RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université IBN KHALDOUN Tiaret

Faculté de Mathématiques et Informatique

Département des Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquée

Option : Analyse fonctionnelle et équations différentielles

Mémoire

Présentée en vue d'obtenir le diplôme de MASTER

Présenté par :

Gadoum Soumia

Maatoug Noura

Mennah Fatiha

Intitulé :

Existence de solutions pour des équations différentielles fractionnaires conformes

Soutenu le :11/10/2020

Devant de jury :

Président :	**BENHABI Mohammed** : M.A.A *U IBN KHALDOUN TIARET*
Encadreur :	**BENDOUMA Bouharket** : M.C.B *U IBN KHALDOUN TIARET*
Examinateur :	**MAHROUZ Tayeb** : M.C.B *U IBN KHALDOUN TIARET*

Année Universitaire : 2019/2020

Remerciements

Nous adressons en premier lieu notre reconnaissance à **ALLAH** notre **DIEU**
tout puissant, de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et terminer ce mémoire.
Nous tenons aussi tout d'abord à remercier notre encadreur ***Mr B. Bendouma***, pour la confiance qu'il nous a accordè en nous proposant ce mémoir.De plus, son enthousiasme, son encouragement, son entière disponibilité au cours de ce travail et ses judicieux conseils.
Nous tenons à remercier les membres de jury pour avoir accepter d'examiner le contenu de notre travail.
Nous n'oublions pas aussi de remercier tous les enseignants de l'université Ibn khaldoun qui ont contribués à notre formation.
Nous tenons enfin à remercier également tous nos collègues et amis pour leurs soutiens conseils et aides.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à ceux qui sont toujours présents dans mon coeur
À trés chère mère   À trés chèr père
À ma soeur
À mes frères
À la famille Gadoum ,Saidi et Seddiki
À tous mes professeurs
À tous mes collègues et mes amis
Gadoum Soumia

je dédie cet acte humble à l'âme de mon père bien-aimé, que Dieu ait pitié de lui
À Celle qui a remusé mon cœur et a écrit mon nom sur les pupilles de ses yeux, à celle qui a partagé mes joies et mes peines avec moi ,à celle qui passé sa jeunesse à me rendre heureuse, à toi Maman
A mes chers frères et leurs enfants,sourcede joie et de bonheur
A toute ma famille, source d'espoir et de motivation
A tous mes amis
a vous cher lecteur.
Mennah Fatiha

je dédie ce mémoire à :

A ma très chère mère et très cher père :

Affable, honorables, amiable : vous représentez pour moi le symbole de la bonté par excellence,la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a cesse de m'encourager et de prier pour moi. Je vous dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, le tout puissent, vous préserver et vous accorder santé, longue vie et bonheur.

A tout les membres de ma famille, petits et grands :

Veuillez trouver dans ce modeste travail l'expression de mon affection la plus sincère. Je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur,de santé et de réussite.

A mon encadreur : Mr le docteur **Bendouma Bouharket**

Un remerciement particulier et sincère pour tous vos efforts fournis. Vous avez toujours été présentes. Que ce travail soit un témoignage de de ma gratitude et mon profond respect.

A mes chères amis (e) /collègues :

Je ne peux trouver les mots justes et sincères pour vous exprimer mon affection et mes pensées, vous êtes pour moi des frères, sœurs et des amis sur qui je peux compter. Je vous dédie ce travail et je vous souhaite une vie pleine de et de santé et de bonheur.

Maatoug Noura

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire est la branche d'analyse mathématique qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres arbitraires (à des ordres non-entiers). La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel. Par exemple, les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables dans l'ingénierie, la physique, la chimie, la biologie, ...etc (voir[3, 13, 14]).

En 2014,Khalil et al. [12] ont présenté une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire dénommée la dérivée fractionnaire conforme (voir Définition 2.1). Les équations différentielles fractionnaires conformes on été étudiées par plusieurs auteurs en utilisant les théorémes du points fixes, la méhode des sous et sur solutions, la méhode de tube solution (voir [2, 4, 5, 6, 7, 8, 11],...).

Dans ce mémoire, nous présentons des résultats d'existence de solutions pour des équations différentielles fractionnaires conformes d'ordre $\alpha \in]0, 1]$.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres.

Dans le **Chapitre 1** nous rappelons quelques définitions , notions et résultats d'analyse fonctionnelle et théorème du point fixe de Schauder.

Dans le **Chapitre 2**, nous présentons quelques définitions et résultats concernant le calcul fractionnaire conforme.

Dans le **Chapitre 3**, nous étudierons l'équation différentielle fractionnaire conforme linéaire d'ordre $\alpha \in (0, 1]$ avec des conditions aux limites linéaires :

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + p\,x(t) = g(t), \qquad \textit{pour } t \in I = [a, b],\ 0 < a < b, \\ a_0\,x(a) - b_0\,x(b) = \lambda_0, \end{cases} \tag{1}$$

où $0 < \alpha \leq 1$, $p, a_0, b_0, \lambda_0 \in \mathbb{R}$, $g \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$, $x^{(\alpha)}(t)$ désigne la dérivée fractionnaire conforme de x d'ordre α en t et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Dans le **Chapitre 4**, nous établirons un théorème d'existence pour l'équation différentielle fractionnaire conforme non-linéaire avec condition périodique :

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) = f(t, x(t)), & \text{pour tout } t \in I = [a, b], 0 < a, \\ x(a) = x(b). \end{cases} \tag{2}$$

Où $0 < \alpha \leq 1$, $x^{(\alpha)}(t)$ désigne la dérivée fractionnaire conforme de x d'ordre α en t et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Pour obtenir un théorème d'existence pour problème (2), nous introduirons la notion de tube-solution associé à (2). Cette nouvelle notion est équivalente à la notion de sous- et sur-solution introduite par B. Bendouma et al. [6] et par B. Bayour et al. [5]. Cette notion fut inspirée par celle introduite par B. Mirandette dans [15], pour d'équations différentielles ordinaires du premier ordre.

L'objectif de cette méthode est de prouver que si une solution $x \in C^{(\alpha)}(I, \mathbb{R})$ existe, alors elle est incluse dans un tube solution, i.e. on peut trouver des fonctions $v \in C^{(\alpha)}(I, \mathbb{R})$ et $M \in C^{(\alpha)}(I, [0, \infty)))$ telles que

$$|x(t) - v(t)| \leq M(t) \text{ pour tout } t \in I.$$

Mots Clés : Calcul fractionnaire conforme, équation différentielle fractionnaire conforme, conditions aux limites, sous et sur solutions, tube-solution, théorèmes d'existence, théorème du point fixe de Schauder.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions, notions et résultats d'analyse fonctionnelle et théorème du point fixe de Schauder.

Définition 1.1 *(Espace vectoriel) On définit sur un ensemble non vide E deux opérations, l'addition $(+)$ des éléments E et la multiplication $(.)$ par un scalaire. On dit que l'ensemble E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, si les conditions suivants sont satisfaites :*

(1) $(E;+)$ *est un groupe abelian,*

(2) $\forall(x,y) \in E \times E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *nous avons :*

- *(i)* $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$;
- *(ii)* $(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$,
- *(iii)* $\alpha(\beta.x) = (\alpha\beta).x$,
- *(iv)* $1_{\mathbb{K}}.x = x$, *($1_{\mathbb{K}}$ est l'élément neutre de $\mathbb{K}$).*

Définition 1.2 *(Norme) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle une norme sur E toute application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ telle que*

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

(iii) $\forall x, y \in E : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Inégalité triangulaire).*

Définition 1.3 *(Espace vectoriel normé) Un espace vectoriel E muni d'une norme $\|.\|$ noté $(E, \|.\|)$ sera appelé un espace vectoriel normé.*

Exemple 1.0.1 *On définit une norme sur l'espace vectoriel* $C([a,b],\mathbb{R})$ *de la maniére suivantes*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Définition 1.4 *(Espace de Banach) On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur les corps* $\mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$.

Exemple 1.0.2 *Soit* $I := [a,b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$. $C(I,\mathbb{R})$ *est l'espace de Banach des fonctions* x *continues définie de* I *dans* $\mathbb{R}$ *avec la norme*

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in I} |x(t)|.$$

Définition 1.5 *Le sous ensemble* S *de l'espace normé* X *est dit borné si il existe* M *tel que*

$$\|x\| \leq M \quad \text{pour tout } x \in S.$$

Définition 1.6 *L'ensemble* S *de l'espace vectoriel* X *est dit convexe si pour tout* $x, y \in S$

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in S, \ \forall \lambda \in [0,1].$$

Définition 1.7 *Soit* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *une application. On dit que* $\mathcal{F}$ *est bornée si elle envoie les parties bornées de* E *sur des parties bornées de* F *i.e.* $\mathcal{F}$ *(bornée) est bornée.*

Remarque 1.1 *Soit* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *une application bornée, i.e, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$, *tel que*

$$\text{pour tout } x \in E : \|x\|_E \leq \varepsilon \qquad \text{implique} \qquad \|\mathcal{F}(x)\|_F \leq \delta.$$

Définition 1.8 *Soient* $a \in E$ *et* $\mathcal{T} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$. *On dit que* $\mathcal{T}$ *est continue au point* a *si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$, *pour* $x \in E$, *on a*

$$\|x-a\|_E < \delta \qquad \text{implique} \qquad \|\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(a)\| < \varepsilon.$$

Alors l'opérateur $\mathcal{T}$ *est dit continu sur* E, *ou simplement continu si il est continu en tout point de* E.

