**R**épublique **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulair
**M**inistère de l'**E**nseignement **S**upérieur et de
la**R**echerche **S**cientifique
**U**niversité Ibn Khaldoun – Tiaret –

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département des MATHEMATIQUES

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

DOMAINE : Mathématiques et Informatique

FILIERE : Mathématiques

SPECIALITE: Analyse Fonctionnelle et Applications

**Présenté par**

NasriRekia

Khiar Sabrina

**SUJET DUMEMOIRE** :

# *Les inégalités modernes de Hardy pour les différents cas de paramètres p et q .*

**Le Jury est composé de** :

| | | |
|---|---|---|
| Mr : Bendaoud Sid Ahmed | Univ.de Tiaret | Président |
| Mr :BenaissaBouharket | Univ.de Tiaret | Examinateur |
| Mr :Senouci A.E.K | Univ.de Tiaret | Encadreur |

Année Universitaire : 2019/2020

# Remerciement

On remercie tout d'abord DIEU tout puissant de nous avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce modeste travail.

En tout premier lieu, nous tenons à remercier chaleureusement et respectivement nos encadreur Mr.SENOUCI pour l'aide, les remarques, ses encouragement et précieux conseils.

Nos remerciement vont à l'endroit Mr. Bendaoud Sid Ahmed et Mr.Benaissa Bouharket d'avoir acceptés d'être notre jury et pour leur disponibilité, leur suggestions et recommandations.

Nous tenons à remercier tous les enseignants qui ont participé à nos formation tout au long universitaire.

Nous exprimons également nos sincères remerciements le chef département Mr.Larabi Abd el Rahman.

Enfin, nous ne voudrons pas non plus oublier toutes les personnes que nous pouvons rencontre au long de ces années universitaire.

# Dédicaces

Je dédie cette thèse à ma chére Maman , mon cher père à mes frères et mes sœurs ... à toute la famille et amis proches et lointains.

NASRI REKIA.

Ce travail est dédié à Ma mère , mon père ,Mes frères et Mes Soeurs , Ma famille et mes amies .

KHIAR SABRINA.

# Table des matières

## 0.1 Introduction

L'inégalité classique de Hardy est énoncée comme suit :

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dt \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx \tag{1}$$

oú $f(x)$ est une fonction non-négative mesurable et $p > 1$.
Muckenhoupt dans [58],a prouvé une inégalité plus générale que (1) :

$$\left(\int_0^\infty |u(x)\int_0^x f(t)dt|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 \left(\int_0^\infty |f(x)v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

est vérifiée ,si et seulement si :

$$\sup_{r>0}\left(\int_r^\infty |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{P}} \left(\int_0^r |v(x)|^{-p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} = K < \infty \tag{3}$$

où $u$ et $v$ sont des fonctions de poids.

$$K \leq C \leq K(p)^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}.$$

un résultat similaire pour l'inégalité duale de (1) est aussi obtenu

$$\left(\int_0^\infty |u(x)\int_x^\infty f(t)dt|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_2 \left(\int_0^\infty |f(x)v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

où $u$ et $v$ sont des fonctions de poids .
Les développements et généralisations de (1),(2)et (4) sont considérés dans plusieurs travaux (voir [56] B . Muckenhoupt,[6] Beesack )et autres .Par exemple J.scott Bradelyen 1978 a établi l'inégalité suivante :

$$\left(\int_0^\infty \left[u(x)\int_0^x f(t)dt\right]^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_3 \left(\int_0^\infty [f(x)v(x)dx]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5}$$

est vérifiée si et seulement si :

$$\sup_{r>0}\left(\int_r^\infty u^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^r v^{-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} = K < \infty \tag{6}$$

$$K \leq C_3 \leq K(p)^{\frac{1}{q}}(p')^{\frac{1}{p'}},$$

où $f(x) \geq 0$,$1 < p < q < \infty$,$u$ et $v$ sont des fonctions des poids .
Dans le présent travail , est considérée une version de l'inégalité (5) pour l'opérateur classique de Hardy et son adjoint .

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_4 \left(\int_0^\infty f^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{7}$$

Dans le cas où $1 < p \leq q < \infty$, il est bien connu que (7) est vérifiée si et seulement si

$$B_L = \sup_{r>0} \left(\int_r^\infty w(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty. \tag{8}$$

$$B_L \leq C_4 \leq K(q,p)B_L.$$

Dans le $1^{er}$ chapitre ou s'intéresse à l'négalité

$$\left(\int_a^b |u(x)|^q w(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_5 \left(\int_a^b |u'(x)|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{9}$$

et son équivalence avec (7), est aussi posé le problème suivant : sous quelles condition (nécessaires et suffisantes) sur $p, q, v$ et $w$ sur $(a, b) \subset \mathbb{R}$,est vérifiée.
Ensuite on étudie l'équivalence entre (9) et (7) dans le cas où $1 < p < q < \infty$.
Le $2^{eme}$ chapitre comprend le cas $1 < q < p < \infty$ et $0 < q < 1, p > 1$ comme dans le $1^{er}$ chapitre on s'intéresse aux conditions sur $p, q, v$ et $w$ pour la validité des inégalités relatives aux cas cités ci-dessus. Dans ce même chapitre on inclut des exemples pour les différents cas liés au paramètres $p$ et $q$.
l'objet du $3^{eme}$ chapitre est l'étude d'une publication Quelques remarques sur les meilleures constantes dans certaines inégalité de Hardy où il est question de l'optimalité de la constante $C_5$ dans le cas particulier où $w = x^\alpha$ et $v = x^\beta$.
A la fin on trouve une conclusion et une bibliographie assez détaillée.

# Chapitre 1

# Equivalence d'inégalités de Hardy et les Conditions de validité pour le cas $p < q$.

**Définition 1.1** *Soient* $I = (a, b)$ , $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *, on note par AC(I) l'ensemble de toutes les fonctions absolument continues sur chaque sous intervalle compact* $[c, d] \subset I$ .
*On désigne par* $AC_L(I)$ *et* $AC_R(I)$ *les ensembles de toutes les fonctions* $U \in AC(I)$ *pour lesquelles*

$$\lim_{x \to a^+} U(x) = 0 \tag{1.1}$$

$$et \quad \lim_{x \to b^-} U(x) = 0 \tag{1.2}$$

*respectivement ; ainsi les indices L et R expriment le fait que la fonction est égale à zéro à gauche et à droite de l'intervalle* $I$ *, respectivement.*
*Enfin , on note par* $AC_{LR}(I)$ *l'intersection* $AC_L(I) \bigcap AC_R(I)$ *; s'il est nécessaire de souligner la forme concrète de l'intervalle* $I = (a, b)$ *,nous utiliserons la notation* $AC(a, b)$ , $AC_L(a, b)$ , $AC_R(a, b)$ , $AC_{LR}(a, b)$.
*En outre , on introduit la notation suivante :*

$$\begin{aligned} (H_L f)(x) &= \int_a^x f(t)dt \\ &et \\ (H_R f)(x) &= \int_x^b f(t)dt \end{aligned} \tag{1.3}$$

$(H_Lf)(x)$ et $(H_Rf)(x)$ dans (1.3) sont usuellement appelés opérateurs de Hardy.

**Remarque**

(1) *Si* $U(x) = \int_0^x f(t)dt$ , *alors* $U'(x) = f(x)$

2) *Si* $U(x) = \int_x^\infty f(t)dt$ , *alors* $U'(x) = -f(x)$

**Définition 1.2** *Pour* $I = (a, b)$ *on note par* $W(I)$ *ou* $W(a, b)$ *l'ensemble de toutes les fonctions de poids sur* $I$ *,c'est-à-dire l'ensemble de toutes les fonctions mesurables positives et finies presque partout (p.p)sur* $I$ *.*
*De plus , on désigne par :* $M^+(I)$ *ou* $M^+(a, b)$ *l'ensemble de toutes les fonctions mesurables non négatives (p.p) sur* $I$ *.*

**Problème 1.1** *Soient* $1 < p, q < \infty$ , $v, w \in W(a, b)$. *Sous quelles conditions la constante* $C$ *est finie telle que l'inégalité*

$$\left[\int_a^b |U(x)|^q w(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} \leq C \left[\int_a^b |U'(x)|^p v(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{1.4}$$

*Soit satisfaite pour*

*i) chaque* $U \in AC_L(a, b)$ *, ou*

*ii) chaque* $U \in AC_R(a, b)$ *?*

**Problème 1.2** *soient* $1 < p, q < \infty$ , $v, w \in W(a, b)$. *Sous quelles conditions y-a-t-il des constantes (finies)* $C_L$ , $C_R$ *telles que les inégalités*

*i)*

$$\left[\int_a^b (H_Lf)^q(x)w(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} \leq C_L \left[\int_a^b f^p(x)v(x)dx\right]^{\frac{1}{p}} \tag{1.5}$$

*ii)*

$$\left[\int_a^b (H_Rf)(x)^q w(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} \leq C_R \left[\int_a^b f^p(x)v(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{1.6}$$

*Soient vérifiées* $\forall f \in M^+(a, b)$ *?*

**Remarque 1.1** *Chacun des problèmes mentionnés 1.1 et 1.2 représente en fait une paire de problèmes :*
*Dans le problème 1.1 , nous considérons l'inégalité* (1.4) *sur deux classes de*

*fonctions différentes .*
*Dans le problème* 1.2 *nous considérons deux opérateurs différents .*
*Néanmoins , en utilisant des outils élémentaires , nous pouvons réduire le problème* 1.1 *(ii) au problème* 1.1 *(i) et de même l'étude de l'inégalité* (1.6) *peut être réduite à celle de l'inégalité* (1.5) *.*
*On peut ramener le problème 1.1 i) au problème 1.1 ii) :*
*Soit* $U(x) \in AC_R([a,b])$*, on définit* $\tilde{U}(s)$ *par :*

$$\tilde{U}(s) = U(a - x + b),$$

*alors*

$$\lim_{s\to b} \tilde{U}(s) = \lim_{x-a+b\to b} U(a - x + b) = \lim_{x\to a} U(x) = 0.$$

*Par conséquent :* $\tilde{U}(s) \in AC_L([a,b])$.

On peut aussi ramener (1.6) au cas (1.5)
En effet : après le changement $x = -y$ et $t = -s$

$$\begin{cases} x = a \Longrightarrow y = -a \\ x = b \Longrightarrow y = -b \\ dx = -dy \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = x \Longrightarrow s = -x \\ t = b \Longrightarrow s = -b \\ dx = -dy \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left[H_R f\right]^q (x) w(x) dx &= \int_a^b \left[\int_x^b f(t)dt\right]^q w(x)dx \\
&= -\int_{-a}^{-b} \left[-\int_{-x}^{-b} f(-s)ds\right]^q w(-y)dy \\
&= \int_{-b}^{-a} \left[\int_{-b}^{-x} f(-s)ds\right]^q w(-y)dy \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\alpha}^{y} \tilde{f}(s)ds\right]^q \tilde{w}(y)dy \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \left[H_L \tilde{f}\right]^q (x)\tilde{w}(x)dx.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_a^b \left[H_R f\right]^q (x) w(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left[H_L \tilde{f}\right]^q (x)\tilde{w}(x)dx.$$

Maintenant considérons le membre droit de l'inégalité (1.6)

$$\begin{aligned}
\int_a^b f^p(x)v(x)dx &= -\int_{-a}^{-b} f^p(-y)v(-y)dy \\
&= \int_{-b}^{-a} f^p(-y)v(-y)dy \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \tilde{f}^p(y)\tilde{v}(y)dy.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_a^b f^p(x)v(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \tilde{f}^p(y)\tilde{v}(y)dy$$

oú $(\alpha, \beta) = (-b, -a)$ , $\tilde{f}(y) = f(-y)$ , $\tilde{w}(y) = w(-y)$ , $\tilde{v}(y) = v(-y)$ ,
pour $y \in (\alpha, \beta)$ .
avec : $\tilde{f} \in M^+(\alpha, \beta)$ , $\tilde{v}, \tilde{w} \in W(\alpha, \beta)$ , (1.6) se réduit à un analogue de (1.5) sur $(\alpha, \beta)$ pour $\tilde{f}$ , $\tilde{v}$ , $\tilde{w}$ .

