RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET

Faculté des Mathématiques et d'Informatique

Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse Fonctionnelle Et Application

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

Les équations aux dérivées partielles et quelques applications

Présenté par

***Belakhdar Fatima Zohra**

***Bendjara Lamia**

Soutenu publiquement le 30 /09/ 2020 devant le jury composé de

*** SOUID MOHAMMED SAID**	**MCA**	**Président**
***MOKHTARI MOKHTAR**	**MCA**	**Encadreur**
***BENDAOUD SID AHMED**	**MCB**	**Examinateur**

Promotion : 2019 \ 2020

Remerciement

★ Tout d'abord nous remercions ALLAH le tout miséricordieux qui nous a donné la force et Le courage pour réaliser ce travail.

★ Le grand merci à notre promoteur Mr.Mokhtari Mokhtar pour ses conseils et son aide et qui a mis à disposition tous les nécessaires pour réaliser ce mémoire.

★ Nous voudrons remercier en deuxième lieu les membres de jury Mr.Souid Mohammed Said pour le grand honneur qu'il nous fait en présidant

le jury de notre soutenance, Mr .Bendaoud Sid Ahmed pour l'honneur qu'il nous fait d'avoir accepter l'examen de notre travail.

★ Nous remercions également toute l'équipe pédagogique de l'Université Ibn Khaldoun -Tiaret-spécialement département de mathématique pour leur encadrement durant notre cursus universitaires.

★ Enfin Nous tenons à remercier toutes les personnes qui nous ont conseillé lors de la rédaction de ce mémoire : Nos familles, nos amis, nos professeurs, et nos camarades de promotion.

★ ★ ★

Je dédie ce travail à

★ Moi même où je touche tout mes efforts mon travail ma volonté et mon amour au mathématique où je réalise l'un de mes grands buts, et j'en récolte le fruit de ma longue carrière scolaire.

★ Mes chers parents, pour tous leurs sacrifices , leur amour, leur tendresse,leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

★ Mes chers sœurs meriem , riham et isra et mon frère walid pour leurs encouragement et leurs soutien moral .

★ Toute ma famille, mes chers oncles et tantes ,mes cousins et cousines,...

★ Mes amis qui m'encouragent à touts moments surtout mon cher amis Ladghem Omar .

★ Et en fin à toute personne qui voulait voir mon succès.

Bendjara Lamia

Je dédie ce travail à

✓ A Mes chers parents : Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect ,mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être. Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours. Que se modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés , le fruit de vos innombrables sacrifices Puisse dieu , le très haut , vous accorder santé ,bonheur et langue vie et faire en sorte que jamais je ne vous déçoive

✓ A Mes chers et adorable frères et sœurs , mes chers neveux et nièces Puisse dieu vous gardez,éclairer votre route et vous aider a réaliser a votre tour vos vœux Les plus chers.

✓ A la mémoire de mon grand père et ma mère J'aurais tant aimé que vous soyez présentes . Que dieu ait vos âmes dans sa sainte miséricorde .

✓ A Mes chers oncles et tantes , leur époux et épouses ,A Mes cousins et cousines

✓ A Mes amis de toujours En souvenir de notre sincère et profond amitié et des moments agréable que nous passe ensemble Sans oublié mon binôme LAMIA Pour son soutien morale , sa patience et sa compréhension tout au long de ce projet .

Belakhdar Fatima Zohra

Table des matières

Table des figures

INTRODUCTION

Les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé "EDP" dans la suite, constituent une branche importante des mathématiques appliquées. Elles sont utilisées dans la modélisation de nombreux phénomènes de natures différentes.
Le but principal de résoudre ces équations est d'essayer d'apprendre quelques informations sur le processus physique que l'équation est estimée a modéliser. Il est de base a l'importance des équations différentielles que même les plus simples équations correspondent aux modèles physiques utiles.
La compréhension d'un processus complexe par nature, est généralement réalisée en combinant on constituant sur des modèles plus simples et plus fondamentales. Ainsi, une connaissance approfondie de ces modèles, les équations qui les décrivent, et leurs solutions, est la première indispensable étape vers la solution des problèmes plus complexes et réalistes.
Les équations aux dérivées partielles avec le temps t en tant qu'une des variables indépendantes forment des équations d'évolutions en temps (Hyperboliques et paraboliques et elliptiques), elles résultent non seulement de beaucoup de champs des mathématiques, mais également d'autres branches de la science telles que la physique, la mécanique et la science des matériaux. Par exemple, équations de Navier-Stokes et d'Euler de la mécanique liquide, équations de réaction-diffusion des transferts thermiques et

sciences biologiques, Klein....

Dans ce mémoire nous nous intéressent a l'analyse mathématiques des équations aux dérivées partielles , notamment les équations aux dérivées partielles du premier ordre et du deuxième ordre ,qui occupent une large place et qui intéressent des spécialistes et des spécialistes du domaine des mathématiques et des applications de la physique, de la chimie et de la mécanique....

On a structuré ce mémoire en trois chapitres :

Dans ce **premier chapitre :** (intitulé **"Préliminaire"**),on rassemble toutes les notions et résultats de base que nous utiliserons par la suite. Ces notions et ces résultats représentent un outil important pour l'étude de ce type de problème.

Le deuxième chapitre : est une introduction à la terminologie et à la classification des équations aux dérivées partielles c'est la partie la plus théorique du mémoire car en utilise certains résultats, et on a donné des exemples.

Le troisième chapitre : Nous présentons, quelques applications des équations aux dérivées partielles (Mécanique).

Notations générales

Certaines notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous lisons ci-dessous :

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
$\|.\|$	Valeur absolue ou module.
$i.e.$	C′est à dire
$s.e.v$	Sous espace vectoriel.
$\partial\Omega = \Gamma$	La frontière topologique de Ω.
η	le vecteur unité normal extérieur par rapport à $\partial\Omega$.
∇u	Le gradient de u.
Δu	Laplacien de u.
$div\ u$	la divergence de u.
$\|\|.\|\|_p = \left(\int_\Omega \|f\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$	la norme de fonction f dans $L^p(\Omega)$.
$(\cdot,\cdot)$	produit scalaire dans V, si V est espace de Hilbert.
C_b	Le complémentaire
$\mathcal{D}$	Espace des fonctions tests pour les distributions.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre nous présentons des notations, définitions et des théorèmes utilisés dans ce mémoire.

1.1 Rappels Sur Les Espaces Fonctionnels

Commençant par rappeler la définition d'un espace vectoriel normé.

Définition 1.1 (**Espace vectoriel normé**). *: Soit E un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou C , on appelle norme sur l'espace E toute application notée $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant pour tout x, y dans E et α dans K.*

(i) $\|x\| = 0$ si seulement si $x = 0$.
(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ (homogénéité).
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).
Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.2. *(**Espace métrique complet**) : On dit que E est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E.*

Définition 1.3. *Soit X un espace vectoriel réel, un espace normé est un couple $(X, \|\cdot\|)$, où $\|\cdot\|$ est une norme sur X.*

Exemple 1.1. *On rappelle que, dans $\mathbb{R}^n, \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme (la norme euclidienne standard) ; ici, $x = (x_1 \cdots x_n)$*

Définition 1.4. *Soit X un ensemble non vide. Une distance sur X est une application*

$$(x,y) \longmapsto d(x,y)$$

de $X \times X$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :
(D_1) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
(D_2) $d(x,y) = d(y,x) \forall x,y \in X$
(D_3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \forall x,y,z \in X$

Définition 1.5 (**Espace topologie**). *Soit E ensemble quelconque et $p(E)$ famille de toutes les parties de E on dit qu'une sous famille τ de $p(E)$ est une topologie sur E si elle satisfait les trois conditions suivantes :*
$(A_1) E \in \tau, \phi \in \tau$
$(A_2) \tau$ *est stable par réunion (fini ou non) c'est-a-dire :*

$$\forall (\Omega_i)_{i\in I} \subset \tau = \bigcup_{i\in I} \Omega_i \in \tau$$

$(A_3) \tau$ *est stable par intersection finie c'est-a-dire :*

$$\forall (\Omega_j)_{j\in J} \subset \tau = \bigcap_{j\in J} \Omega_i \in \tau$$

Le couple (E,τ) s'appelle espace topologique les éléments de τ sont dite ensembles ouverts de (E,τ).

