République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulaire
Ministère de l'**E**nseignement **S**upérieur et de
la **R**echerche **S**cientifique
Université Ibn Khaldoun – Tiaret –
Faculté des Mathématiques et Informatique

Département des Mathématiques

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

DOMAINE : MI

FILIERE : Mathématiques

SPECIALITE: Analyse Fonctionnelle et Equations Différentielles

SUJET DU MEMOIRE :

Théorème du point fixe de Krasnoselskii et applications aux équations différentielles

Présenté par
Abed Yamina
Ahmed L'hadj Imene
Ameur Souad

Soutenu le 02 / 11 / 2020 devant le Jury composé de :

Mme Sabit Souhila	**Présidente**
Mr Baghdad Said	**Encadreur**
Mr Benia Khaireddin	**Examinateur**

Année Universitaire : 2019/2020

Remerciements

Nous remercions Dieu de nous avoir aidées à accomplir ce travail, puis nous voulons exprimer notre profonde gratitude à nos parents pour tant d'amour et de soutien moral.

Nous adressons un grand remerciement à notre encadreur Mr.Baghdad Said qui a proposé le thème de ce mémoire, pour ses conseils et ses instructions du début jusqu'à la fin du travail.

Tous nos remerciements et notre gratitude au jury pour avoir accepté et d'examiner notre travail.

Nous remercions aussi les professeurs de mathématiques et tous ceux qui nous ont enseignées tout au long de notre cursus universitaire.

Nous adressons aussi nos remerciements les plus vifs aux personnes qui nous ont apportées leur aide et qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicaces

AMINA

Ce modeste travail est dédié :

A mes chers parents pour leurs patiences, leurs amours, et leurs encouragements.

A mes frères : 'BACHIR','SAID', et mes sœurs :"MALIKA","MERIEM" et ma petite sœur "SIHAM" sur leurs amours et leurs soutien.

A tous la famille "ABED" sans oublier mes petites "HAFIDA" et "AMINA".

A mes chères amies surtout "HALIMA","NACERA" et, "SOUMIA" qui ont été nous soutenir en cette période.

SOUAD

Ce modeste travail est dédié :

A mes chers parents qui ont tant travail pour ma réussite, et je le remercie pour leurs soutien et leurs encouragements.

A mes frères "BOUALEM","HABIB", et mes sœurs, "RAHMA","MOKHTARIA","BADERA", et "NAIMA" pour leurs soutiens au long de ces années.

A tout la famille "AMEUR", y compris une petite "JOURI".

A mes amis "SARA","SOUMIA","NACERA", et "HALIMA".

IMENE

J'ai l'immense plaisir de dédicacer ce petit travail à mes chers parents, lesquels m'ont beaucoup encouragée afin de mener à bien ma tâche.

Sans eux, je n'aurais pu vaincre tous les obstacles qui m'ont barré la route et contrer toutes les difficultés que j'ai rencontrées.

Une pensée bien particulière est adressée à mes amis (es) qui ont été nombreux à me soutenir en cette période et je leur souhaite en retour bien du succès dans leur parcours universitaire.

Table des matières

Introduction

La théorie du point fixe est au cœur de l'analyse non linéaire puisqu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence et d'unicité dans beaucoup de problèmes non-linéaires différents.

Soit X un ensemble et $T : X \to X$ une application, une solution d'une équation $T(x) = x$ est appelée un point fixe de T. L'origine de la théorie du point fixe, est une branche importante de l'analyse fonctionnelle non linéaire, qui remonte à la dernière partie du XIXe siècle, le reste dans l'utilisation d'approximations successives de l'existence et de l'unicité de la solution. La plupart des phénomènes naturels en physique, en chimie, en économie, en biologie ou en mécanique ont un comportement non linéaire. De tels problèmes s'expriment mathématiquement, sous forme d'équations différentielles non linéaires.

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base en montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations, parmi ces théorèmes, le théorème du point fixe de Banach, de Brouwer, de Schauder et le théorème de Krasnoselskii [19].

Dans ce mémoire, on va étudier le théorème du point fixe de Krasnoselskii qui est un résultat important dans la théorie du point fixe, basé sur le théorème de Banach et le théorème de Schauder. Le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en 1922 dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique [19], et le théorème de Schauder affirme qu'une application compacte et continue définie sur un ensemble fermé, borné, convexe d'un espace de Banach dans lui-même, admet au moins un point fixe [1].
En 1955, et pour la première fois, Krasnoselskii a élaboré son théorème du point fixe, il a

joint les deux résultats de Banach et de Schauder afin d'entrer son théorème qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractante et l'autre est compacte et continue admet un point fixe. Ce théorème est très utile dans la résolution des équations différentielles non linéaires, équations intégrales, et les équations intégro-différentielles.

Ce travail est réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre, est consacré à quelques définitions et résultats préliminaires qu'on va utiliser à travers ce mémoire [9], [17], [11].

Dans le deuxième chapitre, on va présenter quelques théorèmes du point fixe, en particulier, le théorème du point fixe de Banach et le théorème de Schauder, et on va étudier le théorème du point fixe de Krasnoselskii et une extension de ce théorème (théorème de Krasnoselskii pour les $\mathfrak{D}-$contractions non linéaires, [6]) .

Dans le troisième chapitre, on donnera une application du théorème de Krasnoselskii sur une équation différentielle fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo [2] :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) + f(t, x(t)) = \theta, 0 \leq t \leq 1, 1 < \alpha \leq 2, \\ x(0) = \int_0^1 g(\tau)x(\tau)d\tau, x(1) = \theta \end{cases}$$

Où D^{α} est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo, et $f : [0,1] \times E \to E$ est continue, et E est un espace de Banach quelconque.

Et en appliquant le théorème de Krasnoselskii pour les $\mathfrak{D}-$contractions non linéaires sur une équation différentielle perturbée [12] :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[x(t) - f(t, x(t))\right] = g(t, (x(t)), t \in J \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Où $J = [t_0, t_0 + a]$ est un intervalle borné dans $\mathbb{R}$ pour un t_0 fixé, $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, et $f, g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Topologie des espaces métriques

Soit X un ensemble quelconque non vide et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition 1.1.1. *[9] On appelle topologie sur X toute partie τ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

1. *La réunion de toute famille d'éléments de τ appartient à τ.*
2. *L'intersection de toute famille finie d'éléments de τ appartient à τ.*
3. *L'ensemble vide ϕ et X appartiennent à τ.*

(X, τ) s'appelle espace topologique de support X .Les éléments de τ sont appelés ouverts de (X, τ) ou de τ. Souvent notés $\mathcal{O}$.

Soit (X, τ) un espace topologique, qu'on notera pour simplifier X.

Définition 1.1.2. *[9] On appelle base d'une topologie τ toute partie $\mathcal{B}$ de τ telle que tout ouvert $\mathcal{O}$ de τ soit la réunion d'une famille des ouverts de $\mathcal{B}$.*

Définition 1.1.3. *[9] On appelle voisinage d'une partie A de X , toute partie de X qui contient un ouvert contenant A noté $\mathcal{V}(A)$.*
$\mathcal{V}_{(x)}$ désigne l'ensemble des voisinages de (x).

Proposition 1.1.4. *[9] Soit $x \in X$, on a les propriétés suivantes :*

(V_1) *Tout ensemble contenant un voisinage de x est un voisinage de x.*

(V_2) *L'intersection de toute famille finie de voisinage de x est un voisinage de x.*

(V_3) *Tout voisinage de x contient $\{x\}$.*

Proposition 1.1.5. *[9] Pour qu'une partie A de X soit ouverte,il faut et il suffit que A soit voisinage de chacun de ses points.*

Définition 1.1.6. *On dit qu'une partie A de X est fermée si son complémentaire par rapport à X noté $\complement_X^A$, est ouvert.*

Définition 1.1.7. *[9]**Applications continues***
Soit X et X' deux espaces topologiques et $f : X \to X'$ une application. Pour $x_0 \in X$, notons $y_0 = f(x_0) \in X'$.

1. *f est continue en x_0 si, pour tout voisinage $V' \subset \mathcal{V}_{(y_0)}$, il existe un voisinage $V \subset \mathcal{V}_{(x_0)}$ tel que $f(V) \subset V'$.*
2. *L'application f est dite continue dans X(ou sur$X$) si elle est continue en tout point de X.*

Définition 1.1.8. *[17]**Espaces topologiques séparés***
On dit que X est séparé si pour tout $x, y \in X, x \neq y$, il existe deux ouverts U_x et U_y tels que $x \in U_x, y \in U_y$ et $U_x \cap U_y = \emptyset$. On dit que les ouverts U_x et U_y séparent les points x et y.

Définition 1.1.9. *[17]**Espaces connexes***
On dit que X est connexe si et seulement si les seuls sous-espaces à la fois ouverts et fermés sont X et $\emptyset$, i.e :

$$A \subset X, A \text{ ouvert et fermé} \Longleftrightarrow A = \emptyset \text{ ou } A = X.$$

Définition 1.1.10. *[9]**Espaces métriques***

Soit X un ensemble, on appelle métrique ou distance toute application

$d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, telle que, pour tout $x, y, z \in X$, on ait :

(D1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(Identité)*

(D2) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Symétrie)*

(D3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Inégalité triangulaire)*

(X, d) s'appelle espace métrique.

Exemples 1.1.11.

