REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET

Faculté des Mathématiques et d'Informatique

Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et équations différentielles

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

La dérivée fractionnaire au sens de Hilfer et applications

Présenté par

***Hemam Hamza**

***Naimi Djalila**

***Oguiba Abdeldjalil**

soutenu devant le Jury composé de

*** Dr. HALIM BENALI**	**Président**
*** Dr. MAAZOUZ KADDA**	**Encadreur**
*** Dr. SOUID MOHAMED SAID**	**Examinateur**

Promotion : **2019 \ 2020**

Remerciement

★ Tout d'abord nous remercions ALLAH le tout
miséricordieux qui nous a donné la force et Le courage pour réaliser ce travail.

★ Merci à notre promoteur

Mr.Maazouz kadda

pour ses conseils et son aide qui a mis à notre disposition tous ce qui est nécessaire pour réaliser ce mémoire.

★ Nous remercions en deuxième lieu les membres de
jury Dr .Halim Benali pour le grand honneur qu'il nous fait en présidant le
jury de notre soutenance,Dr. Souid Mohamed Said pour l'honneur qu'il nous
fait d'avoir accepter l'examen de notre travail.

★ Nous remercions également toute l'équipe pédagogique de
l'Université Ibn Khaldoun -Tiaret-spécialement le département de mathématiques, pour leur encadrement durant notre cursus universitaire.

★ Enfin Nous tenons à remercier toutes les personnes qui nous ont conseillé lors de la rédaction de ce mémoire : Nos familles, nos amis, nos professeurs, et nos camarades de promotion.

★ ★ ★

Je dédie ce travail à

✓ Je rend grâce à Dieu de m'avoir donner le courage et la volonté afin de terminer mes études.

✓ A mes très chers parents qui m'ont soutenue dans la réussite de mes études.

Ma chère mère et mon cher père

✓ A mes fréres .

✓ A tous mes amis sans exception et toute ma promotion de mathématiques

. *Naimi Djalila*

Je dédie ce travail à

✓ Je rend grâce à Dieu de m'avoir donner le courage et la volonté de terminer mes études.

✓ A mes très chers parents qui m'ont soutenu dans la réussite de mes études.

Ma chère mère et mon cher père.

✓ A tous mes amis sans exception et toute ma promotion de mathématiques.

Oguiba Abdeldjalil

Je dédie ce travail à

✓ Je rend grâce à Dieu de m'avoir donner le courage et la volonté afin de terminer mes études.

✓ A mes très chers parents qui m'ont soutenu dans la réussite de mes études.

Ma chère mère et mon cher père.

✓ A tous mes amis sans exception et toute ma promotion de mathématiques

Hemam Hamza

Table des matières

Notations générales

$\mathbb{N}$:ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{R}$:ensemble des nombres réels.

$L^p[a,b]$:espace des classes des fonctions mesurables de puissance $p \in [1,\infty]$;intégrables sur $[a,b]$.

$C([a,b],E)$:espace des fonctions continues sur $[a,b]$à valeurs dans dans un espace de Banach E.

$AC[a,b]$ou $AC^1[a,b]$:espace des fonctions absolûlement continues sur$[a,b]$.

$AC^n[a,b],(n \geq 2)$:espace des fonctions $u:[a,b] \longrightarrow \{R\}$telle que $u^{(n-1)} \in AC[a,b]$

et $u^{(k)} \in C[a,],k = 1,...,n-1$

$\Gamma(.)$:fonction Gamma.

$I_a^\alpha u$:L'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Lioville d'ordre >0.

$D_a^\alpha u$:La dérivée fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \geq 0$

${}^C D_a^\alpha u$:La dérivée fractionnaire à gauche de Caputo d'ordre $\alpha \geq 0$

$D_{0^+}^{\alpha,\beta} u$: La dérivée de Hilfer.

${}^\rho I_a^\alpha u$:L'intégrale fractionnaire au sens de Katugampola.

${}^\rho D_a^\alpha u$:La dérivée fractionnaire au sens de Katugampola.

INTRODUCTION

L'analyse fractionaire est une partie de l'analyse mathématique qui étudie les puissance non entiéres des opérations de dérivation et d'intégration .Afin de résoudre des équations différentielles fractionnaires, nous mentionnons les travaux [3]où les auteurs proposent et prouvent l'équivalence entre un problème à valeur initiale de Voltera .Nous considérons deux nouveaux dérivées fractionnaires la premiére s'appelée la dérivée de Hilfer .
L'objet de ce mémoire est de donner quelques résultats concernant les intégrales fractionnaires et les dérivées fractionnaires au sens de Hilfer . On donne aussi des résultats d'existence ,d'unicité et stabilité pour des équations différentielles avec dérivée fractionnaire au sens de Hilfer et Hilfer-Katugampola.
Dans le 1^{er} chapitre on donne quelques définitions et propriétés de l'intégrale fractionnaire et dérivée au sens de Hilfer et Hilfer-Katugampola.
Dans le 2^{me} chapitre, on étudie l'existence l'unicité à l'aide du théorème de point fixé de Banach et stabilité Ulam des problémes non linéaire de valeurs initiales non locaux suivants :

$$D_{0^+}^{\alpha,\beta} y(t) = f(t, y(t), D_{0^+}^{\alpha,\beta} y(t)), pour\ tout\ t \in (0,T], 0 < T$$

$$I_{0^+}^{1-\gamma} y(0^+) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y(\tau_i); \tau_i \in (0,T]$$

On donne aussi quelques exemples d'applications.
Dans le 3^{me} chapitre ,on étudie l'existence l'unicité à l'aide du théorème de point fixé de Banach et de Krasnoselskii des problémes de valeurs terminale pour des équations différentielles avec dérivée fractionnaire au sens de Hilfer-Katugampola suivant :

$$\left({}^{\rho}D_{\alpha^+}^{\alpha,\beta} y\right)(t) = f\left(t, y(t), \left({}^{\rho}D_{0^+}^{\alpha,\beta} y(t)\right)\right), pour\ chaque\ t \in (0,T], T > 0, \alpha > 0$$

$$y(T) = c \in \mathbb{R}$$

On donne aussi quelques exemples d'applications.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans cette section,nous rappelons quelques définitions et notions de base concernant le calcul fractionnaire que nous utilisons dans les sections suivants.
Nous considérons les espaces de poids des fonctions continues :

$$C_\gamma(J) = \{y : (0,T] \to \mathbb{R} : t^\gamma y(t) \in C(J)\}, \ \ 0 \leq \gamma < 1.$$
$$C_\gamma^n(J) = \left\{y \in C^{n-1}(J) : \ \ y^{(n)} \in C_\gamma(J)\right\}, \ n \in \mathbb{N}.$$
$$C_\gamma^0(J) = C_\gamma(J).$$

normés par

$$\|y\|_{C_\gamma} = \|t^\gamma y(t)\|_\infty = \sup_{t \in J} |t^\gamma y(t)|$$

et

$$\|y\|_{c_\gamma^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \|y^{(k)}\|_\infty + \|y^{(n)}\|_{c_\gamma}.$$

Ces espaces satisfaisant les propriétés suivantes :

- $C_0(J) = C(J)$.
- $C_\gamma^n(J) \subset AC^n(J)$.
- $C_{\gamma_1}(J) \subset C_{\gamma_2}(J), 0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < 1$.

1.1 Espaces fonctionnels

Commençant par rappeler la définition d'un espace vectoriel normé.

Définition 1.1. *(**Espace vectoriel normé**) Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle norme sur l'espace E toute application notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant pour tout x, y dans E et α dans $\mathbb{K}$.*

(i) $\|x\| = 0$ *si seulement si* $x = 0$.

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ *(homogène).*

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.2. *(**Espace métrique complet**) On dit que (E, d) est un espace métrique complet si toute suite de **Cauchy** de E converge dans E, $(d : estladistancesurE)$.*

Définition 1.3. *(**Espace de Banach**) Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de **Banach**.*

Définition 1.4. *(**Espace** $C[a,b]$) L'espace des fonctions continues sur $[a,b]$, muni de la norme :*

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Définition 1.5. ([2] − [3]) *L'intégrale à gauche de **Riemann-Liouville** d'ordre fractionnaire(arbitraire) $\alpha \in \mathbb{R}_+$ de la fonction $h \in L^1([0,T], \mathbb{R}_+)$ est définie par*

$$(I_{0^+}^{\alpha} h)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Ou Γ est la fonction gamma (fct d'Euler) définie par $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \ \ \alpha > 0$.
Les lemmes suivants fournissent des propriétés $I_{0^+}^{\alpha}$.

Lemme 1.1. *Pour $\alpha > 0$, L'pérateur $I_{0^+}^{\alpha}$ applique $C(J)$ dans $C(J)$.*

Lemme 1.2. *Soient $\alpha > 0$ et $0 \leq \gamma < 1$, $I_{0^+}^{\alpha}$ est borné de $C_{\gamma}(J)$ dans $C_{\gamma}(J)$*

Lemme 1.3. *Soient $\alpha > 0$ et $0 \leq \gamma < 1$, si $\gamma \leq \alpha$, $I_{0^+}^{\alpha}$ est borné de $C_{\gamma}(J)$ dans $C(J)$.*

Lemme 1.4. [1] *Soient $0 \leq \gamma < 1$ et $y \in C_{\gamma}(J)$, donc*

$$I_{0^+}^{\alpha} y(0) := \lim_{t \to 0^+} I_{0^+}^{\alpha} y(t) = 0, \ \ 0 \leq \gamma < \alpha.$$

Définition 1.6. *La dérivée fractionnaire à gauche de* ***Riemann-Liouville*** *est définie par :*

$$(D_{0^+}^{\alpha}y)(t) = D\left(I_{0^+}^{1-\alpha}y\right)(t), \ \left(t>0, \ \ 0<\alpha<1, \ \ D=\frac{d}{dt}\right).$$

Alors

$$(D_{0^+}^{\alpha}y)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{\alpha}y(s)ds,$$

Soit $\alpha = 1$ *on a* $\left(D_{0^+}^{\alpha}y\right) = Dy$ *et en particulier, si* $\alpha = 0$, $\left(D_{0^+}^{0}y\right) = y$

Lemme 1.5. [1] *Pour* $t>0$, *on a*

$$[I_{0^+}^{\alpha}t^{\beta-1}](t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}t^{\beta+\alpha-1}, \ \ \alpha\geq 0, \ \ \beta>0.$$

$$[D_{0^+}^{\alpha}t^{\alpha-1}](t) = 0, \ \ 0<\alpha<1.$$

Les lemmes suivants sont prouvés par des calculs directs utilisant la formule de **Dirichlet**.

Lemme 1.6. *Soient* $\alpha>0, \beta>0$ *et* $y\in L^1(J)$. *Alors*

$$I_{0^+}^{\alpha}I_{0^+}^{\beta}y(t) = I_{0^+}^{\alpha+\beta}y(t), \ \ p.p \ \ t\in J.$$

En particulier, si $y\in C_{\gamma}(J)$ *ou* $y\in C(J)$, *alors l'égalité est vérifiée pour chaque* $t\in(0,T]$.