Proposition 1.1 *Une application $\mathcal{T} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ est continue au point x, si et seulement si pour tout suite $(x_n)_n$ converge vers x dans E, alors $(\mathcal{T}(x_n))_n$ converge vers $\mathcal{T}(x)$ dans F.*

Définition 1.9 *Un sous ensemble S de l'espace normé B est dit compact si pour toute suite d'éléments de S on peut extraire une sous suite convergente vers un élément de S.*

Remarque *Un ensemble compact est un ensemble fermé borné ; la réciproque n'est pas toujours vraie.*

Définition 1.10 *Un ensemble M est relativement compact si $\overline{M}$ est compact.*

Définition 1.11 *Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \longrightarrow F$ est une fonction continue. On dit que T est compacte si $\overline{T(E)}$ est compact. On dit que T est complètement continue si $\overline{T(B)}$ est compact pour tout sous-ensemble borné $B \subset E$.*

Définition 1.12 *(Ensemble équicontinue) Un ensemble F de $C([a,b],\mathbb{R})$ est dit équicontinu, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$, tel que, pour tout $t_1, t_2 \in [a,b], |t_2 - t_1| \leq \delta$ on a :*

$$\|f(t_2) - f(t_1)\| \leq \varepsilon, \quad \textit{pour tout} \quad f \in F.$$

Définition 1.13 *(Ensemble uniformément borné) F est dit uniformément borné dans $C([a,b],\mathbb{R})$ s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que $\|y\|_\infty \leq M$ pour tout $y \in F$.*

Lemme 1.1 *Une application continue sur un ensemble compact est uniformément borné.*

Théorème 1.1 *(Arzela-Ascoli) Soit $B \subset C([a,b],\mathbb{R})$, B est relativement compact dans $C([a,b],\mathbb{R})$ si et seulement si :*

(a) *B est uniformément borné.*

(b) *B est équicontinu.*

Théorème 1.2 *(Théorème du point fixe de Schauder) Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach E et $A : C \to C$ une application compact i.e $(\overline{A(C)}$ est compact). Alors A admet au moins un point fixe (i.e il existe un point x_0 dans C tel que $f(x_0) = x_0$).*

Chapitre 2

Calcul fractionnaire conforme

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et résultats concernant le calcul fractionnaire conforme.

2.1 La dérivée fractionnaire conforme

Définition 2.1 *Soit* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction et soit* $\alpha \in (0, 1]$. *La dérivée fractionnaire conforme d'ordre* α *de* f *est définie par :*

$$f^{(\alpha)}(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \tag{2.1}$$

pour tout $t > 0$. *Si* $f^{(\alpha)}(t)$ *existe et est finie, on dit que* f *est* α*-différentiable en* t.

Si f *est* α*-différentiable dans un intervalle* $]0, a[,\ a > 0$, *et* $\lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ *existe, alors la dérivé fractionnaire conforme de* f *d'ordre* α *en* $t = 0$ *est défini comme*

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t).$$

Exemple 2.1.1 *Soit* $\alpha \in (0, 1]$. *Les fonctions suivantes* $f, g, h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *définies par* $f(t) = t^p$, $p \in \mathbb{R}$, $g(t) \equiv \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *et* $h(t) = e^{pt}$, $p \in \mathbb{R}$, *sont* α*-différentiables avec*

1. $f^{(\alpha)}(t) = p\, t^{p-\alpha}$;
2. $g^{(\alpha)}(t) = 0$;
3. $h^{(\alpha)}(t) = p\, t^{1-\alpha} e^{pt}$.

Définition 2.2 *Soit $\alpha \in (m,\ m+1]$, $m \in \mathbb{N}$ et $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est m fois différentiable en $t > 0$. On définit la dérivée fractionnaire conforme de f d'ordre α par*

$$f^{(\alpha)}(t) := (f^{(m)})^{(\alpha-m)}(t).$$

Remarque 2.1 *(i) La derivée de Riemann-liouville D_a^α ne vérifie pas (ne satisfait pas) $D_a^\alpha(1) = 0$, si f n'est pas entier naturel. ($D_a^\alpha(1) = 0$ pour la dérivée de Caupto).*

(ii) Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas la règle du produit connue : $D_a^\alpha(fg) = fD_a^\alpha(g) + gD_a^\alpha(f)$.

(iii) Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas à la règle du quotient : $D_a^\alpha(f/g) = \dfrac{gD_a^\alpha(f) - fD_a^\alpha(g)}{g^2}$.

(iv) Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas à la règle de la chaîne (Dérivée de fonctions composées) : $D_a^\alpha(fog) = f^\alpha(g)g^\alpha$.

(v) Toutes les dérivées fractionnaires ne satisfont pas : $D^\alpha D^\beta f = D^{\alpha+\beta} f$ en général.

(vi) La définition de Caputo suppose que la fonction f est différentiable.

Théorème 2.1 *[17] Soit $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $\alpha \in (0, 1]$. Si f est α-différentiable en $t_0 > 0$, alors f est continue en t_0.*

Preuve.
Puisque

$$f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon}\varepsilon.$$

Alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)] = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon}. \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon$$

Soit $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$. Alors

$$\lim_{h\to 0}[f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{(\alpha)}(t_0), 0$$

ce que implique que

$$\lim_{h\to 0} f(t_0 + h) = f(t_0).$$

Par conséquent, f est continue à t_0.

Théorème 2.2 *[17] Soit $\alpha \in (0,1]$. Si $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sont α-différentiables en $t > 0$. Alors :*

(i) $(af+bg)^{(\alpha)} = af^{(\alpha)} + bg^{(\alpha)}$, *pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$;

(ii) $(fg)^{(\alpha)} = fg^{(\alpha)} + gf^{(\alpha)}$;

(iii) $(f/g)^{(\alpha)} = \dfrac{gf^{(\alpha)} - fg^{(\alpha)}}{g^2}$.

(iv) Si, en plus f est différentiable en $t > 0$, alors

$$f^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha} f'(t).$$

Preuve Soit $\alpha \in]0,1]$. Supposons que f et g sont α-différentiables en $t > 0$.
(i). Soit $a, b \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(af+bg)(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - (af+bg)(t)}{\varepsilon} \\
&\qquad = a\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} + b\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \\
&\qquad = af^{(\alpha)}(t) + bg^{(\alpha)}(t).
\end{aligned}$$

Donc $(af+bg)$ est α-différentiable en $t > 0$ et $(af+bg)^{(\alpha)} = af^{(\alpha)} + bg^{(\alpha)}$.
(ii). Pour fixe $t > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(fg)(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - (fg)(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}.g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})\right) + f(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Puisque g est continu à t, $\lim_{\varepsilon\to 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$, alors (fg) est α-différentiable en $t > 0$ et $(fg)^{(\alpha)} = fg^{(\alpha)} + gf^{(\alpha)}$.
(iii) peut être prouvé d'une manière similaire.

(iv) soit $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$, d'ou $\varepsilon = t^{1-\alpha}$. Par la Définition 2.1, nous avons

$$\begin{aligned} f^{(\alpha)}(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h t^{\alpha-1}} \\ &= t^{1-\alpha} \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ &= t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}. \end{aligned}$$

Proposition 2.1 *Soient W un ouvert de $\mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$. Si $g : I \to \mathbb{R}$ est α-différentiable en $t > 0$ et si $f : W \to \mathbb{R}$ est différentiable en $g(t) \in W$. Alors $f \circ g$ est α-différentiable en t et*

$$(f \circ g)^{(\alpha)}(t) = f'(g(t)).g^{(\alpha)}(t). \tag{2.2}$$

Exemple 2.1.2 *Soit $g : [1,2] \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que : $g(t) = t^2$ et $f(t) = e^t$,on a*

$$g^{(\alpha)}(t) = 2t^{2-\alpha},\ f'(t) = e^t \text{ et } (fog)(t) = (f'og)(t) = e^{t^2}.$$

D'aprés la Proposition 2.1, on a

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{(\alpha)}(t) &= e^{t^2}.2t^{2-\alpha} \\ &= 2t^{2-\alpha} e^{t^2}. \end{aligned}$$

D'autre part, comme g est différentiable, on calcule $(fog)^{(\alpha)}(t)$ sur I :

$$\begin{aligned} (fog)^{(\alpha)}(t) &= t^{1-\alpha}(fog)'(t) = t^{1-\alpha} f'(g(t)) g'(t) \\ &= t^{1-\alpha} e^{t^2} 2t = 2t^{2-\alpha} e^{t^2}. \end{aligned}$$

Remarque 2.2 *Il est facile de vérifier que :*

(i) La fonction $x : t \mapsto e^{\frac{p}{\alpha} t^\alpha}$, $p \in \mathbb{R}$, est une solution du problèeme à valeur initiale :

$$x^{(\alpha)}(t) = p\,x(t),\ t \in [0, \infty),\ x(0) = 1. \tag{2.3}$$

(ii) Si f est différentiable en t, alors f est α-différentiable en t.