1.2 Définition Espace de Banach et ses propriétés :

Définition 1.6. *Un espaces $(X, \|\cdot\|)$ est de **Banach** si et seulement si est complet pour la distance associe à $\|\cdot\|$.*

Exemple 1.2. *$E = \mathbb{R}^n$ est un espace de **Banach** pour la norme $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ tout les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*

Exemple 1.3. *L'espace vectoriel $E = ([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ $f \in E$ est un espace de **Banach**.*

1.2 Définition Espace de Banach et ses propriétés :

Proposition 1.1. *Si* (X,d) *est un espace métrique et* $(E,\|\cdot\|_E)$ *est un espace de* ***Banach*** *, alors* $C_b(X,E)$ *est un espace de* ***Banach****.*

Proposition 1.2. *Si* $(X,\|\cdot\|_x)$ *est un espace normé et* $(Y,\|\cdot\|_Y)$ *un espace de Banach, alors* $L(X,Y)$ *est un espace de Banach.*

Définition 1.7. *On dit qu'une ensemble A d'un espace de* ***Banach*** *a la propriété de point fixe si tout application continue de A dans A admet un point fixe.*

Définition 1.8 (Distribution de Dirac). *On défini une distribution* δ*, appelée distribution de Dirac , telle que :*

$$\delta : \begin{cases} \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \longmapsto <\delta, \varphi> = \varphi(0) \end{cases}$$

δ *est une distribution singulière : il n'existe pas de fonction* δ *localement sommable telle que*

$$\int \delta(x)\varphi(x)d\mu = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Remarque 1.1. *De manière générale, le produit de deux distributions n'est pas défini.*

Définition 1.9 (Le Laplacien). *On rappelle que, pour une fonction* $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *deux fois différentiable sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^d$

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

L'opérateur différentiel Δ *est appelé Laplacien.*

Chapitre 2

Les équations aux dérivés partielles

Dans ce chapitre, on donne les définitions et les types des équations aux dérivés partielles et leurs classifications.

2.1 Qu'est-ce qu'une EDP ?

Soit $u = u(x, y, ...)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes en nombre fini .
Une EDP pour la fonction u est une relation qui lie :
– les variables indépendantes $(x, y, ...)$.
– la fonction "inconnue" u (variable dépendante).
– un nombre fini de dérivées partielles de u.
cette équation est de la forme :

$$F\left(x, y, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, ...\right) = 0 \tag{2.1}$$

u est solution de l'EDP si, après substitution, la relation

$$F\left(x, y, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, ...\right) = 0 \tag{2.2}$$

est satisfaite pour $x, y, ...$ appartenant à une certaine région Ω de l'espace des variables indépendantes.

Remarque 2.1. *Sauf mention contraire, on exige que la fonction u et les dérivées partielles intervenant dans l'EDP soient continues sur* Ω.

Les EDP interviennent très souvent dans les problèmes physiques :

- *électromagnétisme* ***(équations de Maxwell)***
- *en mécanique des fluides* ***(équation de Navier-Stokes)***
- *en mécanique quantique* ***(équation de Schrödinger)***

$$ih\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) = \frac{-h^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x,t) + V(x)\Psi(x,t)$$

Exemple 2.1.

- $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$ *avec* $u = u(x,y)$ *(équation de diffusion)*

$u_1(x,y) = 2x + y^2$ *solution dans tout* $\mathbb{R}^2$

$u_2(x,y) = e^{-x}\sin(y)$*solution dans* $\mathbb{R}^2$

$u_3(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi x}}e^{-\frac{y^2}{4x}}$ *solution dans* $\Omega \begin{cases} x > 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

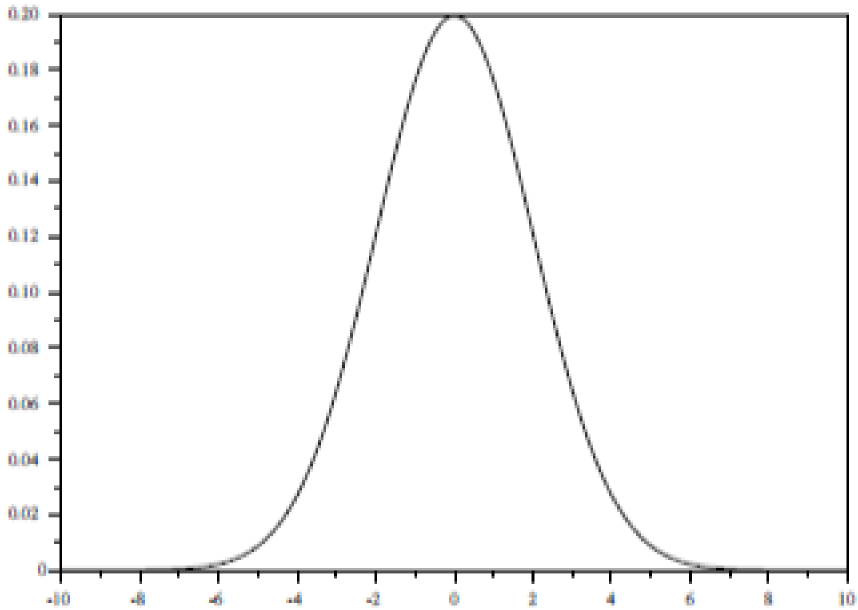


FIGURE 2.1 – **Équation de diffusion**

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} u_3(x,y)dy &= \frac{1}{\sqrt{4\pi x}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{y^2}{4x}}dy \quad on\ pose\ u = \frac{y}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}dy \\
&= 1
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{-u^2}du \\
I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}dv\right) \\
&= \int\int e^{-u^2+v^2}dudv \\
&= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2}dr \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Remarque 2.3. $\lim\limits_{x \to 0^+} u_3(x,y)$ *est la distribution de Dirac.*

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *où* $u = u(x,y)$

La fonction $u = u(x,y) \longrightarrow \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ *est solution dans* $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$

Rq : Considérons $\begin{cases} r \\ \\ \theta \end{cases}$ coordonnée polaires

$\tilde{u}(r,\theta) = u(x,y)$ *et* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2}$

On cherche une solution u radiale, c'est-a-dire indépendante de θ.

