République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulaire
Ministère de l'**E**nseignement **S**upérieur et de
la **R**echerche **S**cientifique
Université Ibn Khaldoun – Tiaret –

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département des MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

DOMAINE : Mathématiques et Informatique

FILIÈRE : Mathématiques

SPÉCIALITÉ : Analyse Fonctionnelle et Équations Différentielles

Présenté par

ZAAK Moussa Daif Allah
SEKKAL Boumedienne

SUJET DU MEMOIRE :

LES OPÉRATEURS M-DISSIPATIFS ET LES PROBLÈMES D'ÉVOLUTION

Soutenu le 07/10/2020 devant Le Jury Composé de :

M : ZIANE Mohamed	Président
M : DIEB Abderezak	Chef de project
M : MAATOUG Abdelkader	Examinateur

Année Universitaire : 2019/2020

REMERCIEMENT

Je remercie d'abord et avant tout le bon Dieu qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Mes sincères remerciements et reconnaissances vont à mon encadreur Mr A. Dieb pour son aide, ainsi que pour la confiance qu'il m'a prodiguée durant la réalisation de ce travail.

Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes et a su me faire progresser dans mes recherches. Mes plus vifs remerciements s'adressent également aux membres de jury qui m'ont honoré en acceptant d'évaluer ce travail.

Et je veux remercier aussi tous ma famille et les étudiants de la promotion 2019/2020 de faculté de Math de l'université Ibn Khaldoun Tiaret.

DÉDICACE

Après de longues années d'études et de travail, je dédie ce modeste travail :

Á mes très chers parents, que dieu les bénisse et les protège pour leurs soutien moral et financier, pour leurs encouragements et les sacrifices qu'ils ont endurés.

Á mes frères et mes sœurs.

Á ma nièce Roeya et à mon neveu Mohamed Taha Yacine

Á toute ma grande famille. Á tous mes fidèles amis.

Á mes enseignants qui nous ont dirigé et aidé et surtout soutenu pour être un jour un cadre en mathématique.

Á tous ceux qui nous connaissent de près ou de loin.

Je tiens enfin de dédier ce travail à tous mes amis d'étude de AFED et mes collègues et mes voisins.

Á tous les proches qu'ils sont mentionnés et les autres qu'ils sont oubliés veuillez nous excuser.

NOTATIONS GÉNÉRALES

E	Espace de Banach.
H	Espace de Hilbert.
$H^m(\Omega),\ H_0^1(\Omega),\ W^{m,p}(\Omega)$	Espaces de Sobolev.
$C_0^\infty(\Omega)$	Fonctions continues à support compact dans Ω.
$L^p(\Omega)$	Espace vectoriel des fonctions de puissance p-intégrable sur Ω.
$\mathcal{B}(E)$	Algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans E.
$\mathcal{L}(E)$	Ensemble des applications linéaires de E dans E.
$\mathcal{D}(A)$	Domaine de l'opérateur A.
$\|\|.\|\|_{\mathcal{D}(A)}$	Norme de graphe.
$\overline{\mathcal{D}(A)}$	Adhérence de l'ensemble $\mathcal{D}(A)$.
A	Opérateur linéaire non borné.
A^*	Adjoint de l'opérateur A.
I	Identité.
$\rho(A)$	Ensemble résolvant de l'opérateur A.
$\sigma(A)$	Spectre de l'opérateur A.
$R(.;A)$	Application résolvante de A.
R_λ	Transformation de Laplace.
A_λ	Approximation de Hille-Yoshida
∇u	Gradient de u.
Δu	Laplacien de u.
$\langle .,. \rangle$	Produit scalaire.
$\hookrightarrow$	Injection de Sobolev.
$(. * .)$	Produit de convolution.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires trouve des applications dans de nombreuses branches de l'analyse. De telles applications à l'analyse harmonique, à la théorie de l'approximation, à la théorie ergodique et à de nombreux autres sujets.

Ce travail s'intéresse à étudier l'existence et l'unicité et éventuellement la régularité des solutions du problème d'évolution semi-linéaire en utilisant la théorie de semi-groupes fortement continus engendrée par les opérateurs m-dissipatifs et celle de Hille-Yosida, et les injections de Sobolev.

