REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET

Faculté des Mathématiques et d'Informatique

Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse Fonctionnelle Et Application

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

Théorème du point fixe et applications aux équations aux dérivées partielles

Présenté par

***Mokhtari Lamia**

***Rouai Nadjia**

Soutenu publiquement le 30 /09/ 2020 devant le jury composé de

***SOUID MOHHAMED SAID**	**MCA**	**Président**
***MOKHTARI MOKHTAR**	**MCA**	**Encadreur**
***SOUFRANI MOHAMED**	**MAA**	**Examinateur**

Promotion : 2019 \ 2020

Remerciement

♣ J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

♣ Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur monsieur Mokhtari Mokhtar pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigé tout le long de mon travail, ses critiques et ses conseils ont été précieux.

♣ Je remercie également les membres de jury monsieur Souid Mohamed Said le président et monsieur Soufrani Mohamed l'examinateur pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.

♣ Je remercie particulièrement Monsieur Larabi abderrahmane mon cher professeur le chef de département de mathématiques à l'université de Ibn khaldoun Tiaret pour ses conseils d'or .

♣ Mes remerciements vont également à tous mes enseignants pour leur participa- tion à ma formation.

♣ et enfin j'adresse mes sincères remerciements à mes parents et à toute ma famille, mes amis et tous qui sont contribué de pré ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :
à mes très chers parents qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffert et sacrifié pour que je sois contente, pour leurs conseils, leurs ffections et leurs encouragements pour tout leurs efforts fournis pour moi, qu'Allah les gardes et les bénit toute la vie.
Et je le dédie à mon seul frère kadi,À toutes mes amis Amina Missa Toha khadidja houria Ameur chnini et à mon cher binôme nadjia avec qui j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.
À tous mes enseignements et les collègues de la promotion de la deuxième année master 2019/2020.

Mokhtari lamia

Dédicace

Je dédie ce fruit de mes longues années d'études tout d'abord :
à mes très chers parents qui sont la lumière de ma vie, qui ont tant souffert et sacrifié pour que je sois contente, pour leurs conseils, leurs ffections et leurs encouragements pour tout leurs efforts fournis pour moi, qu'Allah les gardes et les bénit toute la vie.
Et je le dédie à tous les membres de ma famille, mes sœurs Nawel batoul Meriem Malika et mon frère Hichem et mes Abdoune ilyana Maria Reda,wissal et abd errazak.
À toutes mes amis khadidja fatiha Maïssa Houria et à mon cher binôme lamia avec qui j'ai partagé de très bons moments tout le long de ces années.
À tous mes enseignements et les collègues de la promotion de la deuxième année master 2019/2020.

Reouai nadjia

Table des matières

INTRODUCTION

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base qui montrent l'existence des solutions dans divers types d'équations.
En analyse, un théorème du point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations aux équations aux dérivées partielles.
Le théorème du point fixe de Picard dit qu'une contraction d'un espace métrique complet a un point fixe unique. Ce théorème donne un comportement régulier du point fixe par rapport aux paramètres. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs. D'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.
Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Il existe plusieurs formes de ce théorème selon le contexte d'utilisation. Ce théorème donne l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie.
Le théorème du point fixe de Schauder prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact

dans un espace de Banach. Ce théorème est plus topologique, est affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.
En 1955, et pour la première fois, Kranosel'skii a élaboré son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractante et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité.
Les descriptions des évolutions importantes dans cette période prouvée l'existence des théorème du point fixe en utilisant des applications.
Dans ce mémoire, nous avons considéré les théorèmes du point fixe et application aux équations aux dérivées partielles. On a structure ce mémoire en quatre chapitres et annexe comme suit :
Dans **le premier chapitre**, nous rappelons des résultats préliminaires de l'analyse fonctionnelles.
Pour **le deuxième chapitre**, nous étudions quelques théorèmes principaux du point fixe on particulier le théorème de Picard, de Brouwer, de Schauder et de Schauder-Tychonoff.
Le troisième chapitre, Dans ce chapitre nous présentons un rappel sur les aux équations aux dérivées partielles. Et **le dernier chapitre**, représente l'importance de ce mémoire, l'application de la théorie du point fixe sur les équations aux équations aux dérivées partielles.

Notations générales

Certaines notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous lisons ci-dessous :

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
$\lvert . \rvert$	Valeur absolue ou module.
η	le vecteur unité normal extérieur par rapport à $\partial\Omega$.
∇u	Le gradient de u.
Δu	Laplacien de u.
$div\ u$	la divergence de u.
$\lVert . \rVert_p = \left(\int_\Omega \lvert f \rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$	la norme de fonction f dans $L^p(\Omega)$.
$s.e.v$	Sous espace vectoriel.
$(\cdot,\cdot)$	produit scalaire dans V, si V est espace de Hilbert.
C_b	Le complémentaire
$\mathcal{D}$	Espace des fonctions tests pour les distributions.

Chapitre 1

préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et résultats préliminaires nous utiliserons dans la suite du mémoire.

1.1 Espace métrique

Définition 1.1. *une distance(métrique) sur un ensemble $E \neq \emptyset$, est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in E$
2. $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in E$
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \forall x, y, z \in E$

Définition 1.2. *Un espace métrique est un couple (E,d) où E est un ensemble et d est une distance.*

Définition 1.3. *(Boule) Soit (X,d) un espace métrique, a un point de X et $r > 0$, on définit la boule (ouverte) de centre a et rayon r par :*

$$B(a,r) = \{x \in X : d(a,x) < r\}$$

1.2 Sous-ensemble ouvert

Définition 1.4. *Le sous ensemble U de l'espace métrique (X,d) est dit ouvert si :*

$$\forall x \in U, \exists r > 0 \qquad telque \qquad B(x,r) \subset U$$

1.3 Sous-ensemble fermé

Définition 1.5. *Le sous ensemble F de l'espace métrique (X,d) est dit fermé si son complémentaire C_X^F est ouvert.*

1.4 Adhérence d'un sous ensemble

Définition 1.6. *Soit $A \subset X$, un sous-ensemble de l'espace métrique X*
on définit l'adhérence $\overline{A}$ de A par :

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$$

Proposition 1.1.

1. *A est fermé $\Rightarrow A = \overline{A}$*
2. *$\overline{A} = \{x \in X : \exists$ une suite $(x_n)_n \subset A$ telle que $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n) = x\}$*

1.5 Voisinages

Définition 1.7. *Soit (X,d) un espace métrique et $a \in X$.*
On dit que $V \subset X$ est un voisinages de a dans X s'il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $a \in U \subset V$.

1.6 Suite de Cauchy

Définition 1.8. *Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite suite de Cauchy dans E si : $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N$: $\forall n > n_0, \forall m > n_0, \|x_n - x_m\| < \varepsilon$*

Définition 1.9. *On dit qu'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* E *converge vers* $\ell \in E$ *si :* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall n > n_0$, $\|x_n - l\| < \varepsilon$

Remarque 1.1.

— *Toute suite convergente est de Cauchy.*

— *Toute suite de Cauchy est bornée.*

1.7 Espace métrique complet

Définition 1.10. *L'espace métrique* (X,d) *est dit complet si toute suite de Cauchy dans* X *converge dans* X.

1.8 Espace de Banach

Définition 1.11. *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet*

1.9 Espace de Hilbert

Définition 1.12. *On appelle produit scalaire sur l'espace vectoriel* E *toute forme bilinéaire, symétrique non dégénérie, définie positive autrement dit, toute application* φ *de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant :*

1. $\forall (x,y) \in E^2, \varphi : (x,y) \to \varphi(x,y)$ *est linéaire.*

2. $\forall (x,y) \in E^2, \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$

3. $x = 0,\ \varphi(x,x) = 0\ \forall x \in E$

4. $\forall x \in E \backslash \{0\}, \varphi(x,x) > 0.$

Définition 1.13. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel* H *muni d'un produit* $\langle u,v\rangle$ *scalaire et qui est complet pour la norme*
$\|u\| = \langle u,v\rangle^{\frac{1}{2}}$

1.10 Application Lipschitzienne

Définition 1.14. *Soient* (X,d_x)*et*(Y,d_y) *deux espaces métriques et* $f : X \to Y$ *une application. On dit que* f *est Lipschitzienne s'il existe* $k \geq 0$ *telle que :*

$$\forall x,y \in X, d_y(f(x),f(y)) \leq kd_x(x,y). \tag{1.1}$$

1. *Le plus petit réel k qui vérifie (1.1)est appelé constante de Lipschitz.*
2. *Si* $k \in [0,1[$ *, application* f *est dite contractante.*
3. *Si* $k = 1$*, l'application* f *est dite non-expansive.*

