

$$y(a) + \lambda \int_a^b y(t)dt = y(b), 1 < a < b, \tag{4}$$

où $^{H}\mathcal{D}^{\alpha}$ est le dérivé fractionnaire de Hadamard, $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée et $\lambda \in (0, +\infty)$.
Enfin on termine ce mémoire par une conclusion du travail efectuée.

Mots clés : problème aux limites, la dérivée fractionnaire au sens de caputo, la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard , espace de Banach, point fixe.

Chapitre 1

Preliminaire

Dans ce chapitre nous présentons des notations, définitions est des théorèmes utilisés dans ce mémoire.
Soit $C = (J =: [0, T], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues de J vers $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|y\|_\infty = \sup\{\|y(t)\| : t \in J\}.$$

$L^1(J)$ désigne la classe des fonctions intégrable de Lebesgue sur l'intervalle $J =: [0, T]$, muni de la norme :

$$\|u\|_{L_1} = \int_J |u(t)|dt.$$

Définition 1.1. *Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ un opérateur.*

1. *T est dit **continu** si pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ dans E tel que $(x_n)_{n\in N}$ converge vers x dans E, la suite $(Tx_n)_{n\in N}$ converge vers*

Tx.

2. *T est dit* ***compact****, si pour tout borné B de E, $T(B)$ est relativement compact.*

3. *T est dit* ***complètement continu*** *si T est continue et si l'image de tout borné B de E est relativement compact.*

Définition 1.2. *Soit M un sous ensemble de $C(J, \mathbb{R})$.*

1. *M et dit* ***équicontinu*** *si est seulement si :*
   pour tout $\varepsilon > 0$,il existe $\delta > 0$, pour tout $t_1, t_2 \in J$:
   $\|t_1 - t_2\| \leq \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon$, *pour tout $f \in M$.*

2. *M est dit* ***uniformément borné*** *si et seulement si :*
   il existe $c > 0 : \|f(t)\| \leq c$ pour tout $t \in J$ et pour tout $f \in M$.

Théorème 1.1. *([13])**(Ascoli Arzela)** Soit $C(J, \mathbb{X})$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J dans $\mathbb{R}$ de l'espace de Banach X, M un sous ensemble de $C(J, \mathbb{X})$ est relativement compact si :*

- M est uniformément borné.

- M est équicontinu.

Définition 1.3. *([4])* ***(Convergence dominée de Lebesgue)***
Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1. On suppose que

i) $f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω.

ii) Il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n,
$|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p. sur Ω.*

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ } et \text{ } \|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$$

Définition 1.4. *Soit (X, d)un espace métrique. Une application $T : X \to X$ est dite Lipschitzienne s'il existe une constante k (appelée constante de Lipschitz) telle que :*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \, pour \;\; tout \; x, y \in X.$$

Une application Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz $0 < k < 1$ est appelée contraction.

Définition 1.5. ***[4](Fubini)*** *On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, alors, pour présque tout $x \in \Omega_1$,*

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \qquad et \qquad \int_{\Omega_2} F(x, y)dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, pour présque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \qquad et \qquad \int_{\Omega_1} F(x, y)dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y)dx = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y)dxdy.$$

1.1 Quelques concepts sur le calcul fractionnaire

Définition 1.6. *([10, 12]) L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ de la fonction $h \in \mathtt{L}^1([\mathtt{a}, \mathtt{b}], \mathbb{R}_+)$ est défini par :*

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds,$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma.Si $a = 0$ on écrit $I^\alpha h(t) = h(t) * \varphi_\alpha(t)$, avec $\varphi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $t > 0$ et $\varphi_\alpha(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $\varphi_\alpha \to \delta(t)$ quand $\alpha \to 0$ où δ représente la fonction delta.

Définition 1.7. *([10])**(La dérivée fractionnaire de Caputo) :** La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction $h \in \mathtt{L}^1([a, b], \mathbb{R}_+)$ est défnie par :*

$$({}^c D_{a+}^\alpha h)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h^{(n)}(s) ds.$$

Où $n = [\alpha] + 1$. si $\alpha \in (0, 1]$ alors :

$$({}^c D_{a+}^\alpha h)(t) = I_{a+}^{1-\alpha} \frac{d}{dt} h(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{ds} h(s) ds.$$

Proposition 1.1. *([10]) Soient $\alpha, \beta > 0$. Alors on a :*

(1) $I^\alpha : L^1(J, \mathbb{R}_+) \to L^1(J, \mathbb{R}_+)$ et si $f \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ alors $I^\alpha I^\beta f(t) = I^\beta I^\alpha f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t)$.

(2) L'opérateur d'intégration fractionnaire I^α est linéaire.

(3) $I_a^0 h(t) = I_d h(t) = h(t)$.

(4) La dérivée fractionnaire de Caputo d'une constante est égale à constante.

(5) ${}^c\mathcal{D}_a^\alpha$ *est non inverse à droit de* I_a^α *c-à-d* $I_a^{\alpha c}\mathcal{D}_a^\alpha \neq I_d$ *mais* ${}^c\mathcal{D}_a^\alpha I_a^\alpha = I_d$.

(6) La dérivée fractionnaire de Caputo et de Riemann-Liouville sont linéaire.

Lemme 1.1. *([10]) Soit* $\alpha > 0$, *alors l'équation différentielle :*

$${}^c\mathcal{D}_a^\alpha h(t) = 0,$$

admet les solutions :
$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1}, c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \cdots, n-1,$
$n = [\alpha] + 1.$

Lemme 1.2. *Soit* $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$, *alors on a :*

$$I^\alpha({}^c\mathcal{D}_a^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k.$$

Lemme 1.3. *Soit* $\alpha > 0$, *alors :*

$$I_a^{\alpha c}\mathcal{D}_a^\alpha h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1},$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \cdots, n-1, n = [\alpha] + 1$.

Définition 1.8. *([10])**(L'intégrale fractionnaire de Hadamard) :***
L'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha \in (0, 1]$ *pour la fonction* $h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *est définie comme :*

$$_{H}I^{\alpha}h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{1}^{t} (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{h(s)}{s} ds,$$

où $\log(.) = \log_{\varrho}(.)$ *et* $\Gamma(.)$ *est la fonction Gamma.*

Définition 1.9. *([10])**(La dérivée fractionnaire de Hadamard) :***
La dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha \in (0, 1]$ *pour la fonction* $h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *est définie comme :*

$$^{H}\mathcal{D}^{\alpha}h(t) = \frac{t}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_{1}^{t} (\log \frac{t}{s})^{-\alpha} \frac{h(s)}{s} ds \right).$$

Corollaire 1.1. *([10]). Soit* $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$.
Alors l'équation différentielle $(^{H}\mathcal{D}^{\alpha}h)(t) = 0$ *admet les solutions* $h(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j (\log t)^{\alpha-j}$ *pour tout* $t \in J$.
Où $c_j \in \mathbb{R}(\underbrace{j = 1, \ldots, n})$ *sont des constantes arbitraires.*
En particulier, quand $0 < \alpha \leq 1$, *l'équation* $(^{H}\mathcal{D}^{\alpha}h)(t) = 0$ *est vérifiée si et seulement si :* $h(t) = c(\log t)^{\alpha-1}$ *pour tout* $c \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.2. *[10] Soient* $\alpha,\ \beta > 0$. *Alors nous avons :*

(i) $_{H}I^{\alpha} :\ L^1(J, \mathbb{R}_+) \to L^1(J, \mathbb{R}_+)$, *et si* $f \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$, *alors*

$$_{H}I^{\alpha}_{H}I^{\beta}f(t) =_{H} I^{\beta}_{H}I^{\alpha}f(t) =_{H} I^{\alpha+\beta}f(t).$$

(ii) *L'opérateur d'intégration fractionnaire* ${}_H I^{\alpha}$ *est linéaire.*

1.2 Quelques théorèmes du point fixe

Introduction

Les théorèmes de point fixe sont un résultat qui permet d'affirmer qu'un opérateur T admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles et intégrales.