$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \frac{\alpha}{r}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow \tilde{u}(r) = \alpha \ln(r) + \beta \quad (\beta \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow u(x,y) = \frac{\alpha}{2}\ln(x^2+y^2) + \beta$

Remarque 2.4. *Signification du Laplacien.*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ avec } u = u(x,y)$$

Soit $\xi > 0$

$u(x-\varepsilon,y) = u(x,y) - \varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{2}\varepsilon^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + O(\varepsilon^3)u(x+\varepsilon,y) = u(x,y) - \varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{2}\varepsilon^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + O(\varepsilon^3)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x-\varepsilon,y) - 2u(x,y) + u(x+\varepsilon,y)}{\varepsilon^2} + O(\varepsilon^3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(x,y-\varepsilon) - 2u(x,y) + u(x,y+\varepsilon)}{\varepsilon^2} + O(\varepsilon^3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(x-\varepsilon,y) + u(x+\varepsilon,y) + u(x,y+\varepsilon) - 4u(x,y)}{\varepsilon^2} + O(\varepsilon^3)$$

Si u *est solution de* $\Delta u = 0$*, alors :*

$u(x,y) = \frac{1}{4}\left[u(x-\varepsilon,y) + u(x+\varepsilon,y) + u(x,y\varepsilon) + u(x,y+\varepsilon)\right]$

$\Delta_u = 0$ *signifie que la valeur de* u *en un point est égale à la valeur moyenne de* u *sur les quatre plus proches voisins .*

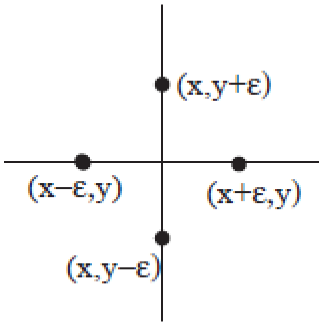


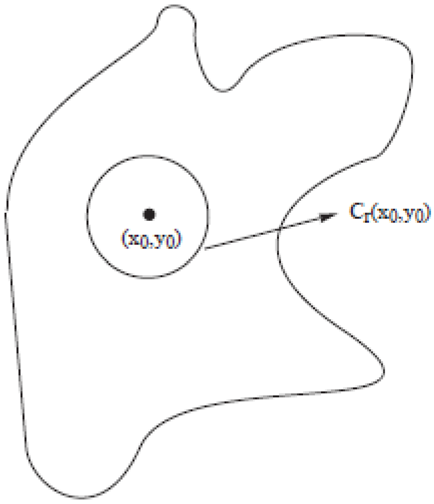
FIGURE 2.2 – **Signification du Laplacien**

- u ne peut pas être extremum en (x, y).
- u est solution de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans Ω
- plus généralement, sur un ouvert connexe, on montre que :

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi\mathbb{R}} \int_{C_R(x_0,y_0)} u(x, y)dl = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)d\theta$$

2.2 Principe du Maximum

Soit $u(x, y)$, une fonction solution de $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$ dans un ouvert borné connexe Ω de $\mathbb{R}^2$.
On note $\partial\Omega$ la frontière de Ω.
On suppose de plus u continue dans $\Omega \cup \partial\Omega$ qui est une région fermée du plan.
Si u n'est pas une fonction constante sur $\Omega \cup \partial\Omega$ alors la valeur maximale de u et la valeur minimale de u sont atteintes uniquement sur $\partial\Omega$



Principe du Maximum

2.3 Généralités sur les EDP

Définition 2.1. *On appelle ordre d'une EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'EDP.*

Exemple 2.2. $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 1^{er} *Ordre*

Définition 2.2. *Si u et ses dérivées partielles apparaissent séparément et " à la puissance 1" dans l'EDP, celle-ci est dite linéaire.*

Exemple 2.3. $u = u(x,y)$
- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 1^{er} *ordre linéaire.*
- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \sin u = 0$ 1^{er} *ordre non-linéaire.*
- $\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 2^{me} *ordre non-linéaire.*

Remarque 2.5. $\cos(xy^2)\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial x} = \tan(x^2+y^2)$ 1^{er} *ordre, linéaire, inhomogène.*
- *Pour une EDP linéaire homogène :*

$$\begin{cases} u_1 \;\; solution \\ u_2 \;\; solution \end{cases} \Rightarrow \lambda u_1 + \mu u_2 \;\; est\ solution.$$

2.4 EDP linéaire du 1^{er} ordre :

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)u = D(x,y)$$

$$\begin{cases} \text{linéaire} \\ 1^{er}\text{ordre} \end{cases} \quad \text{est la forme plus générale pour une EDP}$$

Exemple 2.4. *1.* $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{\partial u}{\partial y}(dy - dx)$

Si d_x *et* d_y *sont reliés par* $d_x - d_y = 0$*, alors* $du = 0$

Sur chacune des courbes de la famille $y - x = \xi(\xi \in \mathbb{R})$*, la fonction u est constante u ne dépend de que* ξ

Donc $u(x,y) = f(\xi) = f(x-y)$ *est une fonction arbitraire d'une seule variable, de classe* $C^1(R)$

Les droites $y - x = \xi$ *sont les caractéristique de l'EDP considérée (voir schéma 3)*

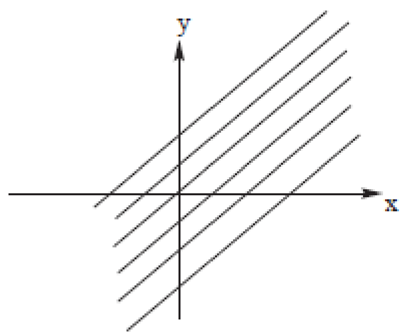


schéma 3

2. $\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ *avec* $u = u(x,y)$*, est une EDP du* 1^{er} *ordre, linéaire, homogène.*

$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = (-ydx + dy)\frac{\partial u}{\partial y}$

Si du et dx sont reliés par $-ydx + dy = 0$*.*

u est constante le long des courbes $y = \xi e^x$*. (schéma 4)*

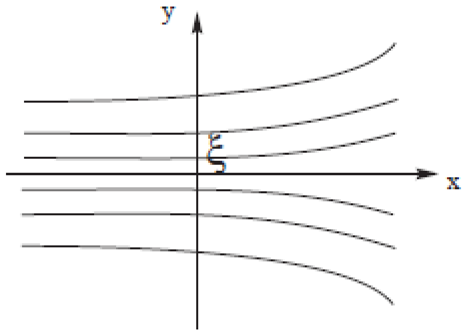


schéma 4

Conclusion

La solution générale de $\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ *est de la forme :*

$u(x,y) = f(ye^{-}x)$ *où* f *est* $C^1(\mathbb{R})$.

3. $x\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0$

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\left(2u - x\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\left(dx - \frac{1}{2}xdy\right) + udy \end{aligned}$$

Si dx *et* dy *sont reliés par* $dx - \frac{1}{2}xdy = 0$, *alors* $du = udy$. *(schéma 5)*

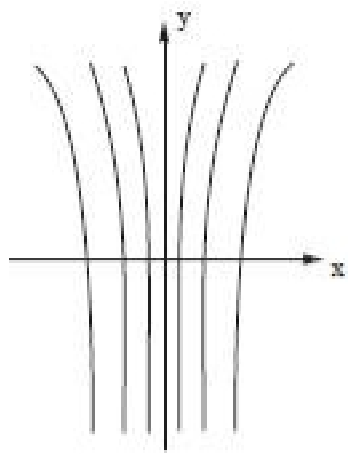


schéma 5

$x = \xi e^{-\frac{y}{2}}$. *sur chacune de ces courbes,* $u = cste.e^y$.