Á cet égard, le mémoire est divisé en trois chapitres :

- **Premier chapitre :**

  Ce chapitre est consacré à la théorie des semi-groupes des opérateurs linéaires bornés en particulier les C_0 semi-groupes.

  Cette partie rassemble aussi les définitions et les espaces fonctionnels que nous utiliserons dans ce mémoire.

- **Deuxième chapitre :**

  Dans chapitre nous présentons quelques théorèmes concernant l'engendrement du semi-groupe fortement continu par les opérateur m-dissipatifs en utilisant le théorème de Hille-Yosida et Lumer-Phillips, avec la démonstration.

- **Troisième chapitre :**

  Dans ce chapitre, nous nous intéressons à étudier les problèmes d'évolutions paraboliques semi-linéaires, avec des conditions aux limites de type Dirichlet.

  On présente les résultats d'existence de la solution en utilisant le théorème de Hille-Yosida en exploitant les théorèmes présenté dans le chapitre précédant.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

1.1 Espaces L^p :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

Définition 1.1.1. [1] *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$. On note par $L^p(\Omega)$ l'espace des classes d'équivalences de fonctions de puissance p-intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$:*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } ||f||_{L^p} < \infty\}$$

avec

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme $||.||_{L^p}$ est un espace de Banach.

Si $p = +\infty$ on a

$$||f||_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \quad p.p \text{ sur } \Omega\}$$

$(L^\infty(\Omega), ||.||_\infty)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur Ω.

Si $p = 2$ alors

$$L^2(\Omega) = \left\{f : \left(\int_\Omega |f(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\right\}$$

$\left(L^2(\Omega), \langle ., .\rangle_{L^2(\Omega)}\right)$ est un espace de Hilbert, ou $\langle ., .\rangle_{L^2(\Omega)}$ est le produit scalaire définit comme

suit :

$$\langle f,g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x).g(x)dx; \qquad \forall f,g \in L^2(\Omega)$$

Produit de convolution :

Définition 1.1.2. *Soient f, g deux fonctions mesurables de $\mathbb{R}^n$, alors la fonction*

$$y \mapsto f(x-y).g(y) \text{ est integrable } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

et on définit le produit de convolution comme suit :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y).g(y)dy$$

Quelques inégalités importantes :

Théorème 1.1.1. [4] *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ deux fonctions mesurables, avec*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

alors :

$$f.g \in L^1 \quad et \quad ||f.g||_{L^1} \leq ||f||_{L^p}.||g||_{L^q}$$

Théorème 1.1.2. [4] *Soient f, g deux fonctions mesurables de $L^p(\Omega)$ et $p \geq 1$, alors :*

$$||f+g||_{L^p} \leq ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}$$

Théorème 1.1.3. [4] *Soient $p, q, r \in [1, +\infty[$ vérifiant*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

et f, g deux fonctions mesurables de $L^p(\Omega)$ et $L^q(\Omega)$ respectivement Alors :

$$||f * g||_{L^r} \leq ||f||_{L^p}.||g||_{L^q}$$

1.2 Espaces de Sobolev :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

Dérivées faibles :

Définition 1.2.1. [3] *Soit u une fonction localement intégrable sur Ω et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On appelle une dérivée faible de u d'ordre α, et on la note $\partial^\alpha u$, toute fonction v localement intégrable sur Ω telle que*

$$\forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) : \int_\Omega u\partial^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi dx$$

Espace $W^{m,p}(\Omega)$:

Définition 1.2.2. [3] *L'espace de Sobolev $W^{m,p}$ est défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

On le munit de la norme :

$$\begin{aligned} ||u||_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{|\alpha|\leq m} ||\partial^\alpha u(x)||_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Remarque. *La dérivée dans la définition est à comprendre au sens des distributions.*

Espace $H^1(\Omega)$:

Définition 1.2.3. [3] *L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \ tq \ \forall i \in [1,n], \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$$

On muni $H^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx.$$

et de la norme

$$||u||_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2\right) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Remarque.