Un de ces théorèmes est le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en (1922) dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. Ce théorème donne un comportement régulier du point fixe par rapport aux paramètres. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs. D'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est plus topo-

logique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est pas donc nécessaire d'établir des estimées sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le Théorème de Banach (par exemple, l'identité).
Le théorème de Leray-Schauder, est aussi appelé théorème de continuité, représentent un outils puissant d'existence en étudiant les équations d'opérateur. Par des moyens de théorème de continuité nous pouvons obtenir une solution d'équation donnée si nous commençons par une des solutions de l'équation simple.

Définition 1.10. *Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach E dans lui-même, alors pour tout $x \in E$, tel que $x = T(x)$, s'appelle un point fixe de l'opérateur T.*

Théorème 1.2. *[8, 6]* ***(Théorème du point fixe de Banach)****.*
Soit (X, d)un espace métrique complet. Une application $T : X \to X$ est une contraction avec la constante de Lipschitz k. Alors T a un point fixe unique $x \in X$.

Le théorème du point fixe de Schauder suivant est le plus utilisé dans les applications :

Théorème 1.3. *[8, 6]****(Théorème de point fixe de Schauder)****.*
Soit X un espace de Banach, $K \subset X$ un ensemble convexe, fermé, borné et non vide. Et soit $T : K \to K$ un opérateur complètement continue. Alors T admet au moins un point fixe.

Théorème 1.4. *[8, 6] (**Altérnative non linéaire de Leray-Schauder**).*
Soit Ω *un ouvert, borné d'un espace de Banach* X *et* $f : \Omega \longrightarrow X$ *une application continue et compacte. Alors*
ou(i) f *admet un point fixe dans* Ω.
ou (ii) Il existe $x \in \partial\Omega$ *,il existe* $t \in [0, 1] : x = tf(x)$.

Chapitre 2

Fonction de Green

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à quelques notions de base concernant les questions d'existence et d'unicité de la fonction de Green et aussi nous utiliserons par quelques exemples la réducation d'un problème aux limites à une équation intégrale.

2.2 Bref Historique

La fonction de **Green** est une solution (également appelée solution élémentaire ou solution fondamentale) d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants.
Ces fonctions de Green , qui se trouvent être le plus souvent des distributions, ont été introduites par George Green en 1828 pour les besoins

de l' électromagnétisme. Le mémoire de Green restera confidentiel jusqua'à sa republication en trois parties, à partir de 1850. Les fonctions de Green, qui seront dénommés ainsi par Riemann en 1869, seront alors abondamment utilisées, notamment par Neumann en 1877 pour sa théorie du potentiel Newtonien dans un espace à deux dimensions, puis en 1882 par Kirchhoff pour l'équation de propagation des ondes dans un espace à trois dimensions et enfin par Helmholtz en acoustique.

2.3 Définition de la fonction de Green

Soit $p, q, f \in C([a,b])$ où $p \in C^1[a,b], a < b$ et $(\alpha_i, \beta_i) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tels que pour tout $i = 1, 2$:
$|\alpha_1| + |\alpha_2|, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$. On considère les équation différentielles ordinaires :
(**H**) $(py')' + qy = 0$,
(**NH**) $(py')' + qy = f$,
ainsi que les conditions aux bords associées :

$$(CB)_h \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$

$$(CB)_{nh} \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \delta, \end{cases}$$

Définition 2.1. *On appelle fonction de* ***Green*** *associé au problème ho-*

mogène $(H)-(CB)_h$ *une fonction* $G:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ *vérifiant les propriétés :*

(a) G *est continue sur* $[a,b]\times[a,b]$.

(b) G *est symtrique :* $G(t,s)=G(s,t),\forall(t,s)\in[a,b]^2$.

(c) $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)$ *est continue pour tout* $t\neq s$.

(d) La fonction partielle $t\to G(t,s)$ *est solution de l'équation (H) pour tout* $t\neq s$.

(e) La fonction partielle $t\to G(t,s)$ *vérifie les condition (CH) pour tout* $s\in[a,b]$.

2.3.1 L'existence et unicité de la fonction de Green

Théorème 2.1. *Supposons que le problème homogène* $(H)-(CB)_h$ *n'admet pas de solution non triviale. Alors, il existe une (et une seule) fonction* G *ne dépendant pas de* f*, et dite fonction de Green telle que, pour toute fonction* f*, la solution* y *de problème non homogène* $(NH)-(CB)_h$ *s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$y(t)=\int_a^b G(t,s)f(s)ds.$$

Démostration : Voir [7]

2.3.2 Méthode de Calcul la fonction de Green

Soit ϕ_1 et ϕ_2 les solutions respectives des problèmes à conditions initiales :

$$(H)+\begin{cases}\phi_1(a)=\alpha_2,\\ \phi_1'(a)=-\alpha_1,\end{cases}\quad et\ (H)+\begin{cases}\phi_2(b)=\beta_2,\\ \phi_2'(b)=\beta_1.\end{cases}$$

Alors, $\phi_1,\phi_2\not\equiv 0$ sont linéairement indépendantes car sinon ϕ_1 (et aussi ϕ_2) serait solution du problème $(P_0):=(H)+(CB)_h$ contredisant l'hypothèse. Soit donc $W\neq 0$ leur **Wronskien** et G la fonction de Green définie par :

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{\phi_1(t)\phi_2(s)}{p(t)W(t)},\ a\leq\ t\leq s,\\ \frac{\phi_1(s)\phi_2(t)}{p(s)W(s)},\ s\leq\ t\leq b.\end{cases}$$

Remarquons que le produit pW est constant.

2.3.3 Existence et unicité d'une solution :

1) La fonction F définie par :

$$F(t)=\int_a^b G(t,s)f(s)ds=\frac{\phi_2(t)}{pW}\int_a^t\phi_1(s)ds+\frac{\phi_1(t)}{pW}\int_t^b\phi_2(s)f(s)ds,$$

est solution du problème $(NH)+(CB)_h$.