Conclusion : La solution générale est de la forme :

$$u(x,y) = e^y f\left(xe^{-\frac{y}{2}}\right)$$

Proposition 2.1. *Si on impose les valeurs de u sur une courbe* Γ *qui n'est pas une caractéristique de l'EDP, alors on peut identifier la fonction* f. *(voir schéma 6)*

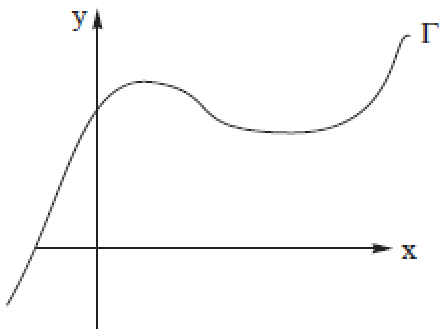


schéma 6

Si on impose :$u(x,y=0) = \varphi(x)$ (φ *est donne*)
alors il vient :$u(x,y=0) = f(x) = \varphi(x)(\forall x \in \mathbb{R})$ et par suite :
$f \equiv \varphi$ et $u(x,y) = e^y \varphi\left(xe^{-\frac{y}{2}}\right)$
d'où :
$u(x,y) = e^y \varphi\left(xe^{-\frac{y}{2}}\right)$

Remarque 2.6. *Si on impose* $u(x,y=0) = \varphi(x)$ *uniquement sur* $x \in [a,b]$ *alors :*
$\forall x \in$*à la zone hachurée,* $u(x,y) = e^y \varphi\left(xe^{-\frac{y}{2}}\right)$ *En dehors de la zone hachurée, la solution est de la forme* $u(x,y) = e^y f\left(xe^{-\frac{y}{2}}\right)$ *avec* f *indéterminée (comme on exige u continue), il faut que :*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \varphi(a)$$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \varphi(b)$$

2.5 Méthode pratique

Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$f(x,y,z)\frac{dz}{dx} + g(x,y,z)\frac{dz}{dy} = h(x,y,z) \tag{2.3}$$

où $h(x;y;z)$ est non identiquement nulle, on opère de la façon suivante :

(a) On examine si $h(x;y;z) = 0$, définit une solution.

(b) Dans le domaine où $h(x;y;z)$ est non nulle, on cherche deux intégrales premières U et V du système caractéristique :

$$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{g(x,y,z)} = \frac{z}{h(x,y,z)} \tag{2.4}$$

Toute solution du problème posé est alors définie par :

$$F[U(x,y,z), V(x,y,z)] = 0$$

On note qu'il faut au moins qu'une des deux fonctions U et V dépende de z, F étant une fonction arbitraire. [1]

2.6 Problème de Cauchy :

Définition 2.3. *On appelle courbes caractéristiques de l'équation (2.3), les solutions de son système caractéristique (2.4).*

Définition 2.4. *On dit qu'une courbe (γ) n'est caractéristique en aucun point pour l'équation (2.3) s'il n'existe aucun point de (γ) où la tangente est parallèle au vecteur*

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = f(x,y,z)\overrightarrow{e_1} + g(x,y,z)\overrightarrow{e_2} + h(x,y,z)\overrightarrow{e_3}$$

Théorème 2.1. *[1] Par toute courbe (γ) n'étant caractéristique en aucun point il passe une solution unique de (2.3), cette solution est dite solution au problème de **Cauchy** relatif à la courbe (γ).*

Théorème 2.2. *[1] Méthode pratique de résolution du problème de **Cauchy** :*

$$f(x,y,z)\frac{dz}{dx} + g(x,y,z)\frac{dz}{dy} = h(x,y,z) \tag{2.5}$$

et son système caractéristique

$$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{g(x,y,z)} = \frac{dz}{h(x,y,z)} \tag{2.6}$$

Pour trouver la solution de (2.3) qui contient une courbe (γ) non caractéristique d'équations

obtenues au moyen de deux intégrales premières U et V du système (2.4).

Ceci définit une fonction $H(a;b) = 0$.

L'équation de la solution est : $H[U(x;y;z);V(x;y;z)] = 0$.

Si $h(x;y;z) = 0$, on n'oubliera pas que z déduit de cette équation est une intégrale première.

Exércice 2.1. *Donner la solution générale de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :*

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$$

solution d'exercice 2.1. *L'équation s'écrit aussi :*

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = -z$$

On en déduit le système différentiel :

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{-z}$$

Des deux premiers rapports on déduit l'intégrale première :

$$U(x,y,z) = \frac{1}{x} - y$$

$$V(x,y,z) = ze^{-y}$$

Puis des deux derniers rapports, on tire l'autre l'intégrale première :

- On contrôle aisément que U et V sont indépendantes, on en conclut que la solution générale de l'équation envisagée est :

$F\left[(\frac{1}{x} - y), ze^{-y}\right] = 0, F$ *fonction arbitraire*

Ou $z = e^{y}H(\frac{1}{x} - y), H$ *fonction arbitraire*

2.7 Équations aux dérivées partielles du 2ème ordre

(équations hyperboliques, équations paraboliques, équations elliptiques,...)

Définition 2.5. *[11] Soit f une fonction de deux variables x et y. On appelle équation aux dérivées partielles du 2ème ordre, une relation de la forme :*

$$F\left(x,y,f,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=0$$

Exemple 2.5. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=g(y)$
D'où

$$f(x,y)=xg(y)+h(y),$$

où F et Y sont des fonctions arbitraires.

Remarque 2.7. *La solution d'une équation aux dérivées partielles du 2ème ordre dépend de deux fonctions arbitraires.*
Considérons une équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{2.7}$$

où $z=f(x;y)$ est la fonction inconnue et a,b,c,F sont des fonctions données dans un domaine $D\mathbb{R}^2$. On cherche une solution z de l'équation ci-dessus en supposant que la valeur de z sur une g. courbe γ ainsi que celle de ses dérivées $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ sont connues. Autrement dit, (problème de Cauchy) on cherche une solution z de cette équation connaissant z et la dérivée normale $\frac{\partial z}{\partial n}$ sur la courbe γ (c.-à-d., le produit scalaire du gradient de z par le vecteur normal unitaire).

Définition 2.6. *[11] Une caractéristique (Monge) pour l'équation ci-dessus est une courbe dans D satisfaisant à l'équation différentielle :*

$$a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-2b\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+c=0 \tag{2.8}$$

L'équation (2.7) est dite du type :

(i) *hyperbolique dans D si en tout point de $D, b^2-ac>0$. Dans ce cas, on peut résoudre l'équation (2.7) localement ce qui montre que par tout point passent deux caractéristiques réelles. On montre que la transformation*

$$\xi = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} x + y,$$
$$\eta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} x + y,$$

où $a \neq 0$, ramène l'équation (2.7) à une équation du type
$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)$ *et s'appelle forme canonique de type hyperbolique*

Exemple 2.6. *L'équation des cordes vibrantes :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

où $z(x,t)$ est le déplacement du point d'abcisse x à l'instant t. C'est une équation hyperbolique $(a = 1, b = 0, c = -K^2)$. Elle se généralise à trois dimensions spéciales en l'equation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = K^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(ii) parabolique si $b^2 - ac = 0$. Dans ce cas, les caractéristiques sont confondues. Supposons que $a \neq 0$ et posons

$$\xi = \frac{b}{a} x + y,$$
$$\eta = -\frac{b}{a} x + y,$$

L'éuation (2.7) s'écrit.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)$$

et s'appelle forme canonique de type parabolique.

Exemple 2.7. *L'équation de la chaleur :*$\frac{\partial z}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
où t est le temps, z est la température d'un corps et α une constante. C'est une équation parabolique $(a = \alpha^2, b = c = 0)$.
(iii) *elliptique si $b^2 - ac < 0$. Dans ce cas, les caractéristiques sont imaginaires.*

Si $a \neq 0$, la transformation

$$\xi = -\frac{b}{a} x + y,$$
$$\eta = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a} x,$$

permet d'écrire l'équation (2.7) sous la forme.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)$$

et s'appelle forme canonique de type elliptique.

Proposition 2.2. *[11] Toute solution de classe C^2 de l'équation des cordes vibrantes : $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, est la forme $z = g(x-t) + h(x+t)$,*
où g et h sont des fonctions quelconques de classe C^2.