**Convention 1.1** *conformément à la remarque précédente nous nous limitons dans la suite à l'étude de l'inégalité* (1.4) *seulement pour* $U \in AC_L(a,b)$ *, et à celle de l'inégalité* (1.5) *(de l'opérateur* $H_L$*) pour* $f \in M^+(a,b)$ *.*
*Le lemme suivant indique que ces deux inégalités sous certaines conditions sur la fonction de poids v sont équivalentes , ce qui signifie que les problèmes 1.1 et 1.2 sont dans un certain sens aussi équivalents .*

***Lemme 1.1*** *Soient* $1 < p, q < \infty$ *,* $v$ *,* $w \in W(a,b)$ *et supposons*

$$\int_a^x v^{1-p'}(t)\ dt < \infty \tag{1.7}$$

*pour tout* $x \in (a,b)$ *, avec* $p' = \frac{p}{p-1}$ *.*
*Alors l'inégalité* (1.4) *est vérifiée pour tout* $U \in AC_L(a,b)$ *si et seulement si l'inégalité* (1.5) *est valable pour chaque* $f \in M^+(a,b)$ *.*
*La constante optimale* $C$ *de* (1.4) *coïncide avec l'optimale constante* $C_L$ *dans* (1.5) *.*

***Preuve***

*i) Supposons que l'inégalité* (1.5) *est vraie pour* $U \in AC_L(a,b)$ *, On pose*

$$J = \int_a^b |U'(x)|^p\ v(x)\ dx.$$

*Si* $J = \infty$ *alors l'inégalité* (1.4) *est triviale , par conséquent supposons que* $J < \infty$ *, en appliquant l'inégalité de Hölder on obtient pour* $x \in (a,b)$

$$\begin{aligned}
\int_a^x |U'(t)|dt &= \int_a^x |U'(t)|\ v^{\frac{1}{p}}(t)\ v^{-\frac{1}{p}}(t)\ dt \\
&\leq \left[\int_a^b |U'(t)|^p\ v(t)\ dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^x v^{1-p'}(t)\ dt\right]^{\frac{1}{p'}} \\
&= J^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^x v^{1-p'}(t)\ dt\right]^{\frac{1}{p'}} < \infty.
\end{aligned}$$

*Puisque* $U \in AC(a,b)$ *, on a :*

$$U(x) = \int_c^x U'(t)\ dt\ +\ U(c) \quad \textit{pour tout} \quad c \in (a,b) \ ,$$

*de plus* $U \in AC_L(a,b)$ , *et par conséquent pour* $c \to a^+$ *on a d'après* (1.1) *:*

$$U(x) = \int_a^x U'(t)\ dt$$

*alors :*

$$\begin{aligned} |U(x)| &\leq \int_a^x |U'(t)|\ dt \\ &= (H_L|U'|)(x). \end{aligned}$$

*En effet dans* (1.5) *en remplaçant f par* $|U'|$ *on obtient*

$$\left[\int_a^b \left(H_L(|U'|)\right)^q(x)\ w(x)\ dx\right]^{\frac{1}{q}} \leq C_L \left[\int_a^b |U'(x)|^p\ v(x)\ dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

*On a*

$$|U(x)| \leq \left(H_L(|U'|)\right)(x),$$

*d ' où*

$$\left[\int_a^b |U(x)|^q\ w(x)\ dx\right]^{\frac{1}{q}} \leq C_L \left[\int_a^b |U'(x)|^p\ v(x)\ dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

*Simultanément , nous avons montré que les meilleures constantes* $C$ *dans* (1.5) *et* $C_L$ *dans* (1.4) *satisfont à l'inégalité suivante*

$$C_L \leq C \tag{1.8}$$

*(car* $C_L$ *est la constante optimale dans* (1.5) *)*

*ii) Supposons que l'inégalité* (1.4) *est vraie pour* $U \in AC_L(a,b)$ *, soit* $f \in M^+(a,b)$ *, on pose*

$$J = \int_a^b f^p(x)\ v(x)\ dx.$$

*Si* $J = \infty$ *, alors l'inégalité* (1.5) *est triviale , par conséquent supposons que* $J < \infty$ *, de même que dans la partie (i) , en appliquant l'inégalité de Hölder on obtient*

$$\int_a^x f(t)\ dt \leq J^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^x v^{1-p'}(t)\ dt\right]^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

*Pour tout* $x \in (a,b)$ .
*Ensuite , la fonction*

$$\begin{aligned} U(x) &= \int_a^x f(t)\ dt \\ &= (H_L f)(x) \end{aligned}$$

*appartient évidemment à* $AC_L(a,b)$ *, l'inégalité* (1.4) *appliquée à cette fonction donne :*

$$\left[\int_a^b (H_L f)^q(x)\ w(x)\ dx\right]^{\frac{1}{q}} \leq C \left[\int_a^b f^p(x)\ v(x)\ dx\right]^{\frac{1}{p}},$$

*comme* $C$ *est la constante optimale dans* (1.4) *alors* $C \leq C_L$ *, et d'après* (1.8) *on conclut que* $C = C_L$ .

***Remarque 1.2*** *De manière analogue , on peut montrer que dans l'hypothèse*

$$\int_x^b v^{1-p'}(t)\ dt < \infty \quad \textit{pour tout} \quad x \in (a,b) \tag{1.9}$$

*l'inégalité* (1.4) *est vérifiée pour tout* $U \in AC_R(a,b)$ *si et seulement si l'inégalité* (1.6) *vérifiée pour tout* $f \in M^+(a,b)$ *et que* $C = C_R$.

*En effet*

*i) Supposons que : l'inégalité* (1.9) *est vérifie pour tout* $x \in (a,b)$ *et l'inégalité* (1.6) *est vraie pour* $U \in AC_R(a,b)$ .
*On pose*

$$J = \int_a^b |U'(x)|^p\ v(x)\ dx.$$

*Si* $J = \infty$ *alors l'inégalité* (1.4) *est triviale , par conséquent supposons que* $J < \infty$ *, en appliquant l'inégalité de Hölder pour* $x \in (a,b)$ *, on obtient :*

$$\begin{aligned} \int_x^b |U'(t)|\ dt &= \int_x^b |U'(t)|\ v^{\frac{1}{p}}(t)\ v^{-\frac{1}{p}}(t)\ dt \\ &\leq \left[\int_x^b |U'(t)|^p\ v(t)\ dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_x^b v^{1-p'}(t)\ dt\right]^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq J^{\frac{1}{p}} \left[\int_x^b v^{1-p'}(t)\ dt\right]^{\frac{1}{p'}} < \infty. \end{aligned}$$

*Comme* $U \in AC(a,b)$ *, on a*

$$U(x) = \int_x^c U'(t)\ dt + U(c) \quad \textit{pour tout } c \ \in \ (a,b)$$

*De plus ,*$U \in AC_R(a,b)$ *et par conséquent, pour* $c \to b^-$ *on obtient d'après* (1.2).

$$U(x) = \int_x^b U'(t)dt.$$

*Alors*

$$|U(x)| \leq \int_x^b |U'(t)|\ dt = (H_R|u'|)(x)$$

*dans* (1.6) *en remplaçant f par* $|u'|$ *, on obtient*

$$\left[\int_a^b \left(H_R(|U'|)\right)^q (x) w(x) dx\right]^{\frac{1}{q}} \leq C_R \left[\int_a^b |U'(x)|^p v(x) dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

*et comme*

$$|U(x)| \leq \left(H_R(|U'|)\right)(x).$$

*Alors*

$$\left[\int_a^b |U(x)|^q w(x) dx\right]^{\frac{1}{q}} \leq C_R \left[\int_a^b |U'(x)|^p v(x) dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

*Simultanément , nous avons montré que les constantes* $C$ *en* (1.4) *et* $C_R$ *en* (1.6) *satisfont :*

$$C \leq C_R \qquad (*)$$

*ii) Supposons que l'inégalité* (1.6) *est vraie pour* $u \in AC_R(a,b)$ *, soit* $f \in M^+(a,b)$ *, on pose*

$$J = \int_a^b f^p(x)\ v(x)\ dx.$$

*Si* $J = \infty$ *, l'inégalité* (1.6) *est triviale , par conséquent supposons que* $J < \infty$ *.*

*De même que dans la partie (i) , en appliquant l'inégalité de Hölder on obtient*

$$\int_x^b f(t)dt \quad \leq J^{\frac{1}{p}} \left[ \int_x^b v^{1-p'}(t)dt \right]^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

*Pour tout $x \in (a, b)$ .*
*Ensuite , la fonction*

$$\begin{aligned} U(x) &= \int_x^b f(t)dt \\ &= (H_R f)(x) \end{aligned}$$

*appartient à $AC_R(a, b)$ , en appliquant l'inégalité* (1.4) *à $U(x)$ on obtient*

$$\left[ \int_a^b |U(x)|^q w(x)dx \right]^{\frac{1}{q}} \leq C \left[ \int_a^b |U'(x)|^p v(x)dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

*et d'après l'inégalité* (1.6) *on a*

$$\left[ \int_a^b (H_R f)^q(x)w(x)dx \right]^{\frac{1}{q}} \leq C_R \left[ \int_a^b f^p(x)v(x)dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

*nous avons montré que les meilleures constantes $C$ en* (1.4) *et $C_R$ en* (1.6) *satisfont $C_R \leq C$ et d'après (*) on a :*

$$C = C_R$$

# 1.1 Objectif

Notre but est d'établir des conditions nécessaires et suffisantes sur $p, q, v, w$ pour lesquelles l'inégalité de Hardy (1.4) soit vérifiée .
Les assertions correspondantes seront formulées pour l'inégalité (1.4) , mais-en vue du lemme (1.1) et de la remarque (1.2) nous allons procéder via le problème 1.2 .
De plus , selon la convention 1.4 , il suffit de traiter l'inégalité (1.5) .
D'abord , nous introduisons quelques fonctions et constantes auxiliaires importantes .

# Notations

Pour $1 < p, q < \infty$ , $v, w \in W(a,b)$ *et* $x \in (a,b)$ , Alors

$$\begin{aligned} F_L &= F_L(x; a, b, w, v, q, p) \\ &= \left[\int_x^b w(t)dt\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right]^{\frac{1}{p'}} \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} B_L &= B_L(a, b, w, v, q, p) \\ &= \sup_{a<x<b} F_L(x). \end{aligned} \tag{1.11}$$

On rappelle que pour $1 < s < \infty$

$$s' = \frac{s}{s-1} \quad , \quad ie \ : \ \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1. \tag{1.12}$$

**Théorème 1.1** *Soient* $1 < p \leq q < \infty$ , $v, w \in W(a,b)$ *l'inégalité*

$$\left[\int_a^b |U(x)|^q \ w(x) \ dx\right]^{\frac{1}{q}} \leq C_L \ \left[\int_a^b |U'(x)|^p \ v(x) \ dx\right]^{\frac{1}{p}} \tag{1.11}$$

*est vérifiée pour tout* $U \in AC_L(a,b)$ *si et seulement si*

$$B_L = B_L(a, b, w, v, q, p) < \infty. \tag{1.13}$$

*De plus , pour la meilleure constante possible* $C_L$ *dans* (1.4) *les estimations suivantes sont satisfaites*

$$B_L \leq C_L \leq K(q,p) \ B_L \tag{1.14}$$

*telle que*

$$k(q,p) = \left(1 + \frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{q}} \left(1 + \frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} . \tag{1.15}$$

## 1.2 L'approche par le théorème 1.1

i) en 1972 B.MUCKENHOUPT[1] publie une preuve directe du théorème (1.1) pour le cas $(p = q)$.De plus ,il à considéré (pour $(a,b) = (0,\infty)$) l'inégalité plus générale

$$\left(\int_0^\infty |u(x) \int_0^x f(t)dt|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 \left(\int_0^\infty |f(x)v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.16}$$

est vérifiée ,si et seulement si :

$$\sup_{r>0}\left(\int_r^\infty |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{P}}\left(\int_0^r |v(x)|^{-p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} = K < \infty. \qquad (1.17)$$

où

$$K \leq C \leq K(p)^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}.$$

ii) **Pour le cas** $(1 < p \leq q < \infty)$ **:**
La $1^{ere}$ preuve du théorème (1.1) à été publiée en 1978 considérant l'intervalle $(0,\infty)$ et de même que d'autres auteurs mentionés ci-dessus , ont étudié le problème 1.2(i) .Le dernier auteur à également considéré l'analogue correspondant de l'inégalité (1.16) c'est -à-dire

$$\sup_{r>0}\left(\int_x^\infty u^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^r v^{-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} = K < \infty, \qquad (1.18)$$

$$K \leq C_3 \leq K(p)^{\frac{1}{q}}(p')^{\frac{1}{p'}},$$

lorsque la condition nécessaire et suffisante est la suivante :

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt\right)^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_4\left(\int_0^\infty f^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.19)$$

Ce résultat est aussi obtenu par V.G.MAZ'JA[56].
Dans le preuve du lemme suivant on aura besoin de l'inégalité qui est une modification de l'inégalité de Minkowski :
Soit l'inégalité intégrale de Minkowski

$$\left(\int_a^b\left(\int_c^d K(x,y)dy\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \int_c^d\left(\int_a^b K^r(x,y)dx\right)^{\frac{1}{r}} dy \qquad (1.20)$$

pour toute fonction mesurable non négative K sur $(a,b)\times(c,d)$et $r \geq 1$ (pour $r = 1$ on a le signe d'égalité (1.20) est en fait une conséquence du théorème de Fubini ). Nous allons utiliser (1.20) dans la spéciale forme suivante

$$\left(\int_a^b \phi(x)\left(\int_a^x \psi(y)dy\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \int_a^b \psi(y)\left(\int_y^b \phi(x)dx\right)^{\frac{1}{r}} dy \qquad (1.21)$$

oú $\phi, \psi \in M^+(a,b)$.
Dans ce qui suit , nous utiliserons la notation de la section 1, en particulier les constantes et les fonctions introduites dans la sous section(1.13).
Pour démontrer le théorème (1.1) on utilise le lemme (1.2) , le lemme(1.4) et la remarque(1.3).
**Preuve**.