(1) Métrique discrète. Elle est définie par :

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ 1 & si\ x \neq y \end{cases}$$

(2) Dans $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a une métrique définie , pour tout x , $y \in X$ par

$$d(x, y) = |x - y|$$

où $|.|$ représente la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$.

(3) Soit $X = \Lambda^n (\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Pour tous $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de Λ^n , l'application définie par

$$d(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

est une métrique.

Si $\alpha > 1$, on a une métrique définie par

$$d_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^\alpha \right)^{\dfrac{1}{\alpha}}$$

Proposition 1.1.12. *[17] On dit que deux métriques d_1 et d_2 sur le même ensemble X sont équivalentes s'il existe des constantes k_1 et k_2 telles que*

$$\forall x, y \in X, d_1(x, y) \leq k_1 \cdot d_2(x, y) \text{ et } d_2(x, y) \leq k_2 \cdot d_1(x, y).$$

Définition 1.1.13. *[9] Soit* $a \in X$ *et* $r > 0$.

(1) On appelle boule ouverte(respectivement boule fermée) de centre a *et de rayon* r*, l'ensemble noté* $B(a,r)$*(respectivement* $B_f(a,r)$*) défini dans* X *par :*

$$B(a,r) = \{x \in X/ \ d(x,a) < r\}.$$

(respectivement $B_f(a,r) = \{x \in X/d(x,a) \leq r\}$*).*

(2) On appelle sphère de centre a *et de rayon* r *l'ensemble noté* $S(a,r)$ *défini dans* X *par :*

$$S(a,r) = \{x \in X/ \ d(x,a) = r\}.$$

Définition 1.1.14. *[11] Soit* (E,d) *un espace métrique . Un ensemble* $O \subseteq E$ *est dit* ***ouvert*** *si pour tout point* $x \in O$*, il existe* $r_x > 0$ *tel que* $B(x,r_x) \subseteq O$.

Exemple 1.1.15. *Toute boule ouverte est un ensemble ouvert.*

Proposition 1.1.16. *[11] Soit* (E,d) *un espace métrique alors :*

i) $\emptyset$ *et* E *sont des ouverts de* E.

ii) Si $(O_i)_{i\in I}$ *est une famille quelconque d'ouverts, alors* $\cup_{i\in I} O_i$ *est ouverte.*

iii) Si $O_1, O_2, ..., O_n$ *sont des ouverts, alors* $O_1 \cap O_2 \cap ... \cap O_n$ *est ouverte.*

Définition 1.1.17. *[11] Soit* (E,d) *un espace métrique. Un ensemble* $F \subset E$ *est fermé, si et seulement si son complémentaire* $E \backslash F$ *noté* $\complement_E^F$ *est un ouvert.*

Remarque 1.1.18. *La définition ci-dessus ne signifie pas qu'un ensemble fermé est un ensemble non ouvert.*

Exemple 1.1.19. *Toute boule fermée est un ensemble fermé.*

Proposition 1.1.20. *[9]*

i) L'intersection de toute famille de fermés est fermée.

ii) La réunion de toute famille finie de fermés est fermée.

Définition 1.1.21. *[11] Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$.* ***L'intérieur*** *de A , noté $\mathring{A}$ est la réunion de tout les ouverts contenus dans A . Les éléments de $\mathring{A}$ sont appelés les points intérieurs de A.*

Remarque 1.1.22. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclu dans A. On en déduit que $A \subset E$ est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$.*

Proposition 1.1.23. *[11](**Caractérisation de $\mathring{A}$ par les boules**) Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. Alors $x \in \mathring{A}$ si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$.*

Définition 1.1.24. *[11] Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$.* ***L'adhérence*** *(on dit aussi la fermeture) de A , est l'intersection de tous les fermés qui contiennent A , on la note $\bar{A}$.*

Remarque 1.1.25. *(i) $\bar{A}$ est toujours fermé.*

(ii) $A \subset \bar{A}$ et $A = \bar{A}$ si et seulement si A est fermé.

(iii) Si F est fermé et $A \subset F$, alors $\bar{A} \subset F$.

Proposition 1.1.26. *[11](**Caractérisation de $\bar{A}$ par les boules**) Soit (E,d) un espace métrique et $A \subset E$. Alors $x \in \bar{A}$ si et seulement si $\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.*

Définition 1.1.27. *Soit E un espace métrique . Une partie A de E est dite* ***dense*** *dans E si on a $\bar{A} = E$.*

Définition 1.1.28. *[4] Si A est une partie de E , la* ***frontière*** *de A dans E est l'ensemble $\partial A := \bar{A} \backslash \mathring{A}$.*

Proposition 1.1.29. *[9] L'ensemble des parties τ_d est défini par :*

$$\tau_d = \{\mathcal{O} \subset X / \forall x \in \mathcal{O}, \exists\ B(x,r_x) \subset \mathcal{O}\}.$$

τ_d est une topologie associée à la métrique d.

Définition 1.1.30. *[9] Un espace topologique (X,τ) est dit* ***métrisable*** *s'il existe une métrique d sur X telle que $\tau = \tau_d$.*

Proposition 1.1.31. *[9] Si A est un sous espace de X métrisable, alors A est métrisable.*

Définition 1.1.32. *[9] Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X. A est une **partie bornée** de X s'il existe une boule $B(a, r)$ de X contenant A.*

Définition 1.1.33. *Soit $A \subset X$ métrique ($A \neq \emptyset$) et soit $x \in X$. On appelle distance de x à A, le réel défini par*

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) \geq 0$$

Définition 1.1.34. *[9] Le diamètre d'une partie A non vide de X est défini par*

$$\delta(A) = \sup_{x_1, x_2 \in A} d(x_1, x_2)$$

Évidemment, nous avons $\delta(A) \geq 0$, et si A est non borné, alors $\delta(A) = +\infty$

Proposition 1.1.35. *[9] A est borné si et seulement si $\delta(A)$ est fini .*

1.1.1 Complétude

Définition 1.1.36. *[11] **Convergence des suites***

Soit (E, d) un espace métrique et soit $(x_n)_n$ une suite de E. On dit que $(x_n)_n$ converge vers $l \in E$ et on note $x_n \to l$ ou $\lim_{n \to \infty} x_n = l$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \geq 1 \text{ tel que } \forall n \geq n_\varepsilon \text{ on a } x_n \in B(l, \varepsilon).$$

La valeur l est alors appelée la limite de $(x_n)_n$.

Proposition 1.1.37. *[11] Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_n \subset E$ tels que $x_n \to l$, alors toute sous-suite $(x_{n_k})_{n_k}$ de $(x_n)_n$ converge vers l.*

Proposition 1.1.38. *[9]Une partie F de (E, d) est dite fermée si la limite de toute suite convergente de F, appartient à F.*

Définition 1.1.39. *[9] Soit (X, d) un espace métrique. On dit que la suite $(x_n)_n$ de points de X est une **suite de Cauchy** dans (X, d) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 / \forall n, m \geq n_0, d(x_m, x_n) \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.1.40. *[11]*

(i) Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

(ii) Toute suite de Cauchy est bornée.

Définition 1.1.41. *[9]**Notion des espaces complets***
Un espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy est convergente.

Proposition 1.1.42. *[11] Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $F \subset E$. Alors (F, d) est complet si et seulement si F est un fermé de E.*

1.1.2 Applications entre les espaces métriques

Définition 1.1.43. *[11] Soit (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques et $f : E_1 \to E_2$ une application. On dit que f est **continue** au point $a \in E_1$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } d_1(x, a) \leq \alpha \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Définition 1.1.44. *[11] On dit que $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ est continue sur (E_1, d_1) si elle est continue en tout point de E_1.*

Théorème 1.1.45. *[11] L'application $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ est continue sur (E_1, d_1) si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de (E_2, d_2) et un ouvert de (E_1, d_1).*

Proposition 1.1.46. *[9] Soit f une application d'un espace métrique X dans un espace topologique Y. Pour que f soit continue en a, il faut et il suffit que pour toute suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \to a$, alors $f(x_n) \to f(a)$.*

Proposition 1.1.47. *[17] Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications continues .*
La composition $g \circ f : X \to Z$ est continue.

Lemme 1.1.48. *Soit X et Y deux ensembles et f une application de X dans Y, s'il existe une application g de Y dans X telle que $f \circ g = I_Y$ et $g \circ f = I_X$, alors f est une bijection de X sur Y et $f^{-1} = g$*
(où I_X (respectivement I_Y) désigne l'application identité de X (respectivement Y)) .

Définition 1.1.49. *[11] Une application $f : (E, d) \to (F, \delta)$ bijective, continue ainsi que son inverse est continu (on dit bicontinue) est dite un* ***homéomorphisme*** *.*
Lorsqu'il existe un homéomorphisme entre deux espaces métriques on dit qu'ils sont homéomorphes.