Lemme 1.7. *Soient* $\alpha>0, \ 0\leq\gamma<1$ *et* $y\in C_{\gamma}(J)$. *Alors*

$$D_{0^+}^{\alpha}I_{0^+}^{\alpha}y(t) = y(t), pour\ tout \quad t\in(0,T].$$

Lemme 1.8. [6] *Soient* $0<\alpha<1, \ 0\leq\gamma<1$. *Si* $y\in C_{\gamma}(J)$ *et* $I_{0^+}^{1-\alpha}y\in C_{\gamma}^1(J)$, *alors*

$$I_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\alpha}y(t) = y(t) - \frac{I_{0^+}^{1-\alpha}y(0)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}, \quad pour\ tout \quad t\in(0,T].$$

Soient $\alpha\in(0,1], \ \ \beta\in[0,1]$ *et* $y\in L^1(J,\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.7. *On dit que la fonction y possède la dérivée de* ***Hilfer*** $D_{0^+}^{\alpha,\beta}$ *d'ordre α et type β, si la fonction* $I_{0^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)}y$ *est absolument continu sur J et alors*

$$\left(D_{0^+}^{\alpha,\beta}y\right)(t) := \left(I_{0^+}^{\beta(1-\alpha)}DI_{0^+}^{(1-\alpha)(1-\beta)}y\right)(t), \ \ p.p. \ t\in J. \tag{1.1}$$

L'opérateur $D_{0^+}^{\alpha,\beta}$ *donné par* (1.1) *a été introduit par* ***Hilfer***.

Remarque 1.1. [1]

1. *La dérivée de **Hilfer** $D_{0^+}^{\alpha,\beta}y$ peut être écrite comme :*

$$\left(D_{0^+}^{\alpha,\beta}y\right)(t) := \left(I_{0^+}^{\beta(1-\alpha)}DI_{0^+}^{(1-\gamma)}y\right)(t) = \left(I_{0^+}^{\beta(1-\alpha)}D_{0^+}^{\gamma}y\right)(t) = \left(I_{0^+}^{(\gamma-\alpha)}D_{0^+}^{\gamma}y\right)(t)$$

pour p.p.$t \in J$, où $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$.

2. *La dérivée $D_{0^+}^{\alpha,\beta}$ est considérée comme une interpolation entre la dérivée de **Riemann-Liouville** et la dérivée de **Caputo** puisque :*

$$D_{0^+}^{\alpha,\beta}y = \begin{cases} D_{0^+}^{\alpha}y, & \beta = 0 \\ {}^{C}D_{0^+}^{\alpha}y, & \beta = 1 \end{cases}. \tag{1.2}$$

3. *Le paramètre γ satisfait*

$$0 < \gamma \leq 1,\ \gamma \geq \alpha,\ \gamma > \beta,\ 1-\gamma < 1-\beta(1-\alpha).$$

Nous introduisons les espaces

$$C_{1-\gamma}^{\alpha,\beta}(J) = \left\{y \in C_{1-\gamma}(J),\ D_{0^+}^{\alpha,\beta}y \in C_{1-\gamma}(J)\right\},$$

et

$$C_{1-\gamma}^{\gamma}(J) = \left\{y \in C_{1-\gamma}(J),\ D_{0^+}^{\gamma}y \in C_{1-\gamma}(J)\right\},$$

*Puisque $D_{0^+}^{\alpha,\beta}y = I_{0^+}^{\beta(1-\alpha)}D_{0^+}^{\gamma}y$, du **Lemme** 1.2 il découle que*

$$C_{1-\gamma}^{\gamma}(J) \subset C_{1-\gamma}^{\alpha,\beta}(J) \subset C_{1-\gamma}(J)$$

*Le lemme suivant découle directement de la propriété du semi-groupe dans le **Lemme** 1.6.*

Lemme 1.9. *Soient $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$, et $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$. Si $y \in C_{1-\gamma}^{\gamma}(J)$, alors*

$$I_{0^+}^{\gamma}D_{0^+}^{\gamma}y = I_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\alpha,\beta}y,$$

et

$$D_{0^+}^{\gamma}I_{0^+}^{\alpha}y = D_{0^+}^{\beta(1-\alpha)}y,$$

pour la preuve des lemmes suivants, voir [1].

Lemme 1.10. *On a* $y \in L^1(J)$*, si* $D_{0^+}^{\beta(1-\alpha)} y$ *existe et* $y \in L^1(J)$ *alors*

$$D_{0^+}^{\alpha,\beta} I_{0^+}^{\alpha} y = I_{0^+}^{\beta(1-\alpha)} D_{0^+}^{\beta(1-\alpha)} y.$$

Lemme 1.11. *On a* $0 < \alpha < 1$*,* $0 \leq \beta \leq 1$*, et* $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$*. Si* $y \in C_{1-\gamma}(J)$ *et* $I_{0^+}^{1-\beta(1-\alpha)} y \in C_{1-\gamma}^{1}(J)$ *alors* $D_{0^+}^{\alpha,\beta} I_{0^+}^{\alpha} y$ *existe dans (0,T] et*

$$D_{0^+}^{\alpha,\beta} I_{0^+}^{\alpha} y(t) = y(t), \ \ t \in (0,T].$$

Lemme 1.12. *Soient* $v : [0,T] \to [0,+\infty)$ *une fonction réelle et* $w(\cdot)$ *positive , localement intégrable sur [0,T]. Supposons qu'il existe un constant* $\alpha > 0$ *et* $0 < \alpha \leq 1$ *tel que :*

$$v(t) \leq w(t) + a \int_0^t (t-s)^{-\alpha} v(s) ds,$$

donc, il existe un constant $K = K(\alpha)$ *tel que :*

$$v(t) \leq w(t) + Ka \int_0^t (t-s)^{-\alpha} w(s) ds, \quad \textit{pour chaque} \quad t \in [0,T].$$

Soit le probléme :

$$D_{0^+}^{\alpha,\beta} y(t) = f\left(t, y(t), \ D_{0^+}^{\alpha,\beta} y(t)\right), \ \textit{pour chaque} \ \ t \in (0,T], \ T > 0. \tag{1.3}$$

$$I_{0^+}^{1-\gamma} y(0^+) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y(\tau_i), \quad \tau_i \in (0,T]. \tag{1.4}$$

.

Définition 1.8. *L'équation* (1.3) *est* ***Ulam-Hyers*** *stable s'il existe un nombre réel* $c_f > 0$ *de telle sorte que pour chaque* $\epsilon > 0$ *et pour chaque solution* $z \in C_{1-\gamma}^{\gamma}(j)$ *,*

$$\left| D_{0^+}^{\alpha,\beta} z(t) - f\left(t, z(t), D_{0^+}^{\alpha,\beta} z(t)\right) \right| \leq \epsilon, \quad t \in (0,T]$$

il existe une solution $y \in C_{1-\gamma}^{\gamma}(J)$ *de l'équation* (1.3) *avec*

$$|z(t) - y(t)| \leq c_f \epsilon, \ \ t \in (0,T].$$

Définition 1.9. *L'équation* (1.3) *est* ***Ulam-Hyers généralisée*** *stable s'il existe* $\psi_f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$*,* $\psi_f(0) = 0$*, et pour chaque solution* $z \in C_{1-\gamma}^{\gamma}(J)$ *:*

$$\left| D_{0^+}^{\alpha,\beta} z(t) - f\left(t, z(t), D_{0^+}^{\alpha,\beta} z(t)\right) \right| \leq \epsilon, \ \ t \in (0,T],$$

Il existe une solution $y \in C_{1-\gamma}^{\gamma}(J)$ *de l'équation* (1.3) *avec*

$$|z(t) - y(t)| \leq \psi_f(\epsilon), \ \ t \in (0,T].$$

Définition 1.10. *L'équation (1.3) est **Ulam-Hyers-Rassias** stable par rapport à $\varphi \in C(J, \mathbb{R}_+)$ s'il existe un nombre réel $c_f > 0$ de telle sorte que pour chaque $\epsilon > 0$ et pour chaque solution $z \in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J)$*

$$\left| D^{\alpha,\beta}_{0^+} z(t) - f\left(t, z(t),\ D^{\alpha,\beta}_{0^+} z(t)\right) \right| \leq \epsilon\varphi(t), \quad t \in (0, T],$$

Il existe une solution $y \in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J)$ de l'équation (1.3) avec

$$|z(t) - y(t)| \leq c_{f,\varphi}\varphi(t), \quad t \in (0, T],$$

Définition 1.11. *L'équation (1.3) est **Ulam-Hyers généralisée** stable par rapport a $\varphi \in C(J, \mathbb{R}_+)$ il existe un nombre réel $c_{f,\varphi} > 0$ de telle sorte que pour chaque solution $z \in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J)$ de l'inégalité*

$$\left| D^{\alpha,\beta}_{0^+} z(t) - f\left(t, z(t), D^{\alpha,\beta}_{0^+} z(t)\right) \right| \leq \varphi(t), \quad t \in (0, T],$$

il existe une solution $y \in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J)$ de l'équation (1.3) avec

$$|z(t) - y(t)| \leq c_{f,\varphi}\varphi(t), \quad t \in (0, T],$$

Remarque 1.2. *La fonction $z \in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J)$ est une solution de l'inégalité*

$$\left| D^{\alpha,\beta}_{0^+} z(t) - f\left(t, z(t), D^{\alpha,\beta}_{0^+} z(t)\right) \right| \leq \epsilon, \quad t \in (0, T],$$

si et seulement s'il existe une fonction $\phi \in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J)$ (qui dépend de la solution y) telle que

i). $|\phi(t)| \leq \epsilon,\ t \in (0, T]$.

ii). $D^{\alpha,\beta}_{0^+} z(t) = f\left(t, z(t),\ D^{\alpha,\beta}_{0^+} z(t)\right) + \phi(t),\ t \in (0, T]$,

Remarque 1.3. *Une solution de l'inégalité différentielle implicite*

$$\left| D^{\alpha,\beta}_{0^+} z(t) - f\left(t, z(t), D^{\alpha,\beta}_{0^+} z(t)\right) \right| \leq \epsilon, \quad t \in (0, T],$$

avec ordre fractionnaire est appelée fractionnaire $\epsilon-$ solution de l'équation différentielle fractionnaire implicite. (1.3).

Définition 1.12. *([5]).**(Intégrale fractionnaire de Katugampola)***
*Soient $\alpha \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ et $g \in X^p_c(a, b)$, l'intégrale fractionnelle de **Katugampola** d'ordre α est définie par :*

$$({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+} g)(t) = \int_a^t s^{\rho-1}\left(\frac{t^{\rho} - s^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1} \frac{g(s)}{\Gamma(\alpha)} ds, \quad t > \alpha, \rho > 0$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma définie par :$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt,\ \alpha > 0$

Définition 1.13. *[5](Dérivée fractionnaire de Katugampola)*
Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ et $\rho > 0$,la dérivée fractionnaire de **Katugampola** $^{\rho}D^{\alpha}_{a^+}$ *d'ordre α est définie par :*

$$\begin{aligned}({}^{\rho}D^{\alpha}_{a^+}) &= \delta^n_{\rho}({}^{\rho}I^{n-\alpha}_{a^+}g)(t)\\ &= \left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t s^{\rho-1}\left(\frac{t^{\rho}-s^{\rho}}{\rho}\right)^{n-\alpha-1}\frac{g(s)}{\Gamma(n-\alpha)}ds, \;\; t > a, \; \rho > 0.\end{aligned}$$

Avec $n = [\alpha]+1$ et $\delta^n_{\rho} = \left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^n$.