1. *Si* $p = 2, m = 1$ *alors* $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$
2. *On sait que* $||u||_{L^2} \leq ||u||_{H^1}$ *et* $||\partial_i u||_{L^2} \leq ||u||_{H^1}$
3. *Pour tout* Ω *ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, on a :*

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

Espace $H^m(\Omega)$:

Définition 1.2.4. [3] *L'espace de Sobolev* $H^m(\Omega)$ *est défini par :*

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$$

On le munit de la norme :

$$\begin{aligned} ||u||_{H^m} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} ||D^\alpha u(x)||^2_{L^2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Espace $H_0^1(\Omega)$:

Définition 1.2.5. [3] *On définit* $H_0^1(\Omega)$ *comme la fermeture de* $C_c^\infty(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$*.*

Autrement dit :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \exists \phi_n \in C_c^\infty(\Omega) \text{ tel que } \phi_n \longrightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega)\}$$

Trace :

Définition 1.2.6. *Soit* Ω *un ouvert borné et régulier. On peut définir une application linéaire et continue*

$$\begin{aligned} \psi : W^{m,p}(\Omega) &\longrightarrow L^p(\partial\Omega) \\ u &\mapsto \psi(u) \end{aligned}$$

Prolongeant l'application trace pour les fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ *:*

$$\forall u \in W^{m,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) : \psi(u) = u|_{\partial\Omega}$$

L'application trace est continue de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$, ce qui signifie qu'il existe une constante C_Ω telle que

$$\forall u \in W^{m,p}(\Omega), ||\psi(u)||_{L^p(\partial\Omega)} \leq C_\Omega ||u||_{W^{m,p}(\Omega)}$$

Proposition 1.2.1. *Soit Ω un ouvert borné et régulier, on définit l'application trace*

$$\psi : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$$
$$u \mapsto \psi(u)$$

D'après Définition 1.2.6, on prolongera l'application ψ pour les fonctions continues sur $\overline{\Omega}$:

$$\forall u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) : \psi(u) = u|_{\partial\Omega}$$

Donc, on peut définir l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme suit :

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) = Ker\ \psi &= \{u \in H^1 : \psi(u) = 0\} \\ &= \{u \in H^1 : u|_{\partial\Omega} = 0\} \end{aligned}$$

Remarque. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ avec supp $u \subset \Omega$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*

Inégalité de Sobolev et théorème d'injection :

Théorème 1.2.1. [6] ***(Gagliardo, Nirenberg, Sobolev)*** *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $p \in [1, n[$, alors l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continument dans $L^{p^*}(\Omega)$*

Plus précisément, il existe une constante $C_{n,p} > 0$ tel que :

$$||u||_{L^{p^*}} \leq C_{n,p} ||\nabla u||_{L^p}$$

avec

1. $C_{n,p} = \dfrac{(n-1)p}{n-p}$
2. $p^* = \dfrac{np}{n-p}$ *est l'exposant critique de Sobolev.*
3. $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$

Preuve. *De [1] page 162, on a :*

$$||u||_{\dfrac{n}{n-1}} \leq \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|\right|^{\frac{1}{n}} \cdots \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|\right|^{\frac{1}{n}}$$

et on a :

$$||\nabla u|| = \sum_{i=1}^{n} ||\frac{\partial u}{\partial x_i}||_{L^1}$$

Alors

$$\begin{aligned}
||u||_{\dfrac{n}{n-1}} &\leq \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|\right|^{\frac{1}{n}} \cdots \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|\right|^{\frac{1}{n}} \\
&\leq \underbrace{||\nabla u||^{\frac{1}{n}} \cdots ||\nabla u||^{\frac{1}{n}}}_{nfois} \\
&\leq ||\nabla u||_{L^1}
\end{aligned}$$

Alors, pour $p = 1$ *on trouve que* $p^* = \dfrac{n}{n-1}$ *et* $C_{n,p} = 1$

Montrons que

$$||u||_{L^{p^*}} \leq C_{n,p}||\nabla u||_{L^p} \ avec\ p^* = \frac{np}{n-p}$$

On pose

$$\alpha.p^* = \frac{n}{n-1} \Rightarrow \alpha = \frac{n-p}{p(n-1)}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|^{p^*} dx &= \int_\Omega |u(x)^{p^* \cdot \frac{\alpha}{\alpha}}| dx \\
&= \int_\Omega \left(|u(x)|^{\alpha.p^*}\right)^{\frac{1}{\alpha}} dx \\
&= \int_\Omega \left(|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \int_\Omega \left(|u(x)|^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{n}{n-1}}
\end{aligned}$$