Exemple 2.8. *On se propose d'étudier pour l'équation des cordes vibrantes, le problème de* ***Cauchy*** *: étant données deux fonctions $u; v \in C^2[a;b]$, trouver une solution $z(x;t)$ de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

telle que pour $t = 0$ et $x \in [a;b]$,

$$z(x,0) = u(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) = v(x)$$

Réponse :*On obtient*

$$z(x,t) = g(x-t) + h(x+t) = \frac{1}{2}\left(u(x-t) + u(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} v(\tau) d\tau\right)$$

(cette expression n'a de sens que si $x-t; x+t \in [a;b]$ car u et v ne sont définis que sur cet intervalle).

Remarque 2.8. *Supposons que dans une équation n'interviennent que des dérivées partielles par rapport à une même variable. On peut donc étudier une telle équation comme une équation différentielle ordinaire tandis que les constantes d'intégration doivent être considérées comme des fonctions de la variable jouent le rôle d'un paramètre. De même, si dans une équation n'apparaissent que des dérivées partielles d'une même dérivée partielle par rapport à l'une des variables alors on peut étudier une telle équation en considérant cette dernière Dérivée partielle comme une inconnue intermédiaire.*

Exemple 2.9. *Intégrer l'équation*
Réponse : *On a $z = \frac{x^2}{6} + \frac{x^2 y}{2} + g_1(y)x + g_{2(y)}$ sont des fonctions arbitraires de y.*

Exemple 2.10. *Déterminer la solution de l'équation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (1-y^2)z$*, vérifiant les conditions initiales suivantes :*$z(x,0) = y$, $\frac{\partial z}{\partial x}(0,y) = 0$
Réponse : *On obtient* $z(x,y) = y\cosh(x\sqrt{1+y^2})$.

Remarque 2.9. *Pour réduire l'équation aux dérivées partielles (2.7) à sa forme canonique, on peut raisonner (de manière équivalente) comme suit :*

(i) *Si* $b^2 - ac > 0$*, alors l'équation (2.7) est hyperbolique. L'équation (2.8) possède deux intégrales*

$$\varphi(x,y) = C_1, \quad \psi(x,y) = C_2.$$

Ce sont deux familles de caractéristiques réelles. En posant
$\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ *on ramène l'équation (2.7) à sa forme canonique :*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)$$

(ii) *Si* $b^2 - ac = 0$*, alors l'équation (2.7) est parabolique. L'équation (2.8) possède une intégrale* $\varphi(x,y) = C$ *Les deux familles de caractéristiques se confondent.*
On pose $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ *où* Y *est une fonction arbitraire telle que :*

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} \neq 0$$

On ramène ainsi l'équation (2.7) à sa forme canonique :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 \eta} = \Phi\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)$$

(iii) *Si* $b^2 - ac < 0$*, alors l'équation (2.7) est elliptique. L'équation (2.8) possède deux intégrales*
$\varphi(x,y) + i\psi(x,y) = C_1$, $\varphi(x,y) - i\psi(x,y) = C_2$,
En posant $\xi = \varphi(x,y)$ $\eta = \psi(x,y)$
on réduit l'équation (2.7) à sa forme canonique :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 \xi} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 \eta} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)$$

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y} = 0$
   $B^2 - 4AC = -4 < 0$. *Ainsi l'équation de Laplace est elliptique.*
2. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y} = 0$ *Équation de Tricomi.*

- $y > 0 \Rightarrow$ *L'EDP est hyperbolique .*
- $y = 0 \Rightarrow$ *L'EDP est parabolique .*
- $y < 0 \Rightarrow$ *L'EDP est elliptique.*

Exemple 2.11. *Réduire à la forme canonique l'équation aux dérivées partielles :*

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

Réponse : *On obtient* $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}=0$

Exemple 2.12. *En utilisant le changement de variable :* $u = x, v = x/y$ *, déterminer les fonctions* f *de classe* C^2 *solutions de l'équation aux dérivées partielles de l'exercice précédent, sur l'ouvert* $\Omega =]0,+\infty[\times]0,+\infty[\subset \mathbb{R}^2$

Réponse : *La solution de l'équation proposée est* $f(x,y) = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\psi\left(\frac{x}{y}\right)$

Exércice 2.2. *On considère l'équation aux dérivées partielles de fonction inconnue* $z(x;y)$*, de classe* C^2 *:*

$$x^4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

a) *Déterminer ses caractéristiques.*

b) *Former l'intégrale générale de cette équation.*

c) *Déterminer des solutions élémentaires de cette équation par la méthode de séparation des variables.*

Réponse :

a) *L'équation des caractéristiques est c'est-à-dire,*

$$x^4\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-1=0,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\pm\frac{1}{x^2},$$

d'oùù,

$$y=\begin{cases}\frac{1}{x}+C_1\\ -\frac{1}{x}+C_2\end{cases}\qquad (C_1, C_2 : \textit{constantes})$$

b) *On trouve,*

$$z(x,y) = \frac{x}{2}\left(g\left(\frac{1}{x}+y\right)+h\left(-\frac{1}{x}+y\right)\right).$$

c) *On obtient*

$$\lambda > 0,\;\; z(x,y) = x\left(Ae^{-\sqrt{\lambda y}}+Be^{\sqrt{\lambda y}}\right)\left(Ce^{-\frac{-\sqrt{\lambda}}{x}}+De^{\frac{\sqrt{\lambda}}{x}}\right)$$
$$\lambda = 0\;\; z(x,y) = (A+By)(Cx+D),$$

$$\lambda < 0,\;\; u(x) = x\left(A\cos\sqrt{-\lambda y}+B\sin\sqrt{-\lambda y}\right)\left(C\cos\frac{\sqrt{-\lambda}}{x}+D\sin\frac{\sqrt{-\lambda}}{x}\right),$$

où A,B,C,D sont des constantes.

2.8 Équation des ondes :

$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$$\text{Solution générale :}\begin{cases}\xi = x-ct\\ \eta = x+ct\end{cases}$$

$U(\xi,\eta) = u(x,t)$ ainsi $\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta} = 0$ forme canonique.
$\Rightarrow U(\xi,\eta) = f(\xi)+g(\eta)$ f,g sont des fonction arbitraires de classe $C^2(\mathbb{R})$

$$u(x,t) = f(x-ct)+g(x+ct)$$

Toute partie principale d'une solution d'une équation hyperbolique peut être mise sous cette forme. On impose les conditions aux limites :
- $u(x,0) = \phi(x)$, avec ϕ de classe $C^2(\mathbb{R})$
- $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$, avec ψ de classe $C^1(\mathbb{R})$

Solution d'Alembert :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x-ct)+\phi(x+ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds$$

En un point (x,t) avec $t>0$, la valeur de $u(x,t)$ dépend uniquement des valeurs de ϕ en $x-ct$ et $x+ct$ et des valeurs de ψ dans l'intervalle $[x-ct,x+ct]$. L'intervalle $[X-ct,X+ct]$

est dit être l'intervalle de dépendance du point (x, t).
D'un point de vue inverse : les valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial t}$ en $(x = x_0, t = 0)$ n'influent sur $u(x, t)$ que si (x, t) appartient à la zone hachurée.

Chapitre 3

Les applications des équations aux dérivées partielles :

Le but de ce chapitre consacré sur les applications des équations aux dérivées partielles
Ce chapitre est basé sur [4]

3.1 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires en mécanique

Cette section a pour objectif de présenter des équations classiques et certaines de leurs propriétés fondamentales pour le physicien, que ce soit pour contrôler la validité d'un modèle ou bien pour orienter les méthodes de calcul Les configurations étudiées sont volontairement simples et certains résultats admis, les chapitres suivants permettront de donner de la rigueur et de généraliser cette présentation.

