

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques



Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle et applications

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

**La Méthode des éléments finis et ses Applications
aux EDP**

Présenté par

*BOUDJENANE FATHI

*HALIMI SAID

*MEHDI NOUREDDINE

soutenu devant le Jury composé de

*A.LARABI	M.r	Président
*K.BENIA	M.r	Encadreur
*A.OUARDANI	M.r	Examineur

Promotion : 2019 \ 2020

★————— *Remerciement* —————★

Je remercie tout d'abord «Allah» de m'avoir donné le courage d'entamer et de finir ce mémoire dans de bonnes conditions.

J'adresse mes vifs remerciements

À mon encadreur Mr KHEIREDDINE BENIA qui par ses conseils, ses recommandations, sa patience m'a permis de réaliser ce mémoire avec un très grand plaisir.

À messieurs les membres de jury de ce mémoire :

Mr.OUARDANI ABDERRAHMANE comme examinateur, Mr.LARABI ABDERRAHMANE comme président pour avoir bien voulu examiner ce travail.

À tous les enseignants qui ont participé à la formation tout au long mon cycle Universitaire jusqu'aux jours d'aujourd'hui.

Enfin, je ne voudrai pas non plus oublier toutes les personnes que j'ai rencontre tout long de ces années universitaire et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail.



Dédicace

Je dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :
à mes très chers parents qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffert et
sacrifié pour que je sois contente, pour leurs conseils, leurs affections et leurs
encouragements pour tout leurs efforts fournis pour moi, qu'Allah les gardes et
les bénit toute la vie.

Et je le dédie à mes amis qui j'ai partagé de très bons moments tout le long de
ces années.

À tous mes enseignements et les collègues de la promotion de la deuxième année
master 2019/2020.

Mehdi Noureddine

Dédicace

Je dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :
à mes très chers parents qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffert et
sacrifié pour que je sois contente, pour leurs conseils, leurs effections et leurs
encouragements pour tout leurs efforts fournis pour moi, qu'Allah les gardes et
les bénit toute la vie.

Et je le dédie à tous les membres de ma famille, Halimi et Hadji.

À toutes mes amis et à mon cher binôme avec qui j'ai partagé de très bons
moments tout le long de ces années.

À tous mes enseignements et les collègues de la promotion de la deuxième année
master 2019/2020.

Halimi Said

Dédicace

Je dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :
à mes très chers parents qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffert et
sacrifié pour que je sois contente, pour leurs conseils, leurs affections et leurs
encouragements pour tout leurs efforts fournis pour moi, qu'Allah les gardes et
les bénit toute la vie.

Et je le dédie à ,À toutes mes amis et à mon cher binôme avec qui j'ai partagé
de très bons moments tout le long de ces années.

À tous mes enseignants et les collègues de la promotion de la deuxième année
master 2019/2020.

Boudjnane Fathi

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	2
1.1 Rappel sur les espaces de Banach et de Hilbert	2
1.1.1 inégalité de Cauchy-Schwarz	3
1.2 Les Distribution	3
1.2.1 l'espace $\mathbf{L}^p(\Omega)$	4
1.2.2 Inégalité de Hölder	4
1.3 Les espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$	5
1.3.1 L'espace de Sobolev $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$	6
1.3.2 Inégalité de Poincaré	6
1.4 des opérateurs différentiels	8
1.5 Formule de Green	8
1.5.1 Trace d'une fonction	10
2 Formulation variationnelle	12
2.0.1 Forme faible	12
2.1 Formulations variationnelles des problèmes modèles	13
2.1.1 Problème de Dirichlet homogène	13
2.1.2 Problème de Dirichlet non homogène	14
2.1.3 Problème de Neumann	15
2.2 Théorème de Lax-Milgram	16
2.2.1 Application aux problèmes modèles	20
3 méthodes des élément finies	23
3.1 Historique de la méthode	23

3.2	Discrétisation du domaine	24
3.3	Approximation interne générale	25
3.4	La méthode de Galerkin	27
3.4.1	Principe de base d'une méthode de Galerkin	27
3.5	La méthode des éléments finis	29
3.5.1	La méthode des éléments finis en dimension un	29
3.5.2	Élément fini P1	29
3.5.3	résolution du problème de dirichlet	31
4	Applications	34
4.1	Algorithme	34
4.2	Code Matlab	35
4.3	Applications	37
4.3.1	Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis en dimension 1 pour $u(x)=x(x-1)$	38

Introduction

L'objet de ce mémoire est d'introduire les notions de base de la résolution des EDPs par la méthode des éléments finis. Depuis son introduction au milieu des XX^{ème} siècle, cette méthode est devenue l'outil de base dans la résolution des EDPs qui intervient dans les études scientifiques et techniques.

La résolution de problème est basée sur une formulation variationnelle des problèmes d'équations aux dérivées partielles, posées sur un domaine de R^n ($n \leq 3$ généralement dans les problèmes d'ingénierie), qui avec des conditions appropriées sur la solution au bord de ce domaine, sont nommés problèmes aux limites. La méthode des éléments finis apparaît alors comme une méthode de Galerkin particulière.

En premier chapitre on a donné les notions de base, rappelé des résultats essentiels pour notre travail et on a introduit la formule de Green. En deuxième chapitre on a fait la formulation variationnelle des problèmes modèles et aussi présenté le théorème de Lax-Milgram qui joue un rôle essentiel pour l'existence et l'unicité de la solution. En troisième chapitre on a introduit la méthode des éléments finis et en dernier chapitre on a fait l'application.

Préliminaires

La majorité des phénomènes sont modélisés par le biais des équations aux dérivées partielles. Il s'est avéré que l'espace des fonctions continument dérivables suffisamment de fois pour donner un sens à l'EDP ne soit pas le cadre adéquat pour faire son étude défaut de complétude d'où la nécessité d'introduire un nouvel espace complet appelé espace de Sobolev H^1 que nous allons définir dans ce qui suit. L'objectif de ce chapitre est de donner les outils de base nécessaires à l'utilisation de la méthode des éléments finis.

Parmi les outils de base, on retrouve les notions de **distribution**, des espaces de **Hilbert** et de **Sobolev**, et la notion de trace.

Nous omettrons toutefois quelques détails qui ont bien sûr leur importance mais qui ne sont pas essentiels pour une bonne compréhension de la méthode des éléments finis.

1.1 Rappel sur les espaces de Banach et de Hilbert

Définition 1.1 Soit $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans un espace normé $(V, \|\cdot\|)$. On dit que cette suite est de Cauchy si :

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|u_n - u_m\| = 0.$$

L'espace normé $(V, \|\cdot\|)$ est dit de Banach si toute suite de Cauchy dans V converge vers un élément de V (pour la norme $\|\cdot\|$). En d'autres termes, un espace de Banach est un espace norme complet.

Définition 1.2 Un produit scalaire dans un espace linéaire V est une forme linéaire $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ avec les propriétés suivantes :

1. $(u, u) \geq 0$, $\forall u \in V$ et $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$,
2. $(u, v) = (v, u)$, $\forall u, v \in V$,

$$3.(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w), \quad \forall u, v, w \in V \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

Le couple $(V, (\cdot, \cdot))$ est un espace linéaire muni d'un produit scalaire.

1.1.1 inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.1 Soit $(V, (\cdot, \cdot))$ un espace linéaire muni d'un produit scalaire. Alors on a :

$$|(u, v)| \leq \sqrt{(u, u)}\sqrt{(v, v)}, \quad \forall u, v \in V.$$

Définition 1.3 Soit $(V, (\cdot, \cdot))$ un espace linéaire muni d'un produit scalaire. Posons $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ pour tout $v \in V$. Alors le couple $(V, \|\cdot\|)$ est un espace normé et

$$|(u, v)| \leq \|u\|\|v\|, \quad \forall u, v \in V.$$

Un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme est induite par un produit scalaire.

1.2 Les Distribution

Définition 1.4 Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ et f une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle support de f l'ensemble :

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega \text{ tel que } : f(x) \neq 0\}}.$$

Définition 1.5 On dit que la fonction f est à support compact s'il existe un sous-ensemble compact $K \subset \Omega$ tel que $\text{supp } f \subset K$. On définit ainsi l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ par $\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \text{ tel que } : f \text{ est à support compact}\}$.

Définition 1.6 (Distribution)

On peut maintenant définir l'espace des distributions sur Ω . Soit T une application linéaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans \mathbb{R} . On note par $\langle T, \varphi \rangle$ la valeur de T correspondante à l'élément $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire $\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$. On dit que T est continue si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi_n \rangle = \langle T, \varphi \rangle,$$

où $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite arbitraire de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

On appelle distribution sur $\mathcal{D}(\Omega)$ toute application $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire et continue. L'espace des distributions sur Ω est l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$, dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire, l'espace des applications $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ linéaires et continues (au sens spécifié ci-dessus).