Définition 1.1.50. *[9] L'application $f : (X, d) \to (X', d')$ est* ***uniformément continue*** *sur X si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ (η ne dépend que de ε) tel que*

$$d(x_1, x_2) \leq \eta \Rightarrow d'(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.1.51. *Si f est uniformément continue sur X, alors f est continue sur X. La réciproque est fausse.*

Définition 1.1.52. *[9] On dit que $f : (X, d) \to (X', d')$ est* ***lipschitzienne*** *et de rapport $k > 0$ si pour tout $x, y \in X$, on a*

$$d'(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y).$$

Remarque 1.1.53. *Toute application lipschitzienne est continue mais la réciproque est fausse.*

Définition 1.1.54. *[11] On dit que $f : (E, d) \to (E, d)$ est* ***contractante*** *s'il existe $k < 1$ tel que :*

$$\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) \leq k\ d(x, y).$$

1.1.3 Compacité

Définition 1.1.55. *[11] Soit (E, d) un espace métrique. Une famille d'ensemble $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E si*

$$\cup_{i\in I} A_i = E$$

Si $J \subset I$, on dit que $(A_j)_{j\in J}$ est un sous-recouvrement de E si et seulement si

$$\cup_{j\in J} A_j = E$$

Définition 1.1.56. *[11]**(Ensemble compact)** Soit (E,d) un espace métrique. On dit que E est compact si et seulement si de tout recouvrement de E par une famille d'ouverts $(O_i)_{i\in I}$, on peut extraire un sous-recouvrement fini. D'autre terme, pour toute famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts telle que $E = \cup_{i\in I} O_i$, il existe $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ tels que $E = O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup ... \cup O_{i_n}$.*

Définition 1.1.57. *[11] Un espace métrique (E,d) est séquentiellement compact si toute suite $(x_n)_n \subset E$ possède une sous-suite convergente.*

Théorème 1.1.58. *[11] Soit (E,d) un espace métrique compact, alors (E,d) est complet.*

Proposition 1.1.59. *[17] Soit X un espace compact et $F \subset X$ un sous espace fermé, alors F est compact.*

Définition 1.1.60. *Soit (X,d) un espace métrique et $A \subset X$, alors A est un sous-ensemble relativement compact si $\overline{A}$ est compact en lui-même.*

Théorème 1.1.61. *[17] $A \subset \mathbb{R}^n$ est compact $\Leftrightarrow$ A est fermé et borné.*

Définition 1.1.62. *[9] Un espace métrique X est dit **précompact** si , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ fini par des ensembles de diamètres inférieurs à ε.*

Proposition 1.1.63. *[9] Si X est un espace métrique compact, alors X est précompact. La réciproque est fausse .*

Théorème 1.1.64. *[11] Soit (E,d_1) et (F,d_2) deux espaces métriques et soit $f: E \to F$ une fonction continue. Si (E,d_1) est compact, alors $f(E)$ est un compact de (F,d_2). Plus généralement, si $K \subset E$ est un compact de E, alors $f(K)$ est un ensemble compact de (F,d_2).*

Théorème 1.1.65. *[11] Une fonction continue sur un compact atteint ses bornes .*

Théorème 1.1.66. *[11] Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.*

1.2 Espaces vectoriels normés

1.2.1 Espaces de Banach

E désigne un espace vectoriel sur $\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 1.2.1. *[9] On appelle norme sur E, toute application p de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \Lambda$, on ait*

(N1) $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *(condition de séparation)*

(N2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *(condition d'homogénéité)*

(N3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *(inégalité de triangle)*

Notation. *On note $p(x) = \|x\|$ ou encore $p(x) = \|x\|_E$, $p(x)$ s'appelle norme de x.*
(E, p) s'appelle espace vectoriel normé (e.v.n) de support E.

Exemple 1.2.2. *Sur $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ les applications*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad et \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$$

sont des normes .

Proposition 1.2.3. *[9] L'application $d : (x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une métrique sur E invariante par translation (c'est-à-dire $d(x + a, y + a) = d(x, y)$).*
On dit que d est la métrique associée à la norme.

Définition 1.2.4. *[4] Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sur un espace vectoriel V sont dites équivalentes s'il existe deux constantes positives C_1, C_2 telles que*

$$C_1 \|x\|' \leq \|x\| \leq C_2 \|x\|', \forall x \in V$$

Théorème 1.2.5. *[4] Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Définition 1.2.6. *[9] On appelle **espace de Banach**, un espace vectoriel normé complet.*

Définition 1.2.7. *[4] Étant donné deux points $\{a,b\} \subset E$, on définit le segment reliant a à b comme suit*

$$[a,b] = \{(1-t)a + tb / t \in [0,1]\}$$

Une partie $C \subset E$ est dite ***convexe*** *si $\forall \{a,b\} \subset C$, on a $[a,b] \subset C$.*

Exemple 1.2.8. *Les boules ouvertes ou fermées sont convexes.*

Définition 1.2.9. *Soit E un espace de Banach réel, pour toute partie finie $D \subset E$ on désigne par l'enveloppe convexe de D l'intersection de toutes les parties convexes contenant D, il est défini par la formule suivante :*

$$conv(D) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i, t_i \geq 0, x_i \in D, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}$$

Définition 1.2.10. *Soit $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach et $U \subseteq E$ un ouvert de E. Une application $f : U \to F$ est dite* ***différentiable*** *en $a \in U$, s'il existe une application linéaire $L : E \to F$ telle que :*

$$\lim_{\|x-a\|_E \to 0} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x-a)\|_F}{\|x-a\|_E} = 0$$

ou

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$$

on note

$$D_x f = L : E \to F$$

Proposition 1.2.11. *Soit $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach et $U \subseteq E$ un ouvert de E. Si $f : U \to F$ est une application différentiable en $a \in U$, alors f est continue en a.*

1.2.2 Exemples usuels d'espaces vectoriels normés

Dans ce qui suit $\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a- Espaces ℓ^α

Pour $\alpha \geq 1$, on considère

$$\ell^\alpha = \{x = (x_i)_i \in \Lambda^{\mathbb{N}} \textit{ telle que } \sum_{i=0}^{\infty} |x_i^\alpha| < \infty\}$$

ℓ^1 et ℓ^2 sont les espaces les plus importants (et usuels).

Proposition 1.2.12. *[9] L'espace ℓ^α est un espace vectoriel de dimension infinie.*

Proposition 1.2.13. *[9] Pour tout $\alpha \geq 1$, l'espace ℓ^α muni de la norme*

$$x \to \|x\| = (\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^\alpha)^{1/\alpha}$$

est un espace de Banach.

b- Espace $B(X, \Lambda)$

Soit X un ensemble quelconque.

Proposition 1.2.14. *[9] L'espace vectoriel $B(X, \Lambda)$ des applications bornées $f : X \to \Lambda$ muni de la norme*

$$f \to \sup_{x \in X} |f(x)|$$

est un espace de Banach.

Remarque.[9] On peut remplacer Λ par un espace de Banach quelconque.

c- Espace $\mathcal{C}(X, \Lambda)$

Soit X un espace topologique et $\mathcal{C}(X, \Lambda)$ l'espace vectoriel des applications continues définies de X dans Λ.

Corollaire 1.2.15. *[9] L'espace $\mathcal{C}(K, \Lambda)$ des applications continues d'un espace topologique compact K dans Λ, muni de la norme*

$$f \to \sup_{x \in K} |f(x)|$$

est un espace de Banach.

Remarque : On peut remplacer Λ par un espace de Banach quelconque.

Théorème 1.2.16. *(**Arzéla–Ascoli**)*

Soit X un espace métrique compact, Y un espace de Banach et $H \subset C(X,Y)$ un sous-espace muni de la norme sup.

Alors H est relativement compact si et seulement si :

1. *H est **uniformément borné**, i.e : il existe une constante $\delta > 0$ telle que :*
   $\forall t \in X, \forall f \in H$ on a
$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in X} |f(t)| \leq \delta$$
2. *H est **équicontinu**, i.e.*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(t), \forall s \in X;\ s \in V \Longrightarrow \|f(s) - f(t)\|_Y \leq \varepsilon, \forall f \in H.$$
3. *L'ensemble $\{f(t), f \in M\}$ est relativement compact pour tout $t \in X$.*

1.2.3 Les espaces L^p

Définition 1.2.17. *Soit Ω un ensemble. On dit qu'une partie $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une σ-algèbre (ou tribu) sur Ω qui satisfait les conditions suivants :*

(i) $\emptyset \in \Omega$

(ii) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{M}$

(iii) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, *alors* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

Le couple $(\Omega, \mathcal{M})$ est appelé espace mesurable. Les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés les ensembles mesurables de Ω.

Définition 1.2.18. *Si $(\Omega, \mathcal{O})$ est un espace topologique, alors la tribu $\sigma(\mathcal{O})$ engendrée par les ouverts s'appelle la tribu borélienne de $(\Omega, \mathcal{O})$ et se note $\mathcal{B}(\Omega)$. Ses éléments sont des boréliens.*

Définition 1.2.19. *Soit $(\Omega, \mathcal{M})$ un espace mesurable. On appelle mesure (ou mesure positive) sur Ω, une application $\mu : \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$, telle que :*

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ est une suite disjointe, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ est appelé un espace mesuré.