On pose

$$v(x) = |u(x)|^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow ||\nabla v||_{L^1} = \left(\frac{1}{\alpha}||\nabla u\ .\ u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}||_{L^1}\right)$$

D'ou

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)|^{L^{p^*}}dx &\leq \left(\frac{1}{\alpha}||\nabla u \ . \ u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}||_{L^1}\right)^{\frac{n}{n-1}}\\ &\leq \left(\frac{1}{\alpha}||\nabla u||_{L^p} \ . \ ||u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}||_{L^q}\right)^{\frac{n}{n-1}} \qquad (Holder\ avec\ q=\frac{p}{p-1})\\ &\leq \left(\frac{1}{\alpha}||\nabla u||_{L^p} \ . \ \int_\Omega \left(|u^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}|^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{1-\alpha}{\alpha}.\frac{p}{p-1} &= \frac{1-\dfrac{n-p}{p(n-1)}}{\dfrac{n-p}{p(n-1)}}.\frac{p}{p-1}\\ &= \frac{p(n-1)-n+p}{n-p}.\frac{p}{p-1}\\ &= p^*\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}||u||_{L^{p^*}}^{p^*} &\leq \left(\frac{1}{\alpha}||\nabla||_{L^p} \ . \ ||u||_{L^{p^*}}^{p^*.\frac{p-1}{p}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\\ &\leq \left(\frac{1}{\alpha}||\nabla||_{L^p}\right)^{\frac{n}{n-1}} \ . \ ||u||_{L^{p^*}}^{p^*.\frac{p-1}{p}.\frac{n}{n-1}}\\ ||u||_{L^{p^*}}^{p^*(1-\frac{p-1}{p}.\frac{n}{n-1})} &\leq \left(\frac{1}{\alpha}||\nabla||_{L^p}\right)^{\frac{n}{n-1}}\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}p^*(1-\frac{p-1}{p}.\frac{n}{n-1}) &= \frac{np}{n-p}.\frac{np-p-np+n}{np-p}\\ &= \frac{n}{n-1}\end{aligned}$$

Donc

$$||u||_{L^{p^*}} \leq \frac{1}{\alpha}||\nabla u||_{L^p}$$

Avec

$$C_{n,p}=\frac{1}{\alpha}=\frac{p(n-1)}{n-p} \quad et \quad p^*=\frac{np}{n-p}$$

Remarque. *$C_{n,p}$ n'est pas la constante optimale.*

Corollaire 1.2.1. [3] *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p \leq \infty$ on a :*

1. $1 \leq p \leq N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{P^*}(\Omega)$ *ou* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$
2. $p = N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q \quad \forall q \in [p, +\infty[$
3. $p > N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty$

avec injections continues

De plus, si $p > N$ on a pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$| u(x) - u(y) | \leq C \parallel u \parallel_{W^{1,p}(\Omega)} | x - y |^\alpha \qquad p.p\ \forall x, y \in \Omega$$

avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ et C une constante qui dépend de p, N et Ω En particulier,

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$$

Corollaire 1.2.2. [3] *On suppose que Ω un ouvert borné de classe C^1, on a :*

1. *si* $p < N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*[$ *ou* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$
2. *si* $p = N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q \quad \forall q \in [1, +\infty[$
3. *si* $p > N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$

avec injections compactes

Inégalité de Poincaré :

Théorème 1.2.2. [1] *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $p \geq 1$, alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ tel que :*

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad ||u||_{L^p} \leq C_\Omega ||\nabla u||_{L^p}$$

Inégalité de Gronwall :

Théorème 1.2.3. *Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité*

$$\forall t \in [a, b], \qquad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s) y(s) ds$$

Alors

$$\forall t \in [a, b], \qquad y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u) du\right) ds$$

Preuve. *Posons*

$$F(t) = \int_a^t \psi(s)y(s)ds$$
$$G(t) = F(t)\exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité donnée en hypothèse par $\psi(t)$, on obtient :

$$y(t)\psi(t) \leq \psi(t)\varphi(t) + \psi(t)\int_a^t \psi(s)y(s)ds$$

$$F'(t) \leq \psi(t)\varphi(t) + \psi(t)F(t)$$

$$F'(t) - \psi(t)F(t) \leq \psi(t)\varphi(t)$$

$$G'(t) = F'(t)\exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right) - F(t)\psi(t)\exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

$$= (F'(t) - F(t)\psi(t))\exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

$$\leq (\psi(t)\varphi(t))\exp\left(-\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