Lemme 1.13. *[9] Soient $\alpha > 0$, et $0 \le \gamma < 1$,alors $^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}$ est bornée de $C_{\gamma,\rho}(J)$ dans $C_{\gamma,\rho}(J)$.*

Lemme 1.14. *[9] Soient $0 < a < T < \infty$, $\alpha > 0$, $0 \le \gamma < 1$ et $y \in C_{\gamma,\rho}(J)$, si $\alpha > \gamma$, alors $^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}y$ est continue dans J et*

$$({}^{\rho}I^{\alpha}_{a+}y)(a) = \lim_{t\to a^+}({}^{\rho}I^{\alpha}_{a+}y)(t) = 0$$

Lemme 1.15. *Soit $x > a$, pour tout $\alpha \ge 0$ et $\beta > 0$ on a :*

$$\left[{}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}\left(\frac{s^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\beta-1}\right](t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha+\beta-1}$$
$$\left[{}^{\rho}D^{\alpha}_{a^+}\left(\frac{s^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}\right](t) = 0, \quad 0 < \alpha < 1$$

Lemme 1.16. *[9] Soient $\alpha > 0$, $0 \le \gamma < 1$ et $g \in C_{\gamma}[a,b]$ alors*

$$({}^{\rho}D^{\alpha}_{a^+}\ {}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}g)(t) = g(t), \quad \textit{pour tout} \;\; t \in (a,b]$$

Lemme 1.17. *[9] Soient $0 < \alpha < 1$, $0 \le \gamma < 1$, si $g \in C_{\gamma}[a,b]$ et $^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}g \in C^1_{\gamma,\rho}[a,b]$ alors :*

$$\left({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}\ {}^{\rho}D^{\alpha}_{a^+}g\right)(t) = g(t) - \frac{\left({}^{\rho}I^{1-\alpha}_{a^+}g\right)(a)}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}, \;\; \textit{pour tout} \;\; t \in (a,b]$$

Définition 1.14. *[9]Soient l'ordre α et type β satisfaisant $n-1 < \alpha < n$ et $0 \le< \beta \le 1$, avec $n \in \mathbb{N}$. La dérivée fractionnaire en t, avec $\rho > 0$ de la fonction $g \in C_{1-\gamma,\rho}[a,b]$ est définie par :*

$$\begin{aligned}\left({}^{\rho}D^{\alpha,\rho}_{a^+}g\right)(t) &= \left({}^{\rho}I^{\beta(n-\alpha)}_{a^+}\left(t^{\rho-1}\frac{d}{dt}\right)^n\ {}^{\rho}I^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{a^+}g\right)(t)\\ &= \left({}^{\rho}I^{\beta(n-\alpha)}_{a^+}\delta^n_{\rho}\ {}^{\rho}I^{(1-\beta)(n-\alpha)}_{a^+}g\right)(t)\end{aligned}$$

Dans ce qui suit , nous considérons seulement le cas $n = 1$, cas $0 < \alpha < 1$

Proposition 1.1. *[9] L'opérateur ${}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta}$ peut écrit comme :*

$${}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta} = {}^{\rho} I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}\delta_{\rho} I_{a^+}^{(1-\gamma)} = {}^{\rho} I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}\ {}^{\rho}D_{a^+}^{\gamma},\ \ \gamma = \alpha+\beta-\alpha\beta$$

Proposition 1.2. *La dérivée fractionnaire ${}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta}$est un interpolateur des dérivées fractionnaires suivantes :*

Hilfer$(\rho \to 1)$[4]

Hilfer-Hadamard$(\rho \to 0^+)$[7]

généralisé$(\beta = 0)$[5]

type Caputo$(\beta = 1)$

Riemann-Liouville$(\beta = 0, \rho = 1)$[6]

Hadamard$(\beta = 0, \rho \to 0^+)$[6]

Caputo$(\beta = 1, \rho \to 1)$[6]

Caputo-Hadamard$(\beta = 1, \rho \to 0^+)$

Liouville $(\beta = 0, \rho \to 1, a = 0)$[6]

Weyl$(\beta = 0, \rho \to 1, a = -\infty)$.

Définition 1.15. *Nous considérons les paramètres α, γ, β satisfaisant :*

$$\gamma = \alpha+\beta-\alpha\beta, 0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$$

Nous définissons les espaces :

$$C_{1-\gamma,\rho}^{\alpha,\beta} = \left\{y \in C_{1-\gamma,\rho}(J), {}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta} y \in C_{1-\gamma,\rho}(J)\right\}$$

et

$$C_{1-\gamma,\rho}^{\gamma} = \left\{y \in C_{1-\gamma,\rho}(J), {}^{\rho}D_{a^+}^{\gamma} y \in C_{1-\gamma,\rho}(J)\right\}$$

*De ${}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta} y = {}^{\rho} I_{a^+}^{\gamma(1-\alpha)}\ {}^{\rho}D_{a^+}^{\gamma} y$ il résulte du **Lemme**1.13 que :*

$$C_{1-\gamma,\rho}^{\gamma}(J) \subset C_{1-\gamma,\rho}^{\alpha,\beta}(J) \subset C_{1-\gamma,\rho}(J)$$

Lemme 1.18. *[9] Soient $0 < \alpha < 1,\ 0 \leq \beta \leq 1$ et $\gamma = \alpha+\beta-\alpha\beta$. Si $y \in C_{1-\gamma,\rho}^{\gamma}(J)$,alors*

$${}^{\rho}I_{a^+}^{\gamma}\ {}^{\rho}D_{a^+}^{\gamma} y = {}^{\rho} I_{a^+}^{\alpha}\ {}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta} y.$$

et

$${}^{\rho}D_{a^+}^{\gamma}\ {}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} y = {}^{\rho} D_{a^+}^{\beta(1-\alpha)} y.$$

Théorème 1.1 (Théorème Arzéla-Ascoli). *Soit $A \subset PC_{1-\gamma}(J,R)$.A est relativement compact (i.e $\overline{A}$ est compact)si*

1. *A est uniformément borné ,i.e, il existe $M > 0$ tel que :*

$$| f(x) | < M \ \ pour\ tout\ \ f \in A\ et\ x \in (t_k, t_{k+1}], k = 1, ..., m$$

.

2. *A est équicontinue sur $(t_k, t_{k+1}]$,i.e, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, \overline{x} \in (t_k, t_{k+1}]$,*

$$| x - \overline{x} | \leq \delta \quad implique\, | f(x) - f(\overline{x}) | \leq \epsilon\ pour\ \ tout\ f \in A.$$

Théorème 1.2. *[8]**(Théorème du point fixe de Banach)** Soit C un sous-ensemble fermé non vide d'un espace de **Banach** E, alors toute contraction T de C en lui même a un point fixe unique.*

Théorème 1.3. *[8]**(Théorème du point fixe de Krasnoselskii)** Soient M est un sous-ensemble fermé, convexe et non vide d'un espace de **Banach** X, et A, B sont des opérateurs tels que :*

1. *$Ax + By \in M$ pour tout $x, y \in M$,*
2. *A est continu et compact,*
3. *B est une contraction,*
   alors il existe $z \in M$ tel que $z = Az + Bz$.

Chapitre 2

Résultats d'existence et de stabilité pour un problème à valeur initiale non locale

Dans cet chapitre , nous étudions le problème de valeur initiale non locale suivant :

$$D_{0^+}^{\alpha,\beta} y(t) = f\left(t, y(t),\ D_{0^+}^{\alpha,\beta} y(t)\right),\ \text{pour chaque}\ \ t \in (0,T],\ T > 0. \tag{2.1}$$

$$I_{0^+}^{1-\gamma} y(0^+) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y(\tau_i), \quad \tau_i \in (0,T]. \tag{2.2}$$

Où

$0 < \alpha < 1,\ \ 0 \leq \beta \leq 1,\ \ \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta,\ \ f : (0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ \tau_i,\ \ i = 1, 2, ..., m$ sont des points préfixées satisfaisant, $0 < \tau_i \leq ... \leq \tau_m < T,\ \lambda_i$ nombre réels :

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i t_i^{\gamma-1} \neq \Gamma(\gamma).$$

$D_{0^+}^{\alpha,\beta}$ désigne l'opérateur dérivée de **Hilfer**.

2.1 Existence de solutions

On a $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$ avec $0 < \alpha < 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$, on a $f : (0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $f(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)) \in C_{1-\gamma}(J)$ pour toute $y, u \in C_{1-\gamma}(J)$ et soit l'opérateur $N : C_{1-\gamma}(J) \to C_{1-\gamma}(J)$ défini par :

$$Ny(t) = w(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds, \quad t \in (0,T]. \tag{2.3}$$

Où

$$w(t)=\frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\gamma)-\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}\right)}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_0^{\tau_i}(\tau_i-s)^{\alpha-1}g(s)ds$$

et $g:(0,T]\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction qui satisfait l'équation suivante :

$$g(t)=f\Big(t,y(t),g(t)\Big)$$

clairement, $w\in C_{1-\gamma}(J)$ et $g\in C_{1-\gamma}(J)$ aussi, d'après le **Lemme**1.2, $Ny\in C_{1-\gamma}(J)$.

Théorème 2.1. *Si $y\in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J)$, alors y satisfait le problème* (2.1)-(2.2) *si et seulement si y est un point fixe de l'opérateur N.*

Preuve D'abord nous prouvons la nécessité.
Soit $y\in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J)$ une solution du problème (2.1)-(2.2) . Il suffit de montrer que y est un point fixe de l'opérateur N à l'aide de la définition de $C^{\gamma}_{1-\gamma}(J)$, **Lemme**1.3 et la **Définition**1.6 on a

$$I_{0^+}^{1-\gamma}y\in C(J)\ et\ D_{0^+}^{\gamma}y=D\left(I_0^{1-\gamma}\right)\in C_{1-\gamma}(J),$$

On a

$$I_{0^+}^{1-\gamma}y\in C^1_{1-\gamma}(J)$$

D'après le **Lemme**1.8 on a :

$$I_{0^+}^{\gamma}D_{0^+}^{\gamma}y(t)=y(t)-\frac{I_{0^+}^{1-\gamma}y(0^+)}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1},\quad t\in(0,T] \tag{2.4}$$

puisque $D_{0^+}^{\gamma}y\in C_{1-y}(J)$, d'après **Lemme**1.9

$$\left(I_{0^+}^{\gamma}D_{0^+}^{\gamma}y\right)(t)=\left(I_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\alpha,\beta}y\right)(t)=I_{0^+}^{\alpha}g(t),\quad t\in(0,T], \tag{2.5}$$

D'après 2.4 et 2.5 on obtient

$$y(t)=\frac{I_{0^+}^{1-\gamma}y(0^+)}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}g(s)ds,\quad t\in(0,T], \tag{2.6}$$

On utilise le changement variable suivant $t=\tau_i$, dans l'équation précèdente , on trouve :

$$y(\tau_i)=\frac{I_{0^+}^{1-\gamma}y(0^+)}{\Gamma(\gamma)}\tau_i^{\gamma-1}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\tau_i}(\tau_i-s)^{\alpha-1}g(s)ds,\quad t\in(0,T], \tag{2.7}$$

On multiplie 2.7 par λ_i, on obtient :

$$\lambda_i y(\tau_i) = \frac{I_{0^+}^{1-\gamma} y(0^+)}{\Gamma(\gamma)} \lambda_i \tau_i^{\gamma-1} + \frac{\lambda_i}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\tau_i} (\tau_i - s)^{\alpha-1} g(s) ds.$$

On a :

$$\begin{aligned} I_{0^+}^{1-\gamma} y(0^+) &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y(\tau_i) \\ &= \frac{I_{0^+}^{1-\gamma} y(0^+)}{\Gamma(\gamma)} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \tau_i^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_0^{\tau_i} (\tau_i - s)^{\alpha-1} g(s) ds, \end{aligned}$$

On implique

$$I_{0^+}^{1-\gamma} y(0^+) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\gamma) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \tau_i^{\gamma-1}\right)} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_0^{\tau_i} (\tau_i - s)^{\alpha-1} g(s) ds, \tag{2.8}$$

On remplace 2.8 dans 2.6 pour tout $t \in (0, T]$

$$y(t) = w(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds, \tag{2.9}$$

Ce qu'est un point fixe de N.