2) La fonction H définie par :

$$H(t)=\int_a^b G(t,s)f(s)ds=\frac{\phi_2(t)}{pW}\int_a^t\phi_1(s)ds+\frac{\phi_1(t)}{pW}\int_t^b\phi_2(s)f(s)ds+\psi_1(t)+\psi_2(t),$$

est solution du problème $(NH)+(CB)_{(nh)}$, où $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$ les uniques solutions des problèmes :

$$(H)+\begin{cases} \alpha_1\psi_1(a)+\alpha_2\psi_1'(a)=\gamma. \\ \beta_1\psi_1(b)-\beta_2\psi_1'(b)=0. \end{cases} \quad et\ (H)+\begin{cases} \alpha_1\psi_2(a)+\alpha_2\psi_2'(a)=0. \\ \beta_1\psi_2(b)-\beta_2\psi_2'(b)=\delta. \end{cases}$$

2.3.4 Exemples

Exemple 2.3.1. *La fonction de Green du problème :*

$$\begin{cases} y''+y=0, \\ y(0)=y\left(\frac{\Pi}{2}\right)=0, \end{cases}$$

s'écrit

$$G(x,y)=\begin{cases} -\cos y\sin x, & si\ x\leq y. \\ -\cos x\sin y, & si\ x\geq y. \end{cases}$$

Exemple 2.3.2. *Considère le problème à deux points sur un intetvalle [a,b] :*

$$\begin{cases} y''=f(x), & a<x<b, \\ y(a)=0, & y(b)=0, \end{cases}$$

construisons les fonctions φ_1 et φ_2 solutions des problèmes de cauchy :

$$\begin{cases} \varphi_1''=0. \\ \varphi_1(a)=0. \\ \varphi_1'(a)=-1. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_1''=0. \\ \varphi_2(b)=0. \\ \varphi_2'(b)=-1. \end{cases}$$

Alors, $\varphi_1(x) = (a-x)$,$\varphi_2(x) = (b-x)$ *et* $W(\varphi_1, \varphi_2) = b-a$. *D'où la fonction de Green :*

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-a)(y-b)}{(b-a)}, & si\ x \leq y, \\ \frac{(y-a)(x-b)}{(b-a)}, & si\ x \geq y. \end{cases}$$

La solution unique du problème (1,4) est donc donnée par :
$y(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)dy = \frac{x-b}{b-a}\int_a^b (y-a)f(y)dy + \frac{x-a}{b-a}\int_x^b (y-b)f(y)dy.$

2.4 Réducation d'un problème aux limites à une équation intégrale

Parfois il y a intérêt à réduire la résolution d'un problème aux limites à la résolution d'une équation intégrale.
Dans ce qui suit on va expliquer par deux exemples comment un problème aux limites peut s'écrire, via une fonction de Green, comme une équation intégrale. C'est pourquoi, la question de prouver l'existence des solutions d'un problème aux limites se rèduit à prouver l'existence de solution d'une équation intégrale. Pour cette raison, on peut utiliser le théorème de point fixe pour montrer l'existence des solutions des équations intégrales.

Exemple1 : Considérons le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} y'' = f(x, y(x)), \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

La fonction de Green du problème homogène :

$$\begin{cases} y'' = 0, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases}$$

est la forme

$$G(t, s) = \begin{cases} (s-1)t, & 0 \leq t \leq s. \\ (t-1)s, & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La résolution du problème aux limites (2.1) se ramène à une équation intégrale non linéaire du type Hammerstein à noyau fonction de Green :

$$y(t) = \int_a^b G(t, s) f(s, y(s)) ds.$$

Exemple 2 : Considérons le problème :

$$\begin{cases} y'' = f(t), \quad a < t < b. \\ y(a) = \gamma, \quad y(b) = \delta. \end{cases} \tag{2.2}$$

Constructions les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 solutions des problèmes :

$$\begin{cases} \phi_1''(t) = 0, \\ \phi_1(a) = 0, \\ \phi_1'(a) = -1, \end{cases} \quad ET \begin{cases} \phi_2''(t) = 0. \\ \phi_2(b) = 0. \\ \phi_2'(b) = -1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Alors $\phi_1(t) = (a - t)$, $\phi_2(t) = (b - t)$ et $W(\phi_1, \phi_2) = b - a$.
D'ou la fonction de Green :

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-a)(s-b)}{b-a}, & a \leq t \leq s, \\ \frac{(s-a)(t-b)}{(b-a)}, & s \leq t \leq b. \end{cases}$$

La solution unique du problème 2.2 est donnée par :

$$y(t) = \int_a^b G(t,s) f(s) ds = \frac{\phi_2(t)}{pW} \int_a^t \phi_1(s) ds + \frac{\phi_1(t)}{pW} \int_t^b \phi_2(s) f(s) ds + \psi_1(t) + \psi_2(t)$$

$$= \frac{s-b}{b-a} \int_a^t (s-a) f(s) ds + \frac{s-a}{b-a} \int_t^b f(s) ds + \delta \frac{s-a}{b-a} + \gamma \frac{b-s}{b-a}.$$

Chapitre 3

Applications

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre est présenter deux applications pour illustrant l'éxistence et l'unicité des solutions des problèmes aux limites des équations différentielles implicites non linéaire à dérivée fractionnaire au sens de Caputo et au sens de Hadamard.

Le contenu de ce chapitre est basé sur le deux articles [2, 5].

3.2 Application 1

La première application traite de l'existence et l'unicité de solution au problème aux limites suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t), ^{c}D^{\alpha}y(t)), pour\ tout\, t \in J = [0, T], T > 0 \;\; 1 < \alpha \leq 2, \tag{3.1}$$

$$y(0) = y_0,\ y(T) = y_1, \tag{3.2}$$

où ${}^cD^\alpha$ est la dérivé fractionnaire au sens de Caputo, $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donner et $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.
Le premier résultat se base sur la contraction principale de Banach.

3.2.1 Existence de solutions

Définition 3.1. *On dit que la fonction $u \in C^1(J, \mathbb{R})$ est une solution de problème (3.1)-(3.2)si u satisfaite l'équation (3.1) et les conditions (3.2).*

Pour l'existence du solutions de problème (3.1)-(3.2), nous avons besoin le lemme suivante :

Lemme 3.1. *Soit $1 < \alpha \leq 2$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. La fonction y est une solution de problème aux limites :*

$$\begin{gathered} {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}^c D^\alpha y(t)),\ \textit{pour tout}\ t \in J = [0, T],\ T > 0, \\ 1 < \alpha \leq 2, \\ y(0) = y_0,\ y(T) = y_1, \end{gathered}$$

si et seulement si y est une solution de l'équation intégrale.

$$y(t) = l(t) + \int_0^T G(t,s) f\left(s, l(s) + \int_0^T G(t,s) g(\tau) g(\tau) d\tau, g(s)\right) ds, \tag{3.3}$$

avec

$$l(t) = (1 - \frac{t}{T} y_0 + \frac{t}{T} y_1 = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{T} t, \tag{3.4}$$

$$D^{\alpha}y(t) = g(t),$$

où

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}(t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} & si\ 0 \leq s \leq t. \\ -\frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1} & si\ t \leq s \leq T.\end{cases} \tag{3.5}$$