Exemple 1.2.1 Soit a un point de Ω . Le delta de Dirac relatif au point a , noté par δ_a , est la distribution définie par :

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

δ_a est linéaire. En effet,

$$\begin{aligned} \langle \delta_a, \varphi + \psi \rangle &= (\varphi + \psi)(a), \\ &= \varphi(a) + \psi(a), \\ &= \langle \delta_a, \varphi \rangle + \langle \delta_a, \psi \rangle, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

Elle est aussi continue. En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \delta_a, \varphi_n \rangle &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(a), \\ &= \varphi(a), \\ &= \langle \delta_a, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ tel que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = \delta. \end{aligned}$$

On dit qu'une suite de distributions $\{T_n\}$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers une distribution T si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.2.1 l'espace $L^p(\Omega)$

Définition 1.7 Considérons l'espace $L^p(\Omega)$ des fonctions , pour tout $1 \leq p \leq \infty$ est défini par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Remarque 1.1 l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

La norme de $L^2(\Omega)$ associée à ce produit scalaire est donc donnée par :

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = ((f, f)_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2.2 Inégalité de Hölder

Théorème 1.2 Pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ $|fg| \in L^1(\Omega)$ et on a l'inégalité :

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})|d\mathbf{x} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}},$$

Lorsque $p = p' = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

A toute fonction $f \in L^p(\Omega)$ on associe une distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ définie par :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.1)$$

On a le résultat le lemme suivant :

Lemme 1.1 *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.*

Définition 1.8 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ avec Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . La dérivée partielle de T par rapport à x_i avec $i = (1, \dots, n)$ au sens des distributions est une nouvelle distribution définie de la manière suivante :*

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Remarque 1.2 *De manière analogue on peut définir les dérivées successives. Pour chaque multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on définit :*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.3 Les espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$

Définition 1.9 *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On pose*

$$H^1(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \partial u / \partial x_i \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \right\},$$

Bien entendu, la dérivation est à comprendre au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ est dans $H^1(\Omega)$ s'il existe des fonctions v_1, \dots, v_N dans $L^2(\Omega)$ telles que :

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

On lui associe le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx.$$

et la norme associée est notée :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = (v, v)_{H^1(\Omega)}^{1/2} = \left(\int_{\Omega} \left(v^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

1.3.1 L'espace de Sobolev $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$

Définition 1.10 *maintenant un autre espace de Sobolev qui est $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, et qui nous sera très utile pour les problèmes avec conditions aux limites.*

L'espace de Sobolev $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ est défini comme étant l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

Définition 1.11 *Nous dirons qu'un ouvert Ω est borné dans une direction s'il existe un vecteur unitaire $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^N$ et une constant $A > 0$ tels que $\Omega \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : -A \leq \mathbf{x} \cdot \mathbf{d} \leq A\}$.*

1.3.2 Inégalité de Poincaré

Théorème 1.3 *Soit Ω un ouvert borné dans une direction. Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω telle que :*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proposition 1.1 *L'espace $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est un espace de Hilbert".*

Proposition 1.2 *Pour tout Ω ouvert de \mathbb{R}^2 , l'application $f \mapsto \tilde{f} := f \circ \phi$ est une isométrie de $H^1(\Omega)$ sur $\tilde{H}^1(\tilde{\Omega})$.*

Définition 1.12 *On définit les espaces de Sobolov $H^m(\Omega)$ ou m est un entier strictement positif par :*

$$H^m(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m\}.$$

On le munit de la norme naturelle :

$$\|u\|_{H^m} := \left(\sum_{\alpha: |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u| \, dx \right)^{1/2}.$$

Proposition 1.3 *L'espace $H^m(\Omega)$ ($m \in \mathbb{N}^*$) muni de la norme $\|\cdot\|_{H^m}$ est un espace de Hilbert. Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$, il est possible de définir les espaces de Sobolev en utilisant la transformée de Fourier. Si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, on note \hat{u} sa transformée de Fourier et on a :*

Proposition 1.4 L'espace $H^m(\mathbb{R}^N)$ ($m \in \mathbb{N}^*$) peut être défini par :

$$H^m(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) : (1 + |\xi|^2)^{m/2} \widehat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

et la norme définie par (N1) équivalente à (on garde la même notation) :

$$\|u\|_{H^m} := \left(\int_{\Omega} (1 + |\xi|^2)^m |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Cette proposition permet de définir l'espace $H^m(\mathbb{R}^N)$ pour tout $m \in \mathbb{R}$ (et plus seulement $m \in \mathbb{N}^*$). Si m n'est pas entier, on le note alors plutôt $H^s(\mathbb{R}^N)$, $s \in \mathbb{R}$. Le théorème de Plancherel nous assure alors que si $s \geq 0$, $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ ce qui n'est plus le cas si $s < 0$.

Proposition 1.5 Sur $H^m(\mathbb{R}^{N_1} \times \omega) \subset \mathbb{R}^N$, la norme usuelle est équivalente à

$$\|u\|_{H^m} := \left(\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{N_1} \\ |\alpha| \leq m}} \int_{\omega} \int_{\mathbb{R}^{N_1}} (1 + |\xi_1|^2)^{m-|\alpha|} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} \mathcal{F}_{\mathbf{x}_1}(u)}{\partial \mathbf{x}_2^\alpha}(\xi_1, \mathbf{x}_2) \right|^2 d\xi_1 d\mathbf{x}_2 \right)^{1/2}.$$

Remarque De façon plus générale, pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$ $m \geq 1$, on peut définir les espaces de Sobolev :

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m \right\}.$$

que l'on munit de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} := \left(\sum_{\alpha: |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Proposition 1.6 On suppose que Ω est un ouvert de classe C^1 avec Γ (la frontière) borné ou bien que Ω est le demi-espace \mathbb{R}_+^N . Alors il existe un opérateur de prolongement $P : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ linéaire, tel que pour tout $u \in H^1(\Omega)$:

1. $Pu|_{\Omega} = u$,
2. $\|Pu\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}$,
3. $\|Pu\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$,

ou $C > 0$ est une constante qui ne dépend que de Ω .

Proposition 1.7 *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^N)$ pour tout N entier positif et pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

Définition 1.13 *On note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence (pour la norme $\|\cdot\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}$) du sous espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.*

1.4 des opérateurs différentiels

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Pour toute fonction $\mathbf{F} := (F_1, F_2, \dots, F_p)^T : \mathbf{x} \in \Omega \mapsto (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_p(\mathbf{x}))^T$ \mathbb{R}^p ($p \in \mathbb{N}^*$) de classe C^1 , on note :

$$[D\mathbf{F}(\mathbf{x})] := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial F_p}{\partial x_N}(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

la matrice Jacobienne de \mathbf{F} au point \mathbf{x} . Si $p = N$, on dit que \mathbf{F} est un champ de vecteurs et sa matrice Jacobienne est alors une matrice carrée. On définit la divergence de \mathbf{F} par :

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x})) := \operatorname{tr}[D\mathbf{F}(\mathbf{x})] = \sum_{i=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}),$$

Soit $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On note alors :

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_N}(\mathbf{x}) \right)^T,$$

le gradient de φ . Si φ est de classe C^2 , on définit le laplacien de φ par :

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}) := \operatorname{div}(\nabla\varphi(\mathbf{x})) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_N^2}(\mathbf{x}).$$

1.5 Formule de Green

La formule de Green' est un outil fondamental pour la résolution des EDP. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

Théorème 1.4 (Formule d'Ostrogradsky)

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 et Γ son bord. Soit \mathbf{F} une fonction de $C^1(\widehat{\Omega})$ à valeurs

dans \mathbb{R}^N (un champ de vecteurs). Alors :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(x) d\Gamma,$$

Remarque 1.3 Dans cette formule, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est le vecteur unitaire normal à Γ au point \mathbf{x} , dirigé vers l'extérieur de Ω .

Définition 1.14 Pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma$, il existe un ouvert $Q(\delta, \delta')$, un repère \mathcal{R} et une fonction φ . D'autre part, il est toujours possible de définir des ouverts U de \mathbb{R}^N et \mathcal{O} de \mathbb{R}^{N-1} tels que dans le repère \mathcal{R} , $U := \{(\mathbf{y}', \varphi(\mathbf{y}') + t) : \mathbf{y}' \in \mathcal{O}, |t| < \delta/2\} \subset Q(\delta, \delta')$ et on peut recouvrir le compact Γ avec un nombre fini $U_i, i = 1, \dots, m$ de tels ouverts. On introduit alors une partition de l'unité $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ assujettie à ce recouvrement et on note $\mathbf{F}_i := \alpha_i|_{\Omega} \mathbf{F}$. On obtient la décomposition $\mathbf{F} = \sum_{i=0}^m \mathbf{F}_i$ vérifiant $\operatorname{supp} \mathbf{F}_0 \cap \Gamma = \emptyset$ et où chaque $\operatorname{supp} \mathbf{F}_i$ pour $i = 1, \dots, m$ est inclus dans U_i . On vérifie facilement que :

$$\int_{\Omega} \mathbf{F}_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0,$$

Dans le repère local \mathcal{R} on note

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(\mathbf{y}', y_N) &= (F_{i,1}(\mathbf{y}', y_N), \dots, F_{i,N-1}(\mathbf{y}', y_N), F_{i,N}(\mathbf{y}', y_N))^T \\ &= (\mathbf{F}'_i(\mathbf{y}', y_N), F_{i,N}(\mathbf{y}', y_N))^T, \end{aligned}$$

et la relation

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}_i(\mathbf{y})) d\mathbf{y} = \int_{\Gamma} \mathbf{F}_i(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) d\Gamma,$$

se traduit par :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{O}} \int_0^{\delta/2} \operatorname{div}_{\mathbf{y}'}(\mathbf{F}'_i)(\mathbf{y}', \varphi_i(\mathbf{y}') + t) + \frac{\partial F_{i,N}}{\partial y_N}(\mathbf{y}', \varphi_i(\mathbf{y}') + t) dt d\mathbf{y}' \\ &= \int_{\mathcal{O}} F_{i,N}(\mathbf{y}', \varphi_i(\mathbf{y}')) - \mathbf{F}'_i(\mathbf{y}', \varphi_i(\mathbf{y}')) \cdot \nabla \varphi_i(\mathbf{y}') d\mathbf{y}' \quad (1.1) \end{aligned}$$

On pose alors $\tilde{\mathbf{F}}'_i(\mathbf{y}', t) = \mathbf{F}'_i(\mathbf{y}', \varphi_i(\mathbf{y}') + t)$ et la formule de dérivation d'une composée nous donne :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{y}'}(\mathbf{F}'_i)(\mathbf{y}', \varphi_i(\mathbf{y}') + t) = \operatorname{div}_{\mathbf{y}'} \tilde{\mathbf{F}}'_i(\mathbf{y}', t) - \frac{\partial \mathbf{F}'_i}{\partial y_N}(\mathbf{y}', \varphi_i(\mathbf{y}') + t) \cdot \nabla \varphi_i(\mathbf{y}')$$

Or, à t fixé, $\operatorname{supp} \tilde{\mathbf{F}}'_i(\cdot, t) \subset \mathcal{O}$ et comme

$$\int_{\mathcal{O}} \operatorname{div}_{\mathbf{y}'} \tilde{\mathbf{F}}'_i(\mathbf{y}', t) d\mathbf{y}' = 0, \quad \forall t \in]0, \delta/2[,$$

Corollaire 1.1 (Formule de Green)

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 . Alors pour toutes fonctions $u \in C^2(\bar{\Omega})$ et $v \in C^1(\bar{\Omega})$ on a :

$$\int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

ou $\partial u / \partial \mathbf{n}(\mathbf{x}) := \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ (dérivée normale de u)

preuve 1.1 Il suffit d'appliquer la formule d'Ostrogradsky avec $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := v(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})$ et de remarquer que

$$\operatorname{div}(v(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) = v(\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{x}) + \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}),$$

Dans la démonstration de la formule d'Ostrogradsky (et donc aussi de Green) il est possible de considérer plus généralement des ouverts C^1 par morceaux (c'est à dire dont la frontière est localement le graphe d'une fonction C^1 par morceaux, comme par exemple un rectangle de \mathbb{R}^2). Dans ce cas, le vecteur normal n'est défini que presque partout sur Γ . Plus loin dans ce cours, nous montrerons que ces formules (Ostrogradsky et Green) ont encore un sens pour des fonctions beaucoup moins régulières que ce qui est donné dans ce chapitre.