La condition suffisante : Soit $y \in C_{1-\gamma}^{\gamma}(J)$ est un point fixe de l'opérateur N écrit comme l'équation 2.9 . Appliquons l 'opérateur $D_{0^+}^{\gamma}$ à 2.9 et d'après le **Lemme**1.9 et 1.5

$$D_{0^+}^{\gamma} y = D_{0^+}^{\beta(\alpha-1)} g. \tag{2.10}$$

par l'équation 2.10,la **Définition**1.6 et $D_{0^+}^{\gamma} y \in C_{1-\gamma}(J)$,on a

$$D I_{0^+}^{1-\beta(1-\alpha)} g = D_{0^+}^{\beta(1-\alpha)} g \in C_{1-\gamma}(J), \tag{2.11}$$

puisque $g \in C_{1-\gamma}(J)$, d'après le **Lemme**1.3 on a

$$I_{0^+}^{1-\beta(1-\alpha)} g \in C(J), \tag{2.12}$$

d'après l'équation 2.11 et 2.12 cette

$$I_{0^+}^{1-\beta(1-\alpha)} g \in C_{1-\gamma}^{1}(J)$$

donc g et $I_{0^+}^{1-\beta(1-\alpha)}g$ satisfait les conditions du **Lemme**1.8.
Maintenant, appliquons $I_{0^+}^{\beta(1-\alpha)}$ sur 2.10 et utilisons la **Remarque**1.1 et le **Lemme**1.8 on peut écrire :

$$D_{0^+}^{\alpha,\beta}y(t) = g(t) - \frac{\left[I_{0^+}^{1-\beta(1-\alpha)}g\right](0)}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}t^{\beta(1-\alpha)-1}. \tag{2.13}$$

Puisque $1-\gamma < 1-\beta(1-\alpha)$, **Lemme**1.4 implique :

$$\left[I_{0^+}^{1-\beta(1-\alpha)}g\right](0) = 0$$

par suite, la relation(2.13)devient :

$$D_{0^+}^{\alpha,\beta}y(t) = g(t), \quad t \in (0,T],$$

Maintenant on vérifie la condition initiale 2.2 nous appliquons $I_{0^+}^{1-\gamma}$ dans l'équation précèdent(2.9), on a :

$$I_{0^+}^{1-\gamma}y(t) = \frac{I_{0^+}^{1-\gamma}t^{\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\gamma) - \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}\right)}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_0^{\tau_i}(\tau_i - s)^{\alpha-1}g(s)ds + I_{0^+}^{1-\gamma}I_{0^+}^{\alpha}g(t),$$

on utilise les Lemmes 1.8 et 1.1 :

$$I_{0^+}^{1-\gamma}y(t) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\gamma) - \sum_{i=0}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}\right)}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_0^{\tau_i}(\tau_i - s)^{\alpha-1}g(s)ds + I_{0^+}^{1-\beta(1-\alpha)}g(t),$$

puisque $1-\gamma < 1-\beta(1-\alpha)$ on peut utiliser le **Lemme**1.4 avec $t \longrightarrow 0$

$$I_{0^+}^{1-\gamma}y(0) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\gamma) - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}\right)}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_0^{\tau_i}(\tau_i - s)^{\alpha-1}g(s)ds, \tag{2.14}$$

on remplace $t = \tau_i$ dans (2.9) on a :

$$\begin{aligned} y(\tau_i) = & \frac{\tau_i^{\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\gamma) - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}\right)}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_0^{\tau_i}(\tau_i - s)^{\alpha-1}g(s)ds \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\tau_i}(\tau_i - s)^{\alpha-1}g(s)ds \end{aligned}$$

on dérive

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i y(\tau_i)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\gamma)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}\right)}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_0^{\tau_i}(\tau_i-s)^{\alpha-1}g(s)ds\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_0^{\tau_i}(\tau_i-s)^{\alpha-1}g(s)ds$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_0^{\tau_i}(\tau_i-s)g(s)ds\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}}+1\right)$$

on obtient

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i y(\tau_i)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\gamma)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}\right)}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_0^{\tau_i}(\tau_i-s)^{\alpha-1}g(s)ds \tag{2.15}$$

suivant les équations(2.14)et (2.15) la

$$I_{0^+}^{1-\gamma}y(0)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i y(\tau_i).$$

Théorème 2.2. *Supposons que :*

(H1) *La fonction* $f:(0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *tel que*

$$f(\cdot,u(\cdot),v(\cdot))\in C_{1-\gamma}^{\beta(1-\alpha)}\ \textit{pour tout}\ u,v\in C_{1-\gamma}(J)$$

.

(H2) *Il existe constante* $K>0$ *et* $0<\overline{K}<1$ *tel que*

$$|f(t,u,v)-f(t,\overline{u},\overline{v})|\leq K\,|u-\overline{u}|+\overline{K}\,|v-\overline{v}|\quad \textit{pour tout}\ \ u,v,\overline{u},\overline{v}\in\mathbb{R}\ \textit{et}\ t\in(0,T]$$

si

$$\frac{K\Gamma(\gamma)}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha+\gamma)}\left[\frac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\alpha+\gamma-1}}{\left|\Gamma(\gamma)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}\right|}+T^{\alpha}\right]<1 \tag{2.16}$$

alors il existe une unique solution du problème de ***Cauchy*** (2.1)-(2.2) *dans l'espace* $C_{1-\gamma}^{\gamma}(J)$.

Preuve : La preuve est donnée en deux étapes

Étape1 : On va montrer que l'opérateur N définis dans (2.3) admet un unique point fixe y* dans l'espace $C_{1-\gamma}(J)$, soient $y, u \in C_{1-\gamma}(J)$ et $T \in (0, T]$, donc on obtient

$$\begin{aligned}
|\, Ny(t) - Nu(t) \,| \leq & \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)\left|\Gamma(\gamma) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \tau_i^{\gamma-1}\right|} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_0^{\tau_i} (\tau_i - s)^{\alpha-1} \,|\, g(s) - h(s) \,|\, ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \,|\, g(s) - h(s) \,|\, ds
\end{aligned}$$

alors pour $g, h \in C_{1-\gamma}(J)$ tels que

$$\begin{aligned}
g(t) &= f\Big(t, y(t), g(t)\Big), \\
h(t) &= f\Big(t, u(t), h(t)\Big),
\end{aligned}$$

d'aprés **(H2)** on a

$$\begin{aligned}
|g(t) - h(t)| &= \left| f\Big(t, y(t), g(t)\Big) - f\Big(t, u(t), h(t)\Big) \right| \\
&\leq K \left| y(t) - u(t) \right| + \overline{K}\, |g(t) - h(t)|
\end{aligned}$$

par suite

$$|\, g(t) - h(t) \,| \leq \frac{K}{1 - \overline{K}} \,|\, y(t) - u(t) \,|,$$

par conséquent , pour tout $t \in (0, T]$

$$\left|Ny(t)-Nu(t)\right| \leq \frac{Kt^{\gamma-1}}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha)\left|\Gamma(\gamma)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}\right|}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_0^{\tau_i}(\tau_i-s)^{\alpha-1}\,|\,y(s)-u(s)\,|\,ds$$
$$+\frac{K}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\,|\,y(s)-u(s)\,|\,ds$$
$$=\frac{Kt^{\gamma-1}}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha)\left|\Gamma(\gamma)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}\right|}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_0^{\tau_i}(\tau_i-s)^{\alpha-1}s^{\gamma-1}\,|\,s^{1-\gamma}[y(s)-u(s)]\,|\,ds$$
$$+\frac{K}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}s^{\gamma-1}\,|\,s^{1-\gamma}[y(s)-u(s)]\,|\,ds$$
$$\leq\frac{Kt^{\gamma-1}\parallel y-u\parallel_{C_{1-\gamma}}}{(1-\overline{K})\left|\Gamma(\gamma)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}\right|}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i I_{0^+}^{\alpha}(\tau_i^{\gamma-1})+\frac{K\parallel y-u\parallel_{C_{1-\gamma}}}{1-\overline{K}}I_{0^+}^{\alpha}(t^{\gamma-1})$$

d'après le **Lemme**1.5 , on a :

$$|\,Ny(t)-Nu(t)\,|\leq\frac{\Gamma(\gamma)t^{\gamma-1}\parallel y-u\parallel_{C_{1-\gamma}}}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-\overline{K})\left|\Gamma(\gamma)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}\right|}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\alpha+\gamma-1}$$
$$+\frac{K\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma-1}}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha+\gamma)}\parallel y-u\parallel_{C_{1-\gamma}}$$

par suite

$$|\,t^{1-\gamma}(Ny(t)-Nu(t))\,|\leq\frac{K\Gamma(\gamma)}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha+\gamma)}\left[\frac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\alpha+\gamma-1}}{\left|\Gamma(\gamma)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}\right|}+t^{\alpha}\right]\parallel y-u\parallel_{C_{1-\gamma}}$$
$$\leq\frac{K\Gamma(\gamma)}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha+\gamma)}\left[\frac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\alpha+\gamma-1}}{\left|\Gamma(\gamma)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\tau_i^{\gamma-1}\right|}+T^{\alpha}\right]\parallel y-u\parallel_{C_{1-\gamma}}$$

ce qui implique

$$\| Ny - Nu \|_{C_{1-\gamma}} \leq \frac{K\Gamma(\gamma)}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha+\gamma)} \left[\frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \tau_i^{\alpha+\gamma-1}}{\left| \Gamma(\gamma) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \tau_i^{\gamma-1} \right|} + T^{\alpha} \right] \| y - u \|_{C_{1-\gamma}}$$

Par l'équation (2.16) l'opérateur N est une contraction. Par conséquent, d'après le principe de contraction de **Banach**, N admet unique point fixe $y^* \in C_{1-\gamma}(J)$.

Étape2 : On vas montrer que ce point fixe $y^* \in C_{1-\gamma}(J)$ et aussi dans $C_{1-\gamma}^{\gamma}(J)$ puisque y^* est un point fixe de l'opérateur N dans $C_{1-\gamma}(J)$, donc pour tout $t \in (0,T]$ on a :

$$\begin{aligned} y^* &= w(t) + I_{0^+}^{\alpha} g(t) \\ &= \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\alpha)\left(\Gamma(\gamma) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \tau_i^{\gamma-1}\right)} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int_0^{\tau_i} (\tau_i - s)^{\alpha-1} f(s, y^*(s), g(s)) ds + I_{0^+}^{\alpha} f(t, y^{*(t)}, g(t)), \end{aligned}$$

Appliquons $D_{0^+}^{\gamma}$ à l'équation précédent et d'après le **Lemme**1.5 on a :

$$\begin{aligned} D_{0^+}^{\gamma} y^* &= D_{0^+}^{\gamma}\left[I_{0^+}^{\alpha} f(t, y^*(t), g(t)) \right] \\ &= D_{0^+}^{\gamma-\alpha} f\left(t, y^*(t), g(t)\right) \\ &= D_{0^+}^{\beta(1-\alpha)} f\left(t, y^*(t), g(t)\right) \end{aligned}$$

puisque $\gamma \geq \alpha$ d'après **(H1)** , le nembre droit de l'équation elle est dans $C_{1-\gamma}(J)$ et donc $D_{0^+}^{\gamma} y^* \in C_{1-\gamma}(J)$ se qui implique que $y^* \in C_{1-\gamma}^{\gamma}(J)$.