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \phi(x)\left(\int_0^x f(y)dy\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \phi(x)^{\frac{1}{r}} f(y)\chi_{(y,\infty)}(x)dy\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \| \int_0^\infty \phi(x)^{\frac{1}{r}} f(y)\chi_{(y,\infty)}(x)dy \|_{L_r(0,\infty)} \\
&\leq \int_0^\infty \| \phi(x)^{\frac{1}{r}} f(y)\chi_{(y,\infty)}(x) \|_{L_r(0,\infty)} dy \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \left(\phi(x)^{\frac{1}{r}} f(y)\chi_{(y,\infty)}(x)\right)^r dx\right]^{\frac{1}{r}} dy \\
&= \int_0^\infty f(y)\left(\int_y^\infty \phi(x)\right)^{\frac{1}{r}} dy
\end{aligned}
$$

telle que

$$
\chi_{(0,x)}(y) = \begin{cases} 1 & si\ y \in (0,x] \\ 0 & si\ y > x \end{cases}
$$

$$
\chi_{(y,\infty)}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in (0,y) \\ 1 & si\ x \geq y. \end{cases}
$$

**Lemme 1.2** *Soient* $(1 < p \leq q < \infty)$ *et* $v, w \in W(a,b)$.
*On suppose que le nombre* $B_L = B_L(a,b,w,v,q,p) < \infty$. *Alors l'inégalité* (1.4) *est vérifiée* $\forall U \in AC_L(a,b)$ *et la meilleure constante possible* $C_L$ *dans* (1.4) *satisfait l'éstimation suivante :*

$$
C_L \leq K(q,p)B_L \tag{1.22}
$$

*avec* $K(q,p)=\left(1+\frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{q}}\left(1+\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}}.$

**Preuve de lemme.**

Supposons que $B_L<\infty$ , alors

$$\int_a^t v^{1-p'}(y)dy<\infty \qquad \forall t\in(a,b)$$

et supposons que

$$h(t)=\Big(\int_a^t v^{1-p'}(y)dy\Big)^{\frac{1}{p's}} \tag{1.23}$$

oú $s\in(1,\infty)$ et $(0<h(t)<\infty),\forall t\in(a,b)$ , en peut écrire

$$\int_a^x f(t)dt=\int_a^x f(t)v^{\frac{1}{p}}(t)h(t)h^{-1}(t)v^{\frac{-1}{p}}(t)dt \qquad (*)$$

en appliquant l'inégalité de Hölder sur $(*)$,on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)dt &= \int_a^x f(t)v^{\frac{1}{p}}(t)h(t)h^{-1}(t)v^{\frac{-1}{p}}(t)dt\\ &\le \left(\int_a^x f(t)^p v(t)h^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x h^{-p'}(t)v^{-\frac{p'}{p}}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &= \left(\int_a^x f(t)^p v(t)h^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x h^{-p'}(t)v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}\end{aligned}$$

alors

$$\int_a^x f(t)dt\le\left(\int_a^x f(t)^p v(t)h^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x h^{-p'}(t)v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad (**)$$

et on a

$$\begin{aligned}\int_a^x h^{-p'}(t)v^{1-p'}(t)dt &= \int_a^x\left[\left(\int_a^t v^{1-p'}(y)dy\right)^{\frac{1}{p's}}\right]^{-p'}v^{1-p'}(t)dt\\ &= \int_a^x\left(\int_a^t v^{1-p'}(y)dy\right)^{-\frac{1}{s}}v^{1-p'}(t)dt.\end{aligned}$$

On applique la formule $$\int g^k(t)g^{'}(t)dt = \left(\frac{1}{k+1}\right) g^{k+1}(t)$$
où $g(t) = \int_a^t v^{1-p^{'}}(y)dy$ et $g^{'}(t) = v^{1-p^{'}}(t)$
On obtient :

$$\left[\left(\frac{1}{1-\frac{1}{s}}\right)\left(\int_a^t v^{1-p'}(y)dy\right)^{-\frac{1}{s}+1}\right]_a^x$$

$$= \left(\frac{s}{s-1}\right)\left(\int_a^x v^{1-p'}(y)dy\right)^{\frac{s-1}{s}}$$

$$= \left(\frac{s}{s-1}\right)\left[\left(\int_a^x v^{1-p'}(y)dy\right)^{\frac{1}{sp'}}\right]^{(s-1)p'}$$

$$= \left(\frac{s}{s-1}\right)(h(t))^{(s-1)p'}$$

alors
$$\int_a^x h^{-p'}(t)v^{1-p'}(t)dt = \frac{s}{s-1}(h(t))^{(s-1)p'}$$
On remplace dans $(**)$ par

$$\int_a^x h^{-p'}(t)v^{1-p'}(t)dt = \frac{s}{s-1}(h(t))^{(s-1)p'},$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t)dt &\leq \left(\int_a^x f(t)^p v(t)h^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{s}{s-1}(h(t))^{(s-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\frac{s}{s-1}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_a^x f(t)^p v(t)h^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} h^{s-1}(t)\end{aligned}$$

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)^q \leq \left(\frac{s}{s-1}\right)^{\frac{q}{p'}}\left(\int_a^x f(t)^p v(t)h^p(t)dt\right)^{\frac{q}{p}} h^{(s-1)q}(t)$$

$$\left[\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q w(x)dx\right]^{\frac{p}{q}} \leq \left(\frac{s}{s-1}\right)^{(\frac{q}{p'})(\frac{p}{q})} \left[\int_a^b \left(\int_a^x f^p(t)v(t)h^p(t)dt\right)^{\frac{q}{p}} h^{(s-1)q}(x)w(x$$

$$= \left(\frac{s}{s-1}\right)^{\frac{p}{p'}} \left[\left(\int_a^x f^p(t)v(t)h^p(t)dt\right)^{\frac{q}{p}} h^{(s-1)q}(x)w(x)dx\right]^{\frac{p}{q}}.$$

En éstimant le côté droit a l'aide de l'inégalité (1.2) , pour
$\psi(t) = f(t)^p v(t) h^p(t)$
et $\phi(t) = h^{(s-1)q}w(x)$ et pour $\left(\dfrac{q}{p} = r\right)$ , On obtient

$$\left[\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q w(x)dx\right]^{\frac{p}{q}} \leq \left(\frac{s}{s-1}\right)^{\frac{p}{p'}} \left(\int_a^b f^p(t)v(t)h^p(t)dt\right) \left(\int_t^b h^{(s-1)q}(x)w(x)dx\right)^{\frac{p}{q}} \tag{1.24}$$

et d'après la définition de $B_L(x)$ et $F_L(x)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
h^{(s-1)q}(x) &= [h^s(x)]^{\frac{(s-1)q}{s}} \\
&= \left[\left(\int_a^x v^{1-p'}(y)dy\right)^{\frac{1}{p'}}\right]^{\frac{(s-1)q}{s}} \\
&= \left[\left(\int_a^x v^{1-p'}(y)dy\right)^{\frac{1}{p'}}\right]^{\frac{(s-1)q}{s}} \left[\left(\int_x^b w(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{(s-1)q}{s}} \left[\left(\int_x^b w(t)dt\right)^{-\frac{1}{q}}\right]^{\frac{(s-1)q}{s}} \\
&= (F_L(x))^{\frac{(s-1)q}{s}} \left(\int_x^b w(t)dt\right)^{-\frac{(s-1)}{s}} \\
&\leq (B_L)^{\frac{(s-1)q}{s}} \left(\int_x^b w(t)dt\right)^{\frac{1-s}{s}}.
\end{aligned}$$

On obtient

$$h^{s-1)q}(x) \leq (B_L)^{\frac{(s-1)q}{s}} \left( \int_x^b w(t)dt \right)^{\frac{1-s}{s}}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\int_t^b h^{(s-1)q}(x)w(x)dx &\leq \int_t^b (B_L)^{\frac{(s-1)q}{s}} \left( \int_x^b w(y)dy \right)^{\frac{1-s}{s}} w(x)dx \\
&= (B_L)^{\frac{(s-1)q}{s}} \int_t^b \left( \int_x^b w(y)dy \right)^{\frac{1-s}{s}} w(x)dx \\
&= (B_L)^{\frac{(s-1)q}{s}} \left( \frac{1}{\frac{1-s}{s}+1} \left[ \left( \int_x^b w(y)dy \right)^{\frac{1-s}{s}+1} \right]_t^b \right) \\
&= (B_L)^{\frac{(s-1)q}{s}} \left( \frac{1}{\left(\frac{1}{s}\right)} \left[ \left( \int_x^b w(y)dy \right)^{\frac{1}{s}} \right]_t^b \right) \\
&= (B_L)^{\frac{(s-1)q}{s}} \left( s \left( \int_t^b w(y)dy \right)^{\frac{1}{s}} \right) \\
&= (s)\,(B_L)^{\frac{(s-1)q}{s}} \left( \int_t^b w(y)dy \right)^{\frac{1}{s}}
\end{aligned}$$

finalement

$$\int_t^b h^{(s-1)q}(x)w(x)dx \leq (s)\,(B_L)^{\frac{(s-1)q}{s}} \left( \int_t^b w(y)dy \right)^{\frac{1}{s}}$$

$$\begin{aligned}
\left(\int_t^b h^{(s-1)q}(x)w(x)dx\right)^{\frac{p}{q}} &\leq (s)^{\frac{p}{q}}\,(B_L)^{\left(\frac{(s-1)q}{s}\right)\frac{p}{q}}\left(\int_t^b w(y)dy\right)^{(\frac{1}{s})(\frac{p}{q})} \\
&= (s)^{\frac{p}{q}}\,(B_L)^{\frac{(s-1)p}{s}}\left(\int_t^b w(y)dy\right)^{\frac{p}{sq}} \\
&= (s)^{\frac{p}{q}}\,(B_L)^{\frac{(s-1)p}{s}}\left[\left(\int_t^b w(y)dy\right)^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{p}{s}} \times \\
&\qquad \left[\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\right)^{\frac{1}{p'}}\right]^{\frac{p}{s}}\left[\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\right)^{-\frac{1}{p'}}\right]^{\frac{p}{s}} \\
&= (s)^{\frac{p}{q}}\,(B_L)^{\frac{(s-1)p}{s}}\,F_L^{\frac{p}{s}}(x)\left[\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\right)^{-\frac{1}{p'}}\right]^{\frac{p}{s}} \\
&\leq (s)^{\frac{p}{q}}\,(B_L)^{\frac{(s-1)p}{s}}\,B_L^{\frac{p}{s}}\left[\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\right)^{-\frac{1}{p'}}\right]^{\frac{p}{s}} \\
&= (s)^{\frac{p}{q}}\,(B_L)^{\frac{(s-1)p}{s}+\frac{p}{s}}\left[\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\right)^{-\frac{1}{p'}}\right]^{\frac{p}{s}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (s)^{\frac{p}{q}}\,(B_L)^{p}\left[\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\right)^{-\frac{1}{p'}}\right]^{\frac{p}{s}} \\
&= (s)^{\frac{p}{q}}\,(B_L)^{p}\left[\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\right)^{\frac{1}{p's}}\right]^{-p} \\
&= (s)^{\frac{p}{q}}\,(B_L)^{p}\,h^{-p}(t).
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (1.24)on obtient

$$\begin{aligned}
\left[\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q w(x)dx\right]^{\frac{p}{q}} &\leq \left(\frac{s}{s-1}\right)^{\frac{p}{p'}} \left[\int_a^b f^p(t)v(t)h^p(t)(s)^{\frac{p}{q}} (B_L)^p \, h^{-p}(t)dt\right] \\
&= \left(\frac{s}{s-1}\right)^{\frac{p}{p'}} (s)^{\frac{p}{q}} (B_L)^p \left[\int_a^b f^p(t)v(t)dt\right] \\
&= g(s) \, (B_L)^p \left[\int_a^b f^p(t)v(t)dt\right].
\end{aligned}$$

Oú : $g(s) = (s)^{\frac{p}{q}} \left(\dfrac{s}{s-1}\right)^{\frac{p}{p'}}$ .

Par conséquent

$$\left[\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q w(x)dx\right]^{\frac{p}{q}} \leq g(s) \, (B_L)^p \left[\int_a^b f^p(t)v(t)dt\right]. \tag{1.25}$$

Comme $s$ est arbitraire alors l'inégalité (1.25) est vérifiée $\forall s$ , donc elle est vérifiée pour l'inf de $g(s)$ et on a

$$\begin{aligned}
\inf_s g(s) &= g\left(1+\frac{q}{p'}\right) \\
&= \left(1+\frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1+\frac{q}{p'}}{1+\frac{q}{p'}-1}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left(1+\frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'+q}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left(1+\frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{q}} \left(1+\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= K(q,p).
\end{aligned}$$

Donc

$$\left[\int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right) w(t)dt\right]^{\frac{1}{q}} \leq K(q,p)B_L \left[\int_a^b f^p(t)v(t)dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

D'après le lemme (1.1) l'inégalité (1.4) est vérifiée et comme $C_L$ est ôptimale ,alors $C_L \leq K(q,p)B_L$.