1.5.1 Trace d'une fonction

Pour pouvoir faire les intégrations par parties qui seront utiles par exemple pour la formulation variationnelle, il faut pouvoir définir le prolongement (la trace) d'une fonction sur le bord de l'ouvert Ω .

Si $n = 1$ (cas 1 - D) : on considère un intervalle ouvert $I =]a, b[$ borné. On a vu que $H^1(I) \subset C^0(\bar{I})$.

Donc, pour $u \in H^1(I)$, u est continue sur $[a, b]$, et $u(a)$ et $u(b)$ sont bien définies.

Si $n > 1$: on n'a plus $H^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$. Comment alors définir la trace ? La démarche est la suivante :

On définit l'espace

$$\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) = \{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \exists O \text{ ouvert contenant } \bar{\Omega}, \exists \psi \in \mathcal{C}^1(O), \psi|_{\Omega} = \varphi \},$$

Autrement dit, $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ est l'espace des fonctions \mathcal{C}^1 sur Ω , prolongeables par continuité sur $\partial\Omega$ et dont le gradient est lui-aussi prolongeable par continuité. Il n'y a donc pas de problème pour définir la trace de telles fonctions.

On montre que, si Ω est un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ "assez régulière", alors $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ est dense

dans $H^1(\Omega)$ l'application linéaire continue, qui à toute fonction u de $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ associe sa trace sur $\partial\Omega$ se prolonge alors en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée γ_0 qu'on appelle application trace. On dit que

$\gamma_0(u)$ est la trace de u sur $\partial\Omega$. Pour une fonction u de $H^1(\Omega)$ qui soit en même temps continue sur $\bar{\Omega}$, on a évidemment $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$. C'est pourquoi on note souvent par abus simplement $u|_{\partial\Omega}$ plutôt que $\gamma_0(u)$.

On peut de façon analogue définir γ_1 , **application trace** qui permet de prolonger la définition usuelle de la dérivée normale sur $\partial\Omega$. Pour $u \in H^2(\Omega)$, on a $\partial_i u \in H^1(\Omega), \forall i = 1, \dots, n$, et on peut donc définir $\gamma_0(\partial_i u)$. La frontière $\partial\Omega$ étant "assez régulière" (par exemple, idéalement,

On peut de façon analogue définir γ_1 , application trace qui permet de prolonger la définition usuelle de la dérivée normale sur $\partial\Omega$. Pour $u \in H^2(\Omega)$, on a $\partial_i u \in H^1(\Omega), \forall i = 1, \dots, n$, et on peut donc définir $\gamma_0(\partial_i u)$. La frontière $\partial\Omega$ étant "assez régulière" (par exemple, idéalement,

de classe \mathcal{C}^1 , on peut définir la normale $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_n \end{pmatrix}$ en tout point de $\partial\Omega$. On pose alors

$\gamma_1(u) = \sum_{i=1}^n \gamma_0(\partial_i u) n_i$. Cette application continue γ_1 de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ permet donc bien de prolonger la définition usuelle de la dérivée normale. Dans le cas où u est une fonction de $H^2(\Omega)$ qui soit en même temps dans $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, la dérivée normale au sens usuel de u existe, et $\gamma_1(u)$ lui est évidemment égal. C'est pourquoi on note souvent, par abus, $\partial_n u$ plutôt que $\gamma_1(u)$.

Formulation variationnelle

Actuellement, le principe des travaux virtuels est bien connu et très répandu. Il est souvent formulé en termes d'égalité des travaux effectués par les forces extérieures et intérieures lors d'un déplacement virtuel quelconque. Ce concept est essentiel pour la résolution des équations aux dérivées partielles. En effet, les déplacements sont remplacés par une fonction arbitraire continue sur le domaine et l'équation est réécrite sous forme intégrale

2.0.1 Forme faible

Pour satisfaire les conditions aux limites nous avons deux manières de procéder ; soit par le choix de la fonction de pondération, soit vérifier que :

$$\int_{\Gamma} wB(u)d\Pi = 0, \quad (2.0)$$

Dans la pratique, il est possible d'intégrer (2.0) par partie et de la remplacer par :

$$\int_{\Omega} C(w)D(u)d\Omega + \int_T E(w)F(u)dT = 0,$$

Les opérateurs C, D, E et F contiennent des dérivées d'ordre moins élevé, d'où un choix de fonctions d'approximation de u plus large.

Cette équation est la formulation faible de équation différentielle, elle forme la base de l'approximation par éléments finies.

Remarque : Pour obtenir de telle formulation intégrales, nous disposons de deux procédés le premier est la méthode des résidus pondérés comme sous le nom de la méthode de Galerkin, le deuxième est la détermination de fonctionnelles variationnelles que l'on cherche à rendre stationnaire.

Dans la pratique, il n'est pas toujours facile de trouver une fonctionnelle. Le premier procédé est plus utilisé, il consiste à choisir $w = \delta u$ fonction de Dirac (une perturbation de la fonction

cherchée) et d'utiliser l'approximation nodale pour la discrétisation. w s'appelle aussi fonction poids d'où le mot : "pondéré".

Exemple 2.0.1 *Pour obtenir la forme variationnelle faible de l'exemple précédent on intègre par partie le premier terme.*

$$-\int_0^1 \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} dx + \left[w \frac{du}{dx} \right]_0^1 = \int_0^1 w(x-1) dx,$$

On voit maintenant que les conditions aux limites notamment sur les dérivées sont explicitement prises en compte dans l'équation. Les valeurs imposées à la fonction elle même seront traitées lors de la résolution des systèmes discrets.

2.1 Formulations variationnelles des problèmes modèles

2.1.1 Problème de Dirichlet homogène

On appelle problème de Dirichlet une équation de Laplace avec des conditions aux limites de type Dirichlet c'est à dire on spécifie les valeurs de la solution sur la frontière. Pour tout Ω ouvert de \mathbb{R}^n et de frontière $\Gamma := \partial\Omega$ le problème de Dirichlet s'énonce de la façon suivante : étant donné une fonction $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, trouver une fonction u définie dans Ω et solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.1)$$

Supposons qu'il existe une solution $u \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ de (2.1) (une solution assez régulière). Soit $v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, en multipliant la première équation de (2.1) par la fonction test v et en intégrant sur Ω , on obtient :

$$\int_{\Omega} -(\Delta u)v dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

Et en utilisant la formule de Green, on a :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx,$$

comme $v = 0$ sur le bord, on obtient ce que l'on appelle la formulation variationnelle du problème (2.1) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \text{ tel que :} \\ \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \end{cases} \quad (2.2)$$

Réciproquement, si $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution de (2.2), alors puisque $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f \varphi dx,$$

cette égalité s'écrit encore :

$$\sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

et par définition de la dérivation au sens des distributions il vient :

$$-\sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi \right\rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

c'est à dire :

$$-\Delta u = f$$

La formulation variationnelle est donc équivalente pour les solutions régulières, à la formulation classique du problème (2.1) de Dirichlet.

2.1.2 Problème de Dirichlet non homogène

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de frontière $\Gamma := \partial\Omega$, on considère le problème suivant : étant donné une fonction $f \in L^2(\Omega)$, trouver une fonction u définie dans Ω et solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = d & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.3)$$

Pour se ramener au problème de Dirichlet homogène, on va construire un relèvement, c'est-à-dire une fonction $u_0 \in H^1(\Omega)$ telle que $\gamma_0(u_0) = d$ où γ_0 est l'application trace.

Si $d \in \text{Im}(\gamma_0) = \gamma_0(H^1(\Omega))$ qui est un sous-espace de $L^2(\Gamma)$, on sait qu'il existe $u_0 \in H^1(\Omega)$ telle que $d = \gamma_0(u_0)$. On cherche donc u sous la forme $u = \tilde{u} + u_0$ avec $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ et $u_0 \in H^1(\Omega)$ telles que $\gamma_0(u_0) = d$. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, on multiplie la première équation de (2.3) par v et on intègre sur Ω on obtient :

$$\int_{\Omega} -(\Delta u)v dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

Comme $u = \tilde{u} + u_0$, on trouve :

$$-\int_{\Omega} \Delta \tilde{u} \cdot v dx - \int_{\Omega} \Delta u_0 \cdot v dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

D'où par la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} v d\sigma + \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_0}{\partial n} v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx,$$

Et puisque $\tilde{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, alors $\tilde{u} = 0$ sur Γ , et on se ramène donc au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla v dx \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (2.4)$$

C'est la **formulation variationnelle** du problème (2.3) de Dirichlet non homogène.