Comme conséquence de **l'étape 1 ,2** et le **Théorème**2.1 , on conclut que le problème (2.1)-(2.2) admet unique solution dans $C_{1-\gamma}^{\gamma}(J)$.

2.2 La stabilité d'Ulam-Hyers-Rassias

Théorème 2.3. *Supposons que **(H1),(H2)** et* (2.16) *sont satisfaites ,alors le problème* (2.1)-(2.2) *est **d'Ulam-Hyers** stable.*

Preuve : Soient $\epsilon > 0$ et $z \in C_{1-\gamma}^{\gamma}(J)$ et la fonction f qui satisfait l'inégalité suivante

$$\left| D_{0^+}^{\alpha,\beta} z(t) - f\left(t, z(t), D_{0^+}^{\alpha,\beta} z(t)\right) \right| \leq \epsilon \text{ pour tout } t \in (0,T], \tag{2.17}$$

et soit $y \in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J)$ est l'unique solution du problème de **Cauchy**

$$D^{\alpha,\beta}_{0^+} y(t) = f\left(t, y(t), D^{\alpha,\beta}_{0^+}\right) \quad \text{pour tout } t \in (0,T],\ \ T>0$$
$$I^{1-\gamma}_{0^+} y(0^+) = I^{1-\gamma}_{0^+} z(0^+) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y(\tau_i)$$

d'après le **Théorème**(2.1), on obtient :

$$y(t) = \frac{I^{1-\gamma}_{0^+} y(0^+)}{\Gamma(\gamma)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)ds, \ \ t \in (0,T]$$

supposons $g : (0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$g(t) = f\Big(t, y(t), g(t)\Big)$$

appliquons $I^{\alpha}_{0^+}$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\left| I^{\alpha}_{0^+} D^{\alpha,\beta}_{0^+} z(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds \right| \leq \frac{\epsilon t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{\epsilon T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{2.18}$$

où $h : (0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie par :

$$h(t) = f\Big(t, z(t), h(t)\Big)$$

d'après la définition de $C^{\gamma}_{1-\gamma}(J)$, **Lemme**1.3 et **Définition**1.6 on a

$$I^{1-\gamma}_{0^+} z \in C(J) \ \text{ et } \ D^{\gamma}_{0^+} z = D\left(I^{1-\gamma}_{0^+} z\right) \in C_{1-\gamma}(J)$$

par suite

$$I^{1-\gamma}_{0^+} z \in C^{\gamma}_{1-\gamma}(J)$$

d'après le **Lemme**1.8, on a

$$I^{\gamma}_{0^+} D^{\gamma}_{0^+} z(t) = z(t) - \frac{I^{1-\gamma}_{0^+} z(0^+)}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1}, \quad t \in (0,T] \tag{2.19}$$

puisque $D^{\gamma}_{0^+} z \in C_{1-y}(J)$, d'après le **Lemme**1.9

$$\left(I^{\gamma}_{0^+} D^{\gamma}_{0^+} z\right)(t) = \left(I^{\alpha}_{0^+} D^{\alpha,\beta}_{0^+} z\right)(t), \quad t \in (0,T] \tag{2.20}$$

d'après 2.19 et 2.20 on a :

$$\left(I^{\alpha}_{0^+} D^{\alpha,\beta}_{0^+} z\right)(t) = z(t) - \frac{I^{1-\gamma}_{0^+} z(0^+)}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1}, \quad t \in (0,T] \tag{2.21}$$

on remplace (2.21) dans (2.18) on a :

$$\left| z(t) - \frac{I_{0^+}^{1-\gamma} z(0^+)}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \right| \leq \frac{\epsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

on a pour tout $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned} | z(t) - y(t) | &= \left| z(t) - \frac{I_{0^+}^{1-\gamma} y(0^+)}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (h(s) - g(s)) ds \right| \\ &\leq \left| z(t) - \frac{I_{0^+}^{1-\gamma} z(0^+)}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \right| \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} | h(s) - g(s) | ds \end{aligned}$$

donc

$$| z(t) - y(t) | \leq \frac{\epsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} | h(s) - g(s) | ds, \quad t \in (0, T] \tag{2.22}$$

Par **(H2)**, on a pour tout $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned} | h(t) - g(t) | &= \left| f\Big(t, z(t), h(t)\Big) - f\Big(t, y(t), g(t)\Big) \right|, \\ &\leq K | z(t) - y(t) | + \overline{K} | h(t) - g(t) | \end{aligned}$$

alors

$$| h(t) - g(t) | \leq \frac{K}{1 - \overline{K}} | z(t) - y(t) | \tag{2.23}$$

En utilisant (2.22) et (2.23), on obtient

$$| z(t) - y(t) | \leq \frac{\epsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{K}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} | z(s) - y(s) | ds, t \in (0, T]$$

par le **Lemme**1.12 ,on a :

$$| z(t) - y(t) | \leq \frac{\epsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[1 + \frac{\delta K T^\alpha}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha+1)} \right] := c\epsilon$$

supposons $\delta = \delta(\alpha)$ est une constant, qui termine la preuve du théorème. De plus, si nous prenons $\psi(\epsilon) = c\epsilon; \psi(0) = 0$, alors le problème((2.1)) et ((2.2)) est **Ulam-Hyers généralisé** stable.

Théorème 2.4. *Supposons que **(H1)**, **(H2)**,l'équation* (2.16) *et*

(H3) *il existe une fonction croissante $\varphi \in C(J, \mathbb{R}_+)$ et il existe $\lambda_\varphi > 0$ tel que pour tout $t \in (0, T]$*

$$I_{0^+}^{\alpha}\varphi(t) \leq \lambda_\varphi \varphi(t)$$

sont vérifiée, ensuite, le problème (2.1)-(2.2) *est **Ulam-Hyers-Rasias** stable.*

Preuve : Soit $z \in C_{1-\gamma}^{\gamma}(J)$ est une fonction vérifiant l'inégalité :

$$\left|D_{0^+}^{\alpha,\beta}z(t) - f\left(t, z(t), D_{0^+}^{\alpha,\beta}z(t)\right)\right| \leq \epsilon\varphi(t) \text{ pour tout } t \in (0, T],\ \epsilon > 0 \tag{2.24}$$

et soit $y \in C_{1-\gamma}^{\gamma}(J)$ l'unique solution du problème de **Cauchy** suivant :

$$D_{0^+}^{\alpha,\beta}y(t) = f\left(t, y(t), D_{0^+}^{\alpha,\beta}y(t)\right), \text{ pour tout } \ t \in (0, T],\ T > 0$$
$$I_{0^+}^{1-\gamma}y(0^+) = I_{0^+}^{1-\gamma}z(0^+) = \sum_{i=0}^{m}\lambda_i y(\tau_i)$$

En utilisant le **Théorème**2.1, on obtient

$$y(t) = \frac{I_{0^+}^{1-\gamma}y(0^+)}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds, \quad t \in (0, T]$$

supposons $g : (0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfait l'équation fonctionnelle

$$g(t) = f\left(t, y(t), g(t)\right)$$

maintenant appliquons $I_{0^+}^{\alpha}$ dans les deux membres de l'inégalité (2.24), on obtient :

$$\left|I_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\alpha,\beta}z(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right| \leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)ds$$

supposons $h : (0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui satisfait l'équation fonctionnelle

$$h(t) = f\left(t, y(t), h(t)\right)$$

Utilisons **(H3)**, on a pour tout $t \in (0, T]$

$$\left|I_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\alpha,\beta}z(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right| \leq \epsilon\lambda_\varphi\varphi(t)$$

d'après la preuve du **Théorème**2.3, on obtient :

$$\left|z(t)-\frac{{}^{1-\gamma}I_{0^+}z(0^+)}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right|\leq \epsilon\lambda_{\varphi}\varphi(t)$$

on a pour tout $t\in(0,T]$

$$\begin{aligned}
|z(t)-y(t)| &= \left|z(t)-\frac{I_{0^+}^{1-\gamma}y(0^+)}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right.\\
&\quad \left.+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(h(s)-g(s))ds\right|\\
&\leq \left|z(t)-\frac{I_{0^+}^{1-\gamma}z(0^+)}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right|\\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|h(s)-g(s)|ds
\end{aligned}$$

Donc

$$|z(t)-y(t)|\leq \epsilon\lambda_{\varphi}\varphi(t)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|h(s)-g(s)|ds,\ \ t\in(0,T] \tag{2.25}$$

Par **(H2)**, on a pour tout $t\in(0,T]$

$$\begin{aligned}
|h(t)-g(t)| &= \left|f\Big(t,z(t),h(t)\Big)-f\Big(t,y(t),g(t)\Big)\right|,\\
&\leq K|z(t)-y(t)|+\overline{K}|h(t)-g(t)|,
\end{aligned}$$

alors

$$|h(t)-g(t)|\leq \frac{K}{1-\overline{K}}|z(t)-y(t)|, \tag{2.26}$$

utilisons les équations (2.25) et (2.26) , on a

$$|z(t)-y(t)|\leq \epsilon\lambda_{\varphi}\varphi(t)+\frac{K}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|z(s)-y(s)|ds,\ \ t\in(0,T]$$

Par **Lemme**1.12 , on obtient :

$$|z(t)-y(t)|\leq \epsilon\lambda_{\varphi}\varphi(t)+\frac{\delta_1\epsilon K\lambda_{\varphi}}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)ds,\ \ t\in(0,T]$$

Si on pose $\delta_1=\delta_1(\alpha)$ est constant et par **(H2)**, on a :

$$|z(t)-y(t)|\leq \epsilon\lambda_{\varphi}\varphi(t)+\frac{\delta_1\epsilon K\lambda_{\varphi}^2\varphi(t)}{1-\overline{K}}=\left(1+\frac{\delta_1 K\lambda_{\varphi}}{1-\overline{K}}\right)\epsilon\lambda_{\varphi}\varphi(t)$$

ensuite , pour tout $t \in (0,T]$

$$| z(t) - y(t) | \leq \left[\left(1 + \frac{\delta_1 \epsilon K \lambda_\varphi}{1-\overline{K}} \right) \lambda_\varphi \right] \epsilon \varphi(t) = c \epsilon \varphi(t)$$

Se qui complète la preuve du **Théorème**2.4.