Nous introduisons l'espace suivant : Soit $I = [a, b],\ a > 0$.

$$C^{\alpha}(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R},\ est\ \alpha\text{-}diff\acute{e}rentiable\ sur\ I\ et\ f^{(\alpha)} \in C(I, \mathbb{R})\}.$$

Théorème 2.3 *(Théorème de Rolle) Soit $\alpha \in]0, 1[, a > 0$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :*
(i) f est continue sur $[a, b]$.
(ii) f est α-différentiable sur $[a, b[$.
(iii) $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(\alpha)}(c) = 0$.

Théorème 2.4 *(théoréme de la valeur moyenne)*
Soit $\alpha \in]0, 1[, a > 0$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :
(i) f est continue sur $[a, b]$.
(ii) f est α-différentiable sur $[a, b[$.
Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(\alpha)}(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}$.

Preuve.
Considérons la fonction φ définie sur $[a, b]$ par

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}(\frac{1}{\alpha}x^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}).$$

On a φ est continue sur $[a, b]$, α-différentiable (puisque f est continue sur $[a, b]$ et α-différentiable), $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ et $\varphi^{(\alpha)}(t) = f^{(\alpha)}(t) - \dfrac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}$.
D'aprés le Théorème 2.3, il existe $c \in]a, b[$ telle que $\varphi^{(\alpha)}(c) = 0$, d'où

$$f^{(\alpha)}(t) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}.$$

Proposition 2.2 *Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est α-différentiable.*
(a) Si $f^{(\alpha)}$ est bornèe sur $[a, b]$ où $a > 0$, alors f est uniformèment continue et bornèe sur $[a, b]$.

(b) Si f^{α} est bornèe sur $[a, b]$ et continue en a, alors f est uniformèment continue et bornèe sur $[a, b]$

Théorème 2.5 *Soit $\alpha \in]0, 1[, a > 0$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :*

(i) f est continue sur $[a,b]$.

(ii) f est α-différentiable sur $[a,b[$.
Alors,
(i) Si $f^{(\alpha)}(t) \geq 0$ pour tout $t \in]a,b[$, alors f est croissante sur $[a,b]$.

(ii) Si $f^{(\alpha)}(t) \leq 0$ pour tout $t \in]a,b[$, alors f est décroissante sur $[a,b]$.

(iii) Si $f^{(\alpha)}(t) = 0$ pour tout $t \in]a,b[$, alors f est une fonction constante sur $[a,b]$.

2.2 L'intégral fractionnaire conforme

Définition 2.3 *[12] Soit $\alpha \in (0,1]$, $0 \leq a$ et $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$. L'intégral fractionnaire conforme de f d'ordre α de a à t, notée par $I_\alpha^a(f)(t)$, est définie par :*

$$I_\alpha^a(f)(t) := I_1^a(t^{\alpha-1}f)(t) = \int_a^t f(s)d_\alpha s := \int_a^t f(s)s^{\alpha-1}ds.$$

où l'intégrale à droite est l'ntégrale usuelle de Riemann.

Lemme 2.1 *[12, 16] Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $t \geq a$ on a*

$$(I_\alpha^a(f))^{(\alpha)}(t) = f(t). \tag{2.4}$$

Preuve.
Puisque f est continue, alors $I_\alpha^a(f)(t)$ est différentiable. Donc

$$\begin{aligned}(I_\alpha^a(f))^{(\alpha)}(t) &= t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}I_\alpha^a(f)(t)\\ &= t^{1-\alpha}\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{f(s)}{s^{1-\alpha}}ds\\ &= t^{1-\alpha}\frac{f(t)}{t^{1-\alpha}}\\ &= f(t).\end{aligned}$$

Lemme 2.2 *[1, 17] Soit* $0 < \alpha \leq 1$. *Si* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *est différentiable, alors, pour tout* $t > a$ *on a*

$$I_{\alpha}^{a}(f^{\alpha})(t) = f(t) - f(a). \tag{2.5}$$

Preuve.
D'aprés le Théorème 2.2 (iv) etcomme f est différenciable, nous avons :

$$\begin{aligned} I_{\alpha}^{a}((f)^{(\alpha)})(t) &= \int_{a}^{t} f^{(\alpha)}(s) d_{\alpha}s \\ &= \int_{a}^{t} f^{(\alpha)}(s) s^{\alpha-1} ds \\ &= \int_{a}^{t} s^{1-\alpha} f'(s) s^{\alpha-1} ds \\ &= f(t) - f(a). \end{aligned}$$

Théorème 2.6 *[10] Soit* $\alpha \in]0, 1[$, $a > 0$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors, pour tout* $t \in [a, b]$ *nous avons,*

$$|I_{\alpha}^{a}(f)(t)| \leq I_{\alpha}^{a}|f|(t).$$

Preuve.
Puisque f est continue, alors nous avons

$$\begin{aligned} |I_{\alpha}^{a}(f)(t)| &= \left| \int_{a}^{t} \frac{f(s)}{s^{1-\alpha}} ds \right| \\ &\leq \int_{a}^{t} \left| \frac{f(s)}{s^{1-\alpha}} \right| ds \\ &\leq \int_{a}^{t} \frac{|f(s)|}{s^{1-\alpha}} ds \\ &\leq I_{\alpha}^{a}(|f|)(t). \end{aligned}$$

Corollaire 2.1 *Soit* $\alpha \in]0, 1[$, $a > 0$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, tel que* $M = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$. *Alors, pour tout* $t \in [a, b]$ *nous avons,*

$$\left| I_{\alpha}^{a}(f)(t) \right| \leq M \left(\frac{t^{\alpha} - a^{\alpha}}{\alpha} \right).$$

Preuve.
D'aprés le Théorème 2.6, nous avons, pour tout $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |I_\alpha^a(f)(t)| &\leq I_\alpha^a(|f|)(t) \\ &= \int_a^t \frac{|f(s)|}{s^{1-\alpha}} ds \\ &\leq M \int_a^t s^{\alpha-1} ds \\ &= M\left(\frac{t^\alpha - a^\alpha}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Chapitre 3

Équations différentielles fractionnaires conformes linéaires et problèmes aux limites associés

Dans ce chapitre, nous étudions l'équation différentielle fractionnaire conforme linéaire d'ordre $\alpha \in (0,1]$ avec des conditions aux limites linéaires :

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + p\,x(t) = g(t), & \textit{pour } t \in I = [a,b],\ 0 < a < b, \\ a_0\,x(a) - b_0\,x(b) = \lambda_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $0 < \alpha \leq 1$, $p, a_0, b_0, \lambda_0 \in \mathbb{R}$, $g \in C^{\alpha}(I,\mathbb{R})$, $x^{(\alpha)}(t)$ désigne la dérivée fractionnaire conforme de x d'ordre α en t et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
Une solution de (3.1) sera une fonction $x \in C^{\alpha}(I,\mathbb{R})$ satisfaisant (3.1).