1.10.1 Application contractive

Définition 1.15. *Soit* (X,d) *un espace métrique* f *une application de* X *dans* X*,elle est dite contractante si et seulement si*

$$d(f(x),f(y)) < d(x,y)$$

Elle dite strictement contractante si et seulement si $\exists\ k < 1$ *telle que*

$$d(f(x),f(y)) \leq kd(x,y)$$

Définition 1.16. *Soit* (X,d) *et* (Y,δ) *deux espaces métriques* $f : X \longrightarrow Y$ *est dit contractant s'il existe une constante* $k \in]0,1[$ *telle que*

$$\forall (x,y) \in X^2\ \delta(f(x),f(y)) \leq kd(x,y)$$

i.e telle que f *soit k-Lipschitzienne*

1.11 Compacité

Définition 1.17. *soient E un ensemble quelconque et A une partie de E. Un recouvrement de A est une famille* $(B_i)_{i\in I}$ *Des parties de E vérifiant :*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} B_i$$

Définition 1.18. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé. On dit que E est relativement compact si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des partie de E dans le diamètre est inférieure à ε.*

Corollaire 1.1. *Soit $(E, \|.\|)$ est un espace vectorielle normé sur $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ de dimension fini. Les parties relativement compactes de E sont les parties bornées.*

Définition 1.19.

1. *Un espace normé $(E, \|.\|)$ est dit compact s'il est relativement compact et complet.*
2. *Une partie A d'un espace normé $(E, \|.\|)$ est dite compacte si le sous-espace normé $(A, \|.\|_A)$ est complet.*

Théorème 1.1. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectorielle normé sur $\mathbb{R}$*
où C de dimension fini. Alors les parties compactes de E sont les parties fermées et bornées de E.

1.11.1 Applications compactes

Définition 1.20. *Soient E un espace de Banach et $\Omega \subset E$, $f : E \to E$ une application.*

a. *On dit que f est compacte si $f(\Omega)$ est compact*
b. *L'application f est dite totalement bornée si $f(A)$ est relativement compacte pour tout sous ensemble bornée A de E*
c. *L'application f est dite complètement continue si f est continue et totalement bornée.*

Remarque 1.2. *Toute application continue et compacte est complètement continue. La réciproque est vraie si Ω est borné.*

1.12 Convexité

Définition 1.21. *On dit que $C \subset E$ est un ensemble convexe si :*
$\forall t \in [0,1]$, $\forall (a,b) \in C^2$, $t \times a + (1-t) \times b \in C$

Théorème 1.2. *Soient (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques avec Y complet.*
Alors l'ensemble $C_b(X,Y)$ est complet pour la distance uniforme

$$d_\infty(f,g)=\sup_{x\in X}\{d_Y(f(x),g(x))\}$$

$C_b(X,Y)$ est l'ensemble des fonctions continues et bornées de X dans Y.

1.13 Différentiabilité :

Définition 1.22. *(différentielle premiére) Soient E,F deux espace vectorielles normés sur $k=\mathbb{R}$ et soit U un ouvert de E.On dit que $f:U\longrightarrow F$ est différentiable au point $a\in U$,s'il existe une application $g_a\in\mathcal{L}(E,F)$ vérifiant :*

$$f(a+h)-f(a)=g_a(h)+\theta(h)$$

où $\theta(h)$ est un élément de F tel que :

$$\lim_{||h||\to 0}\frac{||\theta(h)||_F}{||h||}=0. \qquad h\in E$$

-l'application g_a est appelée la différentielles de f au point $a\in U$, on l'a note df_a ou $Df(a)$.
-$Df(a)\longrightarrow\mathcal{L}(E,F)$ est appelée l'application différentielles.
-si de plus Df est continue, on dit que f est continument différentiable sur U ou $f\in C^1(U,F)$.

Définition 1.23. *(Différentielle d'ordre supérieur) On dit que f est n fois différentiable au point $a\in U$. Si l'application :*

$$\begin{cases} D^{n-1}f: & U\longrightarrow\mathcal{L}_n(E,F)\\ & a\longmapsto D^{n-1}f(a)\end{cases}$$

est différentiable au point $a\in U$.
ainsi $D^nf(a)=D(D^{n-1})f(a)$, donc la différentielles d'ordre n de f ou point $a\in U$ est une application n-linéaire continue de E^n dans F.

Propriété 1 : (Existence)

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f\in C\Big(\Omega,\mathbb{R}^N\Big)$ un point cible n'appartenant pas à

$f()\partial\Omega$.si $deg(f,\Omega,b) \neq 0$ alors l l'équation $f(x) = b$ admet au moins une solution dans Ω.

Propriété 2 : (Identité)

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}^N$.En désignant par I l'application identité, on a :

$$deg(f,\Omega,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b \in \Omega \\ 0 & \text{si } b \neq \bar{\Omega} \end{cases}$$

Chapitre 2

Quelques Théorèmes du point fixe

2.1 Théorème du point fixe du type Brouwre-Schauder

Les théorèmes de ce paragraphe expriment que toute application continue d'un ensemble convexe, compact dans lui-même possède un point fixe.

2.1.1 Le théorème du point fixe de type Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorème du point fixe.
Il existe plusieurs formes du théorème selon le contexte d'utilisation, la plus simple est partie donnée sous la forme suivante :

Dans le plan : Toute application T continue du disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe. Il est possible de généraliser à toute dimension finie.

Dans un espace euclidien : Toute application continue d'une boule fermée d'un espace ecludien dans elle-même admet un point fixe.
Il peut encore être un peu plus géneral :

Convexe compact : Toute application continue T d'un convexe compact K d'un espace euclidien à valeur dans K admet un point fixe.

a. Théorème Brower en dimension un

On note $[a, b]$ le domaine de définition de T . L'application T est continue et à valeurs dansle même segment . Dire que cette application admet un point fixe , revient à dire que son graphe croise celui de l'application définie sur $[a, b]$, qui àa x associe x , une démonstration n'est pas àdifficile à établir. Considérons l'application continue

$$Fx = Tx - x$$

Elle est positive en a , négative en b. Le théorème de Bolzano cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires que l'application F possède un zéro dans $[a, b]$ ce zéro de F est un point fixe de T.

En dimension deux , un raisonnement intuitif permet de montrer que le résultat est probablement vria. La démonstration est néanmoins plus délicate :

b.Théorème de Brower en dimension deux

Si K , le domaine de définition de T est d'intérieur vide, c'est un segment. Sinon, K est semblale à une boule unité fermée . Le terme semnlable signifie qu'il existe un homéomorphisme ϕ de la boule unité vers K. L'equation définissant le point fixe peut encore s'écrire :

Si $h = T \circ \phi, h(x) = x$, Autrement dit , on peut supposer que K est la boule unité fermée. On peut de plus choisir la norme de manière quelconque . Si on choisit celle qui qssocie la valeur K , l'ensemble $[-1, 1] \times [-1, 1]$, sana perte de généralité, Si l'on définit la fonction F comme suit :

$$\begin{aligned} F : [-1, 1] \times [-1, 1] &\longrightarrow [-1, 1] \times [-1, 1] \\ x &\longmapsto F(x) = h(x) - x \end{aligned}$$

Théorème 2.1. *La boule B_n a la propriété point fixe pour tout $n \in \square$*
Schauder va généraliser le résultat de Brower en dimension infinie :

2.2 Théorème du point fixe de type de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat de du théorème de Brower pour l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach, Le théorème du point fixe de Schuader est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe copmact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique .

Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.2. *Soit K un sous ensemble non vide , compact et convexe d'un espace de Banach X et supposons* $T : K \longrightarrow K$ *une application continue , compact K est compact T est uniformément continue; donc si on fixe* $\varepsilon > 0$ *, il existe* $\delta > 0$ *tel que , pour tout* $x, y \in K$ *on ait* $\|T(x) - T(y)\| \leq \varepsilon$ *dès que* $\|x - y\| \leq \delta$

De plus, il existe un ensemble fini des points $\left\{x_1, x_2, ..., x_p\right\} \subset K$ *tel que les boules ouvertes de rayon* δ *centrées aux* x_i *recouvent K ; i.e*

$K \subset \bigcup B(x_j, \delta)$ *Si on désigne* $L := Vect(T(x_j))$ *alors L est de dimension finie , et pour* $1 \leq j \leq p$ *, on définit la fonction continue* $\psi : E \longrightarrow \square$ *par :*

$$\psi = \begin{cases} 0 & si\|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & sinon \end{cases}$$

Et on voit que ψ_j *est strictement positive sur* $B(x_j, \delta)$ *et nulle dehors.*

On a donc, pour tout $x \in K, \sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$ *et donc on peut définir sur K les fonctions continue positives* φ_j *par :*

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x)}$$

pour lesquelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x)$ *pour tout* $x \in K$ *On pose alors , pour* $x \in K, g(x) := \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j)$ *. g est continue (car elle est la somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans* K^* *(car* $g(x)$ *est un barycentre des* $T(x_j)$*))*

Donc, si on prend la restriction $g : K^* \longrightarrow K^*$ *(d'après*)g possède un point fixe* $y \in K^*$

De plus :

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(y) - (T(y) - T(x_j)) \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ *alors* $\|y - x\| < \delta$ *et donc* $\|T(y) - T(x_j)\| < \varepsilon$. *Donc, on a pour tout* j *:*

$$\begin{aligned} \|f(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(y) - (T(y) - T(x_j)) \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} \varepsilon \varphi_j(y) \end{aligned}$$

Donc , pour tout entier m, *on peut trouver un point* $y_m \in K$ *tel que* $\|T(y_m) - y_m\| < 2^{-m}$. *Et puisque* K *est compact , de la suite* $(y_m)_{....}$ *on peut extraire une sous-suite* (y_m) *qui converge vers un point* $y^* \in K$ *.Alors* f *étant continue , la suite* $(T(y_m))$ *converge vers* $T(y^*)$, *et on conclut que* $T(y^*) = y^*$ *, i.e.* y^* *est un point fixe de* T *sur* K.

Remarque 2.1. *De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes précités, en réduisant le problème d'existence à un problème de point fixe citons à titre d'exemple le théorème de Peano*

2.3 Théorème du point fixe de picard

Théorème de Picard

Le théorème du point fixe de picard dit qu' une contraction d'un espace métrique complet a un point fixe unique.Ce théorème donne un comportement régulier du point fixe par rapport aux paramètres. De plus ,il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée.Mais d'une part,montrer que la fonction est contractante peut entrainer de laborieux calculs.D'autre part , les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème

Théorème 2.3 (Théorème de Picard)**.** *Soient* (E, d) *un espace métrique complet et* $\varphi : E \longrightarrow E$ *une application contractante*
ie : Lipschitzienne de rapport $k < 1$ *.*
Alors φ *admet un unique point fixe* $a \in E$ *. De plus , pour tout point initial* $x_0 \in E$ *la suite itérée* $\left(x_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ *avec* $x_0 \in E$ *quelconque et* $x_{p+1} := \varphi\left(x_p\right)$ *converge vers* a.

Preuve On montre d'abord l'unicité d'un point fixe puis son existence .

1. Unicité : Supposons qu'il existe $a, b \in E$, $a \neq b$ tel qu'on ait $\varphi(a) = a$ et $\varphi(b) = b$. Alors on a $d(\varphi(a), \varphi(b)) = d(a,b)$ et donc $\dfrac{d(\varphi(a), \varphi(b))}{d(a,b)} = 1 > k$ ce qui contradit le fait que f soit k-Lipschitzienne .

2. Existence : Soit x_0 un point initial quelconque et $\left(x_p\right)$ la suite itérée associée on a montré par récurrence sur p que $d\left(x_p, x_{p+1}\right) \leq k^p d\left(x_0, x_1\right)$ (P) .

   -Initialisation : évident pour $p = 0$

   -Généralisation :Supposons que pour un certain entier p quelconque mais fixé on ait la propriété (P) .

   Alors

$$\begin{aligned} d\left(x_p, x_{p+1}\right) &= d\left(\varphi\left(x_p\right), \varphi\left(x_{p+1}\right)\right) \\ &\leq kd\left(x_p, x_{p+1}\right) \\ &\leq k.k^p d\left(x_0, x_1\right) \\ &\leq k^{p+1} d\left(x_0, x_1\right) \end{aligned}$$

   ce qui achève la récurrence.

   On a alors £$\forall q > p$:

$$d\left(x_p, x_q\right) \leq \sum_{l=p}^{q-1} d\left(x_l, x_{l-1}\right) \leq \left(\sum_{l=p}^{q-1} k^l\right) d\left(x_0, x_1\right)$$

   de plus pour tout $p > q, \sum_{l=p}^{q-1} k^l \leq \sum_{l=p}^{\infty} k^l = \dfrac{k^p}{1-k}$ d'oû $d\left(x_p, x_q\right) \leq \dfrac{k^p}{1-k} d\left(x_0, x_1\right)$ on en déduit alors que (x_p) est une suite de Cauchy. comme (E, d) est complet, la suite (x_p) converge vers un point limité $a \in E$.De plus on a $\varphi\left(x_p\right) \longrightarrow \varphi(a)$ quand $p \longrightarrow +\infty$ car φ est continue et $\varphi\left(x_p\right) = x_{p+1}$. Or $x_{p+1} \longrightarrow a$ quand $p \longrightarrow +\infty$, d'où par unicité de la limite on a $\varphi(a) = a$.

Contre exemple : Les exemples suivants montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire.

1. X n'est pas stable par f : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$sur $X = [0,1]$.

   Or X est fermé dans $\mathbb{R}$, est complet car $\mathbb{R}$ est complet. De plus, $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \implies \sup_{x \in X} |f'(x)| \leq 1 \implies f$ est contractante. mais f n'a pas de point fixe car

$f([0,1]) = \left[1, \sqrt{2}\right]$.

i.e : X n'est pas stable par f.

2. f n'est pas contractante : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0,+\infty[$.

   Or $f : X \longrightarrow X$ et X est un fermé de $\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$ est complet donc X est complet . Mais $\sup_{x\in X} |f'(x)| = 1$ donc f n'est pas contractante.

3. X n'est pas complet : $f(x) = \dfrac{\sin x}{2}$ sur $X = \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

   Or $f\left(\left]0,\dfrac{\pi}{4}\right]\right) = \left]0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \subset \left]0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ et $\sup_{x\in X} |f'(x)| = \dfrac{1}{2}$ donc ,f est contractante. mais X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc pas complet.

Proposition 2.1. *Une application continue $f : K \longrightarrow K$ avec K compact métrisable telle que pour tout couple de points distincts (x,y) de K, $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$, admet un unique point fixe a. De plus, pour tout $x_0 \in K$, la suite $(f^n(x_0))_n$ converge vers a.*

Exemple :

la fonction $f = [-\pi,\pi] \longrightarrow [-1,1]; x \longmapsto \sin x$ possède un unique point fixe(en l'occurrence 0) .

Proposition 2.2. *Soit u un ouvert d'un espace de Banach et f une application de classe C^1 de u dans F Banach on suppose que pour tout x dans u $\|df(x)\| \leq K$ avec $K < 1$*

Alors f est strictement contractante

Exemple 2.1. *On considère $x = \mathbb{R}^2$ et, on s'intéresse à la fonction*

$f(x,y) = (\sin(x+y)/2+5, \cos(x+y)/2-10)$

Eelle est strictement contractante et donc admet un unique point fixe

2.4 Théorème du point fixe de de Schauder

Théorème 2.4. ***Schauder 1930***

Soit $\mathbb{C}$ un sous ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espase de Banach X et $K : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application compacte.Alors K admet au moins un point fixe.

Démonstration :

1 étape : *On suppose* $\mathbb{C} = B(0,R)$ *la boule de rayon* R

S'il existe $x_0 \in \partial C$ *telque* $K(x_0) = x$*; il n'ya rien à démontrer. Sinon, pour tout* $t \in [0,1]$*, le degré* $deg(K_t, C, 0)$*, oû* $K_t = I - tK$*, est bien défini. En effet, s'il existe* $x \in \partial C, tK(x) = x$*,alors* $R = \|x\| = t\|K(x)\| \leq Rt$ *car* $K(C) \subset C$ *et donc* $t = 1$ *ce quiconduit a une contraction avec* $\|K(x)\| = R = \|x\|$*. Le dégré donc est bien défini et vaut,par homotopie,* $deg(K, C, 0) = 1$*, d'oû le resultat.*

2 étape : *C est unnconvexe, fermé, borné, non vide.*

On considère une rétraction continue $r : X \longrightarrow C$ *et* B *une boule contenant* C*.*

Soit le diagramme $B \longrightarrow C \longrightarrow B$ *.L'application* $K \circ r$ *est compacte car* K *est compacte et* r *bornée.D'aprés la première étape, l'application* $K \circ r$ *admet un point fixe* $x_0 \in B, x_0 = (K \circ r)(x_0)$ *On a* $r(x_0) \in C$ *et par hypothèse,* $K(C) = C$*, alors* $K(r(x_0)) \in C$ *et donc* $x_0 \in C$*.*