2.1.3 Problème de Neumann

Toujours avec les mêmes hypothèses sur Ω , on cherche maintenant une fonction u telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (2.5)$$

Supposons qu'il existe une solution $u \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ de (2.5) (u suffisamment régulière) Soit $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, en multipliant la première équation de (2.5) par la fonction test v et en intégrant sur Ω , on obtient :

$$\int_{\Omega} -(\Delta u)v dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

et en utilisant la formule de Green, on a :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

comme $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur le bord Γ , on obtient ce que l'on appelle la **formulation variationnelle** du problème (2.5) de Neumann :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \text{ tel que :} \\ \forall v \in \mathbf{H}^1(\Omega) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} f v dx, \end{cases} \quad (2.6)$$

Réciproquement, si $u \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ est solution du problème (2.6), alors en particulier on a en prenant $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans (2.6), et on utilisant la formule de Green :

$$\int_{\Omega} -(\Delta u)v dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

On a donc $-\Delta u + u = f$, au sens des distributions et comme f et u sont dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, cette égalité a lieu dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Reprenons maintenant pour une fonction test v dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ et intégrons par parties l'équation du problème (2.6), on obtient :

$$\int_{\Omega} -(\Delta u)v dx + \int_{\Omega} uv dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx,$$

D'après l'égalité obtenue précédemment, $\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v = 0$ pour tout $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, on retrouve alors la formulation variationnelle.

2.2 Théorème de Lax-Milgram

Cette section est consacrée au théorème de Lax-Milgram qui sera l'outil essentiel permettant de démontrer des résultats d'existence et d'unicité de solutions de la formulation variationnelle dans un espace de Hilbert.

On note V un espace de Hilbert réel de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme $\|\cdot\|$. Nous considérons une formulation variationnelle du type :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V, \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (2.7)$$

On se donne :

1. $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur V , c'est-à-dire que $v \rightarrow L(v)$ est linéaire de V dans \mathbb{R} , et il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|L(v)| \leq C\|v\|, \quad \forall v \in V.$$

2. $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire sur V , c'est-à-dire que $u \rightarrow a(u, v)$ est une forme linéaire de V dans \mathbb{R} pour tout $v \in V$, et $v \rightarrow a(u, v)$ est une forme linéaire de V dans \mathbb{R} pour tout $u \in V$.

3. $a(\cdot, \cdot)$ est continue sur $V \times V$, c'est-à-dire, qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V \quad \forall u, v \in V.$$

4. $a(\cdot, \cdot)$ est V -elliptique (coercive), c'est-à-dire, qu'il existe une constante strictement positive α telle que :

$$|a(v, v)| \geq \alpha\|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Théorème 2.1 *Soit V un espace de Hilbert, et soit L une forme linéaire continue sur V , et soit $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue sur $V \times V$. Si $a(\cdot, \cdot)$ est V -elliptique (coercive), alors il existe une unique solution u du problème variationnel (2.7).*

preuve 2.1 *On considère l'application suivante :*

$$v \mapsto a(u, v),$$

elle est linéaire continue donc d'après le théorème de Riesz on a :

$$\exists A : V \rightarrow V \text{ tel que } a(u, v) = \langle Au, v \rangle,$$

d'autre part, on considère l'application :

$$v \mapsto L(v),$$

elle est aussi linéaire et continue, donc d'après le théorème de Riesz, on a :

$$\exists \tau : V' \longrightarrow V \text{ tel que } L(v) = \langle \tau L, v \rangle,$$

Alors :

$$\langle Au, v \rangle = \langle \tau L, v \rangle, \quad \forall v \in V,$$

d'où :

$$Au = \tau L,$$

Montrons maintenant l'existence et l'unicité de la solution u . On considère l'application suivante :

$$T : v \longmapsto T(v) = v - \rho(Av - \tau L) \text{ avec } \rho > 0,$$

Montrons que T est contractante.

Soit $v_1, v_2 \in V$, on a :

$$\begin{aligned} \|T(v_1) - T(v_2)\|^2 &= \|v_1 - v_2 - \rho(Av_1 - \tau L + \rho(Av_2 - \tau L))\|^2, \\ &= \|v_1 - v_2 - \rho A(v_1 - v_2)\|^2 \end{aligned}$$

On pose, $v = v_1 - v_2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|T(v)\|^2 &= \|v - \rho Av\|^2 \\ &= \|v\|^2 - 2\rho \langle v, Av \rangle + \rho^2 \|Av\|^2, \end{aligned}$$

On sait que $a(\cdot, \cdot)$ est V -elliptique, alors :

$$\langle v, Av \rangle = a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2,$$

$$\implies -2\rho \langle v, Av \rangle \leq -2\rho \alpha \|v\|^2$$

Puisque $a(\cdot, \cdot)$ est continue, il existe donc une constante $M > 0$ telle que :

$$\|Av\|^2 = a(v, v) \leq M \|v\|^2,$$

D'où :

$$\begin{aligned} \|T(v)\|^2 &\leq \|v\|^2 - 2\rho \langle v, Av \rangle + \rho^2 M \|v\|^2, \\ &\leq \|v\|^2 - 2\rho \alpha \|v\|^2 + \rho^2 M \|v\|^2, \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|T(v)\|^2 \leq (1 - 2\rho \alpha + \rho^2 M) \|v\|^2$$

T est une contraction si :

$$1 - 2\rho \alpha + \rho^2 M < 1,$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \rho(\rho M - 2\alpha) &< 0, \\ \Rightarrow \rho M - 2\alpha &< 0, \\ \Rightarrow \rho &< \frac{2\alpha}{M} \end{aligned}$$

Donc T est une contraction si $\rho \in]0, \frac{2\alpha}{M}[$.

D'après le théorème de point fixe, il existe une unique solution u dans V qui vérifie :

$$T(u) = u,$$

Or

$$T(u) = u - \rho(Au - \tau L),$$

C'est-à-dire :

$$u = u - \rho(Au - \tau L),$$

D'où il existe une unique solution u telle que :

$$Au = \tau L,$$

Théorème 2.2 *Sous les mêmes hypothèses du théorème (2.1) et si de plus la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique, c'est-à-dire :*

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V,$$

nous avons :

Le problème variationnel (2.7) est équivalent au Problème de minimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver une fonction } u \in V \text{ telle que :} \\ J(u) = \min_{v \in V} J(v) = \min_{v \in V} \left(\frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \right) \end{array} \right. \quad (2.8)$$

preuve 2.2 *En premier lieu, on démontre que si u est l'unique solution du problème variationnel (2.7), alors u minimise forcément la fonctionnelle J sur tout espace V , soit donc $w \in V$ quelconque. On va montrer que $J(u + w) \geq J(u)$. On a :*

$$J(u + w) = \frac{1}{2}a(u + w, u + w) - L(u + w).$$

Puisque $a(\dots)$ est bilinéaire, et $L(\cdot)$ est linéaire, nous avons :

$$J(u + w) = \frac{1}{2}[a(u, u) + a(u, w) + a(w, u) + a(w, w)] - L(u) - l(w).$$

et la symétrie de $a(.,.)$ nous donne :

$$J(u + w) = \left(\frac{1}{2}a(u, u) - L(u) \right) + (a(u, w) - L(w)) + \frac{1}{2}a(w, w).$$

Dans le terme de droite, on reconnaît dans la première parenthèse $J(u)$, tandis que l'expression à l'intérieur de la deuxième parenthèse est nulle puisque u est solution du problème variationnel (2.7). Et puisque $a(\cdot, \cdot)$ est V -elliptique alors le dernier terme est toujours positif. On a donc :

$$J(u + w) = J(u) + \frac{1}{2}a(w, w) \geq J(u).$$

Donc $J(u)$ est certainement inférieure ou égale à $J(u + w)$. Puisque ce raisonnement est valide quel que soit $w \in V$, u minimise bien la fonctionnelle J sur l'espace V .

Inversement, si u minimise J , on démontre que u est aussi une solution du problème variationnel (2.7) Considérons pour ce faire, la fonction de la variable réelle t définie par :

$$\begin{aligned} g(t) &= J(u + tv), \\ &= \frac{1}{2}a(u + tv, u + tv) - L(u + tv). \end{aligned}$$

En développant, on trouve :

$$g(t) = J(u) + t(a(u, v) - L(v)) + \frac{1}{2}t^2a(v, v).$$

On pose :

$$P(t) = t(a(u, v) - L(v)) + \frac{1}{2}t^2a(v, v).$$

C'est un polynôme de degré 2 en t .

Alors :

$$g(t) = J(u) + P(t).$$

Or :

$$J(u) \leq J(u + tv) = g(t).$$

Donc :

$$P(t) \geq 0.$$

et ceci n'est vrai, que si le discriminant D de $P(t)$ est inférieur ou égal à 0. C'est-à-dire :

$$D = (a(u, v) - L(v))^2 \leq 0.$$

Ceci implique que :

$$D = 0.$$

Ainsi :

$$a(u, v) = L(v).$$

D'où u est solution de (2.7).

2.2.1 Application aux problèmes modèles

- Problème de Dirichlet

On rappelle qu'il s'agit de trouver $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tel que :

$$\forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

On applique donc le théorème (2.3.1) ci-dessus avec :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \text{ et } L(v) = \int_{\Omega} f v dx$$

Ceci sur l'espace $V = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ muni de la norme :

$$\|v\|_V = |v|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

- La forme bilinéaire $a(.,.)$ est continue sur $\mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, en effet, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \right|, \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| dx, \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}, \\ &= \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \\ &= \|u\|_V \|v\|_V, \end{aligned}$$

D'où :

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_V \|v\|_V.$$

- D'autre part, $a(.,.)$ est V -elliptique, en effet :

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \\ &= \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\ &= \|v\|_V^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$a(v, v) = \|v\|_V^2$$

Et enfin, $L(\cdot)$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$, en effet à l'aide des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré, on a :

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx \right|, \\ |L(v)| &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2}, \\ &= \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)}, \\ &\leq C(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

On pose :

$$M = C(\Omega) \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

D'où :

$$|L(v)| \leq M \|v\|_V.$$

Le théorème (2.1) de Lax-Milgram nous assure donc l'existence et l'unicité de la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème (2.1) de Dirichlet.