Les résultats de ce travail se trouvent dans [6]

3.1 Cas général

Théorème 3.1 *Si* $a_0 \neq b_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^{\alpha}-b^{\alpha})}$*, alors problème* (3.1) *à une solution unique* $x \in C^{\alpha}(I,\mathbb{R})$*, donnée par*

$$x(t) := \int_a^b G(t,s)g(s)d_{\alpha}s + \frac{\lambda_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^{\alpha}-t^{\alpha})}}{a_0 - b_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^{\alpha}-b^{\alpha})}}, \tag{3.2}$$

où G est la fonction de Green (fractionnaire) donnée par

$$G(t,s) = \frac{e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)}}{a_0 - b_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}} \begin{cases} a_0, & a \le s \le t \le b, \\ b_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}, & a \le t \le s \le b, \end{cases} \tag{3.3}$$

***Preuve*.**
Soit x est solution du problème (3.1), on a :

$$\begin{aligned} \left[x(t)e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha}\right]^{(\alpha)} &= x^{(\alpha)}(t)e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha} + pt^{1-\alpha}t^{\alpha-1}e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha}x(t), \\ &= e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha}g(t), \end{aligned}$$

On intégré les deux cotés de cette égalité sur $[a,t]$ et on obtient

$$x(t)e^{\frac{p}{\alpha}t^\alpha} - x(a)e^{\frac{p}{\alpha}a^\alpha} = \int_a^t e^{\frac{p}{\alpha}s^\alpha}g(s)d_\alpha s. \tag{3.4}$$

Donc,

$$x(t) = e^{\frac{-p}{\alpha}t^\alpha}\left(e^{\frac{p}{\alpha}a^\alpha}x(a) + \int_a^t s^{\alpha-1}\ e^{\frac{p}{\alpha}s^\alpha}g(s)ds\right). \tag{3.5}$$

Par (3.1) et(3.5), on obtient

$$x(a) = \frac{b_0}{a_0 - b_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}}\int_a^b s^{\alpha-1}\ e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - b^\alpha)}g(s)ds + \frac{\lambda_0}{a_0 - b_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}}. \tag{3.6}$$

En substituant (3.6) à (3.5), on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{b_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - t^\alpha)}}{a_0 - b_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}}\int_a^t s^{\alpha-1}e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - b^\alpha)}g(s)ds + \int_a^t s^{\alpha-1}e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)}g(s)ds \\ &\quad + \frac{b_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - t^\alpha)}}{a_0 - b_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}}\int_t^b s^{\alpha-1}e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - b^\alpha)}g(s)ds + \frac{\lambda_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - t^\alpha)}}{a_0 - b_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}} \\ &= \frac{1}{a_0 - b_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}}\left(a_0\int_a^t s^{\alpha-1}\ e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)}\ g(s)ds + \right. \\ &\quad \left. b_0\int_t^b s^{\alpha-1}e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha + s^\alpha - t^\alpha)}g(s)ds\right) + \frac{\lambda_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - t^\alpha)}}{a_0 - b_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}} \\ &= \int_a^b G(t,s)g(s)d_\alpha s + \frac{\lambda_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - t^\alpha)}}{a_0 - b_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}}. \end{aligned}$$

3.2 Cas particuliers

On peut déduire du théorème précédent, les résultats suivants (pour les cas particuliers : initiale ($a_0 = 1, b_0 = 0$), terminale ($a_0 = 0, b_0 = 1$) et périodique ($a_0 = b_0 = 1, \lambda_0 = 0$) :

Corollaire 3.1 *Le problème de Cauchy (à valeur initiale)*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + p\,x(t) = g(t), & \textit{pour tout } t \in I, \\ x(a) = x_0, \end{cases} \tag{3.7}$$

avec $p, x_0 \in \mathbb{R}$, $g \in C^\alpha(I, \mathbb{R})$, *admet une solution unique* $x \in C^\alpha(I, \mathbb{R})$, *donnée par*

$$x(t) := \int_a^b G_I(t,s)g(s)d_\alpha s + x_0 e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - t^\alpha)}, \tag{3.8}$$

où G_I *est la fonction de Green donnée par*

$$G_I(t,s) = e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)} \begin{cases} 1, & a \leq s \leq t \leq b, \\ 0, & a \leq t \leq s \leq b, \end{cases} \tag{3.9}$$

Corollaire 3.2 *Le problème à valeur terminale*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + p\,x(t) = g(t), & \textit{pour tout } t \in I, \\ x(b) = x_0, \end{cases} \tag{3.10}$$

avec $p, x_0 \in \mathbb{R}$, $g \in C^\alpha(I, \mathbb{R})$, *admet une solution unique* $x \in C^\alpha(I, \mathbb{R})$, *donnée par*

$$x(t) := \int_a^b G_T(t,s)g(s)d_\alpha s + x_0 e^{\frac{p}{\alpha}(b^\alpha - t^\alpha)}, \tag{3.11}$$

où G_T *est la fonction de Green (fractionnaire) donnée par*

$$G_T(t,s) = -e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)} \begin{cases} 0, & a \leq s \leq t \leq b, \\ 1, & a \leq t \leq s \leq b, \end{cases} \tag{3.12}$$

Corollaire 3.3 *Le problème périodique*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + p\,x(t) = g(t), & \textit{pour tout } t \in I, \\ x(a) = x(b), \end{cases} \tag{3.13}$$

avec $p \in \mathbb{R}^*$, $g \in C^\alpha(I, \mathbb{R})$, *admet une solution unique* $x \in C^\alpha(I, \mathbb{R})$, *donnée par*

$$x(t) := \int_a^b G_P(t,s) g(s) d_\alpha s, \tag{3.14}$$

où G_P *est la fonction de Green donnée par*

$$G_P(t,s) = \frac{e^{\frac{p}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)}}{1 - e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}} \begin{cases} 1, & a \leq s \leq t \leq b, \\ e^{\frac{p}{\alpha}(a^\alpha - b^\alpha)}, & a \leq t \leq s \leq b, \end{cases} \tag{3.15}$$

3.3 Exemples

Exemple 3.1 *On considère le problème :*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) = -2x(t) + 2, & \textit{pour tout } t \in I = [\frac{1}{2}, 1], \\ x(\frac{1}{2}) - x(1) = \lambda_0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Ce problème est sous la forme (3.1), *avec* $0 < \alpha \leq 1$, $p = 2$, $g(t) = 2$, $a_0 = b_0 = 1, \lambda_0 \in \mathbb{R}$. *D'aprés le Théorème 3.1, le problème* (3.16) *admet une solution* $x \in C^\alpha([\frac{1}{2}, 1], \mathbb{R})$ *telle que*

$$x(t) := \int_{\frac{1}{2}}^1 2G(t,s) d_\alpha s + \frac{\lambda_0 e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha - t^\alpha)}}{1 - e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha - 1)}},$$

où G *est la fonction de Green donnée par*

$$G(t,s) = \frac{e^{\frac{2}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)}}{1 - e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha - 1)}} \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \leq s \leq t \leq 1, \\ e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha - 1)}, & \frac{1}{2} \leq t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

D'ou

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{\frac{1}{2}}^{t} 2G(t,s)d_\alpha s + \int_{t}^{1} 2G(t,s)d_\alpha s + \frac{\lambda_0 e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha - t^\alpha)}}{1-e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha -1)}} \\
&= \frac{1}{1-e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha -1)}}\Big[\int_{\frac{1}{2}}^{t} 2e^{\frac{2}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)} s^{\alpha-1}ds + \int_{t}^{1} 2e^{\frac{2}{\alpha}(s^\alpha - t^\alpha)} e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha -1)} s^{\alpha-1}ds\Big] \\
&\quad + \frac{\lambda_0 e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha - t^\alpha)}}{1-e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha -1)}} \\
&= \frac{e^{-\frac{2}{\alpha}t^\alpha}}{1-e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha -1)}}\Big[\int_{\frac{1}{2}}^{t} 2s^{\alpha-1}e^{\frac{2}{\alpha}s^\alpha}ds + e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha -1)}\int_{t}^{1} 2s^{\alpha-1}e^{\frac{2}{\alpha}s^\alpha}ds\Big] + \frac{\lambda_0 e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha - t^\alpha)}}{1-e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha -1)}} \\
&= \frac{e^{-\frac{2}{\alpha}t^\alpha}}{1-e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha -1)}}\Big[(e^{\frac{2}{\alpha}t^\alpha} - e^{\frac{2}{\alpha}(\frac{1}{2})^\alpha}) + e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha -1)}(e^{\frac{2}{\alpha}} - e^{\frac{2}{\alpha}t^\alpha})\Big] + \frac{\lambda_0 e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha - t^\alpha)}}{1-e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha -1)}} \\
&= 1 + \frac{\lambda_0 e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha - t^\alpha)}}{1-e^{\frac{2}{\alpha}((\frac{1}{2})^\alpha -1)}}.
\end{aligned}$$

-Si $\alpha = 1$, nous avons $x^{(\alpha)} = x'$ et $x(t) := 1 + \frac{\lambda_0 e^{2(\frac{1}{2}-t)}}{1-e^{-1}}$.