2.5 Théorème du point fixe de Schauder-Tychonoff

Théorème 2.5. *Toute ensemble compact et convexe dans líespace de Hausdorff topologique , linèaire, et localement covexe, admet une propriété de point fixe.*

Théorème 2.6. *(Convergence des itérations de point fixe) : On se donne* $x^{(0)}$ *et on considère la suite* $x^{k+1} = f(x^{(k)})$*, pour* $k \geq 0$*. Si*

1. $\forall x \in [a,b], f(x) \in [a,b]$,
2. $f \in C^1([a,b])$,
3. $\exists K < 1 : |f'(x)| \leq K \quad \forall x \in [a,b]$,

alors f *a un unique point fixe* α *dans* $[a,b]$ *et la suite* $\left\{x^{(k)}\right\}$ *converge vers* α *pour tout choix de* $x^{(0)} \in [a,b]$*.De plus, on a*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = f'(\alpha) \tag{2.1}$$

Démonstration :*L'hypothèse 1 et la continuité de* f *assurent que la fonction d'itération* f *a au moins un point dans* $[a,b]$*. L'hypothèse 3 implique que* f *est une contraction et assure l'unicité du point fixe.*

Supposons en effet qu'il existe deux valeurs α_1 *et* $\alpha_2 \in [a,b]$ *telles que* $f(\alpha_1) = \alpha_1$ *et* $f(\alpha_2) =$

α_2.Un développement de Taylor donne

$$|\alpha_2-\alpha_1| = |f(\alpha_2)-f(\alpha_1)| = |f'(\eta)(\alpha_2-\alpha_1)| \leq |\alpha_2-\alpha_1| < |\alpha_2-\alpha_1|,$$

avec $\eta \in]\alpha_1, \alpha_2[$ d'où on déduit $\alpha_2 = \alpha_1$.
On utilise à nouveau ce développement pour analyser la convergence de la suite $\left\{x^{(k)}\right\}$
Pour $k \geq 0$, il existe une valeur $\eta^{(k)}$ entre α et $x^{(k)}$ telle que

$$x^{(k+1)} - \alpha = f(x^{(k)}) - f(\alpha) = f'(\eta^{(k)})(x^{(k)} - \alpha) \tag{2.2}$$

d'où on déduit que $|x^{(k+1)}-\alpha| \leq K|x^{(k)}-\alpha| \leq K^{k+1}|x^{(0)}-\alpha| \to 0$pour $k \to \infty$ Ainsi, $x^{(k)}$ converge vers α et 2.2 implique que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)}-\alpha}{x^{(k)}-\alpha} = \lim_{k\to\infty} f'(\eta^{(k)}) = f'(\alpha)$$

D'où on 2.1
La quantité $|f'(\alpha)|$ est applée facteur de convergence asymptotique, et par analogie avec les méthodes itératives pour les système linèaires, on peut définir le taux de convergence asymptotique par

$$R = -\log(|f'(\alpha)|)$$

Le théorème 2.2 assure la convergence, avec un ordre 1, de la suite $\left\{x^{(k)}\right\}$ vers la racine α pour tout choix d'une valeur initiale $x^{(0)} \in [a,b]$ Il constitué donc un exemple de résultat de convergence globale.

Corollaire 2.1. *Si l'application continue est définit sur un domain D dans líespace de Hausdorff topologique linèaire localement convexe, et on prend les valeurs dans sous ensemble convexe et compact dans D, alors admet un point fixe.*

Démonstration : *Soint $F : D \to K$ où K un ensemble compact et convexe dans D. Alors la restriction de F vers K est un application continu de K vers K : DíaprÈs le théorème de Schauder-Tychonoff, $F|K$ admet un point fixe. On va démontrer líexistence pour les solutions des Èquations différentielles. On considère le problème avec la valeur initiale pour le système des équations différen-tielles de premier ordre :*

$$\begin{cases} y_i'(x) = f_i(x, y_1(x)\cdots, y_n(x)), (1 < i < n) \\ y_i(0) = 0, (1 < i < n) \end{cases}$$

Cette écriture compactlement sous la forme

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

où $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ *et* $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$.
Malgré ça le choix des valeurs initiales $y_i(0) = 0$ *généralement sacrifce, cette valeurs initiales toujours on peut donne par changement de variable. On change x par* $x - \alpha$ *un point initial, et on change* y_i *par* $y_i - c_i$ *un valeurs iniales.*
L'espace $C_n[a, b]$ *est consiste an-ensembles des fonctions dans* $C[a, b]$.
Si $y = (y_1, \cdots, y_n) \in C_n[a, b]$, *on écrit*

$$\|y\|_\infty = \sup_{a \le x \le b} \|(y_1(x), \cdots, y_n(x)\|_1 = \sup_{a \le x \le b} \|y(x)\|_1$$

où $\|\|_1$ *désigne de la norme* l^1 *de* $\mathbb{R}^n$ *C'est-à-dire*

$$\|u\| = \sum_{i=1}^{n} |u_i| siu = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$$

Chapitre 3

Introduction aux équations différentielle

3.1 Définition

Les équations différentielles jouent un role important en mathématiques et plus particulièrement en dynamique de population, en physique mathématiques, en électronique, en électro-dynamique

Les équations différentielles sont l'outil principale permettant de modéliser un mouvement.
En effet une équations différentielles est une équations liant une fonction et ses dérivées.

La forme générale d'une telle équation dans le cas d'une seule fonction dépendant d'une seule variable :

$$y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + A_n(x)y = d(x)$$

où $A_i(x)$, $i = 1\widehat{,\cdots,}n$ sont des coefficients qui n'ont pas nécessairement constantes.
On obtient ainsi les équations à coefficients constants d'importance pratique considérable et que nous étudierons

3.2 Formulation des équations différentielles :

3.2.1 Équations différentielles ordinaire (EDO) :

Définition 3.1.

Une équation différentielles ordinaire, également noté EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelles t, une fonction inconnue $t \mapsto x(t)$ et ses dérivées $x', x'', \cdots, x^{(n)}$ au point t défini par :

$$F(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0 \tag{3.1}$$

où F n'est pas indépendante de sa dernière variable $x^{(n)}$, on prendera t dans un intervalle I, (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier).

La solution x en générale sera à valeur dans $\mathbb{R}^n$. On dit que cette équation est scalaire si F est à valeur dans $\mathbb{R}$.

Équation différentielles normale :

On dit que l'équation différentielles est sous forme noramale (ou résoudre par rapport à la dérivées d'ordre supérieur) si on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}). \tag{3.2}$$

Équation différentielles autonome :

on appelle équations différentielles autonome d'ordre n tout équations de la forme suivante :

$$x^{(n)} = f(x, x', \cdots, x^{(n-1)}) \tag{3.3}$$

Autrement dit : f ne dépend pas explicitement de t.

- *Toute équation différentielles scalaire peut être écrite comme un système d'équations différentielles de premier ordre en introduction $n-1$ fonctions définies comme :*

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \\ \vdots \\ x_n = x^{(n-1)} \end{cases}$$

L'équation scalaire se met sous la forme du système d'EDO d'ordre 1 *suivant :*

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_n' = f(t, x, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

- *Soient U ouvert d'un espace de Banach E et I ouvert de $\mathbb{R}$ pour $f : I \times U \longrightarrow E$, considérons une équations différentielles ordinaire du premier ordre :*

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{3.4}$$

  - *Une solution x de (3.4) est une fonction de classe C^1 sur un intervalle $J \subset I$ et à valeur dans U.*
  - *On rappelle condition initiale de l' équation (3.4) une valeur $(t_0, x_0) \in I \times U$ tel que la solution cherchée x satisfaite à la condition $x(t_0) = x_0$.*

Problème de Cauchy :

Définition 3.2. *On rappelle problème de Cauchy ou problème à valeur initiale le problème qui consiste à trouver une fonction $x(t)$ définie sur un intervalle $[t_0, T] \subset I$ tel que :*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t));\ \forall t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

- *Une solution du problème de Cauchy sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ avec condition initiale $(t_0, x_0) \in I \times U$ est une fonction dérivable $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que :*

i) pour tout $t \in I$, $(t, x(t)) \in I \times U$

ii) pour tout $t \in I$, $x'(t) = f(t, x(t))$

iii) $x(t_0) = x_0$

L'équivalence du problème de Cauchy avec la résolution d'une équations intégrale :

Théorème 3.1.