Preuve : D'après le lemme (1.3) on réduit (3.1)-(3.2) en l'équation suivante :

$$y(t) = I^{\alpha}g(t) + c_0 + c_1 t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds + c_0 + c_1 t,$$

pour c_0, $c_1 \in \mathbb{R}$. les conditions (3.2) donnent :

$$c_0 = y_0\ et\ c_1 = \frac{1}{T}y_1 - \frac{1}{T}y_0 - \frac{1}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}g(s)ds.$$

Alors la solution de (3.1)-(3.2) est donnée par :

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}g(s)ds \\ &+ (1-\frac{t}{T})y_0 + \frac{t}{T}y_1 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t [(t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1}]g(s)ds - \frac{t}{T}\int_t^T (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right] \\ &+ (1-\frac{t}{T})y_0 + \frac{t}{T}y_1.\end{aligned}$$

Donc on trouve (3.3). Inversement, si y satisfaite (3.3), alors l'équation (3.1) et (3.2)sont satisfaites.

D'après l'expression de $G(t,s)$, il est évident que $G(t,s)$ est continue sur $[0,T]\times[0,T]$. Dénoter par :

$$G^* := \sup\left\{|G(t,s)|\,,\ (t,s)\in J\times J\right\}.$$

Théorème 3.1. *Supposons :*

(H1) La fonction $f : J\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *est continue ·*

(H2) Il existe des constants $K>0$ *et* $0<L<1$ *alors on sait que*

$$|f(t,u,v)-f(t,\bar{u},\bar{v})|\leq K\,|u-\bar{u}|+L\,|v-\bar{v}|\,,$$

pour tout $u,v,\bar{u},\bar{v}\in\mathbb{R}$ *et* $t\in J$,

si

$$\frac{KTG^*}{1-L}<1, \tag{3.6}$$

alors il existe une unique solution de probème (3.1)-(3.2).

Preuve :

La preuve sera donnée en plusieurs étapes. Transforme le problème (3.1)-(3.2) en un problème de point fixe. Définissons l'opérateur $N : C(J,\mathbb{R})\longrightarrow C(J,\mathbb{R})$ par :

$$N(y)(t)=l(t)+\int_0^T G(t,s)k(s)ds, \tag{3.7}$$

avec $k\in C(J)$ satisfait l'équation implicite :

$$k(t)=f(t,y(t),k(t)),$$

l et G sont des fonctions définie par (3.4) et (3.5) respectivement.

Il est claire que, les points fixes de l'opérateur N sont des solutions de problème (3.1)- (3.2). Soit $u, w \in C(J, \mathbb{R})$. Alors pour $t \in J$ on a :

$$(Nu)(t) - (Nw)(t) = \int_0^T G(t,s)\left(g(s) - h(s)\right) ds,$$

avec $g, h \in C(J, \mathbb{R})$, on sait que :

$$g(t) = f(t, u(t), g(t)),$$

et

$$h(t) = f(t, w(t), h(t)).$$

Alors pour $t \in J$:

$$|(Nu)(t) - (Nw)(t)| \leq \int_0^T |G(t,s)| \, |g(s) - h(s)| \, ds. \tag{3.8}$$

De (3.1) on a :

$$\begin{aligned} |g(t) - h(t)| &= |f(t, u(t), g(t)) - f(t, w(t), h(t))| \\ &\leq K\, |u(t) - w(t)| + L\, |g(t) - h(t)| \cdot . \end{aligned}$$

Donc

$$|g(t - h(t)| \leq \frac{K}{1-L}\, |u(t) - w(t)| \cdot$$

Par (3.8) on a

$$\begin{aligned}|(Nu)(t)-(Nw)(t)| &\leq \frac{K}{(1-L)}\int_0^T |G(t,s)|\,|u(s)-w(s)|\,ds\\ &\leq \frac{KG^*T}{1-L}\,\|u-w\|_\infty .\end{aligned}$$

Alors

$$\|Nu-Nw\|_\infty \leq \frac{KTG^*}{1-L}\,\|u-w\|_\infty .$$

D'après (3.6) l'opérateur N est une contraction. Par conséquent, selon le principe de contraction de Banach, N admet un unique point fixe qui est une solution du problème $(3.1)-(3.2)$.

Le deuxième résultat est bassée sur le théorème de point fixe de Schauder.

Théorème 3.2. *Supposons* $(3.1)(H1)$,$(3.1)(H2)$ *et l'hypothèse suivante :*
$(H3)$ *Il existe* $p,q,r \in C(J,\mathbb{R}_+)$ *avec* $r^* = supr(t) < 1$ *on sait que :*

$$|f(t,u,w)| \leq p(t) + q(t)\,|u| + r(t)\,|w| \ \textit{ pour } t \in J \textit{ et } u,w \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\frac{q^*TG^*}{1-r^*} < 1, \tag{3.9}$$

où $q^* = \sup q(t)$*. Alors le problème aux limites (3.1)-(3.2) admet au moins une solution.*

Preuve :

Soit l'opérateur N définie dans (3.7) .Nous démontrons que N satisfait le théorème de point fixe de Schauder . La preuve sera donnée par des étapes

Étape 1 : N est continue .

Soit u_n une suite avec $u_n \to u$ dans $C(J, \mathbb{R})$. Alors pour tout $t \in J$

$$|N(u_n)(t) - N(u)(t)| \leq \int_0^T |G(t,s)| \, |g_n(s) - g(s)| \, ds, \tag{3.10}$$

avec $g_n, g \in C(J, \mathbb{R})$ on sait que :

$$g_n(t) = f(t, u_n(t), g_n(t)),$$

et

$$g(t) = f(t, u(t), g(t)).$$

Avec (3.1)$(H2)$, on a :

$$\begin{aligned} |g_n(t) - g(t)| &= |f(t, u_n(t), g_n(t) - f(t, u(t), g(t))| \\ &\leq K \, |u_n(t) - u(t)| + L \, |g_n(t) - g(t)| \, . \end{aligned}$$

Alors

$$|g_n(t) - g(t)| \leq \frac{K}{1 - L} \, |u_n(t) - u(t)| \, ,$$

$u_n \to u$, alors on trouve $g_n(t) \to g(t)$ quand $n \to \infty$ pour tout $t \in J$. Et soit $\eta > 0$, pour tout $t \in J$, on a $|g_n(t)| \leq \eta$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} |G(t,s)| \, |g_n(s) - g(s)| &\leq |G(t,s)| \, [|g_n(s)| + |g(s)|] \\ &\leq 2\eta \, |G(t,s)| \, . \end{aligned}$$