**Lemme 1.3** *Soient* $1 < p, q < \infty$ , $v, w \in W(a,b)$ , *supposons que l'inégalité* (1.4) *est vérifiée* $\forall U \in AC_L(a,b)$ *telle que* $C_L < \infty$ *alors*

$$B_L \leq C_L. \tag{1.26}$$

**Preuve**

i) On pose

$$\int_a^x v^{1-p'}(t)dt < \infty \qquad ,\forall x \in (a,b) \tag{1.27}$$

et comme l'inégalité (1.4) est vérifie $\forall U \in AC_L(a,b)$ , alors d'après le lemme (1.1) l'inégalité (1.5) est valable pour chaque $f \in M^+(a,b)$ ,c'est-à-dire :

$$\left(\int_a^b (H_L f)^q (x) w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_L \left(\int_a^b (f(t))^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.28}$$

soit $\zeta \in (a,x)$ fixé, alors

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b (H_L f)^q (x) w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} &= \int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q w(x)dx \\
&\geq \int_\zeta^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)^q w(x)dx \\
&\geq \int_\zeta^b \left(\int_a^\zeta f(t)dt\right)^q w(x)dx \\
&= \left(\int_\zeta^b w(x)dx\right)\left(\int_a^\zeta f(t)dt\right)^q.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\left(\int_\zeta^b w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^\zeta f(t)dt\right) &\leq \left[\left(\int_a^b (H_L f)^q(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C_L\left(\int_a^b (f(t))^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

d'oú,

$$\left(\int_\zeta^b w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^\zeta f(t)dt\right) \leq C_L\left(\int_a^b (f(t))^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.29}$$

pour tout $f \in M^+(a,b)$
On prend

$$f(t) = \begin{cases} v^{1-p'}(x) & si\ x \in (a,\zeta] \\ 0 & si\ x \in [\zeta, b) \end{cases}$$

alors

$$\int_a^\zeta f(x)dx = \int_a^\zeta v^{1-p'}(x)dx$$

de plus

$$\begin{aligned} 0 < \left(\int_a^\zeta f^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_a^\zeta v^{(1-p')p}(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_a^\zeta v^{(p-p'p+1)}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_a^\zeta v^{(p-(p'+p)+1)}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_a^\zeta v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\left(\int_a^{\zeta} f^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^{\zeta} v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

La dernière intégrale est finie d'après l'inégalité (1.27) et positive car $v \in W(a,b)$ ,par conséquent d'après l'inégalité (1.29), on obtient

$$\left(\int_{\zeta}^{b} w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^{\zeta} f(t)dt\right) \leq C_L \left(\int_a^b (f(t))^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= C_L \left(\int_a^{\zeta} v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (*)$$

et comme

$$\int_a^{\zeta} v^{1-p'}(x)dx < \infty$$

et si l'on divise les deux membres de $(*)$ par $\left(\int_a^{\zeta} v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$ , alors

$$\left(\int_{\zeta}^{b} w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^{\zeta} f(t)dt\right) \left(\int_a^{\zeta} v^{1-p'}(x)dx\right)^{-\frac{1}{p}} \leq C_L \left(\int_a^{\zeta} v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^{\zeta} v^{1-p'}(x)dx\right)^{-\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_{\zeta}^{b} w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^{\zeta} v^{1-p'}(x)dx\right)^{(1-\frac{1}{p})} \leq C_L$$

il résulte que

$$\left(\int_{\zeta}^{b} w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^{\zeta} v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C_L \qquad (1.30)$$

donc

$$F_L(\zeta, a, b, w, v, q, p) \leq C_L \implies \sup F_L \leq C_L$$

c'est à dire

$$B_L \leq C_L$$

ii) soit $v$ une fonction de $W(a,b)$ , pour $n \in \mathbb{N}$ défini

$$v_n(x) = v(x) + \frac{1}{n}\left(1 + x^{\frac{2}{p'-1}}\right) \qquad , x \in (a,b) \tag{1.31}$$

Évidemment $v_n(x) \in W(a,b)$ , et
$\forall x \in (a,b) \int_a^x v_n^{1-p'}(t)dt \leq \int_a^b v_n^{1-p'}(t)dt < \infty.$
On a

$$v(x) \leq v_n(x) \qquad , pour \qquad x \in (a,b) \qquad et \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.32}$$

d'après l'inégalité (1.4) et l'inégalité (1.32) on obtient

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b |U(x)|^q w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} &\leq C_L \left(\int_a^b |U'(x)|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_L \left(\int_a^b |U'(x)|^p v_n(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned} \tag{1.33}$$

pour tout $U \in AC_L(a,b)$ , d'après (1.30) , on obtient

$$\begin{aligned}\left(\int_\varepsilon^b w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^\varepsilon v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} &\leq \left(\int_\varepsilon^b w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^\varepsilon v_n^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C_L\end{aligned}$$

par conséquent

$$\left(\int_\varepsilon^b w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^\varepsilon v_n^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C_L \tag{1.34}$$

d'où l'inégalité (1.34) est vérifiée pour tout $\varepsilon \in (a,b)$ et pour $x \in (a,b)$ , on a

$$0 \leq v_{n+1}^{1-p'}(x) \leq v_n^{1-p'}(x) \quad , \quad \lim_{n+\infty} v_n^{1-p'}(x) = v^{1-p'}(x) \tag{1.35}$$

comme $v_n(x)$ est mesurable et non négative décroissante alors d'après le théorème de la convergence monotone on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\int_\varepsilon^b w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^\varepsilon v_n^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} &= \left(\int_\varepsilon^b w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^\varepsilon \lim_{n\to+\infty} v_n^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\varepsilon^b w(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^\varepsilon v^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_L
\end{aligned}$$

donc

$$F_L(\varepsilon; a, b, w, v, q, p) \leq C_L$$

pour tout $\varepsilon \in (a, b)$ , et on obtient l'inégalité

$$B_L \leq C_L.$$

**Preuve du Théorème** (1.1)
($\Leftarrow$) Supposons que $B_L < \infty$ alors d'aprés le lemme (1.2) ,l'inégalité (1.4) est vérifiée et de plus

$$C_L \leq K(q, p)B_L$$

($\Rightarrow$) Supposons que l'inégalité (1.4) est vérifiée et d'après le lemme (1.3) , on a

$$B_L \leq C_L$$

et comme

$$C_L < \infty$$

alors

$$B_L \leq C_L < \infty.$$

De plus

$$B_L \leq C_L \leq K(q, p)B_L \,.$$

# Chapitre 2

# L'inégalité de Hardy pour le cas $1 < q < p < \infty$ et $0 < q < 1$,$1 < p < \infty$

## 2.1 L'inégalité de Hardy pour $1 < q < p < \infty$

### Notations

pour $p > q$,$v, w \in W(a,b)$ et $x \in (a,b)$, on trouve

$$\begin{aligned} A_L &= A_L(a,b,w,v,q,p) \\ &= \left\{ \int_a^b \left[ \left[ \int_x^b w(t)\ dt \right]^{\frac{1}{q}} \left[ \int_a^x v^{1-p'}(t)\ dt \right]^{\frac{1}{q'}} \right]^r v^{1-p'}(x)\ dx \right\}^{\frac{1}{r}}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Où

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \tag{2.2}$$

**Théorème 2.1** *Soient* $1 < q < p < \infty$ , $v, w \in W(a,b)$ *l'inégalité*

$$\left[ \int_a^b |U(x)|^q\ w(x)\ dx \right]^{\frac{1}{q}} \leq C_L \left[ \int_a^b |U'(x)|^p\ v(x) dx \right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2.3}$$

*Est vérifiée pour tout* $U \in AC_L(a,b)$ *si et seulement si*

$$A_L = A_L(a,b,w,v,q,p) < \infty. \tag{2.4}$$

*De plus , pour la meilleure constante possible $C_L$ dans (2.3) les estimations suivantes sont satisfaites*

$$q^{\frac{1}{q}} \ (\frac{p'q}{r})^{\frac{1}{q'}} \ A_L \leq C_L \leq q^{\frac{1}{q}} \ (p')^{\frac{1}{q'}} \ A_L \ . \tag{2.5}$$

**Lemme 2.1** *Soient $(1 < p < q < \infty)$ et $v, w \in W(a,b)$ on suppose que le nombre $A_L < \infty$. Alors l'inégalité (2.3) est vérifiée $\forall U \in AC_L(a,b)$ et la meilleure constante possible $C_L$ dans (2.3) satisfait l'éstimation suivante :*

$$C_L \leq \left(q\right)^{\frac{1}{q}} \left(p'\right)^{\frac{1}{q'}} A_L \tag{2.6}$$

**Preuve**
Supposons que $A_L < \infty$ telle que

$$A_L = \left[\int_a^b \left[\left(\int_x^b w(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}\right]^r v^{1-p'}(x)dx\right]^{\frac{1}{r}} < \infty$$

avec $\left(\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$.
Comme $\int_a^x v^{1-p'}(t)dt < \infty$ et d'après le lemme (1.1) , l'inégalité (2.3) est vérifiée si seulement si l'inégalité (1.5) est vérifié $\forall f \in M^+(a,b)$ Pour chaque $f$, d'une manière analogue a la preuve de lemme 1.2

$$\begin{aligned} \int_a^x \left(\int_a^y f(t)dt\right)^{q-1} f(y)dy \ &= \left[\frac{1}{q-1+1}\left(\int_a^y f(t)dt\right)^{q-1+1}\right]_a^x \\ &= \frac{1}{q}\left(\int_a^x f(t)dt\right)^q . \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(H_L f\right)^q(x)w(x)dx \ &= \int_a^b \left(\int_a^x f(y)dy\right)^q w(x)dx \\ &= q\left[\int_a^b \left(\int_a^x \left(\int_a^y f(t)dt\right)^{q-1} f(y)dy\right) w(x)dx\right]. \end{aligned}$$

Comme $A_L < \infty$ , alors $\int_y^b w(x)dx < \infty$ ,donc en appliquant le théorème de Fubini , on obtient :

$$a \leq x \leq b \qquad et \qquad a \leq y \leq x$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b \Big(H_L f\Big)^q(x)w(x)dx &= q\left[\int_a^b \left(\int_y^b \left(\int_a^y f(t)dt\right)^{q-1} f(y)dx\right) w(x)dy\right] \\
&= q\left[\int_a^b \left(\int_y^b f(y)\left(\int_a^y f(t)dt\right)^{q-1} dx\right) w(x)dy\right] \quad . \\
&= q\left[\int_a^b f(y)\left(\int_a^y f(t)dt\right)^{q-1} \left(\int_y^b w(x)dx\right) dy\right]. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

On pose

$$I = q\left[\int_a^b \left(\int_a^y f(t)dt\right)^{q-1} f(y)\left(\int_y^b w(x)dx\right) dy\right].$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à I pour 3 paramètres $> 1$

$$\frac{1}{\frac{p}{p-q}} + \frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{p}{q-1}} = 1,$$

on obtient

$$\int_a^b |F(x)G(x)H(x)|dx \leq \left(\int_a^b |F(x)|^{\frac{p}{p-q}}dx\right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\int_a^b |G(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |H(x)|^{\frac{p}{q-1}}dx\right)^{\frac{q-1}{p}}$$

où

$$\begin{aligned}
F(x) &= \left(\int_y^b w(x)dx\right)\left(\int_a^y v^{1-p'}(t)dt\right)^{q-1} v^{\frac{(1-p')(p-q)}{p}}(y) \\
G(x) &= \Big(f(y)v^{\frac{1}{p}}(y)\Big) \\
H(x) &= \left(\left(H_L f\right)(y)\int_a^y v^{1-p'}(t)dt\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b \Big(H_L f\Big)^q (x) w(x) dx \\
&= q(p-1)^{\frac{1-q}{p}} \int_a^b \left[ \left( \int_y^b w(x)dx \right) \left( \int_a^y v^{1-p'}(t)dt \right)^{q-1} v^{\frac{(1-p')(p-q)}{p}}(y) \right] \times \\
& \quad \left[ f(y) v^{\frac{1}{p}}(y) \right] \times \left[ (p-1)^{\frac{(q-1)}{p}} \left( \Big(H_L f\Big)(y) \int_a^y v^{1-p'}(t)dt \right)^{q-1} v^{\frac{(1-p')(q-1)}{p}}(y) \right] \\
&\leq q(p-1)^{\frac{(1-q)}{p}} \left[ \int_a^b \left[ \left( \int_y^b w(x)dx \right) \left( \int_a^y v^{1-p'}(t)dt \right)^{q-1} v^{\frac{(1-p')(p-q)}{p}}(y) \right]^{\frac{p}{p-q}} dy \right]^{\frac{p-q}{p}} \times \\
& \quad \left( \int_a^b f^p(y) v(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \times \\
& \quad \left[ \int_a^b (p-1)^{\frac{(q-1)}{p}} \left[ \left( \Big(H_L f\Big)(y) \int_a^y v^{1-p'}(t)dt \right)^{q-1} v^{\frac{(1-p')(q-1)}{p}}(y) \right]^{\frac{p}{q-1}} dy \right]^{\frac{q-1}{p}}.
\end{aligned}$$

En simplifiant, on trouve :

$$\begin{aligned}
I &\leq q(p-1)^{\frac{(1-q)}{p}} \left[ \int_a^b \left( \int_y^b w(x)dx \right)^{\frac{p}{p-q}} \left( \int_a^y v^{1-p'}(t)dt \right)^{(q-1)(\frac{p}{p-q})} v^{1-p'}(y) dy \right]^{\frac{p-q}{p}} \times \\
& \quad \left[ \int_a^b f^p(y) v(y) dy \right]^{\frac{1}{p}} \times \left[ \int_a^b (p-1) \Big(H_L f\Big)^p (y) \left( \int_a^y v^{1-p'}(t)dt \right)^p v^{1-p'}(y) dy \right]^{\frac{q-1}{p}} \\
&= q(p-1)^{\frac{(1-q)}{p}} \left[ \int_a^b \left( \int_y^b w(x)dx \right)^{\frac{p}{p-q}} \left( \int_a^y v^{1-p'}(y)dy \right)^{(q-1)(\frac{p}{p-q})} v^{1-p'}(y) dy \right]^{\frac{p-q}{p}} \times \\
& \quad \left[ \int_a^b f^p(y) v(y) dy \right]^{\frac{1}{p}} \times \left[ \int_a^b \Big(H_L f\Big)^p (y)(p-1) \left( \int_a^y v^{1-p'}(t)dt \right)^p v^{1-p'}(y) dy \right]^{\frac{q-1}{p}}.
\end{aligned}$$