Définition 1.2.20. *Soit $(\Omega, \mathcal{M})$ et $(\Omega', \mathcal{M}')$ deux espaces mesurables et f une fonction de Ω dans Ω'. On dit que f est mesurable si :*

$$\forall A \in \mathcal{M}', f^{-1}(A) \in \mathcal{M}.$$

Définition 1.2.21. *On dit qu'une propriété est vraie presque partout sur Ω (ou p.p.), si l'ensemble des éléments qui ne vérifient pas cette propriété est de mesure nulle (négligeable).*

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Définition 1.2.22. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$. On note par $L^p(\Omega)$ l'espace des classes d'équivalences de fonctions de puissance p-intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$:*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \textit{ mesurable et } ||f||_{L^p} < \infty\}$$

avec

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Théorème 1.2.23. *[3] (**Théorème de la convergence dominée de Lebesgue**)*
Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions de L^1. On suppose que

a) $f_n(x) \to f(x)$ *p.p sur Ω,*

b) il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω. Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$

1.3 Équations Différentielles

Définition 1.3.1. *On appelle **équation différentielle ordinaire**, une équation dont l'inconnu est une fonction* Φ *et qui relie* y *à ses dérivées, i.e. une équation du type :*

$$\Phi(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, ..., y', y) = f(t).$$

Ici, f *est une fonction donnée, appelée second membre et le plus haut degré de dérivation dans l'équation (ici* n*) est l'ordre de l'équation .*

- *Une équation différentielle est dite linéaire si la fonction* Φ *associée est linéaire. Autrement dit, une équation différentielle linéaire d'ordre* n *est une équation de la forme :*

$$(E): \; a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

où les $(a_i)_{i=0}^{n}$ *sont appelés coefficients de l'équation et sont des fonctions qui dépendent de* t*. L'adjectif linéaire porte donc sur l'inconnu* y *de l'équation.*
Dans le cas où $f(t)$ *est nulle, on dit que l'équation est homogène :*

$$(H): \; a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$$

Théorème 1.3.2. *L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre* n *est un espace vectoriel de dimension* n*.*

1.3.1 Problèmes de Cauchy -Lipschitz

Définition 1.3.3. *[5] Soit* E *un espace de Banach,* $U \subset E$ *un ouvert,* $I \subset \mathbb{R}$ *et* $f : I \times U \to E$ *une fonction continue. Le problème de Cauchy est donné par le système d'équations*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

La résolution du problème de Cauchy revient à trouver un intervalle $J \subset I$ *contenant* $t_0 \in I$ *et des solutions* φ *de classe* C^1 *sur* J *satisfaisant (1.1).*

Proposition 1.3.4. *[5] Une fonction $\varphi : I \to U$ est une solution du problème de Cauchy si et seulement si*

i) La fonction φ est continue et $\forall t \in I,\ (t, \varphi(t)) \in I \times U$.

ii)

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds.$$

Définition 1.3.5. *On dit que f est k-Lipschitzienne en x s'il existe $k > 0$ telle que*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|.$$

pour $(t, x_1), (t, x_2) \in I \times U$.

Définition 1.3.6. *On dit que f est localement Lipschitzienne si pour tout point $(t_0, x_0) \in I \times U$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) dans $I \times U$ et $k > 0$ tels que l'on ait*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$$

pour $(t, x_1), (t, x_2) \in V$.

Théorème 1.3.7. *[5]**(théorème d'existence)** Soit f une fonction continue sur U à valeurs dans E et est localement Lipschitzienne par rapport à x. Alors :*
$\forall (t_0, x_0) \in I \times U, \exists\ \epsilon > 0$ telle que

$$\varphi \in C^1([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], E) \text{ est une solution de (1.1).}$$

Théorème 1.3.8. *[5]**(théorème d'unicité)** Soit $U \subset \mathbb{R} \times E$ et soit $f : U \to E$ une fonction continue et k-lipschitzienne en x. Si on a deux solutions $\varphi_1, \varphi_2 : I \to E$ de l'équation différentielle*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

et si $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ (avec $t_0 \in I$).
Alors les fonctions φ_1 et φ_2 sont identiques dans l'intervalle I.

Remarque 1.3.9. *Si de plus f est de classe $C^r (r \geq 1)$, alors φ est de classe C^{r+1}.*

Théorème 1.3.10. *[5] On suppose que $f : I \times E \to E$ est continue et Lipschitzienne par rapport à x. Alors $\forall (t_0, x_0) \in I \times E$, il existe une unique solution $\varphi \in C^1(I, E)$ du problème (1.1).*

1.3.2 Problèmes aux limites

On considère les équations différentielles du second ordre de type :

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = f(t) \tag{1.2}$$

avec $t \in [t_0, t_1]$, et l'équation homogène associée :

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0 \tag{1.3}$$

où p et q sont des fonctions continues.

Le problème aux limites consiste à la recherche des solutions de l'équation (1.2) qui vérifient les conditions suivantes :

$$x(t_0) = \alpha \ et \ x(t_1) = \beta \tag{1.4}$$

où t_0, t_1, α, β sont données.

Les conditions (1.4) sont dites conditions aux limites de Dirichlet.

D'autres conditions peuvent être utilisées, dont les suivantes :

Conditions de Neumann :

$$x'(t_0) = \alpha \ et \ x'(t_1) = \beta \tag{1.5}$$

Conditions mixtes :

$$c_1x'(t_0) + c_2x(t_0) = \alpha \ et \ c_3x'(t_1) + c_4x(t_1) = \beta \tag{1.6}$$

Exemple 1.3.11. *Considérons l'équation différentielle*

$$x''(t) + x(t) = 1 \tag{1.7}$$

avec les conditions aux limites

$$x(0) = 0, x(\frac{\pi}{2}) = 0 \tag{1.8}$$

La solution générale de l'équation est donnée par :

$$x(t) = 1 + c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) \tag{1.9}$$

La condition $x(0) = 0$ implique $c_2 = -1$ et la condition $x(\frac{\pi}{2})$ implique $c_1 = -1$.

Le problème aux limites admet donc une unique solution donnée par :

$$x(t) = 1 - \sin(t) - \cos(t) \tag{1.10}$$

1.3.3 Équations différentielles d'ordre fractionnaires

Définition 1.3.12. *On appelle fonction* ***Gamma*** *eulérienne (ou intégrale eulérienne de seconde espèce) la fonction notée* Γ *définie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} dt,$$

où x *est un nombre complexe quelconque tel que* $Re(x) > 0$.

Définition 1.3.13. *La fonction* $B(p, q)$ *est la fonction* ***Bêta*** *(ou intégrale eulérienne de première espèce), définie par :*

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1} dx, p > 0, q > 0.$$

On a une égalité exprimant le lien entre l'intégrale eulerienne de première et de seconde espèce :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Définition 1.3.14. *[16] L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction* $h \in L^1([a, b])$ *d'ordre* $\alpha \in \mathbb{R}_+$*, est définie par*

$$I_a^{\alpha} h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{h(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds,$$

où Γ *est la fonction Gamma .*

Exemple 1.3.15. *Soit* $h(t) = (t-a)^u$ *où* $u > -1$.

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} h(t) =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{h(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \\ =& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{(s-a)^u}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} h(t) = \frac{(t-a)^{u+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (1-x)^{\alpha-1} x^u dx &= \frac{(t-a)^{u+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, u+1) \\ &= \frac{(t-a)^{u+\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(u+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(u+1+\alpha)}. \end{aligned}$$

D'où

$$I_a^{\alpha}(t-a)^u = \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u+1+\alpha)} (t-a)^{u+\alpha}.$$

Proposition 1.3.16. *Nous avons les propriétés suivantes :*

i) $I_0^0 h(t) = I_d h(t) = h(t)$

ii) $I_0^\alpha I_0^\beta h(t) = I_0^{\alpha+\beta} h(t)$

iii) l'opérateur intégral I_0^α *est linéaire.*

Définition 1.3.17. *[13] Soit* f *une fonction intégrable sur* $[a,b]$*, alors la dérivée fractionnaire d'ordre* r *(avec* $n-1 \leq r < n$*) au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^r f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-r)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-r-1} f(s) ds \\ &= \frac{d^n}{dt^n} (I^{n-r} f(t)). \end{aligned}$$

Définition 1.3.18. *Une fonction à valeur réelle* $f(t),\ t > 0$ *est dite dans l'espace* $C_\mu,\ \mu \in \mathbb{R}$*, s'il existe* $f_1(t) \in C([0,\infty))$*,et un nombre réel* $p > \mu$ *tel que* $f(t) = t^p f_1(t)$ *.*

Définition 1.3.19. *Une fonction* $f(t),\ t > 0$ *est dite dans l'espace* $C_\mu^n,\ n \in \mathbb{N}$*, si* $f^{(n)} \in C_\mu$*.*

Définition 1.3.20. *La dérivée fractionnaire de* $f \in C_{-1}^n$ *au sens de Caputo est définie par*

$$D^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, & n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \alpha = n \end{cases} \tag{1.11}$$

Remarque 1.3.21. *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante est nulle, autrement dit :* ${}^C D_a^\alpha C = 0$*.*

Lemme 1.3.22. *[13] Pour* $\alpha > 0$*, la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire* $D^\alpha x = 0$ *est donnée par*

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1} \tag{1.12}$$

où $c_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,2,...,n-1, n = [\alpha]+1$ *où* $[\alpha]$ *désigne la partie entière de* α*.*

Lemme 1.3.23. *[13] Soit* $\alpha > 0$*, alors*

$$I^\alpha D^\alpha x(t) = x(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1} \tag{1.13}$$

pour certains $c_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2,...,n-1,\ n = [\alpha]+1$*.*

Chapitre 2

Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques résultats de la théorie du point fixe, nous commencerons par le plus connu d'entre eux : **le théorème du point fixe de Banach** pour les applications contractantes , puis **le théorème de Schauder**, pour les applications compactes .