Pour tout $t \in J$, la fonction $s \to 2\eta\,|G(t,s)|$ est intégrable sur J. Alors d'après théorème de convergence dominié de Lebesgue (3.10) implique que :

$$|N(u_n)(t) - N(u)(t)| \to 0 \quad quand \quad n \to \infty,$$

et par conséquent

$$\|N(u_n)(t) - N(u)(t)\|_\infty \to 0 \quad quand \quad n \to \infty,$$

par conséquent, N est continu.
Soit

$$R \geq \frac{(2|y_0|| + |y_1|)(1 - r^*) + G^* T p^*}{M},$$

où $M := 1 - r^* - G^* T q^*$ et $p^* = \sup p(t)$. Définissons :

$$D_R = u \in C(J, \mathbb{R}) : \|u\|_\infty \leq R.$$

Il est clair que D_R sous ensemble bornée, fermé et convexe de $C(J)$.
Étape 2 : $N(D_R) \subset D_R$.
Soit $u \in D_R$ on démontre que $Nu \in D_R$. Pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|Nu(t)| &\leq |l(t)| + \int_0^T |G(t,s)|\,|g(s)|\,ds \\
&\leq |y_0| + |y_1 - y_0| + G^* \int_0^T |g(s)|\,ds \\
&\leq 2\,|y_0| + |y_1| + G^* \int_0^T |g(s)|\,ds,
\end{aligned}$$

où $g(t) = f(t, u(t), g(t))$.
D'après (3.2)($H3$), pour tout $t \in J$ on a :

$$\begin{aligned}|g(t)| &= |f(t, u(t), g(t))| \\ &\leq p(t) + q(t)\,|u(t)| + r(t)\,|g(t)| \\ &\leq p(t) + q(t)R + r(t)\,|g(t)| \\ &\leq p^* + q^*R + r^*\,|g(t)|\,.\end{aligned}$$

Alors

$$|g(t)| \leq \frac{p^* + q^*R}{1 - r^*}.$$

D'aprés implique que, pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}|Nu(t)| &\leq 2\,|y_0| + |y_1| + \frac{p^* + q^*R}{1 - r^*}G^*T \\ &\leq R.\end{aligned}$$

Alors $N(D_R) \subset D_R$.
Étape 3 : $N(D_R)$ est relativement compact.
Soit $t_1, t_2 \in J,\ t_1 < t_2$, et soit $u \in D_R$. Alors :

$$\begin{aligned}|N(u)(t_2) - N(u)(t_1)| &= \left| l(t_2) - l(t_1) + \int_0^T \left[G(t_2, s) - G(t_1, s)\right] g(s)ds \right| \\ &= \left| \frac{(y_1 - y_0)}{T}(t_2 - t_1) + \int_0^T \left[G(t_2, s) - G(t_1, s)\right] g(s)ds \right| \\ &\leq \left| \frac{(y_1 - y_0)}{T}(t_2 - t_1) \right| + \frac{p^* + q^*R}{1 - r^*} \left| \int_0^T \left[G(t_2, s) - G(t_1, s)\right] ds \right|.\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, l'inégalité précédente tend vers zéro.
En conséquence de étape1 à étape 3 avec le théorème d'Ascoli-Arzéla, on résult que $N : C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$ est continu et compact. Par conséquent de le théorème de point fixe de Schauder on déduit que N admet un point fixe qui est une solution de problème (3.1)-(3.2).
Le troisième résultat d'existence est basé sur l' alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Théorème 3.3. *Supposons que les hypothèses (H1)-(H2) et* (3.9) *sont satisfaites. Alors* $(3.1)-(3.2)$ *admet au moins une solution.*

Preuve : Considérons l'opérateur N définie dans (3.7). On démontre que N satisfait la supposition de théorème de point fixe de Leray-Schauder. La preuve va donner dans les indications suivants.
Étape 1 : Il est clair que N est continu.
Étape 2 : N transforme les bornés en des bornés dans$C(J,\mathbb{R})$.
On va montrer que pour tout $\rho > 0$, il existe un constant positive l teleque pour tout $u \in B_\rho = \{u \in C(J,\mathbb{R}) : \|u\|_\infty \leq \rho\}$, on a :

$$\|N(u)\|_\infty \leq l,$$

pour $u \in B_\rho$, on a pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}|Nu(t)| &\le |l(t)| + \int_0^T |G(t,s)|\,|g(s)|\,ds \\ &\le |y_0| + |y_1 - y_0| + G^* \int_0^T |g(s)|\,ds.\end{aligned}$$

Alors

$$|Nu(t)| \le 2\,|y_0| + |y_1| + G^* \int_0^T |g(s)|\,ds. \tag{3.11}$$

Par 3.2 pour tout $t \in J$ on a :

$$\begin{aligned}|g(t)| &= |f(t, u(t), g(t))| \\ &\le p(t) + q(t)\,|u(t)| + r(t)\,|g(t)| \\ &\le p(t) + q(t)\rho + r(t)\,|g(t)| \\ &\le p^* + q^*\rho + r^*\,|g(t)|,\end{aligned}$$

alors

$$|g(t)| \le \frac{p^* + q^*\rho}{1 - r^*} := M^*.$$

Donc 3.11 implique que :

$$|Nu(t)| \le 2\,|y_0| + |y_1| + G^* M^* T.$$

Donc

$$\|Nu\|_\infty \le 2\,|y_0| + |y_1| + G^* M^* T := l.$$

Étape 3 : Clairement, N transforme les ensembles bornés en ensembles équicontinus de $C(J,\mathbb{R})$.
On concluent que $N : C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$ est continu et complètement continu.
Étape 4 : Estimations à priori.
On démontre que il existe un ensemble ouvert $U \subseteq C(j,\mathbb{R})$ avec $u \neq \lambda N(u)$, pour $\lambda \in (0,1)$et $u \in \partial U$. Soit $u \in C(J,\mathbb{R})$ et $u = \lambda N(u)$ pour $0 < \lambda < 1$. Donc pour $t \in J$ on a :
$u(t) = \lambda l(t) + \lambda \int_0^T G(t,s)g(s)ds.$
implique que par (3.1) que pour tout $t \in J$ on a :

$$|u(t)| \leq 2\,|y_0| + |y_1| + \int_0^T |G(t,s)|\,|g(s)|\,,ds \tag{3.12}$$

et , par 3.2 pour tout $t \in J$ on a :

$$|g(t)| \ = |f(t,u(t),g(t))| \leq p(t) + q(t)\,|u(t)| + r(t)\,|g(t)| \ \leq p^* + q^*\,|u(t)| + r^*\,|g(t)|\,.$$

Donc

$$|g(t)| \leq \frac{1}{1-r^*}(p^* + q^*\,|u(t)|),$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq \left(2\,|y_0| + |y_1| + \frac{p^*TG^*}{1-r^*}\right) + \frac{q^*G^*}{1-r^*}\int_0^T |u(s)|\,ds \\ &\leq \left(2\,|y_0| + |y_1| + \frac{p^*TG^*}{1-r^*}\right) + \frac{q^*TG^*}{1-r^*}\,\|u\|_\infty\,. \end{aligned}$$

Alors
$$\|u\|_\infty \leq \left(2|y_0| + |y_1| + \frac{p^*TG^*}{1-r^*}\right) + \frac{q^*G^*}{1-r^*}\|u\|_\infty,$$
donc
$$\|u\|_\infty \leq \frac{M_1}{1-\frac{q^*TG^*}{1-r^*}} := \overline{M},$$
où
$$M_1 = 2|y_0| + |y_1| + \frac{p^*TG^*}{1-r^*}.$$
Soit
$$U = \left\{u \in C(J,\mathbb{R}) : \|u\|_\infty < \overline{M} + 1\right\}.$$
Par choix de U, il n'existe aucun $u \in \partial U$ on sait que $u = \lambda N(u)$, pour $\lambda \in [0,1]$. Par conséquent de théorème de Leray-Schauder on déduit que N admet un point fixe u dans $\bar{U}$ qui est une solution de (3.1)-(3.2).