On élève à la puissance $q$ puis à la puissance $\frac{1}{q}$ l'expression précédente et en utilisant les notations suivantes :

$$\frac{1}{q'} = \frac{q-1}{q} = 1 - \frac{1}{q} \qquad et \qquad r = \frac{pq}{p-q}$$

et

$$\tilde{w}(y) = (p-1)\left[\int_a^y v^{1-p'}(t)dt\right]^p v^{1-p'}(y) \qquad \forall y \in (a,b)$$

$$\begin{aligned}
I \;\leq\; & \left[q(p-1)^{\frac{(1-q)}{pq}}\left[\int_a^b \left(\int_y^b w(x)dx\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\int_a^y v^{1-p'}(y)dy\right)^{(q-1)\left(\frac{p}{p-q}\right)} v^{1-p'}(y)dy\right]^{\frac{p-q}{pq}}\right]^q \times \\
& \left[\int_a^b f^p(y)v(y)dy\right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\int_a^b \left(H_L f\right)^p(y)\tilde{w}(y)dy\right]^{\frac{q-1}{p}} \\
= \;& q(p-1)^{\frac{(1-q)}{p}}\left[\left[\int_a^b \left[\left(\int_y^b w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^y v^{1-p'}(y)dy\right)^{\frac{q-1}{q}}\right]^{\frac{pq}{p-q}} v^{1-p'}(y)dy\right]^{\frac{p-q}{pq}}\right]^q \times \\
& \left[\int_a^b \left(H_L f\right)^p(y)\tilde{w}(y)dy\right]^{\frac{q-1}{p}} \times \left[\int_a^b f^p(y)v(y)dy\right]^{\frac{1}{p}} \\
= \;& q(p-1)^{\frac{(1-q)}{p}}\left[\int_a^b \left[\left[\left(\int_y^b w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^y v^{1-p'}(y)dy\right)^{\frac{1}{q'}}\right]^r v^{1-p'}(y)dy\right]^{\frac{1}{r}}\right]^q \times \\
& \left[\int_a^b \left(H_L f\right)^p(y)\tilde{w}(y)dy\right]^{\frac{q-1}{p}} \times \left[\int_a^b f^p(y)v(y)dy\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

par conséquent :

$$\int_a^b \left(H_L f\right)^q(x)w(x)dx \leq q(p-1)^{\frac{(q-1)}{p}} A_L^q \left[\int_a^b \left(H_L f\right)^p(y)\tilde{w}(y)dy\right]^{\frac{q-1}{p}} \left[\int_a^b f^p(y)v(y)dy\right]^{\frac{1}{p}} \tag{2.8}$$

telle que : pour la nouvelle fonction de poids $\tilde{w}$ et pour $v$ on trouve :

$$B_L(a,b,\tilde{w},v,q,p) \leq 1.$$

Comme $B_L < \infty$, donc d'après le théorème (1.1) l'inégalité (2.3) est vérifiée $\forall U \in AC_L(a,b)$ et $B_L \leq C_L \leq K(q,p)B_L$ et pour $q = p$ on obtient

$$\begin{aligned}
\left[\int_a^b (H_L f)^p(y)\tilde{w}(y)dy\right]^{\frac{1}{p}} &\leq C_L \left(\int_a^b f(x)^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq K(p,p)\left(\int_a^b f(x)^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Ici on a utilisé l'estimation du lemme 1.2,
telle que

$$\begin{aligned}
K(p,p) &= \left(1+\frac{p}{p'}\right)^{\frac{1}{p}}\left(1+\frac{p'}{p}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left(1+p\left(\frac{1}{p'}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(1+p'\left(\frac{1}{p}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left(1+p\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\left(1+p'\left(1-\frac{1}{p'}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= (p)^{\frac{1}{p}}(p')^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

D'après (2.7)

$$\begin{aligned}
(2.7) \quad \Leftrightarrow & \left(\int_a^b (H_L f)^q(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq q^{\frac{1}{q}}(p-1)^{\frac{1-q}{pq}} A_L \left(\int_a^b f^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{pq}}\left(\int_a^b (H_L f)^q(x)\tilde{w}(x)dx\right)^{\frac{q-1}{pq}}
\end{aligned}$$

et

$$\left(\int_a^b (H_L f)^q(x)\tilde{w}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq p^{\frac{1}{p}}p'^{\frac{1}{p'}}\left(\int_a^b f^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\left(\int_a^b (H_L f)^q(x)\tilde{w}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{q'}} \leq (p)^{\frac{1}{pq'}}(p')^{\frac{1}{pq'}}\left(\int_a^b f^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{pq'}}$$

$$(2.8) \quad \Leftrightarrow \left(\int_a^b \left(H_L f\right)^q (x) w(x) dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq q^{\frac{1}{q}} (p-1)^{\frac{1-q}{pq}} A_L \left(\int_a^b f^p(x) v(x) dx\right)^{\frac{1}{pq}} p^{\frac{q-1}{pq}} p'^{\frac{q-1}{p'q}} \left(\int_a^b f^p(x) v(x) dx\right)^{\frac{q-1}{pq'}}$$

$$= q^{\frac{1}{q}} \left((p-1)^{\frac{1-q}{pq}} p^{\frac{q-1}{pq}} p'^{\frac{q-1}{p'q}}\right) A_L \left(\int_a^b f^p(x) v(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (*)$$

Comme

$$\begin{aligned}
(p-1)^{\frac{1-q}{pq}} (p)^{\frac{q-1}{pq}} (p')^{\frac{q-1}{p'q}} &= \left(\frac{p'}{p'-1} - 1\right)^{\frac{1-q}{pq}} \left(\frac{p'}{p'-1}\right)^{\frac{q-1}{pq}} (p')^{\frac{q-1}{p'q}} \\
&= \left(\frac{1}{p'-1}\right)^{\frac{1-q}{pq}} (p')^{\frac{q-1}{pq}} \left(\frac{1}{p'-1}\right)^{\frac{q-1}{pq}} (p')^{\frac{q-1}{p'q}} \\
&= \left(\frac{1}{p'-1}\right)^{(\frac{1-q}{pq})-(\frac{1-q}{pq})} (p')^{(\frac{q-1}{pq})+(\frac{q-1}{p'q})} \\
&= (p')^{(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'})(\frac{q-1}{q})} \\
&= (p')^{1-\frac{1}{q}} \\
&= (p')^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

En remplaçant dans (*) , on obtient

$$\left(\int_a^b \left(H_L f\right)^q (x) w(x) dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq q^{\frac{1}{q}} (p')^{\frac{1}{p}} A_L \left(\int_a^b f^p(x) v(x) dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Donc, (1.5) est vérifiée alors (1.4) est vérifiée et comme $C_L$ est optimale on a

$$C_L \leq q^{\frac{1}{q}} (p')^{\frac{1}{p}} A_L.$$

Le lemme est prouvé.

**Lemme 2.2** *Soient* $1 < q < p < \infty$ *et* $v, w \in W(a,b)$ *, supposons que l'inégalité* (1.4) *est vérifiée avec la constante optimale* $C_L$ $\forall U \in AC_L$ *, alors :*

$$q^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'q}{r}\right)^{\frac{1}{q'}} A_L \leq C_L \qquad (2.9)$$

*telle que :* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$.

**Preuve :** Supposons que l'inégalité (2.3) est vérifiée $\forall U \in AC_L(a,b)$ , alors d'après le lemme (1.3) (pour $p, q$ des nombres arbitraires de $(1,\infty)$) .On a : $B_L \leq C_L$ donc $B_L < \infty$ , par conséquent

$$\int_x^b w(t)dt < \infty \qquad , \qquad \int_a^x v^{1-p'}(t)dt < \infty. \tag{2.10}$$

pour tout $x \in (a,b)$ .
On choisit $\{a_n\}, \{b_n\}$ deux suites réelles telles que $a_n \longrightarrow a, b_n \longrightarrow b$ quand $n \longrightarrow +\infty$ et pour $n \in \mathbb{N}$ , $x \in (a,b)$ , on introduit des fonctions auxiliaires ,

$$f_n(x) = \left(\int_x^b w(t)dt\right)^{\frac{r}{pq}} \left(\int_{a_n}^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{r}{pq'}} v^{1-p'}(x)\chi_{(a_n,b_n)}(x)dx. \tag{2.11}$$

Évidemment $f_n(x) > 0$ dans $(a_n, b_n)$ ,d' oú

$$\int_a^b f_n^p(x)v(x)dx > 0. \tag{2.12}$$

Si on définit

$$A_n = \left[\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_x^b w(t)dt\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_{a_n}^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{r}{q'}} v^{1-p'}(x)dx\right]^{\frac{1}{r}}. \tag{2.13}$$

Comme $a_n \leq x \leq b_n$, on obtient

$$
\begin{aligned}
A_n^r &= \int_{a_n}^{b_n} \left( \int_x^b w(t)dt \right)^{\frac{r}{q}} \left( \int_{a_n}^x v^{1-p'}(t)dt \right)^{\frac{r}{q'}} v^{1-p'}(x)dx \\
&\leq \int_{a_n}^{b_n} \left( \int_{a_n}^b w(t)dt \right)^{\frac{r}{q}} \left( \int_{a_n}^x v^{1-p'}(t)dt \right)^{\frac{r}{q'}} v^{1-p'}(x)dx \\
&= \left( \int_{a_n}^b w(t)dt \right)^{\frac{r}{q}} \int_{a_n}^{b_n} \left( \int_{a_n}^x v^{1-p'}(t)dt \right)^{\frac{r}{q'}} v^{1-p'}(x)dx \\
&= \left( \int_{a_n}^b w(t)dt \right)^{\frac{r}{q}} \left[ \frac{1}{\frac{r}{q'}+1} \int_{a_n}^x v^{1-p'}(t)dt \right]_{a_n}^{b_n} \\
&= \left( \frac{r+q'}{r} \right)^{-1} \left( \int_{a_n}^b w(t)dt \right)^{\frac{r}{q}} \left( \int_{a_n}^{b_n} v^{1-p'}(t)dt \right)^{\frac{r+q'}{q'}} \\
&= \left( \frac{r+q'}{r} \right)^{-1} \left( \int_{a_n}^b w(t)dt \right)^{\frac{r}{q}} \left( \int_{a_n}^{b_n} v^{1-p'}(t)dt \right)^{1+\frac{r}{q'}}. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Comme

$$
\begin{aligned}
\left(1 + \frac{r}{q'}\right) &= r\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{q'}\right) \\
&= r\left(\frac{1}{r} + \left(1 - \frac{1}{q}\right)\right) \\
&= r\left(-\frac{1}{p} + 1\right) \\
&= r\left(\frac{1}{p'}\right).
\end{aligned}
$$

Alors,d'après (2.10) ,on a

$$
A_n^r \leq \left(\frac{p'}{r}\right) \left( \int_{a_n}^b w(t)dt \right)^{\frac{r}{q}} \left( \int_{a_n}^{b_n} v^{1-p'}(t)dt \right)^{\frac{r}{p'}} < \infty. \tag{2.14}
$$

En vertu de (2.11) ,l'inégalité suivante est vérifiée

$$\int_a^b f_n^p(x)v(x)dx = \int_{a_n}^{b_n} f_n^p(x)v(x)dx = A_n^r. \tag{2.15}$$

Maintenant,on va déduire des estimations inférieures(à gauche) de l'inégalité (1.5) ,pour $f \in M^+(a,b)$.On peut utiliser l'inégalité (1.5) au lieu de l'inégalité (1.4) d'après le lemme (1.1) et la $2^{me}$ condition dans l'inégalité (2.10)

$$\left(\int_a^x H_L f_n(t)dt\right)^q = q\int_a^x \left(\int_a^y f_n(t)\right)^{q-1} f_n(y)dy,$$

alors

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b \left(H_L f_n\right)^q(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} &= \left[\int_a^b \left(\int_a^x f_n(t)dt\right)^q w(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[q\int_a^b \left(\int_a^x \left(\int_a^y f_n(t)dt\right)^{q-1} f_n(y)dy\right) w(x)dx\right]^{\frac{1}{q}}. \qquad (*)
\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b \left(H_L f_n\right)^q(x)w(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} &= (q)^{\frac{1}{q}}\left[\int_a^b \left(\int_a^y f_n(t)dt\right)^{q-1} f_n(y)\left(\int_y^b w(x)dx\right)dy\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= (q)^{\frac{1}{q}}\left[\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_n}^y f_n(t)dt\right)^{q-1} f_n(y)\left(\int_y^b w(x)dx\right)dy\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

D'après la forme (2.11) et pour $y \in (a_n, b_n)$ , On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{a_n}^y f_n(t)dt &= \int_{a_n}^y \left(\int_t^b w(x)dx\right)^{\frac{r}{pq}} \left(\int_{a_n}^t v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{r}{pq'}} v^{1-p'}(t)dt \\
&\geq \int_{a_n}^y \left(\int_y^b w(x)dx\right)^{\frac{r}{pq}} \left(\int_{a_n}^t v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{r}{pq'}} v^{1-p'}(t)dt \qquad (car(a_n \leq t \leq y))
\end{aligned}$$

$$= \left(\int_y^b w(x)dx\right)^{\frac{r}{pq}} \int_{a_n}^y \left(\int_{a_n}^t v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{r}{pq'}} v^{1-p'}(t)dt$$

$$= \left(\int_y^b w(t)dt\right)^{\frac{r}{qp}} \left[\frac{1}{\frac{r}{q'p}+1} \left(\int_{a_n}^t v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{r}{pq'}+1}\right]_{a_n}^y$$

$$= \left(\int_y^b w(t)dt\right)^{\frac{r}{qp}} \left[\frac{pq'}{r+pq'} \left(\int_{a_n}^y v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{r+pq'}{pq'}}\right].$$

comme

$$\begin{aligned} 1+\frac{r}{pq'} &= 1+\frac{r(q-1)}{pq} \\ &= 1+r\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{qp}\right) \\ &= r\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{p}-\frac{1}{pq}\right) \\ &= r\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{pq}\right) \\ &= r\left(\frac{p-1}{pq}\right) \\ &= r\left(\frac{1}{p'q}\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\int_{a_n}^y f_n(t)dt \geq \frac{p'q}{r} \left(\int_y^b w(t)dt\right)^{\frac{r}{qp}} \left(\int_{a_n}^y v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{r}{p'q}}. \qquad (**)$$