3.1.1 Équation de transport

Considérons un contaminant de concentration p dans un fluide en mouvement, où le champ de vitesse ti, fonction des variables d'espace (x, y) et du temps t, est donné.
En l'absence de source répartie, la conservation de la matière conduit à l'équation :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + div(\mu \overrightarrow{v}) = 0 \tag{3.1}$$

appelée équation d'advection.
Si on suppose que le fluide support est incompressible ($div(\overrightarrow{v}) = 0$) , on obtient V équation de transport

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \overrightarrow{grad}(\mu) \cdot \overrightarrow{v} = 0 \tag{3.2}$$

Cette équation du premier ordre gouverne les phénomènes convectifs (i.e. le contaminant est transporté par le fluide), mais apparaît aussi dans certains modèles de marchés boursiers (équation de Black-Scholes).
Considérons le cas unidimensionnel en espace :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + v\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \tag{3.3}$$

Si on suppose de plus que la vitesse v est constante, il apparaît clairement que toute fonction de la forme :

$$(x,t) \mapsto \mu(x,t) = \widetilde{\mu}(x - vt) \tag{3.4}$$

est solution.
L'étude de l' EDP seule a donc conduit à une famille de solutions. Intéressons-nous maintenant à un problème aux limites complet.
Considérons donc le domaine $]x_0, x_1[\times]t_0, +\infty[$,et supposons que l'on connaît la concentration μ_0 à l'instant t_0 en tout point (problème à valeur initiale).
Il s'agit donc de résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} + v\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \\ \mu(x,t_0) = \mu_0(x) \quad \forall x \in]x_0, x_1[\end{cases}$$

La seule solution possible est la fonction :

$$(x,t) \mapsto \mu(x,t) = \mu_0(x - v(t - t_0)) \tag{3.5}$$

qui correspond à une propagation selon les x positifs (voir figure 3.1)

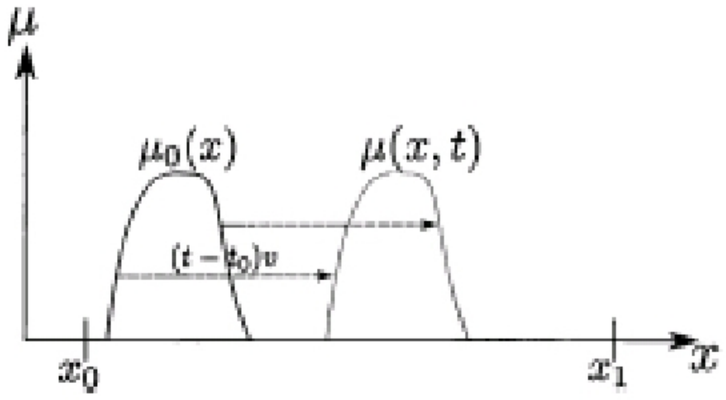


Figure 3.1 – Transport d'une répartition initiale

Remarque 3.1. *La fonction initiale choisie dans la Figure (3.1) n'est pas de classe C^1 (il y a des ruptures de pente), et donc la solution μ ne l'est pas, ce qui pose problème au sens classique puisque l'équation aux dérivées partielles suppose de pouvoir dériver.*
Plus précisément, on voit que l'expression de la solution (3.5) ne requiert a priori aucune régularité sur μ_0, et que cette solution est par ailleurs tout à fait satisfaisante d'un point de vue physique. C'est, typiquement, ce que l'on appelle une solution faible du problème.

Étudions maintenant l'équation non homogène obtenue en ajoutant un terme source f dans le problème à condition initiale, en ne supposant pas v constante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} + v\frac{\partial \mu}{\partial x} = f(x,t) \\ \mu(x,t_0) = \mu_0(x) \end{cases} \tag{3.6}$$

Cherchons s'il est possible de caractériser la courbe représentative C_x d'une fonction $t{-}X(t)$, vérifiant $X(0) = x_0$ et telle que ce problème se ramène à une équation différentielle ordinaire (EDO). A cet effet, posons :

$$\hat{\mu}(t) = \mu(X(t),t)$$

ce qui conduit à :

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt} = \frac{\partial \mu}{\partial x}(X(t),t)\frac{dX}{dt} + \frac{\partial \mu}{\partial t}(X(t),t)$$

Ainsi, si $\frac{dX}{dt} = v$, alors :

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt} = f(X(t),t)$$

Autrement dit, on s'est ramené au système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = v(X(t), t) \quad \text{avec} \quad X(0) = X_0 \\ \frac{d\hat{\mu}}{dt} = f(X(t), t) \quad \text{avec} \quad \hat{\mu}(0) = \hat{\mu}_0(X_0, t_0) \end{cases} \tag{3.7}$$

Dans ce cas précis, il est possible de déterminer X puis d'en déduire $\hat{\mu}$.

La courbe C_x est appelée courbe caractéristique de l'équation aux dérivées partielles. Elle permet de ramener celle-ci à système différentiel dépendant de moins de variables (ici, on passe d'une équation aux dérivées partielles en (x, t) à une équation différentielle ordinaire en t).

On dit que la solution se propage selon la caractéristique .

Ce rôle particulier des courbes (et dans le cas général des surfaces) caractéristiques conduit à la méthode des caractéristiques pour résoudre les équations aux dérivées partielles (essentiellement du premier ordre).

Si, au lieu de se donner une condition initiale $\mu(x, t_o) = \mu_0(x)$, on s'était donné une condition selon la courbe caractéristique :

$$\mu\Big(x_0 + v(t - t_0), t\Big) \tag{3.8}$$

on se serait trouvé face à un problème de la forme :

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt} = f\Big(x_0 + v(t - t_0), t\Big) \text{ et } \hat{\mu}(t) = \mu\Big(x_0 + v(t - t_0), t\Big) = \mu_c(t) \tag{3.9}$$

Ainsi, si

$$\frac{d\mu_c}{dt} = f\Big(x_0 + v(t - t_0), t\Big)$$

on obtient une infinité de solutions, mais dans le cas contraire, il n'y a aucune solution.

Les courbes caractéristiques jouent donc également un rôle dans la définition de problèmes à valeur initiale bien posés. Cette propriété est exploitée dans la classification des équations du second ordre.

3.1.2 Équation de la chaleur :

Désignons par q et T les fonctions flux de chaleur et température , des variables spatiales (x, y), et du temps t.

D'après le premier principe de la thermodynamique, une équation d'état et la loi de Fourier, on a

$$\begin{cases} div(\overrightarrow{q}) = -c\dfrac{\partial T}{\partial t} \\ \overrightarrow{q} = -K\,\overrightarrow{grad}\,T \end{cases}$$

où $c > 0$ désigne la chaleur spécifique, et $k > 0$ le coefficient de conductivité thermique. Pour ce qui suit, on pose $a = k/c$

Par combinaison, on obtient :

$$-\frac{\partial T}{\partial t} + a\Delta T = 0 \tag{3.10}$$

L'équation aux dérivées partielles ainsi obtenue est appelée équation de la chaleur.

Elle gouverne tous les phénomènes diffusifs (c'est donc aussi l'équation de la diffusion).