2.3 Exemples

Exemple 2.1. *Considérer le problème non linéaire implicite fractionnaire différentiel suivant :*

$$D_{0^+}^{\frac{1}{2},0} y(t) = \frac{1}{10e^{-t+2}\left(1 + | y(t) | + \left| D_{0^+}^{\frac{1}{2},0} y(t) \right| \right)} + \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{pour tout} \quad t \in (0,1] \tag{2.27}$$

$$I_{0^+}^{\frac{1}{2}} y(0^+) = 3y\left(\frac{1}{3}\right) + 2y\left(\frac{1}{2}\right) \tag{2.28}$$

Soit

$$f(t,u,v) = \frac{1}{10e^{-t+2}(1 + | u | + | v |)} + \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad t \in (0,1], \quad u,v \in \mathbb{R}$$

On a

$$C_{1-\gamma}^{\beta(1-\alpha)}\left([0,1]\right) = C_{\frac{1}{2}}^{0}([0,1]) = \left\{ h : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : t^{\frac{1}{2}} h \in C\left([0,1]\right) \right\}$$

avec $\gamma = \alpha = \dfrac{1}{2}$ *et* $\beta = 0$, *clairement, la fonction* $f \in C_{\frac{1}{2}}\left([0,1]\right)$. *Par conséquent* ***(H1)*** *est satisfaite .*

Pour tout $u, v, \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}$ *et* $t \in (0,1]$, *on a*

$$| f(t,u,v) - f(t,\overline{u},\overline{v}) | \leq \frac{1}{10e} (| u - \overline{u}) | + | v - \overline{v} |)$$

par conséquent ***(H2)*** *et pour* $K = \overline{K} = \dfrac{1}{10e}$ *La condition(2.16) :*

$$\frac{K\Gamma(\gamma)}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha+\gamma)} \left[\frac{\sum_{i=1}^{2} \lambda_i \tau_i^{\alpha+\gamma-1}}{\left| \Gamma(\gamma) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \tau_i^{\gamma-1} \right|} + T^\alpha \right] \approx 0,122 < 1$$

est satisfaite avec $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \tau_1 = \frac{1}{3}, \tau_2 = \frac{1}{2}$ *et* $T = 1$. *D'apèrs* ***Théorème***2.2 *le problème (2.27)-(2.28)admet une unique solution dans l'espace* $C_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left([0,1]\right)$.*De plus,le* ***Théorème***(2.3), *implique que le problème (2.27)-(2.28) est* ***Ulam-Hyers*** *stable.*

Exemple 2.2. *Considérer le problème avec valeur initiale suivant :*

$$D_{0^+}^{\frac{1}{2},0}y(t)=\frac{1}{9+e^{-t}}\left[\frac{|y(t)|}{1+|y(t)|}-\frac{\left|D_{0^+}^{\frac{1}{2},0}y(t)\right|}{1+\left|D_{0^+}^{\frac{1}{2},0}y(t)\right|}\right]+\frac{t+1}{\sqrt{t}}\quad t\in(0,1] \tag{2.29}$$

$$I_{0^+}^{\frac{1}{2}}y(0^+)=2y\left(\frac{1}{2}\right) \tag{2.30}$$

Posons

$$f(t,u,v)=\frac{1}{9+e^{-t}}\left[\frac{u}{1+u}-\frac{v}{1+v}\right]+\frac{t+1}{\sqrt{t}}\quad t\in(0,1]\ ,u,v\in[0,\infty)$$

On a

$$C_{1-\gamma}^{\beta(1-\alpha)}\big([0,1]\big)=C_{\frac{1}{2}}^{0}=\left\{h:(0,1]\longrightarrow\mathbb{R}:t^{\frac{1}{2}}h\in C\big([0,1]\big)\right\}$$

*avec $\gamma=\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=0$, la fonction $f\in C_{\frac{1}{2}}\big([0,1]\big)$. En suite la condition **(H1)** est satisfaite. Pour tout $u,v,\overline{u},\overline{v}\in\mathbb{R}$ et $t\in(0,1]$:*

$$\begin{aligned}|f(t,u,v)-f(t,\overline{u},\overline{v})|&\leq\frac{1}{9+e^{-t}}(|u-\overline{u}|+|v-\overline{v}|)\\&\leq\frac{1}{9+e^{-1}}(|u-\overline{u}|+|v-\overline{v}|)\end{aligned}$$

*Ensuite la condition **(H2)** est satisfaite avec $K=\overline{K}=\frac{1}{9+e^{-1}}$ La condition (2.16) :*

$$\frac{K\Gamma(\gamma)}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha+\gamma)}\left[\frac{\lambda_1\tau_1^{\alpha+\gamma-1}}{\left|\Gamma(\gamma)-\lambda_1\tau_1^{\gamma-1}\right|}+T^{\alpha}\right]\approx0,6077<1$$

*est satisfaite avec $\lambda_1=2,\tau_1=\dfrac{1}{2}$ et $T=1$, d'après le **Théorème**2.2 que le problème (2.29)-(2.30)admet une unique solution dans l'espace $C_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\big([0,1]\big)$ et d'après le **Théorème**2.3 le problème (2.29)-(2.30) est **Ulam-Hyers** stable.*

Chapitre 3

Problème à valeur extémale pour des équations différentielles au sens de Hilfer-Katugampola

Dans cet chapitre ,nous étudions le probléme à valeur suivant :

$$\left({}^{\rho}D_{\alpha^+}^{\alpha,\beta} y\right)(t) = \varphi(t), \text{ pour chaque } t \in (0,T] \tag{3.1}$$

ou $\varphi(.) \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$, avec la condition terminale suivante :

$$y(T) = c \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

3.1 Existence de solutions

Soient $0 < a < T$, $J = [0,T]$, nous désignons par $C(J,\mathbb{R})$ l'espace de **Banach** de toutes les fonctions continues de J dans $\mathbb{R}$ normé par

$$\| y \|_{\infty} = \sup\{| y(t) |: t \in C(J,\mathbb{R})\}$$

Nous considérons les espaces de poids des fonctions continues :

$$C_{\gamma,\rho}(J) = \left\{ y : (a,T] \longrightarrow \mathbb{R} : \left(\frac{t^{\rho} - a^{\rho}}{\rho}\right)^{\gamma} y(t) \in C(J,\mathbb{R}) \right\}, \quad 0 \leq \gamma < 1$$

et :

$$C^n_{\gamma,\rho}(J)=\left\{y\in C^{n-1}(J):y^{(n)}\in C_{\gamma,\rho}(J)\right\},n\in\mathbb{N}$$
$$C^0_{\gamma,\rho}(J)=C_{\gamma,\rho}(J)$$

avec la norme :

$$\parallel y\parallel_{C_{\gamma,\rho}}=\sup_{t\in J}\left|\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^\gamma y(t)\right|$$

et

$$\parallel y\parallel_{C^n_{\gamma,\rho}}=\sum_{k=0}^{n-1}\left\|y^{(k)}\right\|_\infty+\left\|y^{(n)}\right\|_{C_{\gamma,\rho}}$$

Considérons l'espace $X^p_c(a,b)$, $(c\in\mathbb{R},\ 1\le p\le\infty)$ de ces valeurs complexes **Lebesgue** mesurables les fonctions f dans $[a,b]$ pour qui $\parallel f\parallel_{X^p_c}<\infty$, où la norme est définie par :

$$\parallel f\parallel_{X^p_c}=\left(\int_a^b\mid t^cf(t)\mid^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}},\ (1\le p<\infty,\ c\in\mathbb{R})$$

En particulier , lorsque $c=\frac{1}{p}$, l'espace $X^p_c(a,b)$ coïncide avec l'espace $L_p(a,b)$ espace : $X^p_{\frac{1}{p}}(a,b)=L_p(a,b)$. Nous considérons l'équation différentielle fractionnaire linéaire suivante :

$$\left({}^\rho D^{\alpha,\beta}_{a^+}y\right)(t)=\varphi(t),\quad t\in(a,T] \tag{3.3}$$

alors $\varphi(\cdot)\in C_{1-\gamma,\rho}(J)$, avec la condition terminale :

$$y(T)=c,\ \ c\in\mathbb{R} \tag{3.4}$$

Le théorème suivant montre que le problème (3.1)-(3.2) admet une unique solution donnée par :

$$y(t)=\left(\frac{T^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\left[c-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^T\left(\frac{T^\rho-s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}s^{\rho-1}\varphi(s)ds\right]\left(\frac{t^\rho-a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} \tag{3.5}$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left(\frac{t^\rho-s^\rho\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}s^{\rho-1}\varphi(s)ds.$$

Théorème 3.1. *Soient $\gamma=\alpha+\beta-\alpha\beta$, où $0<\alpha<1$ et $0\le\beta\le1$,si $\varphi:(a,T]\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction tel que $\varphi(\cdot)\in C_{1-\gamma,\rho}(J)$ alors y satisfait le problème (3.3)-(3.4) si et seulement s'il satisfait l'équation (3.5).*

Preuve :

($\Rightarrow$) Soit $y \in C^{\gamma}_{1-\gamma,\rho}(J)$ est une solution de le problème (3.3)-(3.4). Nous prouvons que y est aussi une solution de l'équation (3.5). De la définition de $C^{\gamma}_{1-\gamma,\rho}(J)$, **Lemme**1.13, et utilisation de la **Définition**1.13 on a :

$$^{\rho}I^{1-\gamma}_{a^+} \in C(J) \text{ et } {}^{\rho}D^{\gamma}_{a^+}y = \delta_{\rho}\, {}^{\rho}I^{1-\gamma}_{a^+} y \in C_{1-\gamma,\rho}(J) \tag{3.6}$$

Par la définition de l'espace $C^{n}_{1-\gamma,\rho}(J)$ Par suite

$$^{\rho}I^{1-\gamma}_{a^+} y \in C^{1}_{1-\gamma,\rho}(J)$$

Utilisons **Lemme**1.17, avec $\alpha = \gamma$, on obtient :

$$({}^{\rho}I^{\gamma}_{a^+}\, {}^{\rho}D^{\gamma}_{a^+}y)(t) = y(t) - \frac{\left({}^{\rho}I^{1-\gamma}_{a^+} y\right)(a)}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\gamma-1} \tag{3.7}$$

où $t \in (a, T]$, supposons que , $y \in C^{\gamma}_{1-\gamma,\rho}(J)$, utilisons **Lemme**1.18 avec l'équation (3.3),on a :

$$\left({}^{\rho}I^{\gamma}_{a^+}\, {}^{\rho}D^{\gamma}_{a^+}y\right)(t) = \left({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}\, {}^{\rho}D^{\alpha,\beta}_{a^+}y\right)(t) = \left({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}\varphi\right)(t) \tag{3.8}$$

Comparons les équations (3.7) et (3.8) on voit ça :

$$y(t) = \frac{\left({}^{\rho}I^{1-\gamma}_{a^+} y\right)(a)}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\gamma-1} + ({}^{\rho}I^{\alpha}_{a^+}\varphi)(t) \tag{3.9}$$

Utilisons l'équation (3.4) on obtient :

$$\begin{aligned} y(t) = & \left(\frac{T^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{1-\gamma}\left[c - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^T \left(\frac{T^{\rho}-s^{\rho}}{\rho}\right)^{\gamma-1} s^{\rho-1}\varphi(s)ds\right]\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\gamma-1} \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\frac{t^{\rho}-s^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1}\varphi(s)ds \end{aligned}$$

avec $t \in (a, b]$, c'est-à-dire $y(\cdot)$ satisfait l'équation (3.5)

($\Leftarrow$) Soit $y \in C^{\gamma}_{1-\gamma,\rho}(J)$, satisfait l'équation (3.5). on voit que y est aussi satisfait les équations (3.3) et (3.4). Appliquons l'opérateur ${}^{\rho}D^{\gamma}_{a^+}$dans les côtés de l'équation précédent (3.5). Alors, d'après **Lemme**1.15 et 1.18 on vas trouver :

$$\left({}^{\rho}D^{\gamma}_{a^+}y\right)(t) = \left({}^{\rho}D^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}\varphi\right)(t) \tag{3.10}$$

D'après l'équation (3.6) on a ${}^{\rho}D_{a^+}^{\gamma}y \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$; alors, l'équation(3.10)implique :

$$\left({}^{\rho}D_{a^+}^{\gamma}y\right)(t) = \left(\delta_{\rho}\ {}^{\rho}I_{a^+}^{1-\beta(1-\alpha)}\varphi\right)(t) = \left({}^{\rho}D_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}\varphi\right)(t) \in C_{1-\gamma,\rho}(J) \tag{3.11}$$

Comme $\varphi(\cdot) \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$ et du **Lemme**1.13 ça suit :

$$\left({}^{\rho}I_{a^+}^{1-\beta(1-\alpha)}\varphi\right) \in C_{1-\gamma,\rho}(J) \tag{3.12}$$

D'après les équations (3.11) et (3.12) et par la définition de l'espace $C_{1-\gamma,\rho}^{n}(J)$ on obtient :

$$\left({}^{\rho}I_{a^+}^{1-\beta(1-\alpha)}\varphi\right) \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$$