3.2.2 Exemple

Exemple 3.2.1. *Considérons le problème aux limites suivant :*

$${}^c\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}y(t) = \frac{1}{3e^{t+2}(1+|y(t)|+|{}^c\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}y(t)|)}, \text{ pour tout } t \in [0,1], \quad (3.13)$$

$$y(0) = 1\ ,\ y(1) = 2, \quad (3.14)$$

soit
$$f(t,u,v) = \frac{1}{3e^{t+2}(1+|u|+|v|)}, \in [0,1], u, v \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que la fonction f est continue.
Pour tout $u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$:

$$|f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v})| \leq \frac{1}{3e^2}(|u-\bar{u}| + |v-\bar{v}|).$$

D'aprés la condition (3.1) *est satisfaite avec $K = \frac{1}{3e^2}$ et $L = \frac{1}{3e^2} < 1$.*
De (3.5) *la fonction G est donnée par :*

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}\begin{cases}(t-s)^{\frac{1}{2}} - t(1-s)^{\frac{1}{2}} \; si \; 0 < s \leq t, \\ -t(1-s)^{\frac{1}{2}} \; t \leq s \leq 1.\end{cases}$$

Il est clair que $G^* < \frac{2}{\Gamma(\frac{3}{2})}$. Donc la condition :

$$\frac{KTG^*}{1-L} < 1,$$

est satisfaite avec $T = 1$ et $\alpha = \frac{3}{2}$. On déduit de la théorème de contraction du Banach que le problème (3.13)-(3.14) *admet une unique solution dans J.*

3.3 Application 2

La deuxième application présente une étude de l'existence et l'unicité de problème aux limites suivant :

$$^{H}\mathcal{D}^{\alpha}y(t) = f((t, \log(t))^{1-\alpha}y(t), ^{H}\mathcal{D}^{\alpha}y(t)), \; pour\ tout\ t \in J_1 := [a,b], \; 0 < \alpha \leq 1, \tag{3.15}$$

$$y(a) + \lambda \int_a^b y(t)dt = y(b),\ 1 < a < b, \tag{3.16}$$

où ${}^H\mathcal{D}^\alpha$ est le dérivé fractionnaire de Hadamard, $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée et $\lambda \in (0, +\infty)$.

Tout d'abord, nous introduisons l'espace suivant :

$$C_\alpha(J_1) = \{y : (1, b] \to \mathbb{R}, y \in C((1, b]). \, Il \ existe \ \lim_{t\to 1^+} (\log(t))^{1-\alpha} y(t) \in \mathbb{R}\}.$$

$C_\alpha(J_1)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|y\|_\alpha = max_{t\in J_1}\{|(\log(t))^{1-\alpha}y(t)|\}.$$

De plus, il est facile de vérifier que $C_\alpha(J_1) \subset L^1(J_1)$.

3.3.1 Existence de solutions

Lemme 3.2. *Soit* $\alpha \in (0, 1]$ *l'égalité* ${}^H\mathcal{D}^\alpha y(t) = 0, t \in J_1,$ *est vérifiée si et seulement si :*

$$y(t) = c_1(\log t)^{\alpha-1} \quad pour \quad tout \quad t \in J_1 \ \ et \ c_1 \in \mathbb{R}.$$

Pour l'existence des résultats du problème (3.15)-(3.16) nous devons prouver quelques lemmes auxiliaires. Donc, nous introduisons la fonction suivante :

$$F_\alpha(x) = \int_1^x (\log s)^{\alpha-1} ds, \qquad x \geq 1.$$

Il est facile de vérifier que F_α *est continue sur* $[1, \infty)$ *pour tout* $\alpha \in (0, 1]$.

Lemme 3.3. *Soit $0 < \alpha < 1$, $1 < a < b$ et $h \in C(J_1)$ une fonction donnée. Alors le problème aux limites*

$$^{H}\mathcal{D}^{\alpha} y(t) = h(t), \qquad t \in J_1, \tag{3.17}$$

avec la condition (3.17) a une solution unique $u \in C_{\alpha}(J_1)$ donnée par l'expression suivante :

$$y(t) = \int_1^b G(t,s) \frac{h(s)}{s} ds,$$

où $G(t,s)$ est la fonction de Green définie comme suit :
Si $1 \leq s \leq a$ et $1 \leq s \leq t \leq b$:
$G(t,s) =$
$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\gamma}(\log t)^{\alpha-1} \left[\left(\log \frac{a}{s}\right)^{\alpha-1} - \left(\log \frac{b}{s}\right)^{\alpha-1} + \lambda s \left[F_{\alpha}\left(\frac{b}{s}\right) - F_{\alpha}\left(\frac{a}{s}\right) \right] \right] \right).$
Si $1 \leq t < s \leq a$:
$G(t,s) = \frac{1}{\gamma\Gamma(\alpha)} (\log t)^{\alpha-1} \left[\left(\log \frac{a}{s}\right)^{\alpha-1} - \left(\log \frac{b}{s}\right)^{\alpha-1} + \lambda s \left[F_{\alpha}\left(\frac{b}{s}\right) - F_{\alpha}\left(\frac{a}{s}\right) \right] \right].$
Pour $a \leq t < s \leq b$:
$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\gamma}(\log t)^{\alpha-1} \left[- \left(\log \frac{b}{s}\right)^{\alpha-1} + \lambda s F_{\alpha}\left(\frac{b}{s}\right) \right] \right).$
et, si $a \leq t < s \leq b$:
$G(t,s) = \frac{1}{\gamma\Gamma(\alpha)} (\log t)^{\alpha-1} \left[- \left(\log \frac{b}{s}\right)^{\alpha-1} + \lambda s F_{\alpha}\left(\frac{b}{s}\right) \right].$
Où

$$\gamma = \Gamma(\alpha) \left((\log b)^{\alpha-1} - (\log a)^{\alpha-1} - \lambda(F_{\alpha}(b) - F_{\alpha}(a)) \right) < 0.$$

Preuve

Tout d'abord, voyons que ce problème a au plus, une solution dans $C_{\alpha}(J_1)$.