Exemple 3.2 *On considère le problème*

$$\begin{cases} x^{(\frac{1}{2})}(t) + 3\ x(t) = \sqrt{t}e^{-6\sqrt{t}}, & \text{pour tout } t \in I = [1,2], \\ x(1) = \frac{1}{3}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Ce problème est sous la forme (3.10), avec $\alpha = \frac{1}{2}$, $p(t) = 3$, $g(t) = \sqrt{t}e^{-6\sqrt{t}}$, $a = 1, b = 2$ et $x_0 = \frac{1}{3}$. D'aprés le Corollaire 3.1, le problème (3.17) admet une solution $x \in C^1([1,2],\mathbb{R})$ telle que

$$x(t) := \int_1^2 G_I(t,s)\sqrt{s}e^{-6\sqrt{s}}d_{\frac{1}{2}}s + \frac{1}{3}e^{6(1-t^{\frac{1}{2}})},$$

où G_I est la fonction de Green donnée par

$$G_I(t,s) = e^{6(s^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}})}\begin{cases} 1, & 1 \le s \le t \le 2, \\ 0, & 1 \le t \le s \le 2, \end{cases}$$

D'ou

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_1^t G_I(t,s)\sqrt{s}e^{-6\sqrt{s}}d_{\frac{1}{2}}s + \int_t^2 G_I(t,s)\sqrt{s}e^{-6\sqrt{s}}d_{\frac{1}{2}}s + \frac{1}{3}e^{6(1-t^{\frac{1}{2}})} \\
&= \int_1^t e^{6(s^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}})}\sqrt{s}e^{-6\sqrt{s}}s^{\frac{1}{2}-1}ds + \frac{1}{3}e^{6(1-t^{\frac{1}{2}})} \\
&= \int_1^t e^{-6t^{\frac{1}{2}}}ds + \frac{1}{3}e^{6(1-t^{\frac{1}{2}})} \\
&= (t-1)e^{-6t^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3}e^{6(1-t^{\frac{1}{2}})} = \frac{1}{3}e^{-6\sqrt{t}}(e^6 + 3(t-1)).
\end{aligned}$$

Chapitre 4

Équation différentielle fractionnaire conforme non-linéaire

Dans ce chapitre, nous établirons un théorème d'existence pour l'équation différentielle fractionnaire conforme non-linéaire avec condition périodique :

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) = f(t, x(t)), & \text{pour tout } t \in I = [a,b], 0 < a, \\ x(a) = x(b). \end{cases} \tag{4.1}$$

Où $0 < \alpha \leq 1$, $x^{(\alpha)}(t)$ désigne la dérivée fractionnaire conforme de x d'ordre α en t et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Pour obtenir un théorème d'existence pour problème (4.1), nous introduirons la notion de tube-solution associé à (4.1). Cette nouvelle notion est équivalente à la notion de sous- et sur-solution introduite par B. Bendouma et al. [6].

Les résultats de ce travail se trouvent dans [5, 6, 7]

4.1 Résultat d'existence

Une solution du problème sera une fonction $x \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$ satisfaisant (4.1). Introduisons la notion de tube-solution pour le problème (4.1). C'est à partir de cette notion que nous obtiendrons notre résultat d'existence.

Définition 4.1 *Soit* $(v, M) \in C^\alpha(I, \mathbb{R}) \times C^\alpha(I, [0, \infty))$. *On dira que* (v, M) *est un tube-solution de (4.1) si*

(i) $(x - v(t))(f(t, x) - v^{(\alpha)}(t)) \leq M(t)M^{(\alpha)}(t)$ *pour tout* $t \in I$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $|x - v(t)| = M(t)$,

(ii) $v^{(\alpha)}(t) = f(t, v(t))$ *et* $M^\alpha(t) = 0$ *pour tout* $t \in I$ *tel que* $M(t) = 0$,

(iii) $|v(b) - v(a)| \leq M(a) - M(b)$.

Remarque 4.1 *Si* $\alpha = 1$, *notre définition de tube solution est équivalente à la notion de tube solution introduite par B. Mirandette [15] pour d'équations différentielles ordinaires du premier ordre.*

On notera

$$T(v, M) = \{x \in C^\alpha(I, \mathbb{R}) : |x(t) - v(t)| \leq M(t) \text{ pour tout } t \in I\}.$$

Pour l'existence de solution pour le problème (4.1), nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 4.1 *(Principe du maximum) Soit une fonction* $r \in C^\alpha(I, \mathbb{R})$, *telle que* $r^{(\alpha)}(t) < 0$ *sur* $\{t \in I : r(t) > 0\}$ *. Si une des conditions suivantes est satisfaite,*

(i) $r(a) \leq 0$,

(ii) $r(a) \leq r(b)$,

alors

$$r(t) \leq 0 \textit{ pour tout } t \in I.$$

Preuve.
Supposons qu'il éxiste un $t \in [a, b]$ tel que $r(t) > 0$. Dans ce cas, il existe un $t_\circ \in [a, b]$ tel que $r(t_\circ) = \max_{a \leq t \leq b}(r(t)) > 0$ car $r \in C^{(\alpha)}([a, b])$ et $r(t) > 0$. Si $t_\circ > a$, alors il existe un intervalle $[t_1, t_\circ] \subset [a, t_\circ]$ tel que $r(t) > 0$ pour tout $t \in [t_1, t_\circ]$. Ainsi, $I_\alpha^{t_1}\left(r^{(\alpha)}\right)(t_\circ) = r(t_\circ) - r(t_1) < 0$ par hypothèse et par le Lemme 2.2, ceci contredit la maximalité de $r(t_\circ)$. Le cas $t_\circ = a$ est impossible. En prenant $t_\circ = b$, par ce qui précède, on trouverait que $r(b) < 0$, ce qui nous mène directement à la conclusion.

Lemme 4.2 *Soit* $\alpha \in (0, 1]$ *et* $x :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *est* α*-différentiable en* $t \in [a, b]$. *Alors*

$$|x(t)|^{(\alpha)} = \frac{x(t)\ x^{(\alpha)}(t)}{|x(t)|}.$$

Preuve.
D'aprés la Definition 2.1 et le Théorème 2.2, on a que

$$\begin{aligned}
|x(t)|^{(\alpha)} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{|x(t+\epsilon t^{1-\alpha})| - |x(t)|}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{x\left(t+\epsilon t^{1-\alpha}\right)^2 - x(t)^2}{\epsilon\left(|x\left(t+\epsilon t^{1-\alpha}\right)| + |x(t)|\right)} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \left[\frac{x(t+\epsilon t^{1-\alpha})^2 - x(t)^2}{\epsilon} \cdot \frac{1}{|x(t+\epsilon t^{1-\alpha})| + |x(t)|}\right] \\
&= \left[x(t)^2\right]^{(\alpha)} \frac{1}{2|x(t)|} \\
&= 2x(t)x^{(\alpha)}(t)\frac{1}{2|x(t)|}.
\end{aligned}$$

On peut déduire du Corollaire 3.3, le lemme suivant

Lemme 4.3 *Le problème périodique*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + \alpha\, x(t) = g(t), \quad \textit{pour tout } t \in I = [a,b], \\ x(a) = x(b), \end{cases} \tag{4.2}$$

avec $1 - e^{a^\alpha - b^\alpha} \neq 0$, $g \in C^\alpha(I,\mathbb{R})$, *admet une solution unique* $x \in C^\alpha(I,\mathbb{R})$, *donnée par*

$$x(t) := \int_a^b G_P(t,s)g(s)d_\alpha s, \tag{4.3}$$

où G_P *est la fonction de Green donnée par*

$$G_P(t,s) = \frac{e^{(s^\alpha - t^\alpha)}}{1 - e^{(a^\alpha - b^\alpha)}} \begin{cases} 1, & a \le s \le t \le b, \\ e^{(a^\alpha - b^\alpha)}, & a \le t \le s \le b, \end{cases} \tag{4.4}$$

Afin de démontrer le théorème d'existence, nous aurons recours au problème modifié suivant :

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) + \alpha\; x(t) = f(t, \overline{x}(t)) + \alpha\; \overline{x}(t), \quad t \in I, \\ x(a) = x(b), \end{cases} \tag{4.5}$$

où

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} \frac{M(t)}{|x-v(t)|}(x - v(t)) + v(t), & \text{si } |x - v(t)| > M(t), \\ x(t), & \text{si } |x - v(t)| \leq M(t). \end{cases} \tag{4.6}$$

Il est clair qu'une solution x de (4.5) telle que $|x(t) - v(t)| \leq M(t)$ pour tout $t \in I$ (c-à-d. $x \in T(v, M)$) est une solution de (4.1).

Définissons l'opérateur $\mathcal{A}_1 : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$ par

$$\mathcal{A}_1(x)(t) = \int_a^b G_P(t, s)\Big(f(s, \overline{x}(s)) + \alpha\ \overline{x}(s)\Big)s^{\alpha-1}ds, \tag{4.7}$$

où G_P est la fonction de Green du problème périodique (4.2).

D'après le Lemme 4.3, les points fixes de l'opérateur $\mathcal{A}_1$ sont les solutions du problème (4.5).