De plus, puisque la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, le théorème (2.8), nous assure que cette fonction u minimise la fonctionnelle quadratique suivante :

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx - \int_{\Omega} f v dx, \quad \text{sur l'espace } \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

• Problème de Neumann

Rappelons qu'il s'agit de trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$\forall v \in \mathbf{H}^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

On applique donc le théorème (2.1) de Lax-Milgram, avec :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx, \quad \text{et } L(v) = \int_{\Omega} f v dx,$$

Ceci sur l'espace $V = H^1(\Omega)$ muni de la norme : $\|v\|_V = \|v\|_{H^1(\Omega)}$. - La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, en effet à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

D'où

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_V \|v\|_V.$$

D'autre part $a(\cdot, \cdot)$ est V -elliptique. En effet,

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx + \int_{\Omega} (v)^2 dx, \\ &= \|v\|_V^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$a(v, v) \geq \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2.$$

Enfin $L(\cdot)$ est continue sur $\mathbf{H}^1(\Omega)$, en effet à l'aide de l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2}, \\ &= \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \\ &\leq C(\Omega) \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \cdot \|v\|_V \end{aligned}$$

En posant :

$$M = C(\Omega) \|f\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

. On obtient :

$$|L(v)| \leq M \|v\|_V.$$

Le théorème (2.1) de Lax-Milgram nous assure donc l'existence et l'unicité de la solution $u \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ du problème (2.7) de Neumann. De plus, puisque la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors d'après le théorème (2.2), la solution u minimise la fonctionnelle quadratique :

$$J(v) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx + \int_{\Omega} v^2 dx \right) - \int_{\Omega} f v dx \quad \text{sur l'espace } \mathbf{H}^1(\Omega).$$

méthodes des élément finies

Dans ce chapitre nous présentons la méthode des éléments finis qui est la méthode numérique de référence pour le calcul des solutions de problèmes aux limites elliptiques. Le principe de cette méthode est directement issu de l'approche variationnelle que nous avons vu dans le chapitre précédent. L'idée de base est de remplacer l'espace de Hilbert V , sur lequel est posée la formulation variationnelle, par un sous-espace V_h de dimension finie. Le problème approché posé sur V_h se ramène à la simple résolution d'un système linéaire, dont la matrice est appelée matrice de rigidité. Par ailleurs, on peut choisir le mode de construction de V_h de manière à ce que le sous-espace V_h soit une bonne approximation de V , et que la solution u_h dans V_h de la formulation variationnelle, soit proche de la solution exacte u dans V .

3.1 Historique de la méthode

La méthode des éléments finis est le fruit de deux domaines de recherche : Les mathématiques et les sciences de l'ingénieur.

Mathématique : Outils qui remontent jusqu'aux résidus pondérés de Gauss (1775), Galerkin (1915) et Biezenokoch (1923), ainsi qu'aux méthodes variationnelles de Rayleigh (1870) et Ritz (1909). Sciences de l'ingénieur : Dont la contribution a débuté dans les années quarante avec Hrenikoff (1941), Henry (1943) et Newmark (1949) qui touchèrent pour la première fois aux structures continues, en faisant une approximation sur des portions de petites dimensions dans un problème continu d'une barre longue. D'où l'idée de base des éléments finis.

Argyris (1955), Turner (1956), Glough (1956) et Martin (1956) ont fait une analogie directe en adoptant un comportement simplifié pour des petites portions : ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires, sur lesquels les déplacements sont supposés variés linéairement comme pour chaque barre ou poutre du

système discret : chaque panneau est décrit par une matrice de rigidité et l'assemblage donnait la rigidité globale du milieu continu. D'où la naissance d'éléments finis avec "panneaux" comme nom.

Argyris et Kelsey (1960) utilisent la notion d'énergie dans l'analyse des structures et font appel à des méthodes mathématiques (résidus pondérés, principes variationnels ...). Le terme " élément fini " est utilisé pour la première fois par Glough (1960), et dès lors, il y a un développement rapide de la méthode.

Dans les années soixante ; Zienkiwicz (1965), De Arante (1968), Oliviera (1968), Green (1969), Tones (1969), Lay (1969), Storne (1969), et Finlayson (1975) ont reformulé la méthode à partir de considérations énergétiques et variationnelles sous forme générale de résidus pondérés, d'où le modèle mathématique de la MEF.

En 1969 la MEF est reconnue comme un outil général de résolution d'EDP, et utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires et non stationnaires dans plusieurs domaines. En mécanique des fluides, la résolution des équations de Navier Stokes incompressibles par éléments finis en utilisant la formulation vitesse – pression a commencé dans les années 1970.

3.2 Discrétisation du domaine

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation par sous domaines, donc avant toute application il faut diviser le domaine à étudier en éléments. Chaque élément est défini géométriquement par un nombre de noeuds bien déterminé qui constituent en général ses sommets.

La discrétisation géométrique doit respecter les règles suivantes :

1) Un noeud d'un élément ne doit pas être intérieur à un côté d'un autre du même type.

2) Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés dans leurs frontières communes ; le recouvrement est exclu.

3) L'ensemble de tous éléments doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné ; les trous entre éléments sont exclus.

Le résultat du procédé de discrétisation doit contenir deux données essentielles qui sont les coordonnées des noeuds et les connectivités des éléments. On doit numéroter tous les noeuds et les éléments de façon à avoir des matrices globales à petite largeur de bande, pour cela, la

numérotation se fait selon la plus petite largeur du domaine.

3.3 Approximation interne générale

Nous considérons à nouveau le cadre général de la formulation variationnelle introduit dans le Chapitre 2. Étant donné un espace de Hilbert V , une forme bilinéaire continue et coercive $a(u, v)$, et une forme linéaire continue $L(v)$, on considère la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u, v) = L(v), \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (3.1)$$

dont on sait qu'elle admet une unique solution par le Théorème(2.1). L'approximation interne de (3.1) consiste à remplacer l'espace de Hilbert V par un sous-espace de dimension finie V_h , c'est-à-dire à chercher la solution de :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ a(u_h, v_h) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (3.2)$$

La résolution de l'approximation interne (3.2) est facile comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3.1 *Soit V un espace de Hilbert réel, et V_h un sous-espace de dimension finie. Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur V , et $L(v)$ une forme linéaire continue sur V . Alors l'approximation interne (3.2) admet une unique solution. Par ailleurs cette solution peut s'obtenir en résolvant un système linéaire de matrice définie positive et symétrique si $a(u, v)$ est symétrique.*

preuve 3.1 *L'existence et l'unicité de $u_h \in V_h$, solution de (3.2), découle du théorème (2.1) de Lax-Milgram appliqué à V_h . Pour mettre le problème sous une forme plus simple, on introduit une base $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N_h}$ de V_h . Si $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j$, on pose $U = (u_1, \dots, u_{N_h})$ le vecteur dans \mathbb{R}^{N_h} des coordonnées de u_h . Le problème (3.2) est équivalent à :*

$$\text{Trouver } U \in \mathbb{R}^{N_h} \text{ tel que } a \left(\sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j, \varphi_i \right) = L(\varphi_i) \quad \forall i = 1, \dots, N_h$$

. Ce qui s'écrit sous la forme d'un système linéaire :

$$AU = b, \quad (3.3)$$

avec, pour $1 \leq i, j \leq N_h$, $(A)_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$, et $(b)_i = L(\varphi_i)$.

Dans les applications mécaniques la matrice A est appelée **matrice de rigidité**. La proposition

suivante permet de montrer que la matrice A est inversible.

Proposition 3.1 *La matrice A est définie positive c'est-à-dire qu'elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall U \in \mathbb{R}^{N_h} - \{0\} \quad \langle AU, U \rangle > 0.$$

Avant de donner la démonstration de cette proposition, expliquons pourquoi elle implique l'inversibilité de la matrice A . En effet, si A n'est pas inversible, alors il existe un vecteur $U \neq 0$ dans \mathbb{R}^{N_h} tel que $AU = 0$. Ceci implique en particulier que $\langle AU, U \rangle = 0$ avec $U \neq 0$, ce qui contredit le fait que A est définie positive.

preuve 3.2 *Soit $U = (u_1, \dots, u_{N_h}) \neq 0$ dans \mathbb{R}^{N_h} . Le vecteur AU a pour coordonnées*

$$\left(\sum_{j=1}^{N_h} A_{1j} u_j, \dots, \sum_{j=1}^{N_h} A_{N_h j} u_j \right) = \left(\sum_{j=1}^{N_h} u_j a(\varphi_j, \varphi_1), \dots, \sum_{j=1}^{N_h} u_j a(\varphi_j, \varphi_{N_h}) \right),$$

On a donc

$$\langle AU, U \rangle = \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} u_i u_j a(\varphi_j, \varphi_i) = a \left(\sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j, \sum_{i=1}^{N_h} u_i \varphi_i \right) = a(u_h, u_h) = \int_0^1 |u'_h|^2 dx,$$

où $u_h(x)$ est une fonction de V_h définie par $u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j(x)$.

Comme les (u_1, \dots, u_{N_h}) sont tous non nuls, on vérifie aisément que u_h est non nulle, ce qui implique que $\int_0^1 |u'_h|^2 > 0$.

Nous allons maintenant comparer l'erreur commise en remplaçant l'espace V par son sous-espace V_h . Plus précisément, nous allons majorer la différence

$\|u - u_h\|$ où u est la solution dans V de (3.1) et u_h elle dans V_h de (3.2) Le lemme suivant, dû à JeanCa, montre que la distance entre la solution exacte u et la solution approchée u_h est majorée uniformément par rapport au sous-espace V_h par la distance entre u et V_h .