Comme $G(a) = F(a) = 0$, on déduit, par intégration

$$G(t) \leq \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(-\int_a^t \psi(u)ds\right)ds$$

$$\leq \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_a^t \psi(u)ds\right)ds$$

Or par hypothèse, on déduit que :

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_a^t \psi(u)du\right)ds$$

Corollaire 1.2.3. *Soient ψ et $y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ deux fonctions continue vérifiant*

$$\exists K \geq 0 \ / \ \forall t \in [a,b], \qquad y(t) \leq K + \int_a^t \psi(s)y(s)ds$$

Alors

$$\forall t \in [a,b], \qquad y(t) \leq K \exp\left(\int_a^t \psi(s)y(s)\right)$$

Preuve. *Il s'agit du l'inégalité de Gronwall dans le cas où φ est constante égale a K, on a donc pour tout $t \in [a,b]$*

$$y(t) \leq K + \int_a^t K\psi(s)\exp\left(\int_a^s \psi(u)du\right)ds$$

$$= K + K\left[\exp\left(\int_a^s \psi(u)du\right)\right]_a^t$$

$$= K\exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

1.3 Quelques théorèmes fondamentaux :

Fonctions Lipschitziennes, contractantes :

Définition 1.3.1. [1] *Soient $(E,d),(F,d')$ deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ une fonction. On dit que f lipschitzienne sur E, s'il existe une constante $M \geq 0$ telle que*

$$d'(f(x),f(y)) \leq Md(x,y), \forall x,y \in E$$

On dit aussi que f est M-lipschitzienne.

La plus petite constante M vérifiant cette inégalité est appelée la constante de Lipschitz et on la note

$$Lip(f) = \inf_{x \neq y} \frac{d'(f(x),f(y))}{d(x,y)}$$

On dit que f est contractante si elle vérifie $Lip(f) < 1$

Théorème du point fixe de Banach :

Théorème 1.3.1. [1] *Soient (E,d) un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow F$ une application K-contractante. Alors il existe un unique point fixe $x' \in E$ de f dans E (c-à-d une unique* *solution de* $f(x') = x'$ *et de plus, pour tout choix de* $x_0 \in E$*, la suite récurrente définie par*

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers x'.

Enfin, on a l'estimation d'erreur

$$d(x_n, x') \leq \frac{k^2}{1-k} d(x_0, x_1), \ \forall n \geq 0$$

Corollaire 1.3.1. [1] *Soient* E *un espace de Banach, et* f *une application de* E *dans* E*.*

Si f *est à puissance n-ième contractante, alors* f *possède un unique point fixe* x' *et toute suite d'éléments de* E *vérifiant la récurrence* $x_{n+1} = f(x_n)$ *converge vers* x'

Théorème de Banach-Steinhaus :

Théorème 1.3.2. [1] *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach. On considère une famille* $(T_i)_{i \in I}$ *d'applications linéaires continues de* E *dans* F*.*

Si la famille $(T_i)_{i \in I}$ *est ponctuellement bornée, c-à-d*

$$\forall x \in E, \qquad \sup_{i \in I} ||T_i x||_F < C||x||_E$$

Alors elle est uniformément bornée c-à-d :

$$\sup_{i \in I} ||T_i||_{\mathcal{L}(E,F)} < C$$

Théorème de Lax-Milgram :

Théorème 1.3.3. [1] *Soit* H *un espace de Hilbert, et soit* $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire. Supposons qu'il existe deux constantes* $C < \infty, \alpha > 0$ *tels que :*

1. $|a(u,v)| \leq C||u||.||v||$ *pour tout* $(u,v) \in H \times h)$ *(Continuité)*
2. $a(u,u) \geq \alpha||u||^2$ *pour tout* $u \in H$ *(coercitive)*