Finalement, nous présenterons **le théorème de Krasnoselskii** qui est un théorème d'existence du point fixe concernant les applications qui s'écrivent sous la forme de somme de deux applications, dont l'une est continue et compacte et l'autre est contractante.

2.1 Principe du contraction de Banach

Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

Théorème 2.1.1. *[19](**Théorème du point fixe de Banach(1922)**)*
Soit (M, d) un espace métrique, complet non vide et $T : M \to M$ une application contractante avec la constante de contraction k, alors T a un point fixe unique dans M.

Preuve.

L'existence :

Soit $y \in M$ un point arbitraire dans M. Considérons la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ donnée par :

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_n = T(x_{n-1}), n \geq 1 \end{cases}$$

On doit prouver que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans M.

Pour $m < n$, on utilise l'inégalité triangulaire :

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + ... + d(x_{n-1}, x_n)$$

puisque T est une contraction, on a :

$d(x_p, x_{p+1}) = d(Tx_{p-1}, Tx_p) \leq k\ d(x_{p-1}, x_p)$, pour $p \geq 1$.

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq (k^m + k^{m+1} + ... + k^{n-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m(1 + k + ... + k^{n-m-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m(1-k)^{-1}d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

On déduit que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans M qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers x dans M.

Par ailleurs, puisque T est continue, on a :

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T(x_{n-1}) = T(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = Tx$$

Donc x est un point fixe de T (i.e $Tx = x$)

L'unicité :

Supposons que $x = Tx$ et $y = Ty$, alors :

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

ce qui implique que $d(x, y) = 0$ i.e $x = y$ (puisque $k < 1$).

■

Remarque 2.1.2. *Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées T^p est une contraction, alors T a encore un point fixe et est unique.*
Ceci résulte de l'unicité.
En effet, soit x l'unique point fixe de T^p, on a $T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$ ce qui convient à dire que $T(x)$ est aussi un point fixe de T^p et grâce à l'unicité $T(x) = x$.
Donc ce résultat est valable pour tout les types de contractions qui assurent l'unicité du point fixe.

La version locale du théorème de Banach

Il se peut que f ne soit pas une contraction sur tout l'espace X mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant :

Théorème 2.1.3. *Soit (X, d) un espace métrique complet et soit*

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \text{ où } x_0 \in X \text{ et } r > 0$$

Supposons que $f : B(x_0, r) \to X$ est contractante de constante de contraction k, avec $d(f(x_0), x_0) < (1-k)r$. Alors, f admet un unique point fixe dans $B(x_0, r)$.

Preuve.

Il existe r_0 avec $0 \leq r_0 \leq r$, tel que $d(f(x_0), x_0) \leq (1-k)r_0$. On montre que $f : \overline{B(x_0, r_0)} \to \overline{B(x_0, r_0)}$.
Soit $x \in \overline{B(x_0, r_0)}$ alors

$$\begin{aligned} d(f(x), x_0) &\leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \\ &\leq k d(x, x_0) + (1-k)r_0 \\ &\leq k r_0 + (1-k)r_0 \\ &\leq r_0 \end{aligned}$$

Donc l'application $f : \overline{B(x_0, r_0)} \to \overline{B(x_0, r_0)}$ est contractante avec $\overline{B(x_0, r_0)}$ est un espace complet. Par suite, l'application du théorème de contraction de Banach assure qu'elle admet un unique point fixe dans $B(x_0, r)$.

■

2.2 Théorèmes du point fixe pour les applications compactes

Définition 2.2.1. *Soit X, Y deux espaces de Banach et $\Omega \subset X$ un ouvert, une application continue $f : \Omega \to Y$ est dite compacte si $f(\bar{\Omega})$ est compacte. Elle est dite complètement continue si l'image de tout borné est relativement compacte.*

Théorème 2.2.2. ***(Brouwer 1912)****[8] Soit C un compact, convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C.*

Proposition 2.2.3. *[8] Soit B la boule unité ouverte d'un espace normé X. Alors :*
$\dim X < +\infty \Leftrightarrow$ *toute application continue $f : \bar{B} \to \bar{B}$ admet au moins un point fixe.*

Proposition 2.2.4. *[8] Soit X un espace vectoriel normé. On a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned}
\dim X < \infty &\Leftrightarrow \textit{la boule fermée } \bar{B}(0,1) \textit{ est compacte} \\
&\Leftrightarrow \textit{la frontière } \partial B(0,1) \textit{ est compacte} \\
&\Leftrightarrow \textit{de toute suite de } \bar{B}(0,1), \textit{ on peut extraire une sous suite convergente.}
\end{aligned}$$

2.2.1 Théorème du point fixe de Schauder

Schauder a prolongé le théorème du point fixe de Brouwer au cas de la dimension infinie, en utilisant le fait qu'une application compacte en dimension infinie est approchable par des applications continues de rangs finis.

Définition 2.2.5. *[1] Soit X et Y deux espaces vectoriels normés. Une application $F : X \to Y$ est dite compacte si $F(X)$ est contenue dans un sous-ensemble compact de Y. Une application compacte $F : X \to Y$ est dite de rang fini si $F(X)$ est contenue dans un sous-espace vectoriel de Y de dimension finie .*

Remarque 2.2.6. *(a) De manière générale, une application compacte n'est pas nécessairement continue .*

(b) Toute application linéaire compacte est continue, la réciproque est vraie si f est de rang fini (le rang est la dimension de l'espace image).

Théorème 2.2.7. *[1] Soit C un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel normé, et $A = \{a_1, ..., a_n\} \subseteq C$. Si P_ε désigne la projection de Schauder, alors :*

(i) P_ϵ est une application compacte et continue de A_ε en $co(A) \subseteq C$,

(ii) $\|x - P_\epsilon\| < \epsilon$, pour tout $x \in A_\epsilon$.

Théorème 2.2.8. *[1]**(Théorème d'approximation de Schauder)***
Soit C un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel normé E et $F : E \to C$ une application compacte et continue. Alors pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un ensemble fini $A = \{a_1, ..., a_n\}$ dans $F(E)$ et une application $F_\epsilon : E \to C$ continue de rang fini avec les propriétés suivantes :

(i) $\|F_\epsilon(x) - F(x)\| < \epsilon, \forall x \in E$,

(ii) $F_\epsilon(x) \subseteq co(A) \subseteq C$.

Avant de prouver le théorème de Schauder, on introduit la notion de $\epsilon-$point fixe.

Définition 2.2.9. *Soit E un espace de Banach, $C \subset E$ une partie non vide, fermée convexe et $F : C \to C$ une application. On dit que F admet un $\epsilon-$point fixe dans C si la condition suivante est satisfaite :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in C : \|F(x_\epsilon) - x_\epsilon\| \leq \epsilon.$$

Théorème 2.2.10. *[1] Soit D un sous-ensemble fermé d'un espace vectoriel normé E et $F : D \to E$ une application compacte et continue. Alors F admet un point fixe si et seulement si F admet un $\epsilon-$point fixe.*

Théorème 2.2.11. *[1]**(Théorème du point fixe de Schauder)***
Soit C un sous-ensemble non vide fermé convexe d'un espace vectoriel normé E. Alors toute application compacte et continue $F : C \to C$ a au moins un point fixe.

Preuve :

D'après le théorème (2.2.10), avec $D = C$, il suffit de montrer que F a un $\epsilon-$point fixe pour chaque $\epsilon > 0$. Fixons $\epsilon > 0$, le théorème (2.2.8) garantit l'existence d'une application continue de rang fini $F_\epsilon : C \to C$ avec :

$$\|F_\epsilon(x) - F(x)\| < \epsilon, \forall x \in C. \tag{2.1}$$

et $F_\epsilon(C) \subseteq co(A) \subseteq C$ pour un ensemble fini $A \subseteq C$. Puisque $co(A)$ est fermé et borné et $F(co(A)) \subseteq co(A)$, nous pouvons appliquer le théorème (2.2.2) (théorème du point fixe de Brouwer) pour déduire qu'il existe $x_\epsilon \in co(A)$ avec $x_\epsilon = F_\epsilon(x_\epsilon)$. De plus, (2.1) donne

$$\|x_\epsilon - F_\epsilon(x_\epsilon)\| = \|F_\epsilon(x_\epsilon) - F(x_\epsilon)\| < \epsilon.$$

■

Corollaire 2.2.12. *[8] Soit C un sous-ensemble convexe, compact, non vide d'un espace de Banach X et $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe.*

Corollaire 2.2.13. *[8] Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, non vide, C non nécessairement borné , d'un espace de Banach X et $f : C \to C$ une application continue telle que $f(C)$ est inclue dans un compact de C . Alors f admet au moins un point fixe.*

2.2.2 Alternative de Leary-Schauder

Théorème 2.2.14. *[8] Soit Ω un ouvert, borné d'un espace de Banach X et $f : \Omega \to X$ une application compacte.Alors*
ou bien (i) f admet un point fixe dans Ω .
ou bien (ii) Il existe $x \in \partial\Omega, \exists t \in [0, 1] : x = tf(x)$.

Théorème 2.2.15. *[8]**Théorème de Schaefer***
Soit X un espace de Banach et $K : X \to X$ une application compacte. On a alors l'alternative :
Ou bien, l'équation $tK(x) = x$ admet une solution pour tout $t \in [0, 1]$.
Ou bien, l'ensemble $S = \{x \in X : \exists t \in [0, 1], tK(x) = x\}$ est non borné.