Lemme 3.1 (lemme de C ea)

Soit u une solution du problème (3.1) et un une solution du problème (3.2). Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de h tel que :

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

preuve 3.3 Soit $v_h \in V_h$ quelconque, et $w_h = v_h - u_h \in V_h \subset V$. Comme w_h est dans V et v_h c'est une fonction test valide dans (3.1) et (3.2) On a donc :

$$a(u_h, w_h) = L(w_h),$$

Et

$$a(u, w_h) = L(w_h),$$

D'où :

$$a(u - u_h, w_h) = 0,$$

Par coercitive et continuité de $a(., .)$, on a :

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h), \\ &= a(u - u_h, u - v_h + w_h), \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, w_h), \\ &\leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\| \end{aligned}$$

Donc

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|.$$

et ceci pour tout v_h , d'où le résultat, avec $C = \frac{M}{\alpha}$.

3.4 La méthode de Galerkin

La méthode des éléments finis est une méthode de Galerkin particulière mais avec des propriétés spécifiques qui la rendent spécialement attractive dans la résolution des problèmes aux limites. Nous allons la présenter ici comme un cadre général abstrait permettant l'étude de la convergence de l'approximation par éléments finis

3.4.1 Principe de base d'une méthode de Galerkin

Reprenons le problème abstrait (1.1). Le but est de ramener sa résolution à celle d'un problème discret, équivalente à la recherche d'un nombre fini de paramètres réels. Le principe d'une méthode de Galerkin est d'approcher les éléments de l'espace X par ceux d'un sous-espace X^h de **dimension finie**. C'est donc, à la base, la construction d'un processus d'approximation des éléments d'un espace de Hilbert X . L'exposant h est un paramètre réel > 0 caractérisant la discrétisation et tendant vers 0 au fur et à mesure que la discrétisation devient de plus en plus fine. Cette convention est utile pour les méthodes

d'éléments finis où ce paramètre a un sens géométrique précis. La propriété d'approximation est décrite par la condition suivante dit **d'approximation interne**

$$\forall v \in X, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v^h \in X^h} \|v - v^h\|_X = 0,$$

La quantité $\inf_{v^h \in X^h} \|v - v^h\|_X$ est la distance de v à X^h . Comme X^h est un espace de dimension finie, dès que X est un espace normé (même s'il n'est pas complet), cette distance est caractérisée de la façon suivante. – Il existe $z^h \in X^h$ tel que

$$\|v - z^h\|_X = \inf_{v^h \in X^h} \|v - v^h\|_X.$$

et z^h est appelé la meilleure approximation de v par les éléments de X^h - La propriété d'approximation interne peut ainsi être décrite de façon équivalente :

$$\forall v \in X, \quad \exists \{w^h\}_{h>0} : \begin{cases} w^h \in X^h, & \forall h > 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} w^h = v \text{ dans } X \end{cases}$$

– Si X est un espace préhilbertien, i.e. si sa norme est associée à un produit scalaire, la meilleure approximation est unique : c'est la projection de v sur X^h . Elle est caractérisée par les équations dites normales

$$\begin{cases} z^h \in X^h, & \forall v^h \in X^h \\ (z^h, v^h)_X = (v, v^h)_X \end{cases}$$

Le problème variationnel fait intervenir aussi le sous-espace vectoriel V de X . Une façon simple, mais qui ne fonctionne pas toujours, est d'introduire le sous-espace de X^h

$$V^h := X^h \cap V,$$

Pour $v \in V$, on a cependant seulement

$$\inf_{v^h \in X^h} \|v - v^h\|_X \leq \inf_{v^h \in V^h} \|v - v^h\|_X.$$

puisqu'on prend la borne inférieure sur un espace plus restreint. On est amené à faire l'hypothèse supplémentaire que la famille $\{V^h\}_{h>0}$ constitue une approximation interne de V

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v^h \in V^h} \|v - v^h\|_X.$$

3.5 La méthode des éléments finis

3.5.1 La méthode des éléments finis en dimension un

Nous choisissons le domaine $\Omega =]0, 1[$. En dimension 1 un maillage est simplement constitué d'une collection de points $(x_j)_{0 \leq j \leq N+1}$ tels que

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N \leq x_{N+1} = 1.$$

Le maillage sera dit uniforme si les points x_j sont équidistants, c'est-à-dire que :

$$x_j = jh, \quad \text{avec} \quad h = \frac{1}{N+1}, \quad 0 \leq j \leq N+1.$$

Les points x_j sont aussi appelés les sommets (ou nœuds) du maillage.

Nous considérons le problème modèle suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{dans }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

dont nous savons qu'il admet une solution unique dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ si $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.

Dans ce qui suit on notera \mathbb{P}_k l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable réelle de degré inférieur ou égal à k :

$$\mathbb{P}_k = \left\{ p(x) = \sum_{j=0}^k a_j x^j, a_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarque 3.1 Généralement, le sous-espace V_h de V est noté

$$V_h^k = \left\{ v_h \in C^0(\Omega) \text{ tel que } v_{h|_K} \in \mathbb{P}_k(K) \right\},$$

Sa dimension est égale à :

$$\dim V_h^k = (k+1)(N+1) - N.$$

3.5.2 Élément fini P1

Pour $k = 1$ et en notant $V_h^1 = V_h$ on a :

$$V_h = \left\{ v \in C^0([0, 1]), v_{||x_j, x_{j+1}} \in \mathbb{P}_1, 0 \leq j \leq n, v(0) = v(1) = 0 \right\}, \quad (3.5).$$

La méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 est alors simplement une méthode d'approximation variationnelle interne appliquée à l'espaces V_h définis par (3.5).

On peut représenter les fonctions de V_h , affines par morceaux, à l'aide d'une fonctions de base très simple. Introduisons la "fonction chapeau" φ_j définie par :

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Lemme 3.2 *L'espace V_h , défini par (3.5), est un sous-espace de $H^1(]0, 1[)$ de dimension $n+2$, et toute fonction $v_h \in V_h$ est définie de manière unique par ses valeurs aux sommets $(x_j)_{0 \leq j \leq N+1}$:*

$$v_h(x) = \sum_{j=0}^{N+1} v_h(x_j) \varphi_j(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

preuve 3.4 *Les fonctions continues et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux appartiennent $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Donc V_h est bien un sous-espaces de $H^1(]0, 1[)$. Le reste de la preuve est immédiat en remarquant que $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.*

Corollaire 3.1 *Les $\{\varphi_j\}_{0 \leq j \leq N+1}$ constituent une base de V_h .*

preuve 3.5 *Puisque la famille $\{\varphi_j\}_{0 \leq i \leq N+1}$ est de dimension finie, et sa dimension est égale à la dimension de V_h , on montre seulement que cette famille est libre. Soient donc α_j des scalaires dans \mathbb{R} , avec $j \in \{0, \dots, N+1\}$ On suppose que :*

$$\sum_{j=0}^{N+1} \alpha_j \varphi_j(x_i) = 0 \quad \text{avec } i \in \{0, \dots, N+1\}.$$

Pour $i = 0$, on a :

$$\alpha_0 \varphi_0(x_0) + \alpha_1 \varphi_1(x_0) + \dots + \alpha_{N+1} \varphi_{N+1}(x_0) = 0 \implies \alpha_0 \varphi_0(x_0) = 0,$$

d'où :

$$\alpha_0 = 0.$$

Pour $i = 1$, on a :

$$\alpha_0 \varphi_0(x_1) + \alpha_1 \varphi_1(x_1) + \dots + \alpha_{N+1} \varphi_{N+1}(x_1) = 0 \implies \alpha_1 \varphi_1(x_1) = 0,$$

d'où :

$$\alpha_1 = 0.$$

Pour $i = N+1$, on a :

$$\alpha_0 \varphi_0(x_{N+1}) + \alpha_1 \varphi_1(x_{N+1}) + \dots + \alpha_{N+1} \varphi_{N+1}(x_{N+1}) = 0 \implies \alpha_{N+1} \varphi_{N+1}(x_{N+1}) = 0,$$

d'où :

$$\alpha_{N+1} = 0.$$

Donc : $\forall j \in \{0, \dots, N+1\}, \alpha_j = 0$ Ainsi, $\{\varphi_j\}_{0 \leq i \leq N+1}$ est une famille libre.

3.5.3 résolution du problème de Dirichlet

Décrivons la résolution pratique du problème de Dirichlet (3.4) par la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 . La formulation variationnelle (3.2) de l'approximation interne devient ici :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que :} \\ \int_0^1 u'_h(x)v'_h(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (3.6)$$

On décompose u_h sur la base des $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n}$ et on prend $v_h = \varphi_i$, ce qui donne :

$$\sum_{j=1}^N u_h(x_j) \int_0^1 \varphi'_j(x)\varphi'_i(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx,$$

En notant $U = (u_h(x_j))_{1 \leq j \leq N}$, $b = \left(\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)dx \right)_{1 \leq i, j \leq n}$, et en introduisant la matrice de rigidité :

$$A = \left(\int_0^1 \varphi'_j(x)\varphi'_i(x)dx \right)_{1 \leq i, j \leq N},$$

la formulation variationnelle dans V_h revient à résoudre dans \mathbb{R}^n le système linéaire suivant :

$$AU = b.$$

Comme les fonctions de base φ_j ont un "petit" support, l'intersection des supports de φ_j et φ_i est souvent vide et la plupart des coefficients de A sont nuls. Les coefficients non nuls se calculent facilement :

$$\begin{aligned} A_{i,i-1} &= a(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = \int_0^1 \varphi'_i(x)\varphi'_{i-1}(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(-1)}{h} \frac{1}{h} dx = -\frac{1}{h}, \\ A_{i,i} &= a(\varphi_i, \varphi_i) = \int_0^1 (\varphi'_i(x))^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(-h)^2} dx = \frac{2}{h}, \\ A_{i,i+1} &= a(\varphi_{i+1}, \varphi_i) = \int_0^1 \varphi'_{i+1}(x)\varphi'_i(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h} \frac{(-1)}{h} dx = -\frac{1}{h}, \end{aligned}$$