Soit $f : I \times U \to E$ une application continue, I un ouvert de $\mathbb{R}$ et U ouvert non vide d'un espace de Banch E et (t_0, x_0) un point fixe de $I \times U$ et x une fonction définie sur J ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient t_0
Alors x est une solution de problème de Cauchy (3.5) sur J si et seulement si :

i) $\forall t \in J$, $(t, x(t)) \in J \times U$

ii) x *est continue sur* J

iii) $\forall t \in J$, $x(t) = x_0 + \in_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$

Démonstration. Soit $x : J \to U$ une fonction sur J
" $\Rightarrow$ " Supposons que x est une solution du problème de Cauchy (3.5) alors x est dérivable sur I et vérifie :

$$\begin{cases} x'(t)f't, x(t)); \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

En effet :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} x'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \Rightarrow [x(s)]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \\ \Rightarrow x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \\ \Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \\ \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ " Supposons que $\forall t \in J$, x vérifier

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Alors d'après la condition de x et f, on dérive x par rapport à t on obtient :

$$x'(t) = f(t, x(t)), \ \forall t \in J$$

et x vérifier $x(t_0) = x_0$ d'où x est la solution de problème (3.5). □

Solutions maximale et global :

Définition 3.3. *(Prolongement) Soient (x, I) et $(\tilde{x}, \tilde{I})$ deux solutions d'une même équations différentielles. On dira que $(\tilde{x}, \tilde{I})$ est un prolongement de (x, I) si $I \in \tilde{I}$ et $\tilde{x}/_I = x$.*

Définition 3.4. *(solution maximale)*

Soient I_1 et I_2 deux intervalle sur $\mathbb{R}$ tel que : $I_1 \subset I_2$ on dit qu' une solution (x, I_1) est maximale dans I_2 si et seulement si : x n'admet pas de prolongement $(\tilde{x}, \tilde{I})$ solutions d'équation différentielles tel que : $I_1 \subset \tilde{I} \subset I$.

Définition 3.5. *(solution globale)*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, une solution (x, I) est dite globale dans I si elle est définie sur l'intervalle I tout entier

Remarque 3.1.

i) En reprenant les même notations que dans les définitions précédentes, si une solution (x, I_1) peut se prolonger sur l'intervalle I_2 tout entier, alors x est globale dans I_2.

ii) Tout solution globale est maximale mais la réciproque est fausse.

Exemple 3.1. *(E) $y' = y^2$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Cherchons les solutions $t \mapsto y(t)$ de (E).*

- *On a d'une part la solution $y(t) = 0$.*
- *Si y ne s'annule pas, (E) s'ecrit $\frac{y'}{y^2} = 1$, d'où par intégration*

$$\frac{-1}{y(t)} = t + c \Rightarrow y(t) = \frac{-1}{t + c}$$

Cette formule définit en fait deux solutions, définies respectivement sur $]-\infty, -c[$ et sur $]-c, +\infty[$; ces solutions sont maximales mais non globale.Dans cet exemple $y(t) = 0$ est la seule solution globale de (E).

Régularité des solutions :

Rappelons qu'une fonction de plusieurs variables est dite de classe C^k si elle admet des dérivées partielle continues jusqu'à l'ordre k.

Théorème 3.2.

Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^k, tout solution de (E) $x'(t) = f(t, x(t)$ est de classe C^{k+1}

Démonstration. On raisonne par récurrence dur k.

Pour $k = 0$, f est continue

Par hypothèse $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ est dérivable, donc continue. Par conséquent $x'(t) = f(t, x(t))$ est continue, donc x est de classe C^1.

Si le résultat est vrai à l'ordre $k-1$, alors x est au moins de classe C^k. Comme f est de classe C^k, il s'ensuit que x' est de classe C^k, donc x est de classe C^{k+1} □

L'existence et l'inutilité de solutions :

Rappelons maintenant deux résultats d'existence et d'unicité pour (3.5).

1. **Existence local et unicité :** On suppose $f(t,x)$ localement Lipschitzienne en (t_0, x_0) par rapport à x, ce qui signifie qu'il existe une boule ouvert $J \subseteq I$ centrée en t_0 de rayon r_J, une boule ouverte B centrée en x_0 de rayon r_B et une constante. $L > 0$ telles que :

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \ \forall t \in J, \ \forall x_1, x_2 \in B \tag{3.6}$$

   Sous cette hypothèse, le problème de Cauchy (3.5) admet une unique solution dans une boule ouverte de centre x_0 et de rayon r_0 avec $0 < r_0 < min(r_J; r_B/M; 1/L)$; où M est le maximum de $|f(t,x)|$ sur $J \times B$.

   Cette solution est appelée solution local

2. **Existence global et unicité :** Le problème de Cauchy admet une solution globale unique Si on peut prendre dans (3.6)

$$J = I, B = \mathbb{R};$$

C'est-à-dire , si f est uniformément Lipschitzienne par rapport à x : En vue de l'analyse de stabilité du problème de Cauchy, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, x(t)) + \delta(t), \ \forall t \in I \\ y(t_0) = x_0 + \delta_0, \end{cases}$$

Où $\delta_0 \in \mathbb{R}$ et δ une fonction continue sur I.

Le problème (3.6) est déduit de (3.5) en perturbant la donnée initiale x_0 et la fonction f. Caractérisons à présent la sensibilité de la solution y par rapport à cas perturbations

3.2.2 Équation aux dérivées partielles (EDP) :

Définition 3.6. *(EDP d'ordre 1) Une équation aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre est une fonction de la forme :*

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, u, \frac{du}{dx_1}, \cdots, \frac{du}{dx_n}\right) = 0 \tag{3.7}$$

avec :

u : la fonction chercher

$x_1, \cdots, x_n$: les variables indépendants

$\left(\frac{du}{dx_1}, \cdots, \frac{du}{dx_n}\right)$: $\overrightarrow{grad}(u) = \nabla u(x)$ les dérives dérivées partielles du premier ordre du u.

Dans le cas de deux variables x, y on a :

$$F\left(x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}\right) = 0$$

De manière générale : *une équation aux dérivées partielles (EDP) est une relation entre une fonction de plusieurs variables et ses dérivées.Elle est de la forme $(m \geq 1)$: pour tout $x \in \Omega$*

$$F\left(u, \frac{du}{dx_1}, \cdots, \frac{du}{dx_n}, \cdots, \frac{d^m u}{dx_n^m}\right) = f(x) \tag{3.8}$$

Où f est une fonction donnée définie sur Ω. L'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'appelle le domaine de l'EDP. L'indice de plus haut degré des dérivées dans (3.8) ici m est sont degré, si $f = 0$ l'EDP est dite homogène. Si F et u sont des fonctions à valeurs vectorielles, alors L'EDP est dite linéaire.

Chapitre 4

Quelques Applications des Théorèmes du Point Fixe

4.1 Théorème de Cauchy Lipschitz

Ce théorème est une application du théorème de Picard. En effet, nous verrons qu'une façon de l e démontrer est d'appliquer le théorème pré cédent avec E un ensemble de fonctions et φ une applicati on bien choisie. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application continue. On intro duit le problème de Cauchy (C) suivant : Étant donné $(t_0;x_0)\in U$, trouver une solution $x : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ de l'équation différentielle $(E)x' = f(t,x),(t,x)\in U$ telle que $t_0 \in I$ et $x(t_0) = x_0$

Définition 4.1. *(Cylindre de sécurité) Soient $T > 0$ et $r_0 > 0$. On dit que $C = [t_0 - T, t_0 + T]\times B(x_0,r_0)$ est un cylindre de sécurité pour (C) si toute solution $x : I \to \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy $x(t_0) = x_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $B(x_0,r_0)$.*

Définition 4.2. *f est localement lipschitzienne par rapport à la variable x sur U si $\forall(r_0,x_0)\in U$, il existe un voisinage V de (r_0,x_0) dans U et une constante $K = K(V)$ telle que $\forall(t,x_1),(t,x_2)\in V$, on ait $\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\| \leq K\|x_1 - x_2\|$.*

Théorème 4.1. *(Cauchy-Lipschitz)*
Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à x sur U, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0-T, t_0+T]\times B(x_0,r_0)$ le problèm e de Cauchy (C) admet une unique

solution $x : [t_0 - T, t_0 + T] \to U$.
De plus, si on pose $\phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du$ *il existe* $p \in \mathbb{N}$ *tel que la suite itérée* $\phi^p(x)$ *converge uniformément vers la solution exacte.*