2.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Théorème 2.3.1. *[19] Soit M un convexe fermé et non vide d'un espace de Banach $(X, \|.\|)$. Supposons que A et B sont deux applications de M dans X telles que*

i) $Ax + By \in M, \forall x, y \in M$.

ii) *A est compacte et continue.*

iii) *B est une contraction de constante $\alpha < 1$.*

Alors il existe $x \in M$, tel que $Ax + Bx = x$.

Remarque 2.3.2. *Si $A = 0$, le théorème se résume au théorème de Banach. Si $B = 0$, le théorème n'est autre que le théorème de Schauder.*

Preuve.

D'après la condition (iii), on a

$$\begin{aligned}
\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| &= \|(x-y)-(Bx-By)\| \\
&\leq \|x-y\| + \|Bx-By\| \\
&\leq \|x-y\| + \alpha\|x-y\| \\
&\leq (1+\alpha)\|x-y\|.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| &= \|(x-y)-(Bx-By)\| \\
&\geq \|x-y\| - \|Bx-By\| \\
&\geq \|x-y\| - \alpha\|x-y\| \\
&\geq (1-\alpha)\|x-y\| \\
&> 0.
\end{aligned}$$

En résumer,

$$(1-\alpha)\|x-y\| \leq \|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| \leq (1+\alpha)\|x-y\|.$$

Cette inégalité montre que $(I-B) : M \to (I-B)M$ est continue .

Montrons que $(I-B)^{-1}$ existe et est continue :

On a $\|(I-B)x-(I-B)y\| \neq 0 \Rightarrow (I-B)x \neq (I-B)y$

On conclut que $(I-B)$ est injective, et comme $(I-B) : M \to (I-B)M$ alors :

$\forall y \in (I-B)M,\ \exists x \in M$ tel que $(I-B)x = y$, d'où $(I-B)$ est surjective, et donc $(I-B)^{-1}$ existe. Il reste à montrer que $(I-B)^{-1} : (I-B)M \to M$ est continue.

Comme $(I-B)^{-1}$ existe donc,

$$\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| \geq (1-\alpha)\|x-y\| \Leftrightarrow \|x'-y'\| \geq (1-\alpha)\|(I-B)^{-1}x'-(I-B)^{-1}y'\|$$

Donc, $\|(I-B)^{-1}x'-(I-B)^{-1}y'\| \leq \dfrac{1}{(1-\alpha)}\|x'-y'\| \qquad \text{avec } (1-\alpha) \neq 0$

D'où, $(I-B)^{-1}$ est lipschitzienne donc continue.

Posons $U := (I-B)^{-1}A$. Il est clair que U est une application compacte, puisque U est une composition d'une application continue avec une application compacte, donc d'après le théorème de Schauder, U admet un point fixe i.e

$$\exists\ x \in M, tel\ que\ (I-B)^{-1}Ax = x$$

Ceci équivaut à dire $Ax + Bx = x$.

■

2.3.1 Théorème de Krasnoselskii pour les $\mathfrak{D}$- contractions non linéaires

Définition 2.3.3. *[6] Soit E un espace de Banach.*

• *Une application $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est dite une fonction dominante ou $\mathfrak{D}$-fonction si elle est continue et non décroissante satisfaisant $\psi(0) = 0$.*

• *Une application $Q : E \to E$ est dite $\mathfrak{D}$-Lipschitzienne s'il y a une $\mathfrak{D}$-fonction $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant :*

$$\|Q\phi - Q\xi\| \leq \psi(\|\phi-\xi\|) \qquad pour\ tout\ \phi, \xi \in E.$$

Remarque 2.3.4. *Toute application* $\mathfrak{D}-$*lipschitzienne est lipschitzienne avec,* $\psi(r) = kr,\ k > 0.$

De plus, si $\psi(r) < r$, *alors* Q *est dite* $\mathfrak{D}$*-contraction non linéaire et la fonction* ψ *est dite* $\mathfrak{D}$*-fonction de* Q *dans* E.

Remarque 2.3.5. *Toute application* $\mathfrak{D}$*-contractante est contractante.*

Théorème 2.3.6. *[6] Soit* S *un sous-ensemble fermé, convexe et borné d'un espace de Banach* E *et* $A : E \to E$ *et* $B : S \to E$ *deux opérateurs tels que*

(a) A *est* $\mathfrak{D}$*-contraction non linéaire .*

(b) B *est compact et continu .*

(c) $x = Ax + By$ *pour tout* $y \in S$ *.*

Alors l'équation opérateur $Ax + Bx = x$ *admet une solution dans* S.

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre, nous étudirons l'existence d'une solution pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire au sens de Caputo et une équation différentielle perturbée, en appliquant le théorème du point fixe de Krasnoselskii .

3.1 Résultats d'existence pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire

On se propose d'étudier le problème aux limites :

$$\begin{cases} D^{\alpha}x(t) + f(t, x(t)) = \theta, 0 \leq t \leq 1, 1 < \alpha \leq 2, \\ x(0) = \int_0^1 g(\tau)x(\tau)d\tau, x(1) = \theta \end{cases} \tag{3.1}$$

Où D^{α} est la dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo, et $f : [0, 1] \times E \to E$ est continue, tel que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach et $C([0, 1], E)$ est l'espace de Banach de toutes les fonctions continues défnies sur $[0, 1]$ dans E doté d'une topologie de convergence uniforme avec la norme notée $\|.\|$.

Lemme 3.1.1. *Une solution du problème fractionnaire aux limites (3.1) est donnée par :*

$$x(t) = (1-t)\int_0^1 g(\tau)x(\tau)d\tau + \theta\left(t - \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)$$
$$+\frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))d\tau - I^\alpha f(t, x(t)).$$

Preuve. On a

$$D^\alpha x(t) = \theta - f(t, x(t)), 0 \leq t \leq 1 \tag{3.2}$$

En appliquant l'opérateur d'intégrale fractionnaire sur les deux côtés de (3.2) et en utilisant l'identité

$I^\alpha D^\alpha x(t) = x(t) + c_0 + c_1 t$, on obtient

$$x(t) = \frac{\theta t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - I^\alpha f(t, x(t)) - c_0 - c_1 t \tag{3.3}$$

En particulier, pour $t = 0$, on a

$$c_0 = -\int_0^1 g(\tau)x(\tau)d\tau$$

, et pour $t = 1$, on obtient

$$c_1 = -\theta + \frac{\theta}{\Gamma(\alpha+1)} + \int_0^1 g(\tau)x(\tau)d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))d\tau.$$

En remplaçant les valeurs de c_0 et c_1 dans (3.3) , on obtient l'équation à prouver. Maintenant, on définit l'opérateur $T : C([0,1], E) \to C([0,1], E)$ comme suit :

$$T(x) := (1-t)\int_0^1 g(\tau)x(\tau)d\tau + \theta(t + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)})$$
$$+\frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))d\tau$$

Où $0 \leq t \leq 1, 1 < \alpha \leq 2$.

■

3.1.1 Résultats principaux

Nous prouvons l'existence d'une solution pour (3.1), en utilisant le théorème du point fixe de Krasonselskii. Les hypothèses suivantes sont suffisantes pour prouver le résultat :

(H_1) $\|f(t,x)\| \leq v(t); (t,x) \in [0,1] \times E, v \in L^1([0,1], \mathbb{R}^+)$.

(H_2) soit $f : [0,1] \times E \to E$ une fonction continue bornée appliquée sur des sous ensembles de $[0,1] \times E$ dans des sous ensembles relativement compacts de E.

(H_3) Soit d et k deux nombres réels positifs tels que $0 < d < 1$ et

$$\frac{M+2k}{\Gamma(\alpha+1)} \leq d$$

avec $M = \sup_{t\in[0,1]} |g(t)|$.

Théorème 3.1.2. *Supposons que les hypothèses (H_1) - (H_3) soient satisfaites. Si $M < 1$, alors le problème (3.1) a au moins une solution dans $C([0,1], E)$.*

Preuve. Soit

$$\rho \geq (1-M)^{-1} \left(\theta(1 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}) + \frac{2\|v\|}{\Gamma(\alpha+1)} \right). \tag{3.4}$$

Où $\|v\| := \sup_{t\in[0,1]} |v(t)|$. Sur $B_\rho := \{x \in E, \|x\| \leq \rho\}$, on définit les opérateurs $R : E \to E$ et $S : B_\rho \to E$ comme suit :

$$R(x) := (1-t) \int_0^1 g(\tau)x(\tau)d\tau + \theta(t + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)}).$$

$$S(x) := \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))d\tau - I^\alpha f(t, x(t)).$$

Pour $x, y \in B_\rho$, on a

$$\begin{aligned}\|R(x)+S(y)\| \leq & \|(1-t) \int_0^1 g(\tau)x(\tau)d\tau + \theta(t + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{t}{\Gamma(\alpha+1)})\| \\ & + \|\frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau))d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau))d\tau\|.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\|R(x)+S(y)\| \leq & M\|x\|+\theta(1+\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)})\\ & +\|\frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,y(\tau))d\tau\|\\ & +\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,y(\tau))d\tau\|.\end{aligned}$$

En utilisant (H_1) et (3.4), on obtient

$$\|R(x)+S(y)\| \leq M\|x\|+\theta(1+\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)})+\frac{2\|v\|}{\Gamma(\alpha+1)} \leq M\rho+(1-M)\rho.$$