Par conséquent, en remplaçant $(*)$par $(**)$, on a

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^b \left(H_L f_n\right)^q (x) w(x) dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\geq (q)^{\frac{1}{q}} \left[\int_{a_n}^{b_n} \left[\left(\frac{p'q}{r}\right)\left(\int_y^b w(x)dx\right)^{\frac{r}{pq}} \left(\int_{a_n}^{y} v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{r}{p'q}}\right]^{(q-1)} f_n(y) \left(\int_y^b w(x)dx\right) dy\right]^{\frac{1}{q}}\\
&= (q)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'q}{r}\right)^{\frac{q-1}{q}} \left[\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_y^b w(x)dx\right)^{\frac{r(q-1)}{pq}+1} \left(\int_{a_n}^{y} v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{r(q-1)}{p'q}}\right]^{\frac{1}{q}}\\
&\qquad \left[\left(\int_y^b w(x)dx\right)^{\frac{r}{pq}} \left(\int_{a_n}^{y} v^{1-p'}(x)dx\right)^{\frac{r}{pq'}} v^{1-p'}(y)\chi_{(a_n,b_n)}(y)dy\right]^{\frac{1}{q}}\\
&= (q)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'q}{r}\right)^{\frac{1}{q'}} \left[\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_y^b w(x)dx\right)^{\left(\frac{r}{p'q}+\frac{r}{pq}\right)} \left(\int_{a_n}^{y} v^{1-p'}(x)dx\right)^{\left(\frac{r}{p'q'}+\frac{r}{pq'}\right)} v^{1-p'}dy\right]^{\frac{1}{q}}\\
&= (q)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{qp'}{r}\right)^{\frac{1}{q'}} \left[\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_y^b w(x)dx\right)^{\left(\frac{r}{q}\right)} \left(\int_{a_n}^{y} v^{1-p'}(x)dx\right)^{\left(\frac{r}{q'}\right)} v^{1-p'}dy\right]^{\frac{1}{q}}\\
&= (q)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{qp'}{r}\right)^{\frac{1}{q'}} A_n^{\frac{r}{q}}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\left(\int_a^b \left(H_L f_n\right)^q (x) w(x) dx\right)^{\frac{1}{q}} \geq (q)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'q}{r}\right)^{\frac{1}{q'}} A_n^{\frac{r}{q}} \quad . \tag{2.16}$$

Donc,d'après (2.15) on obtient

$$\left(\int_a^b \left(H_L f_n\right)^q (x) w(x) dx\right)^{\frac{1}{q}} \geq (q)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'q}{r}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_a^b f_n^p(x) v(x) dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Alors

$$(q)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'q}{r}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_a^b f_n^p(x) v(x) dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_a^b \left(H_L f_n\right)^q (x) w(x) dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_L \left(\int_a^b f_n^p(x) v(x) dx\right)^{\frac{1}{P}},$$

d'oú

$$(q)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'q}{r}\right)^{\frac{1}{q'}} A_n^{\frac{r}{q}} \leq C_L A_n^{\frac{r}{p}},$$

Ce qui implique

$$(q)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'q}{r}\right)^{\frac{1}{q'}} A_n^{\frac{r}{q}-\frac{r}{P}} \leq C_L. \tag{2.17}$$

On a

$$\frac{r}{q} - \frac{r}{P} = r\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{P}\right) = r\left(\frac{1}{r}\right) = 1,$$

donc

$$(q)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'q}{r}\right)^{\frac{1}{q'}} A_n \leq C_L.$$

Comme $0 < A_n < \infty$ d'après (2.12) , (2.14) , (2.15) et dans (2.17) , quand $n \longrightarrow +\infty$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty} A_n &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left[\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_x^b w(t)dt\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_{a_n}^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{r}{q'}} v^{1-p'}(x)dx\right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \left[\int_a^b \left(\int_x^b w(t)dt\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{r}{q'}} v^{1-p'}(x)dx\right]^{\frac{1}{r}},
\end{aligned}$$

alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} (q)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'q}{r}\right)^{\frac{1}{q'}} A_n = (q)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'q}{r}\right)^{\frac{1}{q'}} A_L \qquad . \tag{2.9}$$

**Preuve du Théorème** (2.1)

($\Leftarrow$) Supposons que $A_L < \infty$ alors d'après le lemme (2.1) , $\forall U \in AC_L(a,b)$ l'inégalité (2.3) est vérifiée et de plus

$$C_L \leq \left(q\right)^{\frac{1}{q}} \left(p'\right)^{\frac{1}{q'}} A_L$$

($\Rightarrow$)Supposons que l'inégalité (1.4) est vérifiée $\forall U \in AC_L(a,b)$ ,et d'après le lemme (2.2) , on a

$$q^{\frac{1}{q}} \left(\frac{p'q}{r}\right)^{\frac{1}{q'}} A_L \leq C_L,$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

Et comme l'inégalité (2.3) est vérifiée alors $C_L$ est la constante optimale, donc

$$C_L < \infty \Rightarrow \left(\frac{p'q}{r}\right)^{\frac{1}{q'}} A_L < \infty \Rightarrow A_L < \infty.$$

## 2.2 l'inégalité de Hardy pour $0 < q < 1$.

**Introduction :** On a déjà mentionné l'inégalité de Hardy :

$$\left[\int_a^b |U(x)|^q \, w(x)dx\right]^{\frac{1}{q}} \leq C \left[\int_a^b |U'(x)|^q \, v(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.18)$$

L'inégalité (2.18) a été considérée par G_ SINNAMON [77] dans le cas où,

$$0 < q < 1, 1 < p < \infty. \qquad (2.19)$$

Ce cas a été aussi étudié par HALPERIN [32] en utilisant l'idée deSINNAMON avec certaines modifications.

**Théorème 2.2** *Soit* $f \in M^+(a,b), \rho \in W(a,b)$ *telles que :*

$$\int_a^b f(t)dt < \infty, \int_a^b \rho(t)dt < \infty. \qquad (2.20)$$

*Alors il existe une fonction* $f_0 \in M^+(a,b)$ *satisfaisant*

$$\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x f_0(t)dt \quad pour \quad x \in (a,b); \qquad (2.21)$$

$$f_0 \backslash \rho \; non \; croissante \; sur (a,b) \qquad (2.22)$$

$$\|\tfrac{f_0}{\rho}\|_{(a,b),p} \leq \|\tfrac{f}{\rho}\|_{(a,b),p} \qquad pour \; chaque \; p \in [1,\infty) \qquad (2.23)$$

**Théorème 2.3** *Soient* $0 < q < 1 < p < \infty, v, w \in W(a,b)$.

Alors l'inégalité (2.18) est valable pour chaque $U \in AC_L(a,b)$
si et seulement si

$$A_L = A_L(a,b,w,v,q,p) < \infty. \qquad (2.24)$$

De plus, pour la meilleure constante possible C dans (2.18), l'estimation suivante est satisfaite :

$$q^{\frac{1}{q}} \left(p'\right)^{\frac{1}{q'}} A_L \leq C \leq q^{\frac{1}{q}} A_L. \qquad (2.25)$$

## Remarque

Le théorème 2.3 est une conséquence des lemmes suivants. $A_L^*$ est introduit à l'aide de la formule suivante.

$$\begin{aligned} A_L^* &= A_L^*(a,b,w,v,v,q,p) \\ &= \left\{ \int_a^b \left( \int_a^x v^{1-p'}(t)dt \right)^{\frac{r}{p'}} \left( \int_x^b w(t)dt \right)^{\frac{r}{p}} w(x)dx \right\}^{\frac{1}{r}} . \end{aligned} \tag{2.26}$$

**Lemme 2.3** *Soient* $0 < q < 1 < p < \infty, v, w \in W(a,b)$. $A_L, A_L^*$ *définis par* (2.24) *et* (2.26)*,respectivement. Alors*

$$A_L(a,b,w,v,q,p) = \left( \frac{p'}{q} \right)^{\frac{1}{r}} A_L^*(a,b,w,v,q,p) \tag{2.27}$$

**preuve** (voir[66], p.130_132).

## Remarque

Dans les prochaines affirmations, nous traiterons au lieu de l'inégalité (2.18) l'inégalité :

$$\left[ \int_a^b (H_l f)^q (x) w(x)dx \right]^{\frac{1}{q}} \leq C \left[ \int_a^b f^p(x) v(x)dx \right]^{\frac{1}{p}} \tag{2.28}$$

pour $f \in M^+(a,b)$. Ceci est possible grâce a l'affirmation du lemme (1.1) valable aussi pour $0 < q < 1, 1 < p < \infty$

**Lemme 2.4** *: soient* $0 < q < 1 < p < \infty, v, w \in W(a,b)$*.supposons que le nombre* $A_L$ *de* (2.24) *est fini. Alors, l'inégalité* (2.28) *est vérifiée pour chaque* $f \in M^+(a,b)$ *avec la constante*

$$C = q^{\frac{1}{q}} \ A_L. \tag{2.29}$$

**Preuve**(voir [66], p.133_135).

**Lemme 2.5** *soient $0 < q < 1 < p < \infty, v, w \in (a, b)$. Supposons que l'inégalité (2.28) est valable (avec une constante finie $C$)pour quelle que soit $f \in M^{+}(a, b)$.Alors*

$$q^{\frac{1}{q}} \left(p'\right)^{\frac{1}{p'}} A_L \leq C \ \cdot \tag{2.30}$$

**preuve**(voir[66], p.133_135)

**Exemple 2.2.1** *Soient $p, q \in (1, \infty)$ et l'inégalité*

$$\left[\int_0^{\infty} |u(x)|^q x^{\alpha} dx\right]^{\frac{1}{q}} \leq C \left[\int_0^{\infty} |u'(x)|^p x^{\beta} dx\right]^{\frac{1}{p}} \ . \tag{2.31}$$

*Alors on a $(a, b) = (0, \infty), w(x) = x^{\alpha}, v(x) = x^{\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si on considère le cas $p \leq q$,alors les nombres $B_L$ et $B_R$ de (1.10) oú :*

$$B_L = B_L(a, b, w, v, q, p) = \sup_{a<x<b} F_L(x)$$

*respectivement, sont donnés par les formules :*

$$\begin{aligned} B_L &= \left(\tfrac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} (p-1)^{\frac{1}{p'}} (p-1-\beta)^{-\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}\right)} \quad pour \beta < p-1 \\ B_R &= \left(\tfrac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} (p-1)^{\frac{1}{p'}} (\beta+1-p)^{-\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p'}\right)} \quad pour \beta > p-1. \end{aligned} \tag{2.32}$$

*Si on considère le cas $p > q$, alors les nombres $A_L$ et $A_R$ sont á la fois infinis, et par conséquent nous pouvons affirmer que l'inégalité (2.31) n'est pas vérifiée (avec une constante finie $C$) sur la classe $Ac_L(0, \infty)$ ou $Ac_R(0, \infty)$,*

$$1 < q < p < \infty.$$

*Il est donc naturel de considérer (2.31) seulement pour :*

$$1 < p \leq q < \infty.$$

*Alors dans ce cas l'inégalité (2.31) est valable.*

*i) pour $u \in AC_L(0, \infty)$ si et seulement si*

$$\beta < p-1, \alpha = \beta \tfrac{q}{p} - \tfrac{q}{p'} - 1.$$

*ii) pour* $u \in AC_R(0, \infty)$ *si et seulement si*

$$\beta > p - 1, \alpha = \beta \frac{q}{p} - \frac{q}{p'} - 1$$

*la constante* $C$ *peut être définie*

$$C = k(q, p)\beta.$$

# Chapitre 3

# Quelques remarques sur les meilleures constantes dans certaines inégalités de Hardy


### Résumé

Les constantes optimales dans les inégalités de type Hardy ne sont connues que dans quelques cas. Dans ce chapitre on discute de certaines situations où de telles constantes sont connues. mais aussi de nouvelles constantes optimales sont déduits à la fois dans des cas unidimensionnels.


## Introduction

G.H.Hardy a énoncé en 1920 [34] et prouve en 1925 sa fameuse inégalité : si f(x) est mesurable non négative sur (0,$\infty$ ) alors :

$$\int_0^\infty \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p dx \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx, p > 1. \tag{3.1}$$

Il a lui-même présenté en 1927 la première généralisation de (3.1), à savoir :

$$\int_0^\infty \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right)^p x^\alpha dx \leq \left( \frac{p}{p-1-\alpha} \right)^p \int_0^\infty f^p(x)x^\alpha dx, p \geq 1, \alpha < p-1. \tag{3.2}$$

La période qui a duré plus de 10 ans de recherche jusqu'à ce que Hardy découvre enfin ses inégalités (3.1) et (3.2) a été récemment décrite [7].

Le développement ultérieur d'améliorations de (3.1) et (3.2) est discuté dans de nombreux livres ([43],[49]et[39]). Nous mentionnons tout d'abord la forme moderne suivante de l'inégalité de Hardy :

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty f^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.3}$$

ou $f(x) \geq 0$, u et v sont des fonctions de poids,1 ≤p<q<∞ ; on considère le cas $1 < p \leq \infty$,alors il est bien connu que (3.3) est vérifiée si et seulement si :

$$A_{MB} := sup_x \left(\int_x^\infty u(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{3.4}$$

ou $p^{'} = \dfrac{p}{p-1}$ et on outre,

$$A_{MB} \leq C \leq k(p,q)A_{MB}. \tag{3.5}$$

On remarque que beaucoup d'expression de $k(p,q)$ sont connues (voir[49],pp46-47)

$$k(p,q) = p^{\frac{1}{q}}(p^{'})^{\frac{1}{p}} \qquad \text{ou} \qquad k(p,q) = \left(1+\frac{q}{p^{'}}\right)\left(1+\frac{p^{'}}{q}\right)^{\frac{1}{p^{'}}}.$$

On remarque également qu'une élégante preuve de la caractérisation (3.4) a été donné en 1972 par B.Muckenhoupt [58] pour le cas $p = q$ et en 1978 par J.S.Bradley [11] pour le cas général $1 < p \leq q < \infty$ pour le cas $p = q$ on se réfère également à des documents antérieurs de G.Talenti et G.A.Tomaselli [85].