Proposition 4.1 *Si $(v, M) \in C^\alpha(I, \mathbb{R}) \times C^\alpha(I, [0, \infty))$ est un tube-solution de (4.1), alors l'opérateur $\mathcal{A}_1 : C(I, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$ est compact.*

Preuve : La preuve est donnée en plusieures étapes.
Etape 1 : Montrons tout d'abord la continuité de l'opérateur $\mathcal{A}_1$.
Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C(I, \mathbb{R})$ convergeant vers $x \in C(I, \mathbb{R})$. Alors pour tout $t \in I$, on a :

$$\begin{aligned}
\Big|\mathcal{A}_1(x_n(t)) - \mathcal{A}_1(x(t))\Big| &\leq \int_a^b s^{\alpha-1}|G_P(t, s)|\Big|\Big(f(s, \overline{x_n}(s)) + \alpha\ \overline{x_n}(s)\Big) \\
&\qquad\qquad - \Big(f(s, \overline{x}(s)) + \alpha\ \overline{x}(s)\Big)\Big|ds \\
&\leq M\int_a^b s^{\alpha-1}\Big|\Big(f(s, \overline{x_n}(s)) - f(s, \overline{x}(s))\Big) \\
&\qquad\qquad + \alpha\ \Big(\overline{x_n}(s) - \overline{x}(s)\Big)\Big|ds \\
&\leq M\int_a^b s^{\alpha-1}\Big(\Big|f(s, \overline{x_n}(s)) - f(s, \overline{x}(s))\Big| \\
&\qquad\qquad + \alpha\Big|\overline{x_n}(s) - \overline{x}(s)\Big|\Big)ds.
\end{aligned}$$

où $M := \max_{s,t\in I} |G_p(t,s)|$. Puisqu'il existe une constante $R > 0$ tel que $\|\overline{x}\|_{C(I,\mathbb{R})} < R$, il existe un indice N tell que $|\overline{x_n}|_{C(I,\mathbb{R})} \leq R$ pour tout $n > N$. Ainsi, f uniformément continue sur $I \times B_R(0)$. Alors pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un $\delta > 0$ tel que $x, y \in \mathbb{R}$ où

$$|y - x| < \delta < \frac{\epsilon}{2M(b^\alpha - a^\alpha)}, |f(s,y) - f(s,x)| < \frac{\epsilon\alpha}{2M(b^\alpha - a^\alpha)},$$

pour tout $s \in I$. Par hypothèse, il est possible de trouver un indice $\hat{N} > N$ tel que $|\overline{x_n} - \overline{x}|_{C(I,\mathbb{R})} < \delta$ pour $n > \hat{N}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{A}_1(x_n(t)) - \mathcal{A}_1(x(t))\Big| \\
&\qquad \leq M \int_a^b \Big(\frac{\epsilon\alpha}{2M(b^\alpha - a^\alpha)} + \alpha\frac{\epsilon}{2M(b^\alpha - a^\alpha)}\Big)ds \\
&\qquad \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

ce qui nous convainc de la continuité de $\mathcal{A}_1$.

Etape 2 : Montrons maintenant que l'ensemble $\mathcal{A}_1(C(I,\mathbb{R}))$ est relativement compact. Considérons une suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}_1(C(I,\mathbb{R}))$ pour tout $n \in N$ il existe une suite $(x_n)_{n\in N} \in C(I,\mathbb{R})$ tell que $y_n = \mathcal{A}_1(x_n(t))$ pour tout $n \in N$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\Big|\mathcal{A}_1(x_n)(t)\Big| &\leq \int_a^b s^{\alpha-1}|G_P(t,s)|\Big(|f(s,\overline{x_n}(s))| + \alpha\ |\overline{x_n}(s)|\Big)ds \\
&\leq M \int_a^b \Big(|f(s,\overline{x_n}(s))| + \alpha|\overline{x_n}(s)|\Big)s^{\alpha-1}ds.
\end{aligned}$$

Puisque $|\overline{x}_n(s)| \leq R$, pour tout $s \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $I \times \overline{B}(0,R)$ est un ensemble sur $I \times \mathbb{R}$ et f étant continue sur $I \times \overline{B}(0,R)$, nous pouvons déduire l'existance d'une constante $A > 0$, telle que

$$|f(s,\overline{x}_n(s)| \leq A, \qquad \text{pour tout } s \in I \quad \text{et} \quad \text{tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc,

$$|y_n(t)| = |\mathcal{A}_1(x_n)(t)| \leq M(A + \alpha R)\frac{b^\alpha - a^\alpha}{\alpha} < +\infty.$$

Ainsi, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.
D'autre part, pour tout $t_1 < t_2 \in I$, on a

$$
\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{A}_1(x)(t_2) - \mathcal{A}_1(x)(t_1)\Big| \\
&= \Big| \int_a^{t_2} G_P(t_2,s)\Big(f(s,\overline{x}(s)) + \alpha\,\overline{x}(s)\Big)d_\alpha s + \int_{t_2}^{b} G_P(t_2,s)\Big(f(s,\overline{x}(s)) + \alpha\,\overline{x}(s)\Big)d_\alpha s \\
&\quad - \int_a^{t_1} G_P(t_1,s)\Big(f(s,\overline{x}(s)) + \alpha\,\overline{x}(s)\Big)d_\alpha s - \int_{t_1}^{b} G_P(t_1,s)\Big(f(s,\overline{x}(s)) + \alpha\,\overline{x}(s)\Big)d_\alpha s\Big| \\
&\leq \frac{|e^{-t_2^\alpha} - e^{-t_1^\alpha}|}{1-e^{a^\alpha - b^\alpha}}\Big(\int_a^{t_1} e^{s^\alpha}\Big|f(s,\overline{x}(s)) + \alpha\,\overline{x}(s)\Big|s^{\alpha-1}ds \\
&\qquad + \int_{t_2}^{b} e^{s^\alpha + a^\alpha - b^\alpha}\Big|f(s,\overline{x}(s)) + \alpha\,\overline{x}(s)\Big|s^{\alpha-1}ds\Big) \\
&\qquad + \int_{t_1}^{t_2} |G_P(t_2,s) - G_P(t_1,s)|\Big|f(s,\overline{x}(s)) + \alpha\,\overline{x}(s)\Big|s^{\alpha-1}ds \\
&\leq K|e^{-t_2^\alpha} - e^{-t_1^\alpha}|\Big(2\int_a^b (A+\alpha R)s^{\alpha-1}ds\Big) + 2M\int_{t_1}^{t_2}(A+\alpha R)s^{\alpha-1}ds \\
&\leq 2K|e^{-t_2^\alpha} - e^{-t_1^\alpha}|(A+\alpha R)\frac{b^\alpha - a^\alpha}{\alpha} + 2M(A+\alpha R)\frac{t_2^\alpha - t_1^\alpha}{\alpha},
\end{aligned}
$$

où $K := \max_{s\in I}\{\frac{e^{s^\alpha}}{1-e^{a^\alpha-b^\alpha}}, \frac{e^{s^\alpha+a^\alpha-b^\alpha}}{1-e^{a^\alpha-b^\alpha}}\}$. Donc, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue. Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, on obtient que l'ensemble $\mathcal{A}_1(C(I,\mathbb{R}))$ est relativement compacte dans $C(I,\mathbb{R})$. Ainsi, $\mathcal{A}_1$ est compact.
Nous pouvons maintenant démontrer le résultat d'existence suivant.

Théorème 4.1 *Soit $f : I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Si $(v,M)\in C^\alpha(I,\mathbb{R})\times C^\alpha(I,[0,\infty))$ est un tube-solution de (4.1), alors le problème (4.1) possède une solution $x\in C^\alpha(I,\mathbb{R})\cap \mathrm{T}(v,M)$.*

Preuve.
Par la Proposition 4.1, l'opérateur $\mathcal{A}_1$ est compact. Ainsi, par le Théorème du point fixe de Schauder, $\mathcal{A}_1$ admet un point fixe. Le Lemme 4.3 nous assure que ce point fixe est une solution du problème (4.5). Il suffit donc de démontrer que pour toute solution x de (4.5), $x\in T(v,M)$.
Considérons l'ensemble $\mathcal{F} := \{t\in I : |x(t)-v(t)| > M(t)\}$. Si $t\in\mathcal{F}$, alors

par le Lemme 4.2, nous avons

$$(|x(t)-v(t)|-M(t))^{(\alpha)} = \frac{(x(t)-v(t))(x^{(\alpha)}(t)-v^{(\alpha)}(t))}{|x(t)-v(t)|} - M^{(\alpha)}(t).$$

Nous allons montrer que $(|x(t)-v(t)|-M(t))^{(\alpha)} < 0$ pour tout $t \in \mathcal{F}$.
Si $t \in \mathcal{F}$ et : $M(t) > 0$, alors par hypothèse du tube-solution, on a

$$\begin{aligned}
&(|x(t)-v(t)|-M(t))^{(\alpha)} \\
&\quad = \frac{(x(t)-v(t))(x^{(\alpha)}(t)-v^{(\alpha)}(t))}{|x(t)-v(t)|} - M^{(\alpha)}(t) \\
&\quad = \frac{(x(t)-v(t))(f(t,\bar{x}(t))+\alpha\bar{x}(t)-\alpha x(t)-v^{(\alpha)}(t))}{|x(t)-v(t)|} - M^{(\alpha)}(t) \\
&\quad = \frac{(\bar{x}(t)-v(t))(f(t,\bar{x}(t))-v^{(\alpha)}(t))}{M(t)} + \alpha\ \frac{(\bar{x}(t)-v(t))(\bar{x}(t)-x(t))}{M(t)} \\
&\quad\quad - M^{(\alpha)}(t) \\
&\quad \leq \frac{M(t)M^{(\alpha)}(t)}{M(t)} + \alpha\Big(M(t)-\|x(t)-v(t)\|\Big) - M^{(\alpha)}(t) \\
&\quad < 0.
\end{aligned}$$