Démonstration :
On commence par construire un cylindre de sécurité p our (C).
Soit V un voisinage de (t_0, x_0) sur lequel f est k-lipschitzienne par rapport à x, et soient $T_0 > 0$ et $C_0 = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(x_0, r_0) \subset V$ un cylindre. C_0 est un fermé borné de $\mathcal{R}^{m+1}$ donc compact. Et on en déduit alors que f est bornée sur C_0
Soit $M = \sup_{(t,x)\in C_0} \|f(t, x(t))\|$, on pose $T = \min(T_0, \frac{r_0}{M})$
On va montrer que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(x_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité pour (C).
Soit $x : I \subset [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^m$ avec $x(t_0) = x_0$ et $x' = f(t, x), \forall t \in I$. Supposons qu'il existe $\tau \in [t_0 - T, t_0 + T]$ tel que $x(\tau) \in B(x_0, r_0)$. De plus,
supposons que $J = \left\{t \notin [t_0 - T, t_0 + T] : x(t) \in \overline{B}(x_0, r_0)\right\}$ soit non vide . On pose $\tau = \inf J$, alors $\forall t \in [t_0, \tau]$ on a $x(t) \in B(x_0, r_0)$, et de plus $d(x_0, x(\tau)) = r_0$. Comme $(t, x(t)) \in C_0, \forall t \in [t_0, \tau]$ et $x' = f(t, x)$ on a, par le théorème des accroissement finis,

$$\begin{aligned} r_0 = \|x_0 - x(\tau)\| = \|x(t_0) - x(\tau)\| &\leq |t_0 - \tau| \sup_{t\in[t_0,\tau]} |x'(t)| \\ &< MT \leq r_0 \end{aligned}$$

Donc par passage à la limite ($\overline{B}(x_0, r_0)$) étant fermé on a $x(t) \in \overline{B}(x_0, r_0) \forall t \in [t_0, t_0 + T] \cap I$.
De même on montre que $x(t) \in B(x_0, r_0) \forall t \in [t_0 - T, t_0] \cap I$ et donc $x(t) \in B(x_0, r_0) \forall t \in I$.
Dans la suite on travaille avec ce cylindre de sécurité. On remarque que par construction on a $\sup_C |f| = M$ et f est K-lipschitzienne par rapport à x sur C
On note $F = C^0([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(t_0, x_0))$ muni de la distance $d = \|\cdot\|_\infty$ et pour tout $x \in F$ on associe $\phi(x)$ définie par :

$$\phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du$$

On montre d'abord l'équivalence suivante : x est solution de $(C) \Leftrightarrow x$ est un point fixe de ϕ,
$(\Leftarrow)$ Supposons que x est un point fixe de ϕ.Alors $\forall x \in F$ on a $\phi(x) = x$ d'où $x(t) = x_0 +$

$\int_{t_0}^{t} f(u,x(u))du = x_0$. Donc f est solution du problème de Cauchy (C)

$(\Rightarrow)$ Supp osons maintenant que x est solution de (C). On a alors$x'(t) = f(t,x(t))$ et $x(t_0) = x_0$ On peut intégrer x' par rapport à u car $x'(u) = f(ubx(u))$ et $u \to f(u,x(u))$ est continue sur un segment et donc intégrable sur ce même segment.Alors on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} x'(u)du = \int_{t_0}^{t} f(u,x(u))du \Rightarrow [x(u)]_{t_0}^{t} &= \int_{t_0}^{t} f(u,x(u))du \\
&\Rightarrow x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(u,x(u))du \\
&\Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(u,x(u))du \\
&\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u,x(u))du \\
&\Rightarrow x(t) = \phi(x)(t)
\end{aligned}$$

donc x est un point fixe de ϕ

On veut appliquer le théorème de Picard à ϕ^p (pour p bien choisi).

1. On montre d'abord que ϕ est une application de F dans F, pour cela on montre que $\phi(x)(t) \in \overline{B}(x_0,r_0) \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$.

   Soit $x \in F$. On remarque que si $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$

$$\begin{aligned}
\|\phi(x)(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(u,x(u))du \right\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(u,x(u))\|du \\
&\leq M \int_{t_0}^{t} du \\
&\leq M|t - t_0| \\
&\leq MT \leq r_0
\end{aligned}$$

   Donc $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], \phi(x)(t) \in \overline{B}(x_0,r_0)$ d'où $\phi(x)(t) \in F$ et on a évidement la stabilité de F par ϕ^p

2. On montre maintenant que ϕ^p est contractante.

   Soient $x,y \in F$ on note $x_p = \phi^p(y) \forall p \in \mathbb{N}^*$. par récurrence sue p on montre qu'on a :

$$\|x_p(t) - y_p(t)\| \leq K^p \frac{|t - t_0|^p}{p} d(x,y) \tag{4.1}$$

Initialisation : c'est évident dans le cas $p = 0$

Généralisation : Supposons que pour un certain entier p quelconque mias fixé on ait (4.1) .Alors,

$$\begin{aligned}
\|x_{p+1}(t) - y_{p+1}(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^{t} (f(u, x_p(u)) - f(u, u_p(u)) du \right\| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} K \|x_p(u) - y_p(u)\| du \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} K K^p \frac{|u - t_0|^p}{p} d(x, y) du \right| \\
&\leq \frac{K^{p+1}}{p} d(x, y) \int_{t_0}^{t} |u - t_0|^p du \\
&\leq \frac{K^{p+1}}{p} d(x, y) \left[\frac{|u - t_0|^{p+1}}{p + 1} \right]_{t_0}^{t} \\
&\leq K^{p+1} \frac{|t - t_0|^{p+1}}{(p + 1)} d(x, y)
\end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrénce.

Comme $|t - t_0| \leq T$, on a $d(x_p, y_p) \leq K^p \frac{T^p}{p} d(x, y)$, donc ϕ est lipschitzienne de rapport $K^P \frac{T^p}{p}$. Et il existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $K^P \frac{T^p}{p} < 1$(car : $\lim\limits_{p \to +\infty} K^P \frac{T^p}{p} = 0$). Donc, pour $q \geq p \phi^q$ est contractante.

3. La complétude de F

   On déduit du théorème de Picard que ϕ^q admet un unique point fixe x De $\phi^q(\phi(x)) = \phi(\phi^q(x))$ donc $\phi(x)$ est un point fixe de ϕ^q, et par unicité du point fixe de ϕ^q on a $\phi(x) = x$. Comme les points fixe de ϕ sont des point fixes de ϕ^q on en déduit que x est l'unique point fixe de ϕ. Ainsi x est l'unique solution de (C)

4.2 Le Théorème de Cauchy-Arzela

On reprend maintenant le problème de Cauchy pour l'équation $y' = F(t, y(t))$, mias ici on ne sait pas si F est Lipschitzienne. Le théorème de Schauder nous donnera l'existence d'une solution, mias pas nécessairement l'unicité.

Théorème 4.2. *(Cauchy-Arzela).Soient :*

E un espace normé de dimonsion finie, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, F une fonction continue de U

dans E, et (t_0, x_0) un point de U
Alors l'équation différentielle $x' = F(t,x)$ a une solution au voisinage de (t_0, x_0), i,e . el existe un nombre $p > 0$ et une fonction $f : [t_0 - p, t_0 + p] \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f(t_0) = x_0$, telle que pour tout $t \in [t_0 - p, t_0 + p]$,

1. *$(t, f(t)) \in U$*
2. *$f'(t) = F(t, f(t))$*

Démonstration : *Soit $M > \|F(t_0, x_0)\|$. Quitte à remplacer U par l'ensemble ouvert $\{(t,x) \in U : \|F(t,x)\| < I$ on peut supposer que F est majoréeen norme par M sur U. il existe donc $r > 0$ et $h > 0$ tels que $U \supset [t_0 - h, t_0 + h] \times B_f(x_0, r)$ et on choistit $p = \min(h, \frac{r}{M}) > 0$*

On considère l'ensemble K des fonctions M-Lipschitziennes de l'intervalle $J = [t_0 - p, t_0 + p]$ dans E qui valent x_0 et t_0, que l'on munit de la norme uniforme.Si f et g sont dans K et $s \in [0,1]$, alors $sf + (1-s)g \in K$, est convexe. Si.$(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cuachy de K pour la norme uniforme, alors d'après le théorème 12, il exoste une fonction continue $f : J \to E$ telle que f_i converge uniformément vers f.
On a alors $f(t_0) = \lim\limits_{i \to +\infty} f_i(t_0) = x_0$ et $\forall t, t' \in J, \|f(t) - f(t')\| = \lim\limits_{i \to +\infty} \|f_i(t) - f_i(t')\| M|t - t'|$et donc $f \in K$. On en déduit que K est fermé pour la norme uniforme dans $\mathcal{C}^0(J, E)$.