Au contraire, si nous avons y_1 *et* y_2 *deux solutions différentes de problème (3.17)-(3.16). nous avons que* $z := y_1 - y_2$ *est une solution de* ${}^H\mathcal{D}^\alpha z(t) = 0$, $t \in J_1$. *de Lemme (3.2), nous avons qu'il y a un* $c \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$z(t) = c(\log t)^{\alpha-1}, \ pour\ tout, \ t \in J_1.$$

Dans un tel cas, nous avons que la condition de la limite fonctionnelle (3.17) dites-nous que si $c \neq 0$, *alors :*

$$0 < \lambda(F(b) - F(a)) = (\log(b)^{\alpha-1} - (\log(a)^{\alpha-1}) < 0,$$

qui est une contradiction.
Par conséquent, pour chaque $c_1 \in \mathbb{R}$ *nous avons que :*

$$y(t) =_H I^\alpha(h(t)) + c_1(\log t)^{\alpha-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} h(s)\frac{ds}{s} + c_1(\log t)^{\alpha-1},$$

satisfait l'équation (3.17)
En conséquence, nous devons rechercher l'unique $c_1 \in \mathbb{R}$, *s'il existe, pour lequel la condition fonctionnelle (3.16) est verifier.*
De plus en utilisant le théorème de Fubini, nous déduisons les égalités

suivantes :

$$\begin{aligned}
\int_a^b y(s)ds &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left(\int_1^s \left(\log\frac{s}{\tau}\right)^{\alpha-1}\frac{h(\tau)}{\tau}d\tau\right)ds + c_1\int_a^b (\log s)^{\alpha-1}ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left(\int_1^s \left(\log\frac{s}{\tau}\right)^{\alpha-1}\frac{h(\tau)}{\tau}d\tau\right)ds + c_1(F_\alpha(b)-F_\alpha(a))\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^a \left(\int_a^b \left(\log\frac{s}{\tau}\right)^{\alpha-1}\frac{h(\tau)}{\tau}d\tau\right)ds\\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left(\int_\tau^b \left(\log\frac{s}{\tau}\right)^{\alpha-1}\frac{h(\tau)}{\tau}d\tau\right)ds + c_1(F_\alpha(b)-F_\alpha(a))\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^a \left(\int_{\frac{a}{\tau}}^{\frac{b}{\tau}} (\log l)^{\alpha-1}\tau dl\right)\frac{h(\tau)}{\tau}d\tau\\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left(\int_1^{\frac{b}{\tau}} (\log l)^{\alpha-1}\tau dl\right)\frac{h(\tau)}{\tau}d\tau + c_1(F_\alpha(b)-F_\alpha(a))\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^a \left[F_\alpha\left(\frac{b}{\tau}\right) - F_\alpha\left(\frac{a}{\tau}\right)\right]h(\tau)d\tau\\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b F_\alpha\left(\frac{b}{\tau}\right)h(\tau)d\tau + c_1(F_\alpha(b)-F_\alpha(a)).
\end{aligned}$$

Ainsi, la condition aux limites (3.16) est remplie si et seulement si :

$$\int_1^a \left(\log\frac{a}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{h(s)}{s}ds - \int_1^b \left(\log\frac{b}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{h(s)}{s}ds$$

$$\begin{aligned}
&+\lambda\int_1^a s\left[F_\alpha(\frac{b}{\tau}) - F_\alpha(\frac{a}{\tau})\right]\frac{h(s)}{s}ds + \lambda\int_a^b sF_\alpha\left(\frac{b}{s}\right)\frac{h(s)}{s}ds\\
&= c_1\Gamma(\alpha)\left((\log b)^{\alpha-1} - (\log a)^{\alpha-1} - \lambda(F_\alpha(b)-F_\alpha(a))\right).
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$c_1 = \frac{1}{\gamma}\left[\int_1^b K_1(s)\frac{h(s)}{s}ds + \lambda\int_1^b K_2(s)\frac{h(s)}{s}ds\right],$$

avec K_1 et K_2 définis comme suit :

$$K_1(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases} -\left(\log\frac{b}{s}\right)^{\alpha-1}, & a \leq s \leq b, \\ \left(\log\frac{a}{s}\right)^{\alpha-1} - \left(\log\frac{b}{s}\right)^{\alpha-1}, & 1 \leq s \leq a, \end{cases}$$

$$k_2(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases} s\left[F_\alpha\left(\frac{b}{s}\right) - F_\alpha\left(\frac{a}{s}\right)\right], & 1 \leq s \leq a, \\ sF_\alpha\left(\frac{b}{s}\right), & a \leq s \leq b. \end{cases}$$

Par conséquent, la solution unique de (3.17), (3.16)est donnée par :

$$y(t) = \int_1^b G(t,s)\frac{h(s)}{s}ds,\ t \in J_1.$$

Avec $G : J_1 \times ([1,a) \cup (a,b))/(t,t),\ t \in J_1 \to \mathbb{R}$ définie dans l'énoncé de ce lemme.

Remarque *: On définie $\tilde{G} : J_1 \to [0,\infty)$ comme suit :*

Si $1 \leq S \leq a$:

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\frac{1}{\gamma}\left[\left(\log\frac{a}{s}\right)^{\alpha-1} - \left(\log\frac{b}{s}\right)^{\alpha-1} + \lambda s\left[F_\alpha\left(\frac{b}{s}\right) - F_\alpha\left(\frac{a}{s}\right)\right]\right]\right|,$$

et si $a \leq s < b$:

$$\tilde{G}(s) = \left| \frac{1}{\gamma\Gamma(\alpha)} \left[-\left(\log \frac{b}{s}\right)^{\alpha-1} + \lambda s F_\alpha\left(\frac{b}{s}\right)\right]\right|.$$

Il est facile de vérifier que :

$$\int_1^b |(\log(t))^{1-\alpha} G(t,s)| ds \leq \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} (\log(t))^{1-\alpha} ds + \int_1^b \tilde{G}(s) ds.$$

Donc, par changement de variable $r = t/s$ il est facile de vérifier que :

$$\int_1^b |(\log(t))^{1-\alpha} G(t,s)| ds \leq t F_\alpha(t) + \int_1^b \tilde{G}(s) ds \leq b F_\alpha(b) + \|\tilde{G}\|_1 =: \tilde{K}_b,$$

$$\textit{pour tout}\, t \in J_1.$$

En conséquence des résultats précédents, on arrive au lemme suivant :

Lemme 3.4. *Une fonction $y \in C_\alpha(J_1)$ est une solution du problème (3.15)-(3.16) si et seulement si y est une solution de l'équation intégrale :*

$$y(t) = \int_1^b G(t,s) \frac{\varphi(s)}{s} ds, \ t \in J_1, \tag{3.18}$$

$$\varphi(s) = f(s, (\log(s))^{1-\alpha} y(s), \varphi(s)), \quad s \in J_1,$$

où $G(t,s)$ la fonction de Green définie dans la lemme (3.3), et $\varphi \in C(J_1)$ satisfait l'équation fonctionnelle implicite.