Reprenons l'équation en une dimension d'espace :

$$-\frac{\partial T}{\partial t} + a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0 \tag{3.11}$$

Réalisons une étude par invariance d'échelle :

si $(x,t) \longmapsto T(x,t)$ est solution, alors, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction $(x,t) \longmapsto T(\lambda x, \lambda^2 t)$ est également solution. En particulier, si on choisit formellement $\lambda = \frac{x}{t}$, on voit que la solution ne dépend plus que de la variable $z = \frac{x^2}{t}$

Ceci inite à chercher une solution sous la forme :

$$(x,t) \longmapsto T(x,t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right) = v(z)$$

par dérivation composée (3.11) implique :

$$0 = (2a+z)v'(z) + 4azv''(z) \tag{3.12}$$

ce qui conduit à :

$$v'(z) = v_1\frac{e^{-\frac{z}{4a}}}{\sqrt{z}}$$

puit

$$T(x,t) = v_0 + v_1\int_0^{\frac{x^2}{t}} \frac{e^{-\frac{z}{4t}}}{\sqrt{z}}dz = v_0 + v_1\,\sqrt{4a\pi}erf\left(\frac{x}{\sqrt{4at}}\right)$$

Les principales propriétés de l'équation de la chaleur peuvent être illustrées en considérant le problème posé sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ avec une condition de décroissance à l'infini pour

la variable d'espace, en supposant, en outre, que la répartion de chaleur initiale prend la forme d'un créneau ($T(x,0) = 1\text{sur}[-1,1]\ et0\ ailleurs$)
On peut vérifier que la solution (dont le tracé à différents instants est donné sur la Figure (3.2) est donnée par :

$$T(x,t) = erf\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right) - erf\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)$$

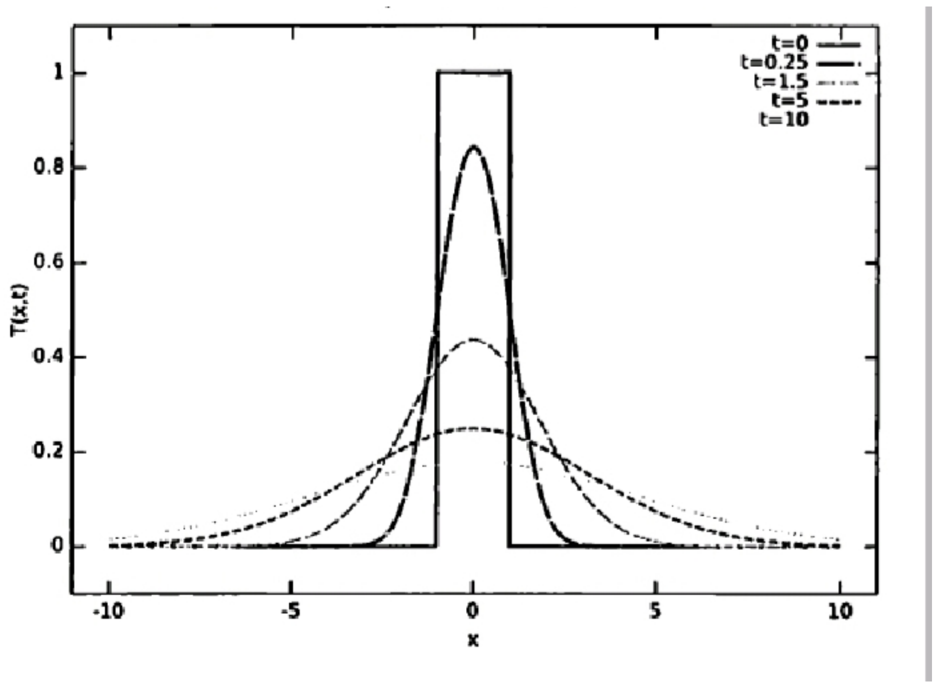


Figure 3.2 – Diffusion d'un créneau

La figure (3.2) met en évidence des propriétés de l'équation de la chaleur :

i. la propagation à vitesse infinie : dès que $t > 0$, la solution est non nulle en tout point de l'espace ;

ii. la non-réversibilité : si $t = -t$ et $T(x,t) = T(x,t)$, l'équation devient

$$-\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \widetilde{t}} + (-a)\frac{\partial^2 \widetilde{T}}{\partial x^2} = 0$$

ce qui revient à changer le signe d'une constante thermodynamique et donc à donner un système complètement différent (et physiquement inconsistant puisqu'il ne respecte plus le second principe) ;

iii. la régularisation de la solution au cours du temps ; physiquement, on retrouve bien le comportement de systèmes dont l'entropie croît ;

iv. l'absence d'histoire du système : la configuration à un instant ne dépend que de celle à l'instant précédent ;

v. les valeurs maximales de températures sont atteintes au début de l'expérience.

Considérons maintenant un problème plus réaliste : celui d'une cloison 1D initialement à température nulle :

$$T(x,0) = T_i(x) = 0, \quad x \in [0,1]$$

La présence de bords implique de s'interroger sur les conditions à imposer. On donne la transcription physique des conditions aux limites les plus classiques :

i. conditions limites de Dirichlet : la température est imposée (le système est en contact avec un **thermostat**) :

$T(x_0,t) = T_0(t)$ donné

ii. conditions de Neumann : le flux de chaleur ou, de manière équivalente, la dérivée normale de la température sont imposés :

$$(\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{n})(x_0,t) = -K\,\overrightarrow{grad}\,(T)(x_0,t) \cdot \overrightarrow{n} = -k\frac{\partial T}{\partial n}(x_0,t) = q_0(t) \text{ donné}$$

iii. conditions de Robin ou de Fourier : un échange thermique par convection est imposé :

$$(\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{n})(x_0,t) = -\alpha(T(x_0,t) - T_0)$$

α est le coefficient de convection ou impédance thermique du milieu environnant, To est sa température.

La figure (3.3) correspond à l'évolution d'une cloison soumise à deux thermostats à ses extrémités (température initiale homogène égale à la valeur du thermostat de droite). Les mêmes propriétés que pour l'exemple précédent sont mises en évidence (vitesse de propagation infinie, régularisation).

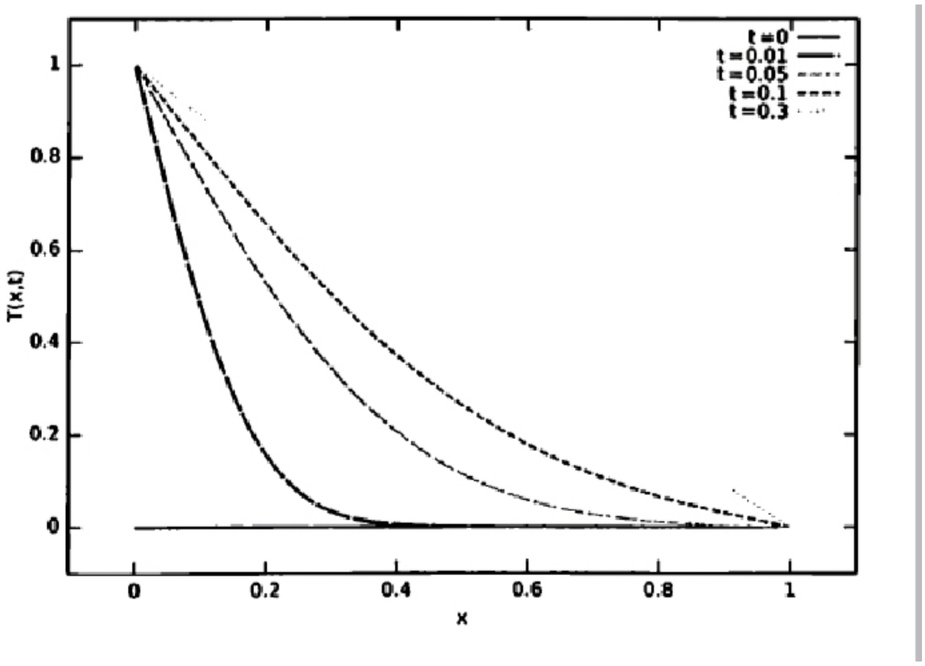


FIGURE 3.3 – Cloison thermostatée

3.1.3 Équation des ondes :