   Alors, $\forall f \in H'$*, il existe* $u \in H$ *unique, tel que :*

$$a(u,v) = (f,v) \qquad \forall v \in H$$

1.4 Opérateur linéaire non borné :

Soit E un espace de Banach

Définition 1.4.1. [7] *Un opérateur linéaire non borné A dans E est un couple (A,$\mathcal{D}(A)$) tel que D est un sous espace de E qui représente le domaine de A, et A est l'application linéaire de D dans E ;*

$$A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow E$$

De manière analogue, un opérateur linéaire non borné de E dans F est un couple $(A, \mathcal{D}(A))$ ou $\mathcal{D}(A)$ un sous-espace vectoriel de E et A est une application linéaire de $\mathcal{D}(A)$ dans F

Définition 1.4.2. [7] *Soit (A,$\mathcal{D}(A)$) un opérateur linéaire non borné dans E. Lorsque $\mathcal{D}(A)$ est dense dans E, on dit que (A,$\mathcal{D}(A)$) est de domaine dense dans E*

Définition 1.4.3. [7] *Un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$, linéaire non borné dans E, est fermé si son graphe $G(A) = \{(x, Ax) \mid x \in \mathcal{D}(A)\}$ est fermé dans dans $E \times E$*

Exemple 1. *Soit $E = C([0,T], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions uniformément continues sur [0,T]*

On considère l'opérateur linéaire non borné $(A, \mathcal{D}(A))$ suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A) = \{x \in C([0,T], \mathbb{R}) / x' \in C(]0,T[, \mathbb{R})\} \\ A : x(t) \mapsto (Ax)(t) = x'(t) \end{cases}$$

On prend $x(t) = \sin(nt)$. D'ou :

$$\begin{aligned} ||Ax(t)|| &= ||n\cos(nt)|| \\ &= n||\cos(nt)|| \\ &= n \end{aligned}$$

Si on suppose que A est borné, Alors : $\exists M \geq 0$ tel que $\forall x \in C([0,T], \mathbb{R})$, avec $||x|| \leq 1$:

$$||Ax|| \leq M$$

Or :

$$||\sin(nt)|| \leq 1$$

Ceci implique que :

$$n \leq M$$

Mais comme n assez grand d'ou la contradiction.

Remarque. *On remarque que :*

1. *(A,$\mathcal{D}(A)$) un opérateur linéaire non borné peut être borné ou non.*
2. *Si $\mathcal{D}(A) = E$,alors d'après le théorème de graphe fermé*

   $A \in \mathcal{L}(E) \Leftrightarrow G(A)$*est fermé dans* $E \times E$

De plus ;

pour les opérateurs non borné,il est très important de vérifier que le graphe est fermé ou non.

1.5 Semi-groupe fortement continu :

Tout au long de cette section $(E, ||.||)$ désignera un espace de Banach.

Définition 1.5.1. [7] *Soit E un espace de Banach muni de la norme $||.||$, et notons par $\mathcal{B}(E)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés de E dans E muni de la norme d'opérateur*

$$||T||_{\mathcal{B}(E)} = \sup_{||x|| \leq 1} ||Tx||, \qquad \forall T \in \mathcal{B}(E)$$

$\mathcal{B}(E)$ *étant donc un espace de Banach.*

Définition 1.5.2. [7] *Une famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornée dans un espace de Banach E est appelée semi-groupe fortement continue si*

1. $S(0) = I$*, (I est l'opérateur identité sur E)*
2. $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2)$ *(propriété du semi-groupe)*

Définition 1.5.3. [7] *Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés est dit :*

1. *Uniformément continu si*
$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} ||S(t) - I|| = 0$$
2. *Fortement continu ou de classe C_0 si*
$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} S(t)x = x \qquad \forall x \in E$$
3. *Semi-groupe de contraction de classe C_0 s'il est de de classe C_0 et*
$$||S(t)|| \leq 1 \qquad \forall t \geq 0$$

Remarque. *Si* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe uniformément continu, alors*

$$\lim_{t\longrightarrow s}||S(t)-S(s)||=0$$

Définition 1.5.4. [7] *Le générateur infinitésimal de S(t) est l'opérateur linéaire A de domaine*

$$\mathcal{D}(A)=\left\{x\in E:\lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{S(t)x-x}{t}\ existe\right\},$$

défini par

$$\begin{aligned}Ax &= \lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{S(t)x-x}{t}\\ &= \frac{d}{dt}S(t)x\Big|_{t=0^+} \qquad \forall x\in\mathcal{D}(A)\end{aligned}$$