$$\|f(t) - x_0\| = \|f(t) - f(t_0)\| \leq M|t - t_0| \leq Mp \leq r$$

ce qui montre que $K(t) = \{f(t) : f \in K\}$ est contenu dans la boule $B_f(x_0, r)$, et donc $K(t)$ est relativement compact. Et puisque K est uniformément équicontinu, il résulte du théorème 13 que K est compact.
On peut alors définir une application $\phi : K \to \mathcal{C}^1(J, E)$ en posant

$$\phi(f)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s)) ds$$

En effet, si $f \in K$, alors $f(s) \in B_f(x_0, r)$ pour tout $s \in J$, ce qui montre que la fonction $s \longmapsto F(s, f(s))$ est bien définie et continue sur J à valeurs dans E, et possède une primitive $\phi(f)$ de classe $\mathcal{C}^1$, valant x_0 .Puisque la fonction $g := \phi(f)$ vérifie $g'(t) = F(t, f(t))$, on a que $\|g'(t)\| \leq M$, c'est-à-dire que g est M-Lipschitzienne sur J. De plus,$g(t_0) = x_0$. Donc $\phi(K) \subset K$. Enfin, comme F est uniformément continue sur le compact $J \times B_f(x_0, r)$, pour

tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $'s', x'$ appartenant à $J \times B_f(x_0, r)$, on ait $\max(|s - s'|, \|x - x'\|) < \delta \Rightarrow \|F(s,x) - F(s',x')\| < \frac{\varepsilon}{p}$
Alors, si f et f_1 appartiennent à K et si $\|f - f_1\| < \delta$, on a $\forall s \in J, \|F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))\| < \frac{\varepsilon}{p}$
Donc,

$$\begin{aligned}\|\phi(f)(t) - \phi(f_1)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} F(s, f(s)) - F(s, f_1(s)) ds \right\| \\ &\leq |t - t_0| sup \|F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))\| \\ &\leq p\frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Ceci montre que $\|\phi(f) - \phi(f_1)\| \leq \varepsilon$, i.e $\phi : K \to K$ est une application continue. Donc, d'apprès le Théorème (4.2), il existe un point fixe $f \in K$ de ϕ, c'est-à-dire que f est une silution au problème de Cauchy.

4.3 Approche numérique du théorème du point fixe

Dans ce qui suit, on étudie une application du théorème du point fixe en faisant appel à une méthode itérative convergente.
Soit $f : S \to \mathrm{K}^n, n \in \mathrm{N}$ K compact
$x(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S \mapsto f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ On impose les conditions suivantes sur S et f :
S est un ensemble fermé de K^n
f est une application contractante sur S :
$\exists 0 \leq \theta \leq 1$ tel que $\forall x, y \in S, \|f(x) - f(y)\| \leq \theta \|x - y\|$
$\|$ est une norme quelconque dans $\mathrm{K}^n S$ est stable par $f : f(S) \subset S$

Théorème 4.3. *Soit S une partie fermé de K^n, et fune application définie sur S et à valeur dans S, contractante sur S, telle que $x \in S \to f(x) \in S$. Alors*
f admet un unique point fixe x^* dans S.
Ce point fixe est calculable comme limite de la suite des approximations successives $(x_1)_{l \geq 0}$

$$\begin{cases} x_0 \in S \text{ quelconque} \\ x_{l+1} = f(x_l), l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

pour tout indice $l \in \mathbb{N}^*$, on a les inégalités de majoration d'erreur suivantes :

$$\begin{cases} \|x_l - x^*\| \leq \frac{\theta^l}{1-\theta} \|x_1 - x_0\| \\ \|x_l - x^*\| \leq \frac{1}{1-\theta} \|x_l - x_{l+1}\| \end{cases}$$

Remarque 4.1. - *Ce théorème reste vrai dans le cadre général d'un espace vectoriel quelconque (de dimension infinie) à condition qu'il soit complet pour la norme en question.*

Voici un exemple où est mis en œuvre le procédé itératif précédent :

Exemple :

Calcul de la racine carrée d'un nombre positif.

Soit $c \in \mathbb{R}^{*+}$un nombre positif.

le théorème du point fixe précédent va nous permettre de développer une méthode de calcul de $\sqrt{c}$ et justifier sa convergence.

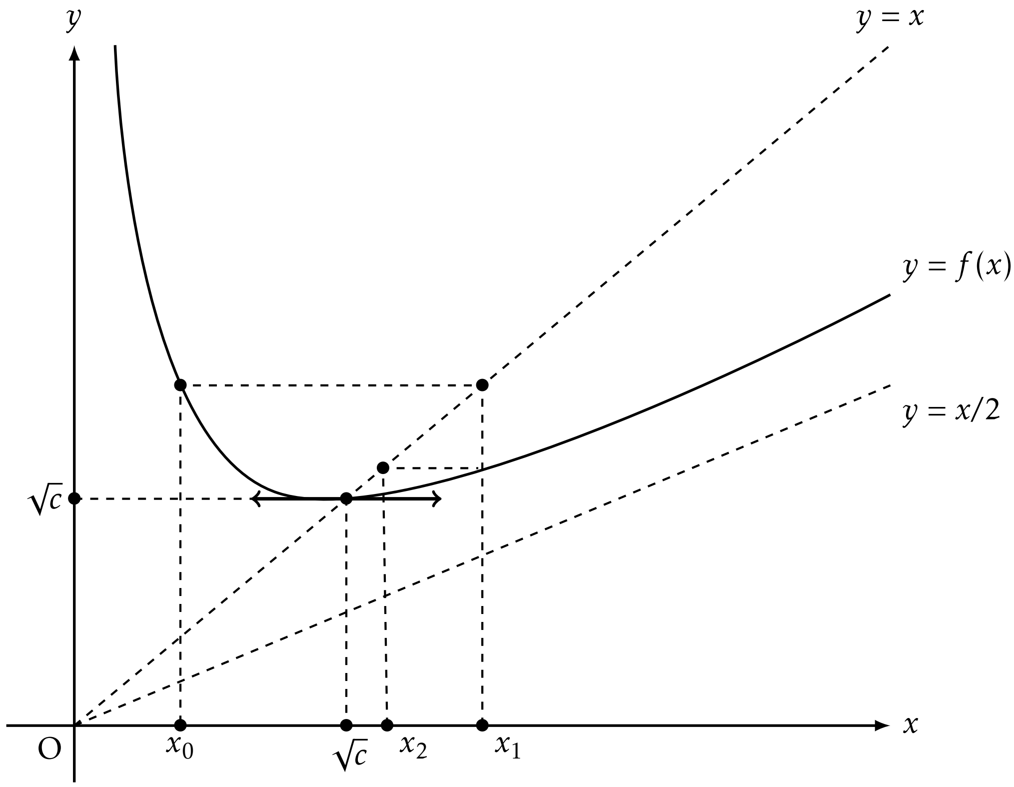
Pour $c \in \mathbb{R}^{*+}$ soit $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right)$ calculons sa dérivée première : $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{c}{2x^2} = \frac{1}{2}.\frac{x^2 - c}{x^2}$ et seconde : $f''(x) = \frac{c}{x^3}$.

on déduit que f' s'annule au seul point $\sqrt{c}$,que $f'(x)$ est négative sur $]0, \sqrt{c}[$,positive sur $]\sqrt{c}, +\infty[$,avec décroissance de f sur $]0, \sqrt{c}]$ puis croissance sur $[\sqrt{c}, +\infty[$.

Par ailleurs on remarque que $\sqrt{c}$ est point fixe de f : $f\left(\sqrt{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{c} + \frac{c}{\sqrt{c}}\right) = \sqrt{c}$, sur $I = [\sqrt{c}, +\infty[$ la dérivée vérifié $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$; il en découle que f est Contractante sur l'intervalle $[\sqrt{c}, +\infty[$ de constant $\theta = \frac{1}{2}$.

En effet $\forall x_1, x_2 \in I$ on a $|f(x_1) - f(x_2)| = |(x_1 - x_2) f'(\xi)|$ avec $\xi \in]x_1, x_2[$ selon le théorème des accroissements finis.

D'où l'intégralité $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2| \forall x_1, x_2 \in I$.



D'après le graphe de f on a l'inclusion $f\,(]0+\infty[) \subset I$ on peut donc appliquer le théorème du point fixe sur l'intervalle fermé I : il existe un unique point fixe sur I pour f(c'est $\sqrt{c}$) qu'on peut déterminer par :

y_l quelconque $\in I, y_{l+1} = f\,(y_l) = \dfrac{1}{2}\left(y_l + \dfrac{c}{y_l}\right), l \geq 1$

De plus pour $l \geq 2$ on a l'inégalité :

$\left|y_l - \sqrt{c}\right| \leq \dfrac{(0.5)^{l-1}}{1-0.5}\left|y_2 - y_1\right| = (0.5)^{l-2}\left|y_2 - y_1\right|$

Par ailleurs si on prend x_0 quelconque dans $]0,+\infty[$ alors les termes $x_{l+1} = f\,(x_l)$ pour $l \geq 0$ restent dans I et la suite $(x_l)_{l\geq 0}$ converge vers $\sqrt{c}$ d'après ce qui précédé et l'inégalité de majoration d'erreur s'écrit alors,toujours pour $l \geq 2, \left|x_l - \sqrt{c}\right| \leq (0.5)^{l-2}\,|x_2 - x_1|$.