Appliquons l'opérateur ${}^{\rho}I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}$ dans les deux membres de l'équation (3.11) et en utilisant les **Lemme**1.14 et 1.17 on obtient :

$$\begin{aligned}\left({}^{\rho}I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}\ {}^{\rho}D_{a^+}^{\gamma}y\right)(t) &= \varphi(t) + \frac{\left({}^{\rho}I_{a^+}^{1-\beta(1-\alpha)}\varphi(t)\right)(a)}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\beta(1-\alpha)-1} \\ &= \left({}^{\rho}D_{a^+}^{\alpha,\beta}y\right)(t) = \varphi(t)\end{aligned}$$

c'est -a-dire l'équation (3.3) est valable .Clairement ,si $y \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$ satisfait l'équation (3.5) il satisfais aussi l'équation (3.4)

En conséquence du **Théorème**3.1 , nous avons le **Théorème**3.2

Théorème 3.2. *Soient $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$ ou $0 < \alpha < 1$ et $0 \le \beta \le 1$;*
Soit$f$: $(a,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $f(.,y(.),u(.)) \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$ pour tout $y,u \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$,Si $y \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$, alors y satisfait aux équations 3.1 et 3.2 si et seulement si y est le point fixe de l'opérateur $N : C_{1-\gamma,\rho}(J) \longrightarrow C_{1-\gamma,\rho}(J)$ défini par :

$$Ny(t) = M\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\frac{t^{\rho}-s^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1}g(s)ds, \quad t \in (a,T] \tag{3.13}$$

où

$$M := \left(\frac{T^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\gamma-1}\left[c - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^T \left(\frac{T^{\rho}-s^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1}g(s)ds\right]$$

et $g : (0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfait l'équation fonctionnelle :

$$g(t) = f\left(t, y(t), g(t)\right)$$

Clairement $g \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$ *En plus, par le* ***Lemme*** *1.13*, $Ny \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$.

Supposons que la fonction $f : (a,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *soit continue et vérifie les conditions :*

(H1) *La fonction* $f : (a,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est telle que :*

$$f\Big(\cdot, u(\cdot), v(\cdot)\Big) \in C^{\beta(1-\alpha)}_{1-\gamma,\rho} \text{pour tout } \; u, v \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$$

(H2) *Il existe des constantes* $K > 0$ *et* $0 < L < 1$ *telles que :*

$$|f(t,u,v) - f(t,\overline{u},\overline{v})| \leq K|u - \overline{u}| + L|v - \overline{v}|$$

pour tout $u, v, \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}$ *et* $t \in (a,T]$

Maintenant, nous énonçons et prouvons notre résultat d'existence pour les équations (3.1) *et* (3.2) *basée sur le point fixe de* ***Banach***.

Théorème 3.3. *Supposons que* ***(H1)*** *et* ***(H2)*** *vérifieés. Si :*

$$\frac{K\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-L)} \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\alpha < \frac{1}{2} \tag{3.14}$$

alors le problème 3.1-3.2 admet une solution unique en $C^{\gamma}_{1-\gamma,\rho}(J) \subset C^{\alpha,\beta}_{1-\gamma,\rho}(J)$

Preuve :

La preuve est donnée en deux étapes :

Étape 1 : Nous montrons que l'opérateur N défini dans l'équation (3.13) a un point fixe unique y dans $C_{1-\gamma,\rho}(J)$. Soient $y, u \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$ et $t \in (a,T]$,alors on a :

$$\begin{aligned} |Ny(t) - Nu(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} \int_a^T \left(\frac{T^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1}|g(s) - h(s)|ds \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1}|g(s) - h(s)|ds \end{aligned}$$

où $g, h \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$ tels que :

$$g(t) = f\Big(t, y(t), g(t)\Big)$$

$$h(t) = f\Big(t, u(t), h(t)\Big)$$

Par **(H2)**, nous avons :

$$\begin{aligned} |g(t) - h(t)| &= \Big|f\Big(t, y(t), g(t)\Big) - f\Big(t, u(t), h(t)\Big)\Big| \\ &\leq K|y(t) - u(t)| + L|g(t) - h(t)| \end{aligned}$$

Ensuite :

$$|g(t)-h(t)| \leq \frac{K}{1-L}|y(t)-u(t)|$$

Donc, pour chaque $t \in (0,T]$:

$$\begin{aligned}
\left|Ny(t)-Nu(t)\right| &\leq \frac{K}{(1-L)\Gamma(\alpha)}\left(\frac{T^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{1-\gamma}\int_a^T\left(\frac{T^{\rho}-s^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}s^{\rho-1}|y(s)-u(s)|ds\\
&+\frac{K}{(1-L)\Gamma(\alpha)}\int_a^t\left(\frac{t^{\rho}-s^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1}s^{\rho-1}\left|y(s)-u(s)\right|ds\\
&\leq \frac{K}{(1-L)}\left(\frac{T^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\gamma-1}\|y-u\|_{C_{1-\gamma,\rho}}\left({}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}\left(\frac{s^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\gamma-1}\right)(T)\\
&+\frac{K}{(1-L)}\left(I_{a^+}^{\alpha}\left(\frac{s^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\gamma-1}\right)(t)\|y-u\|_{C_{1-\gamma,\rho}}
\end{aligned}$$

Par le **Lemme**1.15 , nous avons :

$$\begin{aligned}
|Ny(t)-Nu(t)| \leq \Bigg[&\frac{K\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-L)}\left(\frac{T^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\gamma-1}\\
&+\frac{K\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-L)}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha+\gamma-1}\Bigg]\|y-u\|_{C_{1-\gamma,\rho}},
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{1-\gamma}(Ny(t)-Nu(t)\right| &\leq \Bigg[\frac{K\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-L)}\left(\frac{T^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha}\\
&+\frac{K\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-L)}\left(\frac{t^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha}\Bigg]\|y-u\|_{C_{1-\gamma,\rho}}\\
&\leq \frac{2K\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-L)}\left(\frac{T^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha}\Bigg]\|y-u\|_{C_{1-\gamma,\rho}},
\end{aligned}$$

ce qui implique que :

$$\left\|Ny-Nu\right\|_{C_{1-\gamma,\rho}} \leq \frac{2K\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-L)}\left(\frac{T^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha}\|y-u\|_{C_{1-\gamma,\rho}}$$

Par l'équation (3.13), l'opérateur N est une contraction. Par conséquent, selon le principe de contraction de **Banach**, N a un point fixe unique $y^* \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$.

Étape 2 : Nous montrons qu'un tel point fixe $y^* \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$ est actuellement en $C^{\gamma}_{1-\gamma,\rho}(J)$. Puisque y est le point fixe unique de l'opérateur N dans $C_{1-\gamma,\rho}(J)$ alors, pour chaque

$t \in (a, T]$, nous avons :

$$y^*(t) = \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\left[c - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^T \left(\frac{T^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1} f\Big(s, y*(s), g(s)\Big)ds\right]\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1}$$
$$+^\rho I^\alpha_{a^+} f\Big(s, y*(s), g(s)\Big)$$

En appliquant ${}^\rho D^\gamma_{a^+}$ des deux membres de l'équation précédent et par les **Lemmes**1.15 et 1.18 , nous avons :

$$\begin{aligned} {}^\rho D^\gamma_{a^+} y^*(t) &= \left({}^\rho D^\gamma_{a^+} \ {}^\rho I^\alpha_{a^+} f\Big(s, y^*(s), g(s)\Big)\right)(t) \\ &= \left({}^\rho D^{\beta(1-\alpha)}_{a^+} f\Big(s, y^*(s), g(s)\Big)\right)(t) \end{aligned}$$

Depuis $\gamma \geq \alpha$,par (**H1**), le côté droit se trouve dans$C_{1-\gamma,\rho}(J)$ et donc ${}^\rho D^\gamma_{a^+} y^* \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$, qui implique que $y^* \in C^\gamma_{1-\gamma,\rho}(J)$.

En conséquence des étapes 1 et 2 ainsi que du théorème 3.2, nous prouvons que le problème 3.1-3.2 admet une solution unique dans$C^\gamma_{1-\gamma,\rho}(J)$.

Nous présentons maintenant la deuxième résultat, qui est basée sur le théorème du point fixe de **Krasnoselskii**.

Théorème 3.4. *Supposons que **(H1)** et **(H2)** vérifions. Si :*

$$\frac{K\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-L)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\alpha < 1 \tag{3.15}$$

alors le problème (3.1)-(3.2) *admet au moins une solution.*

Preuve : *Considérons l'ensemble :*

$$\beta_{\eta^*} = \left\{y \in C_{1-\gamma,\rho}(J) : \|y\|_{C_{1-\gamma,\rho}(J)} \leq \eta^*\right\}$$

où

$$\eta^* \geq \frac{\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\left[|C| + \frac{\Gamma(\gamma) f^*}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-L)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\alpha\right]}{1 - \dfrac{K\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-L)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^\alpha}$$

et $f^* = \sup_{t\in J} |f(t, 0, 0)|$

On définit les opérateurs P et Q sur β_{η^*} par :

$$Py(t) = \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\left[c - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^T \left(\frac{T^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1} g(s)ds\right]\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} \tag{3.16}$$

$$Qy(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\frac{t^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1} g(s) ds \tag{3.17}$$

Alors l'équation intégrale fractionnaire (3.13) peut être écrit comme l'équation d'opérateur :

$$Ny(t) = Py(t) + Qy(t), \quad y \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$$

La preuve est donnée en plusieurs étapes :

Étape 1 : Nous prouvons que $Py + Qu \in \beta_{\eta^*}$ pour tout $y, u \in \beta_{\eta^*}$. Pour l'opérateur P, multipliant les deux côtés de l'équation(3.16) par $\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}$, nous avons :

$$\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} Py(t) = \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} \left[c - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^T \left(\frac{T^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1} g(s) ds\right]$$

puisque :

$$\left|\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} Py(t)\right| \le \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} \left[| c | - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^T \left(\frac{T^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1} \, | g(s) | \, ds\right] \tag{3.18}$$

Par **(H3)**, on a pour chaque $t \in (a, T]$:

$$\begin{aligned}
|g(t)| &= \left|f\Big(t, y(t), g(t)\Big) - f\Big(t, 0, 0\Big) + f\Big(t, 0, 0\Big)\right| \\
&\le \left|f\Big(t, y(t), g(t)\Big) - f\Big(t, 0, 0\Big)\right| + \left|f\Big(t, 0, 0\Big)\right| \\
&\le K|y(t)| + L|g(t)| + f^*
\end{aligned}$$

Multiplions les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par $\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} g(t)\right| &\le \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} f^* + K\left|\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} y(t)\right| + L\left|\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} g(t)\right| \\
&\le \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} f^* + K\eta^* + L\left|\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} g(t)\right|
\end{aligned}$$

Ensuite, pour chaque $t \in (a, T]$, nous avons :

$$\left|\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} g(t)\right| \le \frac{\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} f^* + K\eta^*}{1 - L} := M \tag{3.19}$$

Ainsi, l'équation (3.18) et le **Lemme**1.15 implique :

$$\left|\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} Py(t)\right| \le \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} \left[|c| + \frac{M\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha+\gamma-1}\right]$$

Cela donne :

$$\|Py\|_{C_{1-\gamma,\rho}} \leq \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} \left[|C| + \frac{M\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha+\gamma-1}\right] \tag{3.20}$$