Exemple 2. *Soit* $E=C([0,\infty[,\mathbb{R})$ *posons*

$$S(t)u(x)=u\left(\frac{x}{1+tx}\right)$$

1. *Pour* $t=0$ *on a :*

$$S(0)u(x)=u(x)\Rightarrow S(0)=I$$

2. *Soient* $t,s\geq 0$

$$\begin{aligned}S(t+s)u(x) &= u\left(\frac{x}{1+(s+t)x}\right)\\ &= u\left(\frac{\frac{x}{1+tx}}{\frac{1+(s+t)x}{1+tx}}\right)\\ &= u\left(\frac{\frac{x}{1+tx}}{1+s\left(\frac{x}{1+tx}\right)}\right)\\ &= S(s)\circ S(t)u(x)\end{aligned}$$

3. $\lim_{t \longrightarrow 0^+} S(t)u(x) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} u\left(\frac{x}{1+tx}\right) = u(x)$

Alors (t) *est un* C_0 *semi-groupe*

$$Au = \frac{d}{dt}S(t)u\Big|_{t=0^+}$$

$$= \frac{d}{dt}u\left(\frac{x}{1+tx}\right)\Big|_{t=0^+}$$

$$= \frac{-x^2}{(1+tx)^2}u'\left(\frac{x}{1+tx}\right)\Big|_{t=0^+}$$

$$= -x^2u'(x)$$

Et comme l'exemple précédent on trouve que

$$\mathcal{D}(A) = C^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$$

Exemple 3. *Soit l'équation :*

$$\frac{du}{dt} = x\frac{du}{dx}$$

D'ou le système caractéristique correspondant est

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{x}$$

Alors

$$(T(t)u)(x) = u(e^t x) \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

(A) *Considérons l'espace suivant*

$$E = C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad k\text{-homogène}\}$$

1. $T(0)u(x) = u(x)$ *alors* $T(0) = I$

2. Soient $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned}
T(t+s)u(x) &= u(e^{s+t}x) \\
&= u(e^t.e^s x) \\
&= T(t)u(e^s x) \\
&= (T(t) \circ T(s))y(x)
\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} (T(t)u)(x) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} u(e^t x) = \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} e^t u(x) = u(x)$

$$\begin{aligned}
Au(x) &= \left. \frac{d}{dt} S(t)u(x) \right|_{t=0^+} \\
&= \left. \frac{d}{dt} u(e^t x) \right|_{t=0^+} \\
&= u(x) \left. \frac{d}{dt} e^t \right|_{t=0^+} \\
&= u(x)
\end{aligned}$$

Alors $S(t)$ *est un semi-groupe uniformément continu, et*

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(I) = E$$

(B) *Maintenant, on considère*

$$E = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} (T(t)u)(x) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} u(e^t x) = u(\lim_{t \longrightarrow 0^+} e^t x) = u(x)$$

On pose

$$v(t, x) = u(e^t x)$$

Alors

$$\begin{aligned}
Av(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t} v(t,x)\Big|_{t=0^+} \\
&= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{v(t,x) - v(0,x)}{t} \\
&= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{u(e^t x) - u(x)}{t} \\
&= \lim_{s \longrightarrow 1} \frac{u(sx) - u(x)}{\log s} \\
&= \lim_{s \longrightarrow 1} \frac{s-1}{\log s} . \frac{u(sx) - u(x)}{s-1} \\
&= \frac{1}{\frac{d}{ds} \log s \Big|_{s=1}} . \frac{d}{ds} u(sx)\Big|_{s=1} \\
&= \frac{d}{ds} u(sx)\Big|_{s=1}
\end{aligned}$$

Pour que cette limite existe il verra que u n'est pas nécessairement de classe C^1, alors on remarque que :

$$\mathcal{D}(A) \subset C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \{v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable par morceau}\}$$

Soit

$$u(x) = \begin{cases} x^\alpha & x \geq 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

u n'est pas dérivable en $x = 0$

$$v(s,x) = u(sx) = \begin{cases} (sx)^\alpha & x \geq 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x)\Big|_{t=0^+} = \frac{d}{ds}u(sx)\Big|_{s=1}$$

$$= \alpha s^{\alpha-1}x^{\alpha}\Big|_{s=1}$$

$$= \alpha x^{\alpha} < \infty$$

D'ou

$$\mathcal{D}(A) \supset C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \{v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ \textit{dérivable par morceau}\}$$