3.3.2 Unicité du solutions

Théorème 3.4. *Supposons que :*
$(H1) f : J_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue.*
$(H2)$ *Ils existes des constantes* $0 < l < 1$ *et* $0 < k$ *telles que :*

$$|f(t,u,v) - f(t,\bar{u},\bar{v})| \leq k|u - \bar{u}| + l|v - \bar{v}|,$$

pour tout $u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}$, *et* $t \in J_1$.
Si $\sigma = \frac{K}{1-l}\tilde{k}_b < 1$, *alors le problème (3.15)-(3.16) a une unique solution* $y \in C_\alpha(J_1)$.
Preuve *: Pour transférer le problème (3.15)-(3.16)en problème de point fixe, nous considérons l'opérateur* $A : C_\alpha(J_1) \to C_\alpha(J_1)$ *définie par :*

$$A(y)(t) = \int_1^b G(t,s)\frac{\varphi(s)}{s}ds. \tag{3.19}$$

Où $G(t,s)$ *est la fonction de Green définie dans le lemme(3.3), et* $\varphi \in C(J_1)$ *satisfait l'équation fonctionnelle implicite :*

$$\varphi(s) = f(s, (\log(s))^{1-\alpha}y(s), \varphi(s)). \tag{3.20}$$

On a (3.20) a pour chaque $y \in C_\alpha(J_1)$, *une solution unique* φ. *Cela est déduit directement du fait que* f *est une fonction continue et* $0 < l < 1$ *à condition* $(H2)$.
En conséquence directe du théorème de convergence dominé, il est immédiat de vérifier que $A(y) \in C_\alpha(J_1)$ *pour chaque* $y \in C_\alpha(J_1)$.

À partir de lemmes (3.3) et (3.4), les points fixes de$A$ *sont les solutions du problème (3.15)-(3.16). Nous montrerons que* A *est une contraction sur* $C_\alpha(J_1)$.

Soient $u, v \in C_\alpha(J_1)$. *Alors pour chaque* $t \in J_1$, *nous avons :*

$$(\log(t))^{1-\alpha}(Au)(t) - (\log(t))^{1-\alpha}(Av)(t) = (\log(t))^{1-\alpha}\int_A^b G(t,s)(\varphi(s) - \psi(s))\frac{ds}{s},$$

où

$$\varphi(s) = f(s, (\log(s))^{1-\alpha}u(s), \varphi(s)),$$

$$\psi(s) = f(s, (\log(s))^{1-\alpha}v(s), \psi(s)),$$

et

$$|\varphi(s) - \psi(s)| \leq k(\log(s))^{1-\alpha}|u(s) - v(s)| + l|\varphi(s) - \psi(s)|.$$

Ainsi

$$|\varphi(s) - \psi(s)| \leq \frac{k}{1-l}(\log(s))^{1-\alpha}|u(s) - v(s)|.$$

Alors

$$\begin{aligned}(\log(t))^{1-\alpha}\left|(Au)(t) - (Av)(t)\right| &\leq (\log(t))^{1-\alpha}\int_1^b \left|G(t,s)(\varphi(s) - \psi(s))\right|\frac{ds}{s}\\ &\leq \frac{k}{1-l}(\log(t))^{1-\alpha}\int_1^b |G(t,s)|(\log(t))^{1-\alpha}|u(s) - v(s)|\frac{ds}{s}\\ &\leq \frac{k}{1-l}\tilde{K}_b\|u - v\|_\alpha.\end{aligned}$$

Donc

$$\|Au - Av\|_\alpha \leq \sigma\|u - v\|_\alpha. \tag{3.21}$$

Puisque $\sigma < 1$, donc l'opérateur A est une contraction et d'après le théorème du point fixe de Banach le problème(3.15)-(3.16) a une solution unique dans $C_\alpha(J_1)$.

3.3.3 Exemple

Dans cette subsection, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats.

Exemple 3.3.1. *Considérez le problème aux limites :*

$$^{H}\mathcal{D}^{1/2}y(t) = \frac{|(\log(t))^{1/2}y(t)| + |^{H}\mathcal{D}^{1/2}y(t)|}{7(1 + |y(t)| + |^{H}\mathcal{D}^{1/2}y(t)|)} + \sin t, \quad t \in J_1 = [1,2] \tag{3.22}$$

$$y(3/2) + \frac{1}{2}\int_{3/2}^{2} y(t) = y(2), \tag{3.23}$$

le problème (3.22)-(3.23) est un cas particulier de problème (3.15)-(3.16), avec :
$a = 3/2, b = 2, \lambda = 1/2$ *et*

$$f(t,u,v) = \frac{|u| + |v\|}{7(1 + |u| + |v|)} + \sin t.$$

Il est clair que f est continue dans $J_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Puisque

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}(t,u,v)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial v}(t,u,v)\right| = \frac{1}{7(1+|u|+|v|)^2}.$$

Nous avons la condition (H2) est vérifiée pour :

$$k = l = \frac{1}{7}.$$

Avec l'approche numérique, on peut vérifier que $\tilde{K}_b \approx 5.55986$.*Par conséquence* $\sigma = \tilde{K}_b/6 \approx 0.926643$..
Donc, le problème (3.15)-(3.16) a une unique solution.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons abordé l'étude de l'éxistence et l'unicité des solutions de quelques problèmes aux limites des équations différentielles implicites non linéaire posées sur des intervalles bornés à dérivé fractionaire au sens de Caputo et au sens de Hadamard, pour cela nous illustrons par deux applications la résolution d'un problème aux limites où les conditions aux bords sont non locales et surtout de type intégral comment se réduit via une fonction de Green à la résolution d'une équation intégrale. les resultats obtennus sont basés sur quelques théorèmes du point fixe dans l'espace de Banach.

Bibliographie

[1] M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order, Surveys Math. Appl. **3** (2008), 1-12.

[2] M. Benchohra and J. E. Lazreg, Existence and uniqueness results for nonlinear implicit fractional differential equations with boundary conditions. Romanian J. Math. Comput. Sc. **4** (1) (2014), 60-72.

[3] M. Benchohra and M. S. Souid, L^1-Solutions of Boundary Value Problems for Implicit Fractional Order Differential Equations, Surveys in Mathematics and its Applications **10** (2015), 49 - 59.

[4] : H. Brezis Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris, 1992.

[5] : A. Cabada and K. Maazouz, :Results for Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions Involving the Hadamard Derivative. Springer Proceedings in Mathematics Statistics 292, 2019

[6] S. Djebali, Degré topologique : théorie et application aux EDO-EDP, Cours policopié, Département de Mathématiques, ENS-Kouba, Alger,

(2006).

[7] S. Djebali, Problèmes aux limites non linéaire associés aux EDO du second ordre, Cours de magister, Département de Mathématiques, ENS-Kouba, Alger, (2001-2002).

[8] J. Dugundji and A. Granas, Fixed Point Theory, VolI, Monografie Matematyzne, (PWN), Warsaw, 1982.

[9] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, 1985.

[10] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V. Amsterdam, 2006.

[11] V. Lakshmikantham, S. Leela and J. Vasundhara, Theory of Fractional Dynamic Systems, Cambridge Academic Publishers, Cambridge, 2009.

[12] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[13] : D. O'Regan, Y.Je Cho, and Yu-Qing Chen,Topological Degree Theory and Applications, Volume 10, by Taylor et Francis Group,LLC, 2006.