On utilise l'équation (3.19) et le **Lemme**1.15 , nous avons :

$$|Q(u)(t)| \leq \left[\frac{\Gamma(\gamma)f^*}{(1-L)\Gamma(\alpha+\gamma)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} + \frac{K\Gamma(\gamma)\eta^*}{(1-L)\Gamma(\alpha+\gamma)}\right]\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha+\gamma-1}$$

Par conséquence :

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} Qu(t)\right| &\leq \left[\frac{\Gamma(\gamma)f^*}{(1-L)\Gamma(\alpha+\gamma)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} + \frac{K\Gamma(\gamma)\eta^*}{(1-L)\Gamma(\alpha+\gamma)}\right]\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha} \\
&\leq \frac{\Gamma(\gamma)f^*}{(1-L)\Gamma(\alpha+\gamma)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma+\alpha} + \frac{K\Gamma(\gamma)\eta^*}{(1-L)\Gamma(\alpha+\gamma)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\|Qu\|_{C_{1-\gamma,\rho}} \leq \frac{\Gamma(\gamma)f^*}{(1-L)\Gamma(\alpha+\gamma)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma+\alpha} + \frac{K\Gamma(\gamma)\eta^*}{(1-L)\Gamma(\alpha+\gamma)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha} \tag{3.21}$$

Par additive les équations (3.20) et (3.21), pour chaque $y, u \in \beta_{\eta^*}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\|Py + Qu\|_{C_{1-\gamma,\rho}} &\leq \max\left\{\|Py\|_{C_{1-\gamma,\rho}}, \|Qu\|_{C_{1-\gamma,\rho}}\right\} \\
&\leq \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\left[|C| + \frac{M\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha+\gamma-1}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\gamma)f^*}{(1-L)\Gamma(\alpha+\gamma)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma+\alpha} \\
&\quad + \frac{K\Gamma(\gamma)\eta^*}{(1-L)\Gamma(\alpha+\gamma)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha} + \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}|C|
\end{aligned}$$

Puisque :

$$\eta^* \geq \frac{\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\left[|C| + \frac{\Gamma(\gamma)f^*}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-L)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha}\right]}{1 - \dfrac{K\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-L)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha}}$$

on a :

$$\|Py + Qu\|_{PC_{1-\gamma,\rho}} \leq \eta^*$$

ce qui montre que $Py + Qu \in \beta_{\eta^*}$.

Étape 2 : P est une contraction.

Soient $y, u \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$ et $t \in (a, T]$ alors, on a :

$$|Py(t) - Pu(t)| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} \int_a^T \left(\frac{T^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1} |g(s) - h(s)| ds$$

où $g, h \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$ tels que :

$$g(t) = f\Big(t, y(t), g(t)\Big)$$

$$h(t) = f\Big(t, u(t), h(t)\Big)$$

Par **(H2)**, nous avons :

$$\begin{aligned} |g(t) - h(t)| &= \Big|f\Big(t, y(t), g(t)\Big) - f\Big(t, u(t), h(t)\Big)\Big| \\ &\le K|y(t) - u(t)| + L|g(t) - h(t)| \end{aligned}$$

Ensuite

$$|g(t) - h(t)| \le \frac{K}{1-L} |y(t) - u(t)|$$

Par conséquence, pour chaque $t \in (a, T]$:

$$\begin{aligned} |Py(t) - Pu(t)| &\le \frac{K}{(1-L)\Gamma(\alpha)} \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} \int_a^T \left(\frac{T^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1} |y(s) - u(s)| ds \\ &\le \frac{K}{(1-L)} \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} \|y - u\|_{C_{1-\gamma,\rho}} \left({}^\rho I_{a^+}^\alpha \left(\frac{s^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1}\right)(T) \end{aligned}$$

Par le **Lemme**1.15 , nous avons :

$$|Py(t) - Pu(t)| \le \frac{K\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-L)} \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha} \left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} \|y - u\|_{C_{1-\gamma,\rho}},$$

Par conséquent :

$$\left|\left(\frac{t^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} \Big(Py(t) - Pu(t)\Big)\right| \le \frac{K\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-L)} \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha} \|y - u\|_{C_{1-\gamma,\rho}},$$

$$\|Py - Pu\|_{C_{1-\gamma,\rho}} \le \frac{K\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-L)} \left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha} \|y - u\|_{C_{1-\gamma,\rho}},$$

Par l'équation (3.15), l'opérateur P est une contraction.

Étape 3 : Q est compact et continu.

La continuté de Q découle de la continuté de f. Ensuite, nous montrons que Q est uniformément borné sur β_{η^*} .

Soit $u \in \beta_{\eta^*}$. Ensuite, par l'équation (3.21), nous avons :

$$\|Qu\|_{C_{1-\gamma,\rho}} \leq \frac{\Gamma(\gamma)f^*}{(1-L)\Gamma(\alpha+\gamma)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma+\alpha} + \frac{K\Gamma(\gamma)\eta^*}{(1-L)\Gamma(\alpha+\gamma)}\left(\frac{T^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\alpha}$$

Cela signifie que Q est uniformément borné sur β_{η^*} . Ensuite, nous montrons que Q est équicontinu.

Soit $u \in \beta_{\eta^*}$ et $0 < a < \tau_1 < \tau_2 T$. Alors :

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{\tau_2^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} Q(y)(\tau_2) - \left(\frac{\tau_1^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} Q(y)(\tau_1)\right| \\
&\leq \frac{\left(\frac{\tau_2^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{\tau_2^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1}|g(s)|ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\tau_1} \left\|\left[\left(\frac{\tau_2^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{\tau_2^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1}\right.\right. \\
&- \left.\left.\left(\frac{\tau_1^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{\tau_1^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1}\right]\right\| |g(s)|ds \\
&\leq \frac{M\Gamma(\gamma)\left(\frac{\tau_2^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma)}\left(\frac{\tau_2^\rho - \tau_1^\rho}{\rho}\right)^{\alpha+\gamma-1} \\
&+ \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\tau_1} \left\|\left[\left(\frac{\tau_2^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{\tau_2^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1}\right.\right. \\
&- \left.\left.\left(\frac{\tau_1^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{\tau_1^\rho - s^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1} s^{\rho-1}\right]\right\| \left(\frac{s_1^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{\gamma-1} ds
\end{aligned}$$

Alors :

$$\left|\left(\frac{\tau_2^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} Q(y)(\tau_2) - \left(\frac{\tau_1^\rho - a^\rho}{\rho}\right)^{1-\gamma} Q(y)(\tau_1)\right| \to 0 \; comme \; \tau_2 \to \tau_1$$

Cela montre que Q est équicontinu sur J. Par conséquent, Q est relativement compact sur β_{η^*} en $C_{1-\gamma,\rho}$, le théorème de type **Arzèla–Ascoli** Q est compact sur β_{η^*}.

En conséquence du théorème de point fixe de **Krasnoselskii**, nous concluons que N admet au moins un point fixe $y^* \in C_{1-\gamma,\rho}(J)$ et de la même manière que la preuve du **Théorème**(3.3), nous prouvons facilement montrer que $y^* \in C^{\gamma}_{1-\gamma,\rho}$. On utilise le **Lemme**1.17

, nous concluons que le problème (3.1)-(3.2) admet au moins une solution dans l'espace $C^{\gamma}_{1-\gamma,\rho}(J)$.

3.2 Exemple

Considérons le problème de valeur terminale suivant :

$$ {}^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2},0}_{1^+}y(t)=\frac{2+|y(t)|+\left|{}^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2},0}_{0^+}y(t)\right|}{108e^{-t+3}\left(1+|y(t)|+\left|{}^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2},0}_{0^+}y(t)\right|\right)}+\frac{\ln\left(\sqrt{t}+1\right)}{3\sqrt{t}-1},\quad t\in(1,2] \tag{3.22}$$

$$y(2)=c\in\mathbb{R} \tag{3.23}$$

Posons

$$f(t,u,v)=\frac{2+u+v}{108e^{-t+3}(1+u+v)}+\frac{\ln\left(\sqrt{t}+1\right)}{3\sqrt{t}-1},\quad t\in(1.2]\ u,v\in[0,+\infty)$$

Nous avons :

$$C^{\beta(1-\alpha)}_{1-\gamma,\rho}\big([1,2]\big)=C^{0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\big([1,2]\big)=\left\{h:(1,2]\to\mathbb{R}:\ \sqrt{2}\left(\sqrt{t}-1\right)^{\frac{1}{2}}h\in C\big([1,2]\big)\right\}$$

avec $\gamma=\alpha=\rho=\frac{1}{2}$ et $\beta=0$. Clairement, la fonction $f\in C_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\big([1,2]\big)$.

Donc la condition **(H1)** est satisfait.

Pour chaque $u,\overline{u},v,\overline{v}\in\mathbb{R}$ et $t\in(1,2]$

$$\begin{aligned}|f(t,u,v)-f(t,\overline{u},\overline{v})|&\le\frac{1}{108e^{-t+3}}\big(|u-\overline{u}|+|v-\overline{v}|\big)\\&\le\frac{1}{108e}\big(|u-\overline{u}|+|v-\overline{v}|\big)\end{aligned}$$

Par conséquent, **(H2)** est vérifiée avec $K=L=\dfrac{1}{108e}$

La condition :

$$\frac{K\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)(1-L)}\left(\frac{T^{\rho}-a^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha}\simeq 0.0055<1$$

est satisfait avec $T=2$ et $a=1$. Il résulte du **Théorème**3.4 que le problème (3.22)-(3.23) admet une solution dans l'espace $C^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\big([1,2]\big)$

3.3 Conclusion

Nous avons fourni des conditions suffisantes garantissant l'existence et l'unicité de solution à une classe de problèmes à valeur initiale non locale et à valeur terminale via les dérivées fractionnaires de type **Hilfer** et de **Hilfer – Katugampola** . Les arguments sont basés sur le principe de la contraction de **Banach** et le théorème du point fixe de **Krasnoselskii**. Des exemples sont inclus pour illustrer les résultats.

Bibliographie

[1] Ahmad, B. ; Alsaedi, A. ; Ntouyas, S.K. ; Tariboon, J. Hadamard-type Fractional Differential Equations, Inclusions and Inequalities ; Springer : Cham, Switzerland, 2017.

[2] Benchohra, M. ; Bouriah, S. ; Henderson, J. Existence and stability results for nonlinear implicit neutral fractional differential equations with finite delay and impulses. Commun. Appl. Nonlinear Anal. 2015, 22, 46–67.

[3] Kilbas, A.A. ; Trujillo, J.J. Hadamard-type integrals as G-transforms. Integral Transforms Spec. Funct. 2003, 14, 413–427.

[4] Hilfer, R. Applications of Fractional Calculus in Physics ; World Scientific : Singapore, 2000.

[5] Katugampola, U. A new approach to a generalized fractional integral. Appl. Math. Comput. 2011, 218, 860–865.

[6] Kilbas, A.A. ; Srivastava, H.M. ; Trujillo, J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. In North-Holland Mathematics Studies ; Elsevier Science B.V. : Amsterdam, The Netherland, 2006 ; Volume 204.

[7] Kassim, M.D. ; Tatar, N.E. Well-posedness and stability for a differential problem with Hilfer-Hadamard fractional derivative. Abstr. Appl. Anal. 2013, 2013, 605029.

[8] Granas, A. ; Dugundji, J. Fixed Point Theory ; Springer-Verlag : New York, NY, USA, 2003.

[9] Oliveira, D.S. ; de Oliveira, E.C. Hilfer-Katugampola fractional derivative. Comput. Appl. Math. 2018, 37, 3672–3690.

[10] Mouffak.B,Soufyane.B,Juan J.Nieto :Terminal value problem for differential equations with Hilfer-Katugampola fractional derivative.