Par exemple pour $c = 2$ on a,en partant de $x_0 = 1$

$x_1 = 1.5$

$x_2 = 1.4166\ldots$

$x_3 = 1.414215686274\ldots$

$x_4 = 1.414213562374\ldots$

$x_5 = 1.414213562373\ldots$

On constate que la convergence vers $x_5 = 1.4142135623731\ldots$ est très rapide et on vérifie bien l'inégalité de majoration d'erreur donnée plus haut

$\left|x_5 - \sqrt{2}\right| \square 10^{-3} \leq 0.5^3\,|x_2 - x_1| \square 0.01$

4.4 Théorème d'Inversion Local

Ce théorème est encore une application de théorème de Picard.

Proposition 4.1. *Soient E un espace de Banach, $u \in \mathcal{L}_c(E)$ telle que :*

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| < 1$$

Alors l'application $(Id_E - u)$ est inversible, d'inverse $\displaystyle\sum_{K=0}^{+\infty} u^K$, ce qui est dans $\mathcal{L}_c(E)$.

Théorème 4.4. *(Inversion Local) Soient :*

E, F deux espace de Banach

$U \subset E$ ouvert

$f : U \to F$ une application de class C^1

$a \in U$ tel que df_a soit continue et inversible (et donc df_a^{-1} est continue)

Alors, il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que :

1. *La restriction f_V de f à V est une bijection de V sur W*
2. *L'application inverse $g : W \to V$ est continue*
3. *g est de classe C^1 et $\forall x \in W, dg_{f(x)} = df_x^{-1}$*

   Démonstration :

   On muni $\mathcal{L}_c(E,F)$ de la norme $\|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. Quite à remplacer f par la fonction $x \to df_x^{-1}[f(a+x) - f(a)]$, on peut se ramener au cas où $a = 0, f(a) = 0$ et $df_0 = df_a = Id_E$ (et donc $E = F$)

Comme f est de class $\mathbb{C}^1$, il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset U$ et pour tout $x \in B(0,r)$ on a,

$$\|df_x - df_0\| = \|df_x + Id_E\| \leq \frac{1}{2}$$

On désigne $u := Id_E - df_x$ donc $df_x = Id_E$ avec $|||u||| \leq \frac{1}{2}$. Alors d'après la proposition 6 df_x est un isomorphisme bicontinu qui vérifie $df_x^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ et donc,

$$\|df_x^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u^n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^n} = 2$$

1. On va montre que la restriction de f à un voisinage ouvert de 0 dans $B(0,r)$ est une bijection sur $B(0, \frac{r}{2})$

   Soit $y \in B(0, \frac{r}{2})$.On considère la fonction :

$$\begin{aligned} h :& \overline{B}(0,r) \to E \\ & x \to y + x - f(x) \end{aligned}$$

   Il est clair que h est de classe C^1. De plus,$\forall x \in B(0,r), |||dh_x||| = |||Id_E - df_x||| \leq \frac{1}{2}$

   Donc d'après le théorème des Accroissements finis,

$$\forall x, x' \in \overline{B}(0,r), \quad \|h(x) - h(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\| \tag{4.2}$$

En particulier, pour $x' = 0$, ona $\|x - f(x)\| = \|h(x) - h(0)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|$ donc,

$$\begin{aligned}\forall x \in B(0,r), \quad \|h(x)\| &\leq \|y\| + \|x - f(x)\| \\ &\leq \|y\| + \frac{1}{2}\|x\| \\ &\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r\end{aligned}$$

Ainsi, h est une fonction de $\overline{B}(0,r)$ dans $B(0,r) \subset B(0,1)$.Comme de plus h est $\frac{1}{2}$ lipschitzienne d'après (....), d'après le théorème de Picard (8),$\exists! x \in \overline{B}(0,r)$ tel que $h(x) = x$, c'est-à-dire$f(x) = y$ .Comme $x = h(x)$ et que h est à valeurs dans $B(0,r)$, on en déduit que $x \in B(0,r)$.Alors, pour tout $y \in B(0,\frac{r}{2})$;$\exists! x \in B(0,r)$ tel que $f(x) = y$ On définit $V := f^{-1}(B(0,\frac{r}{2})) \cap B(0,r)$.$V$ est un voisinage de 0 car $f(0) = 0$ et f est continue sur $B(0,r)$.En notant $W := B(0,\frac{r}{2})$, on a alors $f_V : V \to W$ est une bijection.

2. On note $g : W \to V$ l'application inverse. On utilise de nouveau h, cette fois-ci avec $y = 0$, et donc $\forall x \in U, x = h(x) + f(x)$. Alors $\forall x, x' \in B(0,r)$,

$$\begin{aligned}\|x - x'\| &\leq \|h(x) - h(x')\| + \|f(x) - f(x')\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x - x'\| + \|f(x) - f(x')\| \\ &\leq 2\|f(x) - f(x')\|\end{aligned}$$

On en déduit que $\forall y, y' \in W$

$$\|g(y) - g(y')\| \leq 2\|f(g(y)) - f(g(y'))\| = 2\|y - y'\| \tag{4.3}$$

g est donc lipschitzienne et par conséquent continue.

3. On fixe $x \in V$ et on pose $y = f(x) \in W$, il existe $r' > 0$ tel que $B(y,r') \subset W$, et pour tout $w \in B(0,r')$, on pose $v = g(y+w) - g(y)$.Donc d'après (.......),$\|v\| \leq 2\|w\|$,et

$$\begin{aligned}\Delta(w) &= g(y+w) - g(y) - df_x^{-1}(w) \\ &= v - df_x^{-1}[f(v+x) - f(x)] \\ &= -df_x^{-1}[f(v+x) - f(x) - df_x(v)]\end{aligned}$$

Comme $|||df_x^{-1}||| \leq 2$, on obtient :

$$\|\Delta(w)\| \leq 4\|w\|\varepsilon(g(y+w) - g(y)) = 4\|w\|\varepsilon'(w)$$

Comme g est continue, $\lim_{w\to 0} \varepsilon'(w) = 0$, alors $\|\Delta(w)\| = \theta(\|w\|)$. Donc, g est différentiable en y et $dg_y = df_x^{-1}$. Enfin, comme df_x^{-1} est continue (car : f est de classe C^1 et que $L \in GL(E) \to L^{-1} \in GL(E)$ est continue la fonction $dg : y \to dg_y$ est continue. Ainsi, g est de classe C^1

CONCLUSION

Ce mémoire, a été concerné a étudie les théorèmes du points fixes et application aux équations aux dérivées partielles.
Pour cela nous avons commencé ce travail par des résultats préliminaires que nous avons utilisés dans ce mémoire, puis on a étudié quelques théorèmes du point fixe on particulier théorème de Picard, de Brouwer, de Schauder et de Schauder-Tychonoff.
Ainsi nous avons rappelé les aux équations aux dérivées partielles, et on a traité les résultats d'existence et d'unicité de ces équations à l'aide des applications du théorèmes de point fixe.
En fin on a résoudre les aux équations aux dérivées partielles par la méthode du point fixe.

Bibliographie

[1] D. O'REGAN, Fixed point theorems for nonlinear operators, J. Math. Anal. Appl.,202 (1996), 413-432.

[2] D. R. SMART, Fixed point theorems, Cambridge Univ. Press, 1974.

[3] Claire.David, Pierre.Gasselet ;Équations aux dérivées partielles ; Cours et exercices corrigés 2e édition ; Dunod, 2012, 2015

[4] E.Zeidler : Non linear Functional analysis and it's applications Fixed point theorems, Springer-verlag, New york, Berlin, Heiderberg, Tokyo, 1985.

[5] Evans, L.C., Partial Differential Equation, Second edition, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.

[6] H.Brezis : Analyse Fonctionnelle,Théorie et Application, Collection Mathématiques Appliqu ées pour la Maîtrise, Masson, Paris, France, 1983.

[7] PDF 206 : Théorèmes du point fixe, Exemples et Applications, Pierre Lissy, May 29,2010.

[8] J. DUGUNDJI and A. GRANAS, Fixed point theory, Monografie Matematyczne, Vol. 16, Polish Scientific Publishers, 1982