Les constantes dans (3.1) et (3.2) sont optimales mais pour la meilleure constante possible $C$ dans (3.3) on ne peut donner qu'une estimation de type (3.5).

Dans ce chapitre on a examiné le cas le plus simple avec des fonctions de poids,

en effet la constante optimale peut être trouvée(voir théorème(3,1)). D'abord on note qu'en appliquant (3.4) dans le cas des fonctions de poids on obtient facilement ce qui suit (voir exemple 0.3(i)dans [43]) :

**Exemple 3.0.1**
l'inégalité

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt\right)^q x^\alpha dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty f^p(x)x^\beta dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.6}$$

Est valable pour $1 < p \leq q < \infty$ si et seulement si :

$$\beta < p-1 \qquad et \qquad \frac{\alpha+1}{q} = \frac{\beta+1}{p} - 1. \tag{3.7}$$

Dans (3.3) on peut considérer la situation avec $\int_0^x$ qui peut être remplacé par $\int_x^\infty$ cette inégalité peut être caractérisée par une condition similaire a celle (3.4) pour le cas particulier des fonctions de poids (voir l'exemple 0.3 (ii)dans [43]).
**Exemple 3.0.2**
l'inégalité :

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^q x^\alpha dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\left(\int_0^\infty f^p(x)x^\beta\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.8}$$

est vérifiée pour $1 < p \leq q < \infty$ si et seulement si :

$$\beta > p-1 \;\; et \;\; \frac{\alpha+1}{q} = \frac{\beta+1}{P} - 1.$$

Dans la section 2 ,on présente quelques préliminaires d'intérêt indépendant :

# préliminaires

## 3.1 Résultat de Bliss

Pour le cas $\beta = 0$, G.A.Bliss[10] a prouvé le résultat suivant :

**Théorème 3.1** *Soit* $1 < p < q < \infty$.*L'inégalité* (3.6) *avec* $\beta = 0$ *et* $\alpha = -\frac{q}{p'} - 1$ *est vérifiée avec la constante optimale :*

$$C_{pq} = \left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\frac{q-p}{p}\Gamma\left(\frac{qp}{q-p}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{q-p}\right)\Gamma\left(\frac{p(q-1)}{q-p}\right)}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{3.9}$$

*Et avec cette constante* (3.6) *se transforme en égalité si et seulement si :*

$$f(x) = \frac{C}{\left(ax^{\frac{q}{p}-1}+1\right)^{\frac{q-p}{p}}}. \tag{3.10}$$

*On souligne en suite qu'il existe une continuité dans la constante optimale $q \to p$ ce qui n'a pas été souligné dans l'article initial de Bliss .*

**Remarque 3.1** *il est valable $C_{pq} \to \dfrac{p}{p-1}$ quand $q \to p$ en effet,en utilisant la formule de Stirling :$\Gamma(x) \approx \sqrt{\dfrac{2\pi}{x}}\left(\dfrac{x}{e}\right)^x$ quand $x \to \infty$ et en utilisant la notation : $\mu = \dfrac{qp}{p-q}$ on constate que :*

$$C_{pq} \approx \left(\frac{p}{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{P}} q^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}} \left(\frac{\sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}(\frac{\mu}{e})^{\mu}}{\sqrt{\frac{2\pi}{\mu/q}}(\frac{\mu}{qe})^{\frac{\mu}{q}}\sqrt{\dfrac{2\pi}{\mu/q'}}(\frac{\mu}{q'e})^{\frac{1}{\mu}}}\right)^{\frac{1}{\mu}}$$

$$\approx \left(\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} p^{\frac{1}{p}} \left(p'\right)^{\frac{1}{P'}} = \frac{p}{p-1}$$

*et il reste à noter que $\dfrac{p}{p-1}$ est la constante optimale dans l'inégalité d'origine de Hardy* (3.1).

## 3.2 Résultat de Bliss Manakov

En utilisant notamment le résultat de Bliss ,V.M.Manakov [88] a prouvé ce qui suit :

**Théorème 3.2** *Soient $1 < p < q < \infty$ et $v$ une fonction de poids tel que $\displaystyle\int_0^{\infty} v^{1-p'}(x)dx = \infty$.Alors il existe une fonction de poids $u$ telle que $0 < A_{MB} < \infty$ et dans ce cas la constante optimale $C = C_{pq}$ dans l'inégalité* *de Hardy de poids* (3.3) *est déterminée par :*

$$Cpq = \left( \frac{\Gamma\left(\frac{qp}{q-p}\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{q-p}\right)\Gamma\left(\frac{p(q-1)}{q-p}\right)} \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} A_{MB}$$

**Remarque 3.2** *Manakov a mentionné le cas pour une constante des fonctions des poids de puissance correspondant à ce cas spécial* $\beta = -\frac{2p-q}{q-p}(p-1)$ *, et en conséquence* $\alpha = -\frac{p(q-1)}{q-p}$.

## 3.3 Quelques résultats d'équivalence

Dans le cas $p = q$ ,pour que $\alpha = \beta - p$ on a les informations précises suivantes :

**Théorème 3.3** *Soit f une fonction mesurable non négative sur*$(0, \infty)$ *et soit* $p \geq 1$

*(a) L'inégalité* (3.6) *avec* $p = q$ *est vérifiée avec* $\alpha = \beta - p$ *si* $\beta < p-1$,*avec la constante optimale* $C = \frac{p}{p-1-\beta}$.

*(b) L'inégalité* (3.8) *avec* $q = p$ *et avec* $\beta$ *remplacé par* $\beta_0$ *si* $\beta_0 > p-1$ *et* $\alpha = \beta_0 - p$ *avec la constante optimale* $C = \frac{p}{\beta_0+1-p}$ .

*(c) Les inégalités* (3.6) *et* (3.8)*(avec* $\beta$ *remplacé par* $\beta_0$*) pour* $q = p$ *sont équivalentes avec la relation* $\beta = 2p - \beta_0 - 2$ *entre les paramétrés .*

**Remarque 3.3** *On peut trouver une preuve simple d'une estimation plus générale dans [51] .*
*La prochaine étape consiste a énoncer une équivalence comme théorème 3.3 pour le cas* $1 < p < q < \infty$.

**Théorème 3.4** *Soit* $1 < p \leq q < \infty$ *,les inégalités (a) et (b) suivantes sont valables et équivalentes :*

*(a) L'inégalité :*

$$\left( \int_0^\infty \left( \int_0^x f(t)dt \right)^q x^\alpha dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left( \int_0^x f^p(x) x^\beta dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.11}$$

*est valable pour toute fonction f mesurable sur* $(0, \infty)$ *si et seulement si :*

$$\beta < p-1, \frac{\alpha+1}{q} = \frac{\beta+1}{p} - 1 \tag{3.12}$$

*(b) L'inégalité*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty f(t)dt\right)^q x^{\alpha_0} dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty f^p(x) x^{\beta_0} dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.13}$$

*est valable pour toute f(t)mesurable sur* $(0, \infty)$ *si et seulement si :*

$$\beta_0 > p-1, \frac{\alpha_0+1}{q} = \frac{\beta_0+1}{p} - 1, \tag{3.14}$$

*on outre :*

*(c) La relation formelle entre les paramètres* $\beta$ *et* $\beta_0$ *est :* $\beta_0 = -\beta - 2 + 2p$ *et dans ce cas les constantes optimales dans* (3.11) *et* (3.13) *sont égales .*

# La constante optimale dans (3.11) et (3.13)

On utilise d'abord des idées similaires à celle de la preuve de Manakov et du résultat de Bliss pour déduire une nouvelle constante $C = C^*_{pq}$,qui est optimale dans (3.11) pour chaque $p \in (1, q)$,et qui possède également la propriété de la continuité que $C^*_{pq}$ tend vers $\dfrac{p}{p-1-\beta}$quand $q \to p$ qui est la constante optimale pour le cas $p = q$ par théorème 2.3

**Théorème 3.5** *Soient* $1 < p < q < \infty$*et les paramètres* $\alpha$ *et* $\beta$ *satisfait* (3.12) *, alors la constante optimale dans* (3.11) *est* $C = C^*_{pq}$*, ou*

$$C^*_{pq} = \left(\frac{p-1}{p-1-\beta}\right)^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}} \left(\frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\frac{q-p}{p}\Gamma\left(\frac{pq}{q-p}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{q-p}\right)\Gamma\left(\frac{p(q-1)}{q-p}\right)}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{3.15}$$

*L'égalité* (3.15) *se produit exactement quand* $f(x) = \dfrac{cx^{-\frac{\beta}{p-1}}}{\left(dx^{\frac{p-1-\beta}{p-1}(\frac{p}{q}-1)} + 1\right)}$.

*De plus :*

$$C^*_{pq} \to \frac{p}{p-1-\beta} \qquad \text{quand :} \qquad q \to p. \tag{3.16}$$

En utilisant ce résultat et le théorème 2.4 , on obtient la constante optimale suivante dans (3.13) :

**Théorème 3.6** *La constante optimale dans* (3.13) *pour le cas* $1 < p < q < \infty$ *est* $C^{\sharp}_{p,q}$ *ou* $C^{\sharp}_{p,q}$ *coïncide avec la constante* $C^{*}_{p,q}$ *avec* $-\beta_0 - 2 + 2p$.
*L'inégalité dans* (3.13) *se produit si et seulement si :* $f(x)$*est sous la forme :*

$$f(x) = \frac{cx^{\beta_0/p-1}}{\left(dx^{(\frac{\beta+1-p}{p-1})(\frac{q}{p}-1)} + 1\right)^{\frac{q}{q-p}}}.$$

*On outre,on a la continuité entre les constantes optimales quand* $q \to p$

# Conclusion

Le sujet des inégalités de Hardy modernes est un thème d'actualité ayant des applications dans différents domaines de mathématiques.
Par exemple les cas $0 < p < 1, 0 < q < 1, p < 0, q > 1$ et autre sont peu étudiés et peuvent faire l'objet de futures recherches.

# Bibliographie


[1] ADAMS, D. R. : *A trace inequality for generalized potentials. Studia Math.*48 (1973), 99 - 105. MR 49 , 1091

[2] ADAMS, D. R. *Weighted nonlinear potential theory. Trans. Amer. Math. Soc.* 297 (1986), no. 1, 73 - 94. MR 88m :31011

[3] ADAMS, R. A.*Sobolev spaces. Academic Press, New York-San Francisco-London,*1975. MR 56 , 9247

[4] ANDERSEN, K. F. ; HEINIG, H. G. *Weighted norm inequalities for certain integral operators. SIAM J. Math. Anal*. 14 (1983), no. 4, 833 - 844. MR 85f :26012

[5] ANDERSEN, K. F. ; SAWYER, E. T. *Weighted norm inequalities for the Riemann-Liouville and Weyl fractional integral operators. Trans. Amer. Math. Soc.*308 (1988), no. 2, 547 - 558

[6] BEESACK, P. R. :*Hardy's inequality and its extensions. Pacific J. Math.*11 (1961), 39 - 61. MR 22 , 12187

[7] BEESACK, P. R. :*Integral inequalities involving a function and its derivatives. Amer. Math. Monthly* 78 (1971), 705 - 741. MR 48 , 4235

[8] BENSON, D. C. : *Inequalities involving integrals of functions and their derivatives. J. Math. Anal. Appl. 17* (1967), 293 - 308. MR 34 , 2809

[9] BERGH, J. ; LÖFSTROM, J.*Interpolation spaces. An introduction. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York,*1976. MR 58 , 2349

[10] BLISS, G. A. :*An integral inequality. J. Math. Soc.* 5 (1930), 40 - 46.

[11] BRADLEY, J. S.*Hardy inequalities with mixed norms. Canad. Math. Bull.*21 (1978), no. 4, 405 - 408. MR 80a :26005

[12] Brezis .H . :*Analyse fonctionnelle théorie et applications . Édition Masson* , 1983 .

[13] BROWN, R. C. ; HINTON, D. B. :*Weighted interpolation inequalities of sum and product form in* $\mathbb{R}^n$ *. Proc. London Math. Soc.*(3) 56 (1988), 261 - 280.

[14] BROWN, R. C. ; HINTON, D. B. : *Weighted interpolation inequalities and embeddings in* $\mathbb{R}^n$ *(to appear in Canad. J. Math.).*

[15] BURENKOV, V. I. : *Mollifying operators with variable step and their application to approximation by infinitely differentiable functions. Nonlinear analysis, function spaces and applications, Vol. 2 (Pisek 1982), 5 - 37, Teubner- Texte zur Math., 49, Teubner, Leipzig,*1982. MR 84a :46068

[16] BURENKOV, V. I. : *Functional spaces main integral inequalities . Masson , ,* 1989

[17] CHIARENZA, F. ; FRASCA, M. : *A note on a weighted Sobolev inequality. Proc. Amer. Math. Soc.*93 (1985), no. 4, 703 - 704. MR 86h :46052

[18] DUNFORD, N. ; SCHWARTZ, J. T. : *Linear operators. I. General theory. Interscience Publishers, Inc., New York-London,*1958. MR 22 , 8302

[19] DZHALILOV, K. A. : *On an imbedding theorem with weight (Russian). Izv. Akad. Nauk Azerbaidzhan. SSR Ser. Fiz.-Tekhn. Mat. Nauk 7*(1986), no. 4, 25 - 31. MR 88f :46071

[20] EDMUNDS, D. E. ; KUFNER, A. ; RAKOSNIK, J. :*Embeddings of Sobolev spaces with weights of power type. Z. Anal. Anwendungen* 4 (1985), no. 1, 25 - 34. MR 86m :46032a

[21] EVANS, W. D. ; RAKOSNTK, J. : *Anisotropic Sobolev spaces and quasidistance functions. Preprint no. 55, Math. Inst. Czech. Acad. Sci., Prague,* 1989.