Considérons un fluide isotherme. La thermodynamique permet de lier les variations de volume (divergence de la vitesse) et de pression, la conservation de la quantité de mouvement relie variation de vitesse et gradient de pression :

$$\begin{cases} div(\overrightarrow{v}) = \xi_s \frac{\partial p}{\partial t} \\ \rho \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}(p) \end{cases} \tag{3.13}$$

où ρ désigne la masse volumique, et le coefficient de compressibilité isentropique.
Ce système de deux équations du premier ordre peut être étudié tel quel ou mis sous la forme d'une équation découplée du second ordre :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0 \tag{3.14}$$

où $c = \frac{1}{\sqrt{\rho \xi_s}}$ est la célérité ; l'équation est appelée équation des ondes acoustiques.
Il est intéressant de noter qu'en introduisant le changement

de variable $u = x + ct, v = x - ct$, et qu'en posant $\widetilde{p}(u,v) = p(x,t)$, , l'équation vérifiée par la nouvelle fonction inconnue est :

$$\frac{\partial^2 \widetilde{p}}{\partial u \partial v} = 0$$

ce qui donne donc directement :

$$\widetilde{p}(u,v) = p_1(u) + p_2(v)$$
$$p(x,t) = p_1(x+ct) + p_2(x-ct)$$

On voit qu'à l'instar de l'équation de transport, on obtient une solution généralisée (il n'y a pas de régularité apparente).

Exploitons cette propriété pour illustrer l'équation, et considérons, à cet effet, le domaine $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.

Si on connaît la configuration initiale p_0 et la vitesse initiale v_0 on a :

$$p_0(x) = p(x,0) = p_1(x) + p_2(x)$$
$$v_0(x) = -\xi_s \frac{\partial p}{\partial t}(x,0) = -c\xi_s(p_1'(x) - p_2'(x))$$

ce qui permet de déterminer p_1 et p_2 La figure (3.4) illustre le cas où $v_0 = 0$ et où po est une fonction créneau, prenant la valeur 1 sur $[-1,1]$.

On observe les propriétés suivantes :

i. deux ondes se propagent : l' onde progressive P_2 (vers les positifs) et l' onde rétrograde p_1 (vers les x négatifs) ;

ii. la propagation se fait à vitesse finie (c) ;

iii. l'équation est réversible : si on considère un renversement temporel $\widetilde{t} = -t$ et $\widetilde{p}(x,\widetilde{t}) = p(x,t)$, l'équation vérifiée par est la même que celle vérifiée par p.

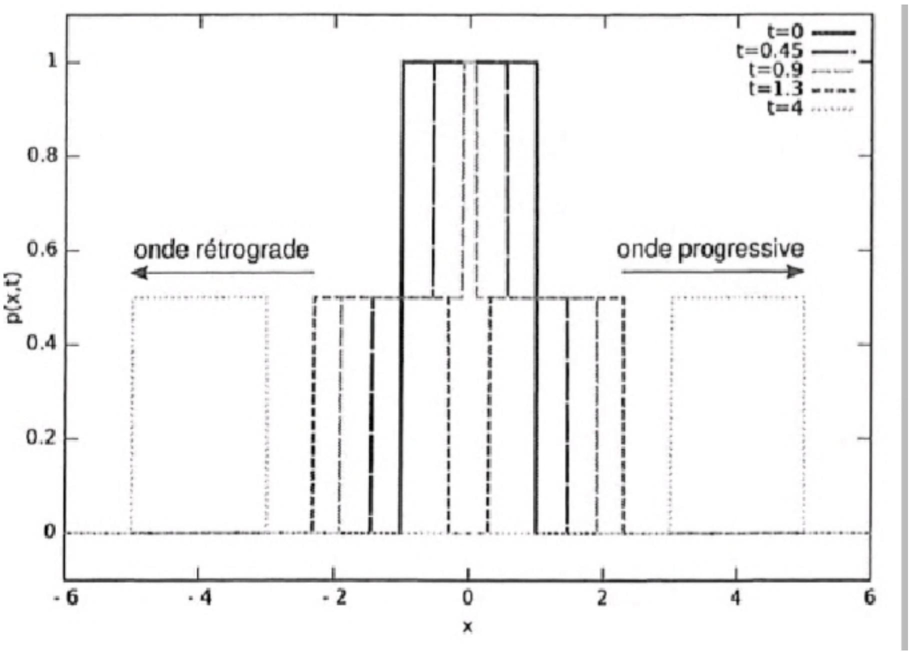


FIGURE 3.4 – Équation des ondes en milieu infini

Si on considérait un domaine fini $[x_0, x_1]$, il serait nécessaire de donner des conditions aux limites. Physiquement, elles pourraient être :

i. des conditions de Dirichlet : pression imposée (par exemple extrémité d'un instrument à la pression atmosphérique)

$$p(x_0, t) = p_0(t) \quad \text{donné}$$

ii. des conditions de Neumann : vitesse ou gradient normal de pression imposé (par exemple air en contact avec la membrane vibrante d'un tambour)

$$\frac{\partial p}{\partial n}(x_0, t) = -\rho \frac{\partial \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}}{\partial t}(x_0, t) = -\rho \frac{\partial v_0}{\partial t}(t) \quad \text{donné}$$

iii. des conditions de Fourier : impédance acoustique du milieu extérieur donnée (système en contact avec un milieu absorbant)

$$\frac{\partial p}{\partial n}(x_0, t) = -\alpha(p(x_0, t) - p_0(t))$$

Des phénomènes classiques de réflexion ou d'absorption pourraient être observés au niveau des conditions aux limites.
Dans tous les cas, la donnée de la configuration et de la vitesse initiales seraient nécessaires (la présence d'une dérivée d'ordre deux en temps requiert la connaissance des dérivées d'ordre inférieur).

CONCLUSION

L'élaboration du présent travail, nous a permis d'approfondir et d'enrichir nos connaissances théoriques sur l'utilisation des Équations aux Dérivées Partielles dans quelque domaine et spécialement le domaine de mécanique. Dans ce mémoire , on a étudier les équations aux dérivées partielles et quelques applications.
On a commencé par une introduction et généralités sur l'analyse fonctionnel et quelques notions de Topologie.
Après, on a rappelons les définitions et les types des équations aux dérivés partielles et leurs classifications., et nous représenterons quelques théorèmes principales puis on a donné quelques exemples.
En fin, on a présentons, quelques applications des équations aux dérivées partielles (Mécanique) Équation de transport, Équation de la chaleur , et Équation des ondes.
Nous espérons que ce travail sera d'un apport considérable pour les promotions à venir, ce qui enrichira la documentation universitaire.

Bibliographie

[1] :A.Martin : Exercices résolus - Equation aux dérivées partielles (1991).

[2] : Brezis H.Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris, 1992.

[3] : E.Zauderer : Partial différential equations of applied mathematics, John Wiley and Sons (1983).

[4] :Claire David Pierre Gosselet ; Équations aux dérivées partielles Cours et exercices corrigés

[5] : F.Carrier et E.Pearson : Partiel différential equations. Academiepressine.(1988)

[6] : Hervé,Reinhard :,Equation aux dérivées partielles, Dunod université (1987).

[7] : H.Reinhard : Equation diférentielles. , Dunod université (1989).

[8] : M.Carlon, P.Marry, N.point, D.vial : Exercices résolus de mathématiques dusignal

[9] : J.Vélu : Méthodes mathématiques pour l'informatique.107

[10] : W.Berg et Mc Gregor : Elementary Partieldiérential equations , Holden- day,San-Francisco 1966).

[11] : A.Lesfari : Introduction aux équations aux dérivées partielles (Master Maths) 2014-2017