De plus, si $M(t) = 0$, alors par hypothèse du tube-solution

$$\begin{aligned}
(|x(t)-v(t)|-M(t))^{(\alpha)} &= \frac{(x(t)-v(t))(f(t,\bar{x}(t))+\alpha\bar{x}(t)-\alpha x(t)-v^{(\alpha)}(t))}{|x(t)-v(t)|} \\
&\quad - M^{(\alpha)}(t) \\
&= \frac{(x(t)-v(t))(f(t,v(t))+\alpha v(t)-\alpha x(t)-v^{(\alpha)}(t))}{|x(t)-v(t)|} \\
&\quad - M^{(\alpha)}(t) \\
&\leq \frac{(x(t)-v(t))(f(t,v(t))-v^{(\alpha)}(t))}{|x(t)-v(t)|} - \alpha\ |x(t)-v(t)| \\
&\quad - M^{(\alpha)}(t) \\
&< 0.
\end{aligned}$$

En posant $r(t) = |x(t)-v(t)| - M(t)$, il en résulte que $r^{(\alpha)} < 0$ pour tout $t \in \{t \in I : r(t) > 0\}$. De plus, par hypothèse du tube-solution, remarquons que $r(a)-r(b) \leq |v(a)-v(b)|-(M(a)-M(b)) \leq 0$, alors $r(a) \leq r(b)$. Ainsi, les hypothèses du Lemme 4.1 sont satisfaites, ce qui démontre le théorème.

4.2 Exemples

Dans cette partie nous donnons quelques exemples d'applications.

Exemple 4.2.1 *On considère le problème périodique suivant :*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) = |x(t)|\, x(t) - 3x(t), & t \in [a,b], a > 0, \\ x(a) = x(b). \end{cases} \tag{4.8}$$

Ici, $\alpha \in]0,1]$ *et* $f(t,x) = |x|\, x - 3x$*. Il est clair que* f *est une fonction continue sur* $[a,b] \times \mathbb{R}$*. On peut vérifier que* $(v,M) = (0,1)$ *est un tube-solution de* (4.8)*. En effet, on a :*
$v^{(\alpha)}(t) = 0$*,* $M^{(\alpha)}(t) = 0$*, et* $|v(b) - v(a)| = 0 \leq M(a) - M(b) = 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $|x - v(t)| = M(t)$*, alors* $|x| = 1$*, et on a pour* $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned} (x - v(t))\left(f(t,x) - v^{(\alpha)}(t)\right) &= (x)\Big(\, |x(t)|\, x(t) - 3x(t)\,\Big) \\ &= |x|^3 - 3|x|^2 = -2 \\ &\leq M(t)M^{(\alpha)}(t) = 0. \end{aligned}$$

Du Théorème 4.1*, on déduit que le problème* (4.8) *admet une solution* $x \in C^{\alpha}([a,b],\mathbb{R})$ *telle que*

$$|x(t)| \leq 1, \qquad \textit{pour tout } t \in [a,b].$$

Exemple 4.2.2 On considère le problème périodique suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{-x^3(t) + 3 - 2t}{\sqrt{t}} & \text{pour tout } \; t \in [1,2], \\ x(1) = x(2). \end{cases} \tag{4.9}$$

Ici, $\alpha = 1$ et $f(t,x) = \dfrac{-x^3(t) + 3 - 2t}{\sqrt{t}}$. Il est clair que f est une fonction continue sur $[1,2] \times \mathbb{R}$. On peut vérifier que $(v,M) = (0,1)$ est un tube-solution pour (4.9). En effet, on a :

$v^{'}(t) = M^{'}(t) = 0$, et $|v(2) - v(1)| = 0 \leq M(1) - M(2) = 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - v(t)| = M(t)$, alors $x = 1$ ou $x = -1$, et on a pour $t \in [1, 2]$

$$
\begin{aligned}
(x - v(t))\Big(f(t,x) - v^{'}(t)\Big) &= (x)(\frac{-x^3(t) + 3 - 2t}{\sqrt{t}}), \\
&= \begin{cases} \dfrac{-2(2-t)}{\sqrt{t}} & \text{si } x = -1, \\ \dfrac{2(1-t)}{\sqrt{t}} & \text{si } x = 1, \end{cases} \\
&\leq 0 = M(t)M^{'}(t) \quad \text{pour tout } t \in [1, 2].
\end{aligned}
$$

D'aprés le Théorème 4.1, le problème (4.9) admet une solution $x \in C^1([1, 2], \mathbb{R})$ telle que $|x(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [1, 2]$.

4.3 Méthode des sous et des sur-solutions

Dans cette partie nous étudierons l'existence de solutions pour le problème (4.1) avec l'existence d'une paire de sous et sur-solutions introduite dans [6]. Rappelons cette définition.

Définition 4.2 *On dit qu'une fonction $\gamma \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$ est une sur-solution de* (4.1)*, si*
(i) $\gamma^{(\alpha)}(t) \geq f(t, \gamma(t))$, *pour tout* $t \in I$ *;*
(ii) $\gamma(a) \geq \gamma(b)$.
De même, on dit qu'une fonction $\delta \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$ est une sous-solution de (4.1) *si*
(i) $\delta^{(\alpha)}(t) \leq f(t, \delta(t))$, *pour tout* $t \in I$ *;*
(ii) $\delta(a) \leq \delta(b)$.

Nous définissons l'ensemble (le secteur) :

$$[\delta, \gamma] = \{x \in C(I) : \delta(t) \leq x(t) \leq \gamma(t), \text{ pour tout } t \in I\}.$$

La notion de tube solution de problème (4.1) est équivalente à la notion de sous- et sur-solution δ et γ.

Lemme 4.4 *Soit* $\alpha \in]0,1]$ *et* $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(A) Il existe (v, M) *un tube-solution de* (4.1).

(B) Il existe $\delta \leq \gamma$ *respectivement sous et sur-solutions de* (4.1).

Preuve.

Montrons que $(A) \Rightarrow (B)$:

Si (v, M) est un tube-solution pour (4.1), alors $\delta = v - M$ et $\gamma = v + M$ sont respectivement sous- et sur-solution de (4.1). En effet, nous avons $(v, M) = ((\delta+\gamma)/2, (\gamma-\delta)/2)$, $\delta < \gamma$ sur I et

$$\begin{cases} \left(\delta - \frac{\delta+\gamma}{2}(t)\right) \left(f(t,\delta) - \frac{(\gamma+\delta)^{(\alpha)}(t)}{2}\right) \leq \frac{(\gamma-\delta)(t)}{2} \frac{(\gamma-\delta)^{(\alpha)}(t)}{2} \text{ pour tout } t \in I \\ \left(\gamma - \frac{\delta+\gamma}{2}(t)\right) \left(f(t,\gamma) - \frac{(\gamma+\delta)^{(\alpha)}(t)}{2}\right) \leq \frac{(\gamma-\delta)(t)}{2} \frac{(\gamma-\delta)^{(\alpha)}(t)}{2} \text{ pour tout } t \in I. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \delta^{(\alpha)}(t) \leq f(t, \delta(t)), & \text{pour tout } t \in I \\ \gamma^{(\alpha)}(t) \geq f(t, \gamma(t)), & \text{pour tout } t \in I. \end{cases}$$

De plus, par condition (iii) du tube-solution, remarquons que

$$\delta(a) - \delta(b) \leq 0 \leq \gamma(a) - \gamma(b).$$

Montrons que $(B) \Rightarrow (A)$:

Si δ et γ sont respectivement sous- et sur-solutions de (4.1), alors le couple $(\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{\gamma-\delta}{2})$ est un tube-solution pour (4.1). En effet, nous avons $\delta = v - M, \gamma = v + M$ sur I.

Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - v(t)| = M(t)$, alors $x = \gamma$ ou $x = \delta$, et

$$\begin{aligned} (x - v(t)) \left(f(t,x) - v^{(\alpha)}\right) &= \begin{cases} \left(\delta - \frac{\delta+\gamma}{2}(t)\right) \left(f(t,\delta) - \frac{(\delta+\gamma)^{(\alpha)}}{2}(t)\right), \\ \left(\gamma - \frac{\delta+\gamma}{2}(t)\right) \left(f(t,\gamma) - \frac{(\delta+\gamma)^{(\alpha)}}{2}(t)\right), \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \left(\frac{\delta-\gamma}{2}(t)\right) \left(\delta^{(\alpha)}(t) - \frac{(\delta+\gamma)^{(\alpha)}}{2}(t)\right), \\ \left(\frac{\gamma-\delta}{2}(t)\right) \left(\gamma^{(\alpha)}(t) - \frac{(\delta+\gamma)^{(\alpha)}}{2}(t)\right), \end{cases} \\ &= M(t) M^{(\alpha)}(t) \quad \text{pour tout } t \in I. \end{aligned}$$

Corollaire 4.1 *Supposons que* $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue et qu'il existe une sous et une sur-solution* δ, γ *de* (4.1) *vérifiant*

$$\forall\ t \in I:\ \ \delta(t) \leq \gamma(t).$$

Alors le problème (4.1) *admet une solution* x *telle que*

$$\delta(t) \leq x(t) \leq \gamma(t), \qquad \textit{pour tout } t \in I.$$

Preuve.
Nous définissons les fonctions v et M par :

$$v(t) := \frac{\delta(t) + \gamma\,(t)}{2}, \qquad M\,(t) := \frac{\gamma(t) - \delta\,(t)}{2}, \qquad \text{pour tout } t \in I.$$

D'aprés le Lemme 4.4, le couple (v, M) est un tube-solution de (4.1).
Du Théorème 4.1, on déduit que le problème (4.1) admet une solution $x \in C^{\alpha}(I, \mathbb{R})$ telle que $|x(t) - v(t)| \leq M(t)$.
D'où

$$\alpha(t) \leq x\,(t) \leq \beta(t), \qquad \text{pour tout } t \in I.$$

Exemple 4.3.1 *On considère le problème :*

$$\begin{cases} x^{(\frac{1}{3})}(t) = \dfrac{2t - 1 - x^5(t)}{\sqrt{t}}, \qquad t \in I = [\frac{1}{2}, 1], \\ x(\frac{1}{2}) = x(1). \end{cases} \tag{4.10}$$

Ici $\alpha = \frac{1}{3}$ *et* $f(t, x(t)) = \dfrac{2t - 1 - x^5(t)}{\sqrt{t}}$. *Il est clair que* f *est une fonction continue sur* $[\frac{1}{2}, 1] \times \mathbb{R}$. *On vérifie que* $\delta(t) = -1$ *et* $\gamma(t) = 1$ *sont des sous et sur-solutions de* (4.10) *avec* $\delta(t) \leq \gamma(t)$ *pour* $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. *En effet,*

$$\begin{cases} \gamma^{(\frac{1}{3})}(t) = 0 \geq f(t, \gamma(t)) = \dfrac{2(t-1)}{\sqrt{t}} \ \ \textit{pour tout } t \in I \ \ \textit{ et } \gamma(\frac{1}{2}) \geq \gamma(1), \\ \delta^{(\frac{1}{3})}(t) = 0 \leq -f(t, \delta(t)) = 2\sqrt{t} \ \ \textit{pour tout } t \in I \ \ \textit{ et } \delta(\frac{1}{2}) \leq \delta(1). \end{cases}$$

Le corollaire 4.1 *implique que le problème (4.10) admet une solution* $x \in C^{\frac{1}{3}}([\frac{1}{2}, 1], \mathbb{R})$ *telle que*

$$-1 \leq x(t) \leq 1 \ \textit{pour tout } t \in [\frac{1}{2}, 1].$$

De plus, nous avons le couple $(v, M) = (\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{\gamma-\delta}{2})$ *est un tube-solution pour* (4.10). *D'aprés le Théorème* 4.1, *le problème (4.10) admet une solution* $x \in C^{\frac{1}{3}}([\frac{1}{2}, 1], \mathbb{R})$ *telle que* $|x(t)| \leq 1$ *pour tout* $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Exemple 4.3.2 *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{cases} x^{'}(t) = -\dfrac{x^2(t)}{2} + \sin(\frac{\pi}{2}x(t)) + t(2-t), & \textit{pour tout } t \in I = [1,2]\,, \\ x(1) = x(2). \end{cases} \tag{4.11}$$

Ici $\alpha = 1$ *et* $f(t, x(t)) = -\dfrac{x^2(t)}{2} + \sin(\frac{\pi}{2}x(t)) + t(2-t)$. *Il est clair que* f *est une fonction continue sur* $[1,2] \times \mathbb{R}$ *et* $\delta(t) = 0$, $\gamma(t) = 2$, *sont respectivement sous et sur-solutions de* (4.11), *avec* $\delta(t) \leq \gamma(t)$ *pour* $t \in [1,2]$. *En effet,*

$$\begin{cases} \delta^{'}(t) = 0 \leq f(t, \delta(t)) = t(2-t), \quad \textit{pour tout } t \in I \quad \textit{et } \delta(1) = 0 \leq \delta(2) = 0, \\ \gamma^{'}(t) = 0 \geq f(t, \gamma(t)) = -2 + t(2-t) \quad \textit{pour tout } t \in I \quad \textit{et } \gamma(1) = 2 \geq \gamma(2) = 2. \end{cases}$$

Le Corollaire 4.1 *implique que le problème (4.11) admet une solution* $x \in C^1([1,2], \mathbb{R})$ *telle que*

$$0 \leq x(t) \leq 2 \textit{ pour tout } t \in [1,2].$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous présentons des résultats d'existence de solutions pour des équations différentielles fractionnaires conformes linéaire d'ordre $\alpha \in]0,1]$. Aussi, nous présentons un résultat d'existence de solutions pour d' équation différentielle fractionnaire conforme non-linéaire d'ordre $\alpha \in]0,1]$, ce résultat est obtenu grâce a la notion de tube solution et théorème de point fixe de Schauder.

Bibliographie

[1] T. Abdeljawad, *On conformable fractional calculus*, J. Comput. Appl. Math. **279** (2015), 57–66.

[2] D. R. Anderson and R.I. Avery, *Fractional-order boundary value problem with Sturm-Liouville boundary conditions*, Electron. J. Differ. Equa. **2015** (2015), no. 29, 10 pp.

[3] D.R. Anderson and D.J. Ulness, *Properties of the Katugampola fractional derivative with potential application in quantum mechanics*, J. Math. Phys. **56** (2015), no. 6, 063502, 18 pp.

[4] H. Batarfi, J. Losada, J. J. Nieto and W. Shammakh, *Three-Point Boundary Value Problems for Conformable Fractional Differential Equations*, J. Funct. Spaces. **2015** (2015), Art. ID 706383, 6 pp.

[5] B. Bayour and D. F. M. Torres, *Existence of solution to a local fractional nonlinear differential equation*, J. Comput. Appl. Math. **312** (2016), 127–133.

[6] B. Bendouma, A. Cabada and A. Hammoudi, *Existence of solutions for conformable fractional problems with nonlinear functional boundary conditions*, Malaya Journal of Mathematik. **7** (2019), no. 4, 700-708.

[7] B. Bendouma, A. Cabada and A. Hammoudi, *Existence results for systems of conformable fractional differential equations,* Archivum Mathematicum (BRNO). **55** (2019), 69-83.

[8] A. Gökdoğan, E. Ünal and E. Çelik, *Existence and Uniqueness Theorems for Sequential Linear Conformable Fractional Differential Equations*, arXiv preprint, 2015.

[9] S. Hilger, *Analysis on measure chains a unified approach to continuous and discrete calculus,* Results Math.18 (1990), 18-56.

[10] O.S. Iyiola and E.R. Nwaeze, *Some new results on the new conformable fractional calculu swith application using D'Alambert approach*, Progr. Fract. Differ. Appl. **2**(2016), (2), 115–122.

[11] R. Khaldi and A. Guezane-Lakoud, *Lyapunov inequality for a boundary value problem involving conformable derivative*, Progress in Fractional Differentiation and Applications, 2017.

[12] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef and M. Sababheh, *A new definition of fractional derivative*, J. Comput. Appl. Math. **264** (2014), 65–70.

[13] A. Kilbas, M.H. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, North Holland Mathematics Studies 204, 2006.

[14] R. L. Magin, *Fractional calculus in Bioengineering*, CR in Biomedical Engineering. **32** (2004), no. 1, 1-104.

[15] B. Mirandette, *Résultats d'existence pour des systèmes d'équations différentielles du premier ordre avec tube-solution.* M.Sc. thesis, University of Montréal. 1996.

[16] M. Pospisil and L.P. Skripkova, *Sturm's theorems for conformable fractional differential equations*, Math. Commun. **21**(2016), 273–281.

[17] Y. Wang, J. Zhou and Y. Li, *Fractional Sobolev's Spaces on Time Scales via Conformable Fractional Calculus and Their Application to a Fractional Differential Equation on Time Scales.* Advances in Mathematical Physics. (2016), 1-21.