D'où :

$$A_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{h} & \text{si } j = i - 1 \text{ ou } j = i + 1, \\ \frac{2}{h} & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq \{i - 1, i, i + 1\}, \end{cases} \quad (3.7)$$

Finalement, la matrice de rigidité est une matrice tridiagonale :

$$A = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Remarque 3.2 Si le problème modèle est sous la forme : $-u'' + u = f$, on a au plus de la matrice de rigidité (3.8), la matrice de masse qui s'écrit de la forme suivante :

$$M = \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Pour obtenir le second membre b , il faut calculer l'intégrale :

$$b = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq N,$$

L'évaluation exacte du second membre b peut être difficile ou impossible si la fonction f est compliquée. En pratique on a recours à des formules de quadrature (ou formules d'intégration numérique) qui donnent une approximation des intégrales définissant b . Par exemple, on peut utiliser la formule du point milieu :

$$\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x)dx \approx \psi\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right),$$

ou la formule des trapèzes :

$$\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x)dx \approx \frac{1}{2} (\psi(x_{i+1}) + \psi(x_i)),$$

ou bien encore la formule de Simpson :

$$\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x)dx \approx \frac{1}{6}\psi(x_{i+1}) + \frac{4}{6}\psi\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) + \frac{1}{6}\psi(x_i),$$

On utilise la formule du trapèze, et on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)dx &= \frac{x_i - x_{i-1}}{2} (f(x_i)\varphi_i(x_i) + f(x_{i-1})\varphi_{i-1}(x_{i-1})), \\ &= \frac{h}{2} f(x_i), \end{aligned}$$

et de la même manière on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)dx &= \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2} (f(x_{i+1})\varphi_i(x_{i+1}) + f(x_i)\varphi_j(x_j)), \\ &= \frac{h}{2} f(x_i), \end{aligned}$$

D'ou

$$b = h \times f(x_i),$$

Ainsi, le système à résoudre s'écrit :

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix},$$

On remarque que la matrice A est tridiagonale, symétrique et définie positive, alors le système ci-dessus admet une unique solution.

Applications

Le but de ce chapitre est la mise en œuvre de la méthode des éléments finis en dimension 1 pour les deux problèmes modèles suivants :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x) \text{ sur }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ sur }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Nous allons ensuite pour les deux problèmes, comparer la solution obtenue par approximation, et la solution exacte. Nous utilisons le logiciel de calcul scientifique Matlab pour illustrer la méthode des éléments finis.

4.1 Algorithme

Etape 1 : Discrétisation du domaine selon le degré de liberté fourni par l'utilisateur (Maillage).

Etape 2 : Calcul de la matrice de masse et de rigidité.

Etape 3 : Calcul du second membre.

Etape 4 : Prise en compte des conditions aux limites.

Etape 5 : Résolution du système linéaire.

Etape 6 : Représentation graphique de la solution approchée.

4.2 Code Matlab

——On cherche à résoudre : $-u''(x) + u(x) = f(x)$ sur $[0, 1]$ ——

——La fonction u est donnée, deux fois dérivable et f continue——

——On fait d'abord le grand ménage——

```
clc
close all clear all
dbstop if error ;
```

——On demande à l'utilisateur de saisir le nombre de nœuds désirés ——

```
nddl=input('donner le nombre de degré de liberté nddl : ');
```

——On saisit notre second membre $f(x) = -u''(x) + u(x)$ ——

```
f=@('NOTRE SECOND MEMBRE f');
```

——On saisit notre solution exacte——

```
sln = inline('ON SAISIT LE u');
```

——On discrétise notre intervalle $[0,1]$ ——

```
xx=linspace(0,1, ndd 1)
```

——On définit le pas de chaque maille——

```
for i=1 :nddl-1
h(i)=xx(i+1)-xx(i);
end
h;
```

——On définit les conditions aux limites——

```
x0=0;
xL=1;
ua=0;
ub=0;
```

——On définit notre matrice de rigidité——

```
A=zeros(nddl-2);
for i=1 :nddl-2
for j=1 :nddl-2
if(abs(i-j)>1)
A(i,j)=0;
elseif(abs(i-j)==0)
A(i,j)=(1./h(i)) + (1./h(i+1)) + (1./3)*(h(i)+h(i+1));
else
A(i,j)=(-1./h(i)) + h(i)./6;
end
end
end
```

——On calcule le second membre du problème approché——

```
Bb=[];
for i=1 :nddl-2
Bb=[Bb 0.5*(h(i)+h(i+1))*f(xx(i+1))];
B=[Bb ];
end
```

——On calcule la solution approchée——

```
u=[ua; A \ B'; ub];
```

———On dessine la solution exacte avec un ———
——— graphe de couleur noire et d'épaisseur 3———

```
figure(140);
plot(0 :0.01 :1,sln(0 :0.01 :1),'-K','LineWidth',3);
hold on;
```

——— On dessine la solution approchée en marron ——

```
plot(xx,u,'o-', 'Color',[ 8.7059e-001 4.9020e-001 0],'LineWidth',2);
```

————— On définit la légende et on nomme les axes —————

```

Texte...legend('\ bf sol exacte', '\ bf sol approchée pour n=40');
xlabel('\ fontnameTimes\ fontsize14\ bf x', 'Color', [ 8.7059e-001 4.9020e-001 0]);
ylabel('\ fontnameTimes\ fontsize14\ bf u(x)', 'Color', [ 8.7059e-001 4.9020e-001 0]);
grid;

```

————— On définit les couleurs de l'interface graphique —————

```

set(gcf, 'Color', [ 9.5294e-001 8.7059e-001 7.3333e-001]);
whitebg([ 9.5294e-001 8.7059e-001 7.3333e-001]);

```

4.3 Applications

Dans ce paragraphe, nous traitons les deux problèmes

$-u''(x) + u(x) = f(x)$ et $-u''(x) = f(x)$ sur $[0,1]$ pour chacun des exemples suivants :

Exemple :

$$\begin{cases} u(x) = x(x-1) \text{ sur }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Nous traçons la solution exacte et approchée de l'exemple, et regardons la convergence pour chacune à partir du graphe.

4.3.1 Mise en oeuvre de la méthode des éléments finis en dimension 1 pour $u(x)=x(x-1)$

pour : $n=3$

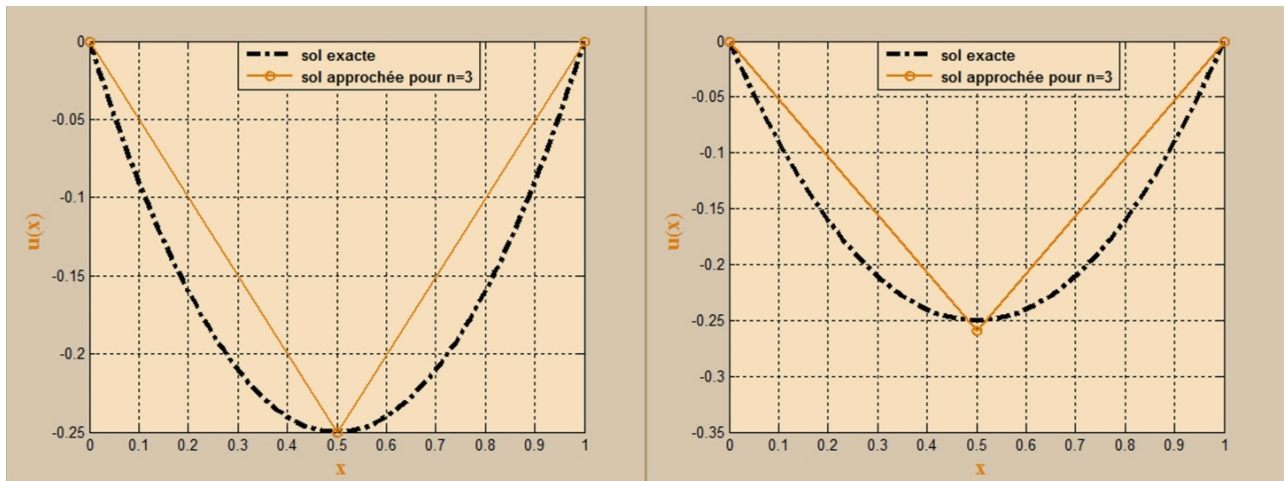


FIGURE 4.1 – Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x)=f(x)$ (à gauche) et $-u''(x)+u(x)=f(x)$ (à droite) pour $n=3$ et $u(x)=x(x-1)$

pour : $n=10$

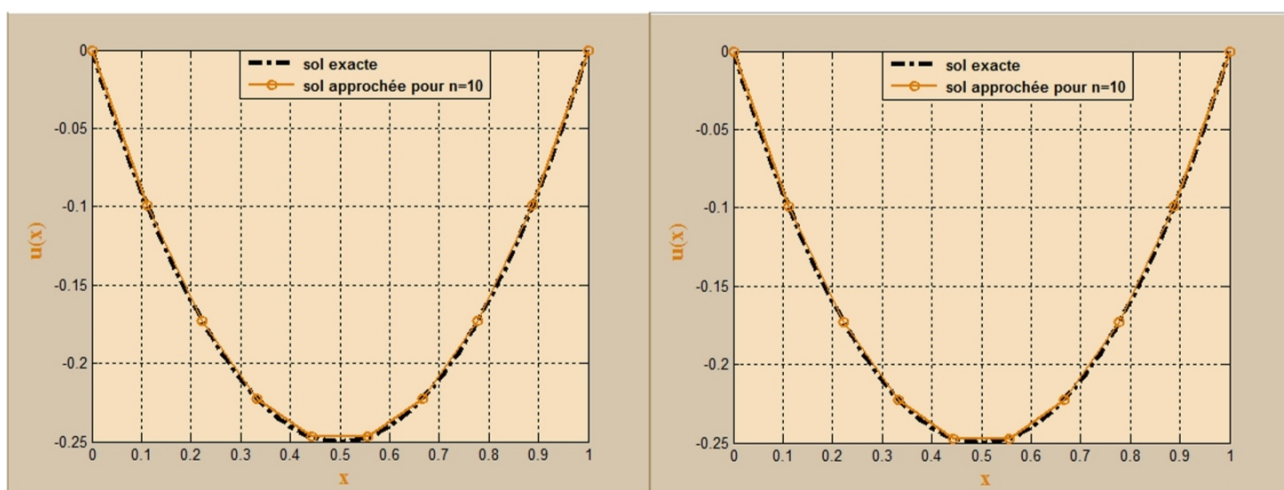


FIGURE 4.2 – Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u'''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u'''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n=10$ et $u(x) = x(x-1)$