[22] FABES, E. B. ; KENIG, C. E. ; SERAPIONI, R. P. :*The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations. Comm. Partial Differential Equations* 7 (1982), no. 1, 77 - 116. MR 84g :35067

[23] GARCIA-CUERVA, J. ; RUBIO DE FRANCIA, J. L. : *Weighted norm inequalities and related topics. North-Holland Math. Studies, 116, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York*1985. MR 87d :42023

[24] GATTO, A. E. ; GUTIÉRREZ, C. E. ; WHEEDEN, R. L. : *Fractional integrals on weighted* $H^p$ *spaces. Trans. Amer. Math. Soc.*289 (1985), no. 2, 575 - 589. MR 86k :42037

[25] GRISVARD, P. :*Espaces intermediaires entre espaces de Sobolev avec poids. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 17 (1963), 255 - 296.

[26] GURKA, P. :*Generalized Hardy's inequality. Časopis Pest. Mat.*109 (1984), no. 2, 194 - 203. MR 85m :26019

[27] GURKA, P. : *Generalized Hardy's inequality for functions vanishing on both ends of the interval (to appear in Analysis).*

[28] GURKA, P. ; KUFNER, A. :*A note on a two-weighted Sobolev inequality (to appear in Banach Center Publ.).*

[29] GURKA, P. ; OPIC, B. :*$A_r$-condition for two weight functions and compact imbeddings of weighted Sobolev spaces. Czechoslovak Math. J.*38 (133) (1988), 611 - 617.

[30] GURKA, P. ; OPIC, B. : *Continuous and compact imbeddings of weighted Sobolev spaces I, II, III. Czechoslovak Math. J.*38 (133) (1988), no. 4, 730 - 744 ; 39 (134) (1989) 78 - 94 ; to appear. MR 89j :46034

[31] DE GUZMAN, M. : *Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$ . Lecture Notes in Math., Vol. 481, Springer-Verlag, Berlin-New York,*1975. MR 56 , 15866

[32] HALPERIN, I. : *Function spaces. Canad. J. Math.*5 (1953), 273 - 288.

[33] HARDY, G. H. : *Note on a theorem of Hilbert. Math. Z.* 6 (1920), 314

[34] HARDY, G. H. ; LITTLEWOOD, J. E. ; PŎLYA, G. :*Inequalities. University Press, Cambridge,*1952. MR 13 , 727

[35] HEINIG, H. P. : *Weighted norm inequalities for certain integral operators II. Proc.Amer. Math. Soc.*95 (1985), no. 3, 387 - 395. MR 87h :26027

[36] HÖRMANDER, L. : *Linear partial differential operators. Springer-Verlag, Heidelberg- Berlin-New York,* 1963.

[37] KADLEC, J. ; KUFNER, A. :*Characterization of functions with zero traces by integrals with weight functions I, II. Časopis Pěst. Mat.* 91 (1966), 463 - 471 ; 92 (1967), 16 - 28. MR 35 / 3430, 5924 .

[38] KOLMOGOROV.A,FOMINE.S :*Élément de la théorie des fonctions et d'analyse fonctionnelle . $2^{me}$ édition Mir . Moscou* , 1973.

[39] KOKILASHVILI, V. M. : *On Hardy's inequalities in weighted spaces (Russian). Soobšč. Akad. Nauk Gruzin. SSR 96 (1979), no.*1, 37 - 40. MR 8l1 :26014

[40] KUDRYAVTSEV, L. D. :*Direct and inverse imbedding theorems. Applications to the solution of elliptic equations by variational methods.*

*Translations of Mathematical Monographs, Vol. 42, Amer. Math. Soc., Providence, R. I.,*1974. MR 49 , 9618, 33 , 7838

[41] KUFNER, A. :*Imbedding theorems for general Sobolev weight spaces. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*(3) 23 (1969), 373 - 386. MR 40 , 6253

[42] KUFNER, A. :*Weighted Sobolev spaces. Teubner-Texte zur Math., 31, Teubner, Leipzig, 1980 (first edition) ; J. Wiley and Sons, Chichester-New York-Brisbane- Toronto-Singapore, 1985 (second edition). MR*84e :46029, 86m :46033

[43] KUFNER, A. ; HEINIG, H. P. : *Hardy's inequality for higher order derivatives (Russian) (to appear in Trudy Mat. Inst. Steklov).*

[44] KUFNER, A. ; JOHN, 0. ; FUČĬK, S. : *Function spaces. Academia, Prague, Noordhoff International Publishing, Leyden,*1977. MR 58 , 2189

[45] KUFNER, A. ; JOHN, Puŏik.S. :*Function spaces .-Prague : Academia* ,1977 .

[46] KUFNER, A. ; OPIC, B. :*Some imbeddings for weighted Sobolev spaces. Constructive function theory '81 (Varna, 1981), 400 - 407, Bulgar. Acad. Sci., Sofia,*1983. MR 85d :46042

[47] KUFNER, A. ; OPIC, B. :*How to define reasonably weighted Sobolev spaces. Comment. Math. Univ. Carolin.*25 (1984), no. 3, 537 - 554. MR 86i :46036

[48] KUFNER, A. ; OPIC, B. ; SKRYPNIK, I. V. ; STECYUK, V. P. : *Sharp embedding theorems for a class of weighted Sobolev spaces (Russian). Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A (1988), no.* 1, 22 - 26. MR 89e :46038

[49] KUFNER, A. ; TRIEBEL, H. :*Generalizations of Hardy's inequality. Confer. Sem. Mat. Univ. Bari*156 (1978), 1 - 21. MR 81a :26014

[50] LANDAU, E. : *A note on a theorem concerning series of positive terms. J. London Math. Soc.*1 (1926), 38 - 39.

[51] L-E.Persson and N.Samko, Inequalities and convexity ,Opertor Theory : Advances and Application. Spring Basel AG (Birkhauser),241(2014),279-306

[52] LEE, K. C. ; YANG, G. S. : *On generalization of Hardy's inequality. Tamkang J. Math. 17 (1986), no.*4, L09 - 119. MR 881 :26047

[53] LEVINSON, N. : *Generalizations of an inequality of Hardy. Duke Math. J.*31 (1964), 389 - 394. MR 30 , 2111

[54] LEWIS, R. T. :*Singular elliptic operators of second order with purely discrete spectra. Trans. Amer. Math. Soc.*271 (1982), no. 2, 653 - 666. MR 84a :35215

[55] LEWIS, R. T. :*A Friedrichs inequality and an application. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*97 (1984), 185 - 191. MR 86i :35111

[56] LIZORKIN, P. I. ; OTELBAEV, M. : *Imbedding and compactness theorems for Sobolev type spaces with weight I, II (Russian). Mat. Sb.*(N. S.) 108 (150) (1979), no. 3, 358 - 377 ; 112 (154) (1980), no. 1 (5), 56 - 85. MR 80j :46054, 82i :46051

[57] MAZ'JA, V. G. :*Sobolev spaces. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1985. MR 87g :46056. (An extended and improved version of the books Einbettungs-sätze für Sobolewsche Räume 1, 2, Zur Theorie Sobolewscher Räume, Teubner-Texte zur Math., Vols. 21, 28, 38, Teubner, Leipzig,*1979, 1980, 1981

[58] MUCKENHOUPT, B. :*Hardy's inequality with weights. Studia Math.* 44 (1972), 31 - 38. MR 4741418

[59] MUCKENHOUPT, B. : *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. Trans. Amer. Math. Soc.*165 (1972), 207 - 226. MR 45 , 2461

[60] MYNBAEV, K. T. ; OTELBAEV, M. 0. :*Weighted function spaces and the spectrum of differential operators (Russian). "Nauka", Moscow,*1988. MR 89h :46036

[61] NEČAS, J. :*Les methodes directes en theorie des equations elliptiques. Academia, Prague and Masson, Paris,*1967. MR 37 , 3168

[62] NIKOL'SKIĬ, S. M. :*Approximation of functions of several variables and embedding theorems (Russian). Second edition, "Nauka", Moscow,* 1977. MR 81f :46046

[63] OĨNAROV, R. :*Density of smooth functions in weighted spaces and weighted inequaliti (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR 303 (1988), no.*3, 559 - 563.

[64] OPIC, B. :*N-dimensional Hardy inequality. Theory of approximation of functions, Proceedings (Kiev 1983)* , 321 - 324, "Nauka", Moscow, 1987.

[65] OPIC, B. :*Necessary and sufficient conditions for imbeddings in weighted Sobolev spaces. asopis Past. Mat.* 114 (1989), no. 4, 165 - 175.

[66] OPIC, B. ; GURKA, P. :*N-dimensional Hardy inequality and imbedding theorems for weighted Sobolev spaces on unbounded domains. Function spaces, differential operators and nonlinear analysis, 108 - 124. Pitman research notes in mathematics series, 211, Longman Scientific and Technical,* 1989.

[67] OPIC, B. ; KUFNER, A. :*Weighted Sobolev spaces and the N-dimensional Hardy inequality (Russian). Imbedding theorems and their application to problems of mathematical physics, 108 - 117, Trudy Sem. S. L. Soboleva, No. 1, 1983, Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel., Inst. Mat., Novosibirsk, 1983.*MR 85j :46053

[68] OPIC, B. ; KUFNER, A. : *Some inequalities in weighted Sobolev spaces. Constructive theory of functions '84 (Varna, 1984), 644 - 648, Bulgar. Acad. Sci., Sofia,* 1984.

[69] OPIC, B. ; KUFNER, A. : *Remark on compactness of imbeddings in weighted spaces. Math.* Nachr. 133 (1987), 63 - 70. MR 88m :46041

[70] OPIC, B. ; RÃKOSNÍK, J. : *Estimates for mixed derivatives of functions from anisotropic Sobolev- Slobodeckil spaces with weights. Preprint no. 54, Math. Inst. Czech. Acad. Sci., Prague,* 1989.

[71] PACHPATTE, B. G. :*On some extensions of Levinson's generalizations of Hardy's inequality. Soochow J. Math.* 13 (1987), no. 2, 203 - 210. MR 89i :26018

[72] PORTNOV, V. R. :*Two imbeddings for the spaces* $L^{(1)}_{p,b}(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ *and their applications(Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR* 155 (1964), 761 - 764. MR 28 , 4243

[73] RÁKOSNÍK, J. :*On imbeddings of Sobolev spaces with power-type weights. Theory of approximation of functions, Proceedings (Kiev, 1983)* , 505 - 507, "Nauka", Moscow, 1987

[74] SAWYER, E. T. :*Weighted inequalities for the two-dimensional Hardy operator. Studia Math.* 82 (1985), no. 1, 1 - 16. MR 87f :42052

[75] SAWYER, E. T. :*A weighted inequality and eigenvalue estimates for Schrodinger operators. Indiana Univ. Math. J.* 35 (1986), no. 1, 1 - 28. MR 87m :35164

[76] SEDOV, V. N. :*Weighted spaces. The imbedding theorem (Russian). Differentsial'nye* Uravneniya 8 (1972), 1452 - 1462. MR 46 , 9715

[77] SHUM, D. T. :*On a class of new inequalities. Trans. Amer. Math. Soc* . 204 (1975), 299 - 341. MR 50 , 10183

[78] SINNAMON, G. :*A weighted gradient inequality. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 111 (1989), 329 - 335. (See also : Weighted Hardy and Opial type inequalities to appear.)*

[79] SINNAMON, G. :*Operators on Lebesgue spaces with general measures. Thesis, McMaster University* 1987, 149 pp.

[80] STECYUK, V. P. :*Thesis, Inst. of Appl. Math. and Mech., Akad. Nauk. Ukrain. SSR,* Donetsk, 1986.

[81] STEPANOV, V. D. : *Two-weighted estimates for Riemann-Liouville integrals. Preprint no. 39, Math. Inst. Czech. Acad. Sci., Prague,* 1988.

[82] STEPANOV, V. *Two-weighted estimates for Riemann-Liouville integrals 1, 2 (Russian). Preprints, Akad. Nauk SSSR, Far East Branch, Comput. Center, Vladivostok,*1988.

[83] SYSOEVA, F. A. : *Generalizations of a certain Hardy inequality. Izv. Vyss. UEeb. Zaved. Matematika* 6 (49) (1965), 140 - 143. MR 33 1 240

[84] TALENTI, G. :*Una diseguaglianza integrale. Boll. Un. Mat. Ital.* (3) 21 (1966), 25 - 34. MR 33 , 4220

[85] TALENTI, G. : *Sopra una diseguaglianza integrale. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)* 21 (1967), 167 - 188. MR 36 , 1600

[86] TOMASELLI, G. : *A class of inequalities. Boll. Un. Mat. Ital* . (4) 2 (1969), 622 - 631. MR 41 , 411

[87] TRÈVES, F. : *Relations de domination entre operateurs differentiels. Acta Math.* (101 (1959), 1 - 139.

[88] TRIEBEL, H. : *Interpolation theory, function spaces, differential operators. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin,* 1978. MR 801 :46023

[89] V.M.MANAKOV, On the best constant in weighted inequalities for Reimann-Liouville integral,Bull.London Math .soc 2,5(1992),442-448.

[90] ZYGMUND, A. : *Trigonometric series. Vols. I, II. Second editin, Cambridge University Press, London-New York, 1968. MR 38 , 4882*