Par conséquent, $R(x)+S(y) \in B_\rho$. D'un autre côté, il est facile de voir que

$$\|R(x)-R(y)\| \leq M\|x-y\|.$$

et puisque $M<1$, alors R est une application contractante. De plus, il résulte de (H_2) que l'opérateur S est continu et

$$\begin{aligned}\|S(x)\| \leq & \frac{t}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\|f(\tau,x(\tau))\|d\tau\\ & +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\|f(\tau,x(\tau))\|d\tau.\end{aligned}$$

Puisque $t\in[0,1]$, alors on peut écrire

$$\|S(x)\| \leq \frac{2\|v\|}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Par conséquent, S est uniformément borné sur B_ρ. Prenons maintenant $t_1,t_2\in[0,1]$ et $y\in B_\rho$. Alors on peut écrire

$$\begin{aligned}\|S(y(t_1))-S(y(t_2))\| \leq & \frac{t_1-t_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,y(\tau))d\tau\|\\ +\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,y(\tau))d\tau & -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,y(\tau))d\tau\|.\end{aligned}$$

D'après (H_1), on a

$$\|S(y(t_1))-S(y(t_2))\| \leq \frac{\|v\|}{\Gamma(\alpha+1)}\left(|t_1-t_2|+|t_1^\alpha-t_2^\alpha|\right). \tag{3.5}$$

Le côté droite de (3.5) est indépendant de y. Donc S est équicontinu et comme $t_1 \to t_2$, le côté gauche de (3.5) tend vers 0, donc $S(B_\rho)$ est relativement compact, puis d'après le théorème d'Ascoli-Arzéla, l'opérateur S est compact. Finalement, d'après le théorème de Krasnoselskii, nous concluons qu'il existe une solution de (3.1).

■

3.2 Résultats d'existence pour une équation différentielle perturbée

3.2.1 Introduction

Perturbations techniques ou méthodes de perturbation sont très utilisées dans l'analyse non linéaire pour étudier les systèmes dynamiques représentés par des équations différentielles non linéaires et des équations intégrales. Parfois les équations différentielles représentées par certains systèmes dynamiques ne sont pas faciles à résoudre ou à analyser, pourtant la perturbation des problèmes pareils dans certaines méthodes facilite l'étude du problème avec des méthodes disponibles pour des différentes apparences de solutions . Pour être plus spécifique, pour tout fermé ou intervalle fermé $J = [0, T]$ de l'axe $\mathbb{R}$, Considérer le problème à valeur initiale de l'équation différentielle ordinaire non linéaire du premier ordre

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \ t \in J \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.6}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Maintenant, il ce peut que la non linéarité complexe f dans l'équation (3.6) n'est pas régulière pour étudier l'existence ou d'autres caractérisations des solutions. Mais si on transforme la fonction f à une somme de deux fonctions f_1 et f_2 ,$f = f_1 + f_2$, alors ces fonctions ont des propriétés et l'équation différentielle non linéaire

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t)), \ t \in J \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.7}$$

est facile à résoudre avec des techniques théoriques fonctionnelles disponibles. Cette méthode est appelée méthode de perturbation et l'équation différentielle (3.7) est dite perturbation de l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t)), \ t \in J \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.8}$$

L'équation différentielle ci-dessus (3.7) est obtenue en perturbant la non-linéarité f_1 de (3.8) et est appelée une équation différentielle perturbée. Si la fonction inconnue dans l'équation différentielle est perturbée d'une manière quelconque, alors elle est appelée équation différentielle perturbée du premier type. De même, si la fonction inconnue sous dérivée est perturbée, alors elle est appelée équation différentielle perturbée du second type. L'équation différentielle non linéaire (3.7) est elle-même fait une perturbation implicite du premier type correspondant à une valeur initiale bien connue d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

$$\begin{cases} x'(t) = x(t), t \in J \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.9}$$

Considérons maintenant l'équation différentielle perturbée liée à (3.8)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[x(t) - f_2(t, x(t))] = f_1(t, x(t)), t \in J \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.10}$$

Dans cette perturbation de l'équation différentielle (3.10), le terme sous dérivée est perturbé et tel type de perturbation est appelé une perturbation du deuxième type. La perturbation d'une équation non linaire laquelle nécessite l'addition ou la soustraction du terme est appelée une perturbation linéaire et la perturbation qui nécessite la multiplication ou la division par un terme est appelée une perturbation quadratique de l'équation. De même, si la fonction inconnue dans l'équation différentielle (3.6) est perturbée par une fonction, alors elle est dite une perturbation implicite de l'équation différentielle (3.8). Encore, une perturbation implicite peut être du premier ou du second type. L'équation différentielle

(3.10) est une perturbation linéaire du second type de l'équation différentielle (3.8)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{x(t)}{f_2(t,x(t))}\right] = f_1(t,x(t)), t \in J \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.11}$$

est une perturbation quadratique pour l'équation différentielle (3.8) du second type. De même, l'équation différentielle

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, \int_0^t x(s)ds), t \in J \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.12}$$

est une perturbation implicite de l'équation différentielle (3.8) du premier type et l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[f(t,x(t))] = f_1(t,x(t)), t \in J \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.13}$$

est une perturbation implicite de l'équation différentielle (3.8) du second type. Dans le sens similaire, on peut avoir des perturbations des équations intégrales non linéaires. Par exemple les équations intégrales non linéaires

$$x(t) = q(t) + \int_0^t f(s,x(s))ds + \int_0^t g(s,x(s))ds. \tag{3.14}$$

$$x(t) = q(t) + f(t,x(t)) + \int_0^t g(s,x(s))ds. \tag{3.15}$$

et

$$x(t) = [f(t,x(t))]\left(q(t) + \int_0^t g(s,x(s))ds\right). \tag{3.16}$$

sont des perturbations de l'équation intégrale non linéaire

$$x(t) = q(t) + \int_0^t g(s,x(s))ds. \tag{3.17}$$

Remarquons que l'équation intégrale (3.14) est une perturbation linéaire du deuxième type et l'équation (3.15) est une perturbation linéaire du premier type. L'équation intégrale non linéaire (3.17) est elle-même en fait, une perturbation implicite du deuxième type correspondant à l'équation intégrale linéaire connue

$$x(t) = q(t) + \int_0^t x(s)ds \tag{3.18}$$

De même, les équations intégrales non linéaires

$$f(t, x(t)) = q(t) + \int_0^t g(s, x(s))ds \tag{3.19}$$

et

$$x(t) = q(t) + \int_0^t g(s, f(s, x(s)))ds \tag{3.20}$$

sont des perturbations implicites de l'équation intégrale (3.17) du premier et du deuxième types respectivement. Similairement, il y a peut être d'autre perturbations des équations intégro-différentielles impliquant les perturbations linéaires et quadratiques du premier et du deuxième type. Alors tel type de perturbation est dit perturbation de type mélangé pour des équations différentielles non linéaires et équations intégrales. Presque toutes les équations intégrales ou différentielles non linéaires perturbées sont généralement traitées avec l'utilisation de la théorie du point fixe hybride, ou réciproquement, l'étude de l'équation non linéaire perturbée est l'origine ou la motivation au développement de la théorie du point fixe hybride dans les espaces abstraits.

3.2.2 Résultats d'existence

Étant donné un intervalle borné $J = [t_0, t_0+a)$ dans $\mathbb{R}$ pour un t_0 fixé, $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, considérons les problèmes à valeur initiale pour l'équation différentielle hybride (EDH),

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[x(t) - f(t, x(t))\right] = g(t, x(t)), t \in J \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.21}$$

où $f, g : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues.

Dans cette section, nous prouvons un résultat d'existence pour l'EDH (3.21) sur un intervalle fermé et borné $J = [t_0, t_0+a]$ dans des conditions mixtes de Lipschitz et de compacité sur les non-linéarités impliquées. On place l'EDH (3.21) dans l'espace fonctionnel $C(J, \mathbb{R})$ des fonctions continues à valeurs réelles définies sur J. Définissons la norme sup dans $C(J, \mathbb{R})$ par

$$\|x\| = \sup_{t \in J} |x(t)|$$

Il est clair que l'espace $C(J, \mathbb{R})$ est un espace de Banach par rapport à la norme sup.Nous prouvons l'existence d'une solution pour l'EDH (3.21) via le théorème hybride du point fixe (2.3.6) dans l'espace de Banach.

On considère les hypotèses suivantes dans ce qui suit :

(A_0) La fonction $x \mapsto x - f(t, x)$ est croissante dans $\mathbb{R}$ pour tout $t \in J$.

(A_1) Il existe une constante $L > 0$ telle que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \frac{L|x - y|}{M + |x - y|}$$

pour tout $t \in J$ et $x, y \in \mathbb{R}$. De plus $L \leq M$.

(A_2) Il existe une fonction continue $h : J \to \mathbb{R}$ telle que

$$|g(t, x)| \leq h(t), t \in J$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Lemme 3.2.1. *[12] Supposons que l'hypothèse (A_0) soit vérifiée. Alors pour toute fonction continue $h : J \to \mathbb{R}$, la fonction $x \in C(J, \mathbb{R})$ est une solution de l'EDH*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[x(t) - f(t, x(t))\right] = h(t), t \in J \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.22}$$

si et seulement si x satisfait l'équation intégrale hybride (EIH)

$$x(t) = x_0 - f(t_0, x_0) + f(t, x(t)) + \int_{t_0}^{t} h(s)ds, t \in J. \tag{3.23}$$

Théorème 3.2.2. *[12] [10] Supposons que les hypothèses (A_0)-(A_2) soient vérifiées. Alors l'EDH (3.21) a une solution définie sur J.*

Preuve.