pour : $n=100$

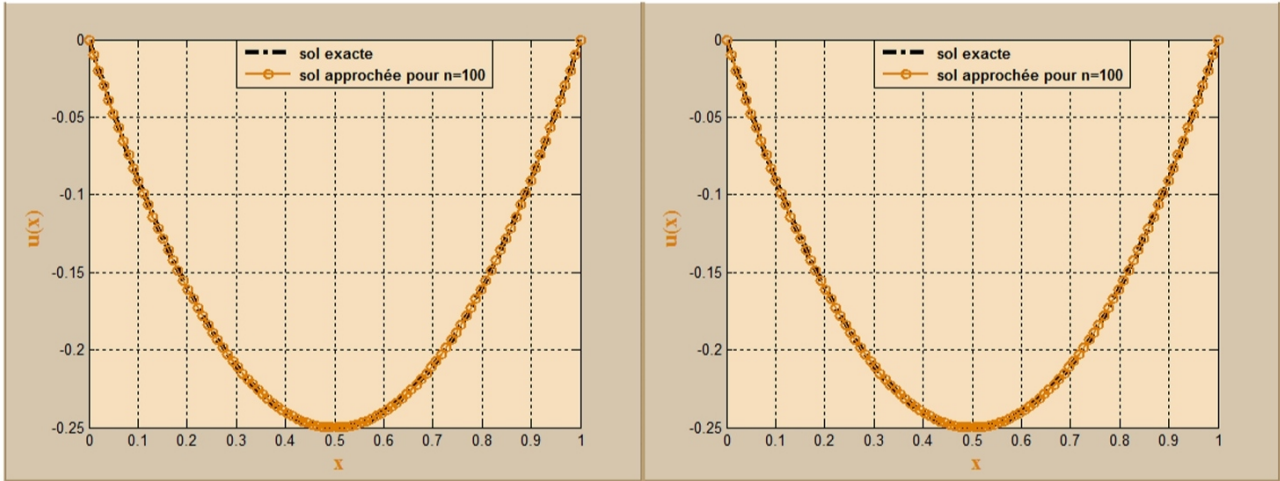


FIGURE 4.3 – Graphe représentant la solution exacte et la solution approchée par la méthode des éléments finis de $-u''(x) = f(x)$ (à gauche) et $-u''(x) + u(x) = f(x)$ (à droite) pour $n=100$ et $u(x) = x(x - 1)$

,

On sait que l'erreur vaut :

$$\|Err\|_{\mathcal{L}^2} = \left(\int_{x_0}^{x_{n+1}} |u(x) - u_h|^2 dx \right)^{1/2},$$

avec

$$u_h = \sum_{i=0}^{n+1} \varphi_i(x) u_i,$$

Donc :

$$\|Err\|_{\mathcal{L}^2} = \left(\int_{x_0}^{x_{n+1}} \left| u(x) - \sum_0^n \varphi_i(x) u_i \right|^2 dx \right)^{1/2},$$

Et on a :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc :

$$\int_{x_0}^{x_{n+1}} \sum_{i=0}^n \varphi_i(x) u_i dx = \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u_i + \varphi_{i+1}(x) u_{i+1} dx.$$

On se sert de cette formule pour calculer l'erreur pour ces exemples et on a :

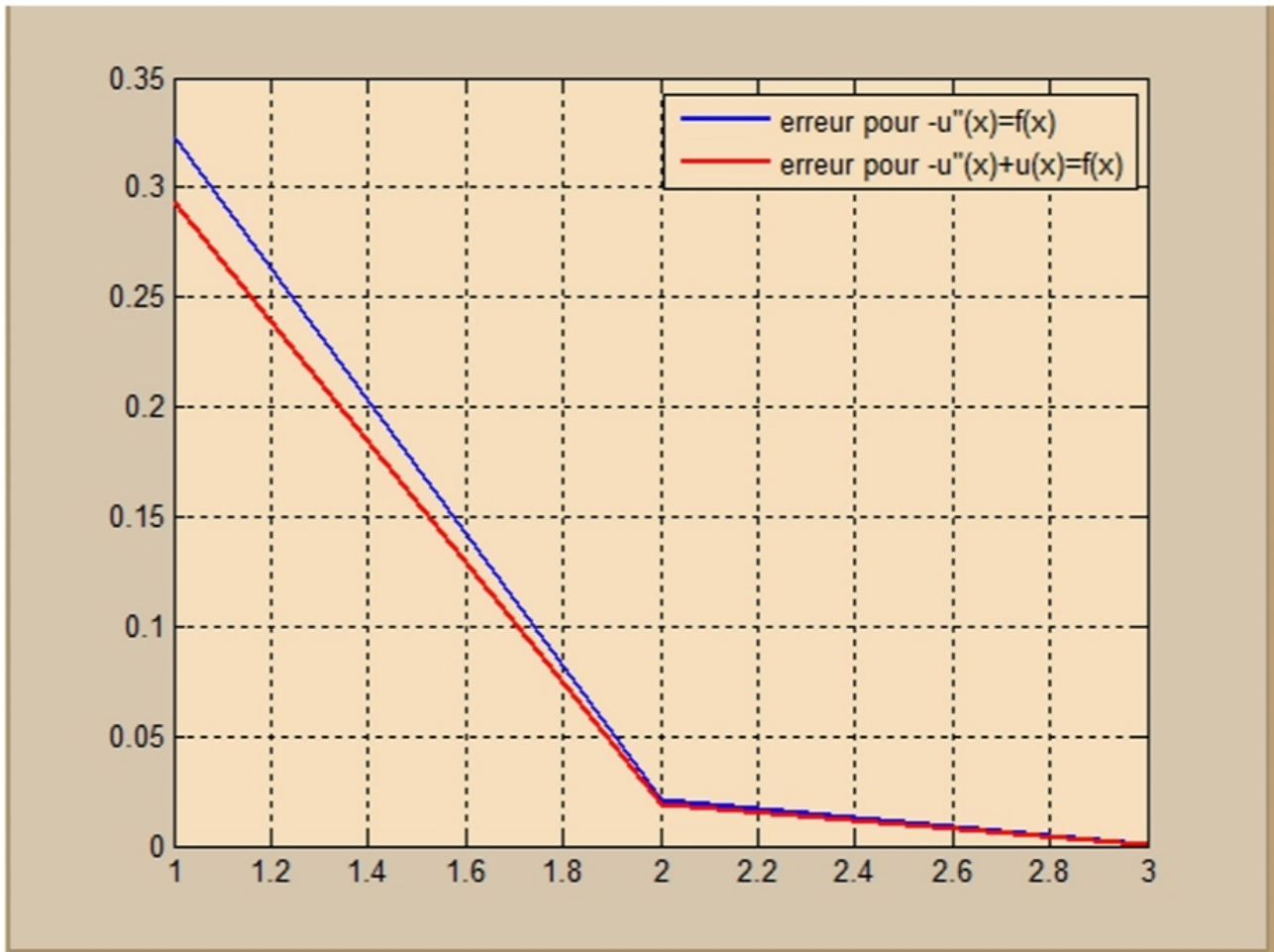


FIGURE 4.4 – Graphe représentant respectivement l'erreur pour $-u''(x)=f(x)$ et $-u''(x)+u(x)=f(x)$ avec $u(x)=x(x-1)$

Conclusion

La méthode des éléments finis est largement utilisée pour l'analyse des problèmes d'ingénierie, non seulement en raison de son aptitude à résoudre une variété de problèmes physiques formulés en termes d'équations aux dérivées partielles, mais aussi en raison de sa capacité à gérer des géométries complexes et des conditions aux limites. Cependant cette méthode représente quelques points faibles, qu'il serait faux de sous-estimer :

- La méthode des éléments finis s'appuie sur une formulation variationnelle de l'équation aux dérivées partielles, mais Il n'existe pas forcément de formulation variationnelle pour toute équation aux dérivées partielles.
- La méthode n'est pas bien adaptée à la résolution numérique d'équations non linéaires.
- Complexité de mise en oeuvre de la méthode.
- Grand coût en temps de calcul et mémoire.

Il existe bien d'autres méthodes numériques de résolution d'équations aux dérivées partielles comme les méthodes de volumes finis, d'éléments finis de frontière (ou méthode intégrale), spectrale, de Fourier, etc.

Parlons par exemple de la méthode de volumes finis, c'est la méthode de choix pour les équations de conservation non linéaires. Cette méthode consiste à intégrer, sur des volumes élémentaires, les équations écrites sous forme intégrale. Elle est plus avantageuse que la méthode des éléments finis puisque sa mise en oeuvre est simple avec des volumes élémentaires rectangles, et elle permet de traiter des géométries plus complexes avec des volumes de forme quelconque. C'est une méthode particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides.

Bibliographie

- [1] A. MUNNIER *Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles* 2007-2008
- [2] ALEXANDRE ERN : *Éléments finis*, , Dunod,2005.
- [3] ALFIO QUARTERONI : *Introduction à la méthode des éléments finis*, École Polytechnique fédération de Lausanne, 2013-2014.
- [4] ANDRÉ FORTIN : ANDRÉ GARON *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*, École Polytechnique de Montréal,1997-2006.
- [5] EMMANUEL MAITRE : *Notes du Cours Éléments Finis-ENSIMAG 2A - Version du 21*
- [6] RAVIART, P.A et J.M.THOMAS : *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris,1983.