$E = C(J, \mathbb{R})$ et S est un sous-ensemble de E défini par

$$S = \{x \in E / \|x\| \leq N\}$$

où,

$$N = |x_0 - f(t_0, x_0)| + L + F_0 + a\|h\|$$

et $F_0 = \sup_{t \in J} |f(t, 0)|$.

Il est clair que S est un sous-ensemble fermé, convexe et borné de l'espace de Banach E.

Maintenant, en utilisant les hypothèses (A_0) et (A_2) on peut montrer par une application du lemme (3.2.1) que l'EDH (3.21) est équivalente à l'EIH non linéaire

$$x(t) = x_0 - f(t_0, x_0) + f(t, x(t)) + \int_{t_0}^{t} g(s, x(s))ds \tag{3.24}$$

pour $t \in J$.

Définissons deux opérateurs $A : E \to E$ et $B : S \to E$ par

$$Ax(t) = f(t, x(t)), t \in J. \tag{3.25}$$

et

$$Bx(t) = x_0 - f(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} g(s, x(s))ds, t \in J. \tag{3.26}$$

Alors, l'EIH (3.24) est transformée en une équation d'opérateur comme suit

$$Ax(t) + Bx(t) = x(t), t \in J. \tag{3.27}$$

Nous montrerons que les opérateurs A et B satisfont toutes les conditions du théorème (2.3.6).

Tout d'abord, nous montrons que A est une $\mathfrak{D}$-contraction non linéaire sur E avec une $\mathfrak{D}$-fonction ψ.

Soit $x, y \in E$. Alors, d'après l'hypotèse (A_1),

$$|Ax(t) - Ay(t)| = |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq \frac{L|x(t) - y(t)|}{M + |x(t) - y(t)|} \leq \frac{L\|x - y\|}{M + \|x - y\|}$$

pour tout $t \in J$. En prenant supremum sur t, on obtient

$$\|Ax - Ay\| \leq \frac{L\|x-y\|}{M + \|x-y\|}$$

pour tout $x, y \in E$. Cela montre que A est une $\mathfrak{D}$-contraction non linéaire sur E avec la $\mathfrak{D}$-fonction ψ définie par $\psi(r) = \dfrac{Lr}{M+r}$

Ensuite, nous montrons que B est un opérateur compact et continu sur S dans E. Montrons d'abord que B est continu sur S. Soit $\{x_n\}$ une suite qui converge sur S vers un point $x \in S$. Alors d'après le théorème de la convergence dominée pour l'intégration, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} Bx_n(t) = \lim_{n\to\infty} \left[x_0 - f(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} g(s, x_n(s))ds\right] &= x_0 - f(t_0, x_0) + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} g(s, x_n(s))ds \\ &= x_0 - f(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} \left[\lim_{n\to\infty} g(s, x_n(s))\right] ds \\ &= x_0 - f(t_0, x_0) + \int_{t_0}^{t} g(s, x(s))ds = Bx(t).\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Alors, B est un opérateur continu dans S. De plus, on peut montrer comme ci-dessous que $\{Bx_n\}$ est une suite des fonctions équicontinues dans X. Puis d'après l'hypothèse (A_2),

$$\begin{aligned}|Bx(t)| &\leq |x_0 - f(t_0, x_0)| + \int_{t_0}^{t} |g(s, x(s))|ds \\ &\leq |x_0 - f(t_0, x_0)| + \int_{t_0}^{t} h(s)ds \leq |x_0 - f(t_0, x_0)| + \|h\|a.\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. En prenant supremum sur t ,

$$\|Bx(t)\| \leq |x_0 - f(t_0, x_0)| + \|h\|a.$$

pour tout $x \in S$. Cela montre que B est uniformément borné sur S. En plus , soit $t_1, t_2 \in J$. Alors pour tout $x \in S$, on a

$$\begin{aligned}|Bx(t_1) - Bx(t_2)| &= |\int_{t_0}^{t_1} g(s, x(s))ds - \int_{t_0}^{t_2} g(s, x(s))ds| \\ &\leq |p(t_1) - p(t_2)|.\end{aligned}$$

où, $p(t) = \int_{t_0}^{t} h(s)ds$. Puisque la fonction p est continue sur le compact J, elle est uniformément continue. Donc, pour $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |Bx(t_1) - Bx(t_2)| < \varepsilon.$$

pour tout $t_1, t_2 \in J$ et pour tout $x \in S$. Cela montre que $B(S)$ est un ensemble équi-continu dans E. Maintenant, l'ensemble $B(S)$ est uniformément borné et équicontinu dans E, donc il est compact d'après le théorème d'Ascoli-Arzéla. Par conséquent, B est un opérateur continu et compact sur S.

Ensuite, nous montrons que l'hypothèse (c) du théorème (2.3.6) est satisfaite. Soit $x \in E$ fixé et $y \in S$ arbitraire tel que $x = Ax + By$. Alors, d'après l'hypothèse (A_1), on a

$$\begin{aligned}
|x(t)| \leq |Ax(t)| + |By(t)| &\leq |x_0 - f(t_0, x_0)| + |f(t, x(t))| + \int_{t_0}^{t} |g(s, y(s))| ds \\
&\leq |x_0 - f(t_0, x_0)| + [|f(t, x(t)) - f(t, 0)| + |f(t, 0)|] + \int_{t_0}^{t} |g(s, y(s))| ds \\
&\leq |x_0 - f(t_0, x_0)| + L + F_0 + \int_{t_0}^{t} h(s) ds \leq |x_0 - f(t_0, x_0)| + L + F_0 + \|h\| a.
\end{aligned}$$

En prenant supremum sur t,

$$\|x\| \leq |x_0 - f(t_0, x_0)| + L + F_0 + \|h\| a.$$

et donc $x \in S$.

Ainsi, toutes les conditions du théorème (2.3.6) sont satisfaites et donc l'équation d'opérateur $Ax + Bx = x$ a une solution dans S. Par conséquent, l'EDH (3.21) admet une solution définie sur J.

$\blacksquare$

Conclusion

Dans ce mémoire, on a abordé le théorème classique du point fixe de Krasnoselskii dans les espaces de Banach qu'on a appliqué pour étudier l'existence de solutions de certains types d'équations différentielles.
Ce théorème est valable également pour les espaces vectoriels topologiques quelconques.
Il y a plusieurs extensions de ce théorème comme le théorème de krasnoselskii pour les opérateurs condensés .

Bibliographie

[1] R.AGARWAL ,M. MEEHAN & D. O'REGAN.*Fixed Point Theory and Applications*. Cambridge. University. Press.

[2] A. Anber, S. Belarbi and Z. Dahmani. New Existence and Uniqueness Results for Fractional Differential Equations, *DOI :10.2478/auom-2013-0040 An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*.

[3] H. Brezis,*Analyse Fonctionnelle Théorie et application.*MASSON Paris New york Barcelon Milan Mexico Sao Paulo 1987.

[4] J.M. Brun. *Analyse Fonctionnelle*,2009.

[5] H. Cartan. *Cours de Calcul différentiel*. Hermann. Paris, 1967.

[6] B. C. Dhage. A fixed point theorem in Banach algebras with applications to functional integral equations. *Kyungpook Math. J., 44 (2004)*, 145–155.

[7] B. Dhage. Quadratic perturbations of periodic boundary value problems of second order ordinary differential equations. *"Kasubai", Gurukul Colony, Thodga Road, Ahmedpur-413 515, Dist. Latur, Maharashtra, India*, January 2010.

[8] S. Djebali. *LE Degré Topologique et Application*,B.P.92 Kouba, Alger, Algérie.le 22 mars 2006.

[9] A.El jai. *Eléments de topologie et espaces métriques*, Presses Universitaires de Perpignan, 2007.

[10] A.Granas, R. B.Guenther and J.W. Lee, Some general existence principles for Carathèodory theory of nonlinear differential equations, *J.Math. Pures et Appl., 70 (1991), 153–196.*

[11] L. Jeanjean. *Espaces métriques ,Cours et TD*. Université de Franche-Comté,,16 route de Gray, 25030 Besan¸con cedex.

[12] N. S. Jadhav, B. Dhage, Basic Results in the Theory of Hybrid Differential Equations with Linear Perturbations of Second Type. *Tamkang Journal of Mathematics · January 2013.*

[13] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo,*Theory and application of fractional differential equations*, Elsevier, Amsterdam, (2006).

[14] M.A. Krasnoselskii, Two remarks on the method of successive approxima-tions. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 10, (1955), 123-127.

[15] S. Lang.*Analyse réelle .Cours Mathématique*.InterEdition,1977.

[16] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, *Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, San Diego, 1999.*

[17] F. Ronga. *Topologie et géométrie*, Genève, MMVI ap.J.-C.

[18] B. N. Sadovskii, On a fixed point principle. *Funct. Anal. Appl. 1 1967 pp.74-76.*

[19] D.R.Smart.*Fixed point theorems*.Cambridge Uni.Press.Cambridge 1974.