Par conséquent

$$\mathcal{D}(A) = C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \{v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ \textit{dérivable par morceau}\}$$

Proposition 1.5.1. [7] *Soit $\{S(t)\}$ un C_0 semi-groupe. Il existe deux constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telles que :*

$$||S(t)||_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{\omega t}; \qquad \forall t \geq 0$$

Preuve. *Montrons d'abord (sans perdre de généralité)*

$$\exists a > 0, M \geq 1 \quad \textit{tel que :} \quad ||S(t)|| \leq M \quad \forall t \in [0,a]$$

Supposons le contraire

$$\forall a > 0, \forall M \geq 1, \exists t \in [0,a] \quad \textit{tel que :} \quad ||S(t)|| > M$$

On prend $a = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Il existe $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ *tel que :*

$$||S(t_n)|| > M \tag{1.1}$$

Donc la suite $(||S(t_n||)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *n'est pas bornée.*

$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *étant un semi-groupe de classe* C_0 *c-à-d*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S(t_n)x = x, \quad \forall x \in E$$

Il vient que la famille d'opérateurs linéaires bornée $\{S(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est ponctuellement bornée*

Autrement dit

$\forall x \in E$, *l'ensemble* $\{S(t_n)x, n \in \mathbb{N}^*\}$ *est borné.*

D'après le Théorème de Banach-Steinhaus ; cette famille est uniformément bornée par rapport à la topologie de $\mathcal{B}(E)$.

Ce qui contredit (1.1)

Par conséquent

$$\exists a > 0, M \geq 1 \quad \textit{tel que :} \quad ||S(t)|| \leq M \quad \forall t \in [0, a]$$

Posons

$$\omega = \frac{1}{a}\ln(M) \Rightarrow e^{\omega t} = M^{\frac{t}{a}}$$

Soit $t \geq 0$ *alors* $\exists n \in \mathbb{N}^*$ *et* $r \in [0, a]$ *tel que :* $t = na + r$.

Donc

$$\begin{aligned} ||S(t)|| &= ||S(na + r)|| \\ &= ||S(t)^n S(r)|| \\ &\leq ||S(t)^n||.||S(r)|| \\ &\leq M.M^n \end{aligned}$$

Or

$$n = \frac{t - r}{a} \leq \frac{t}{a} \quad \forall t \geq 0$$

D'ou

$$||S(t)|| \leq M.M^{\frac{t}{a}} \leq Me^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0$$

Remarque. *Un semi-groupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *de classe* C_0 *sur* E *est un semi-groupe de contraction si :*

$$||S(t)|| \leq 1 \qquad \forall t > 0$$

On note par SG(M,ω*) l'ensemble des* C_0 *semi-groupes* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(E)$ *pour lesquels il existe :*

$$\omega \geq 0, M \geq 1 \quad \textit{tel que} \quad ||S(t)|| \leq Me^{\omega t} \quad \forall t \geq 0$$

Dans ce cas, on dit que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe exponentiellement borné.*

Proposition 1.5.2. *Soient* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0 *semi-groupe et* A *son générateur infinitésimal. Si* $x \in \mathcal{D}(A)$, *alors* $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *et on a l'égalité :*

$$S(t)Ax = AS(t)x, \qquad \forall t \geq 0$$

Preuve. *Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$, nous avons :*

$$S(t)Ax = S(t) \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h}$$

Donc $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a

$$S(t)Ax = AS(t)x \qquad \forall t \geq 0$$

Proposition 1.5.3. *Soient $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal.*

Alors l'application

$$[0, +\infty) \ni t \longrightarrow S(t)x \in C^1([0, +\infty), E) \cap C([0, +\infty), \mathcal{D}(A))$$

et pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et nous avons :

$$\frac{d}{dt}S(t)x = S(t)Ax = AS(t)x, \qquad \forall t \geq 0$$

Preuve. *1. Montrons que $S(t)x \in C([0, +\infty), \mathcal{D}(A))$*

1.1. Soient $x \in \mathcal{D}(A), t \geq 0$ et $h > 0$, donc

$$\begin{aligned} ||S(t+h)x - S(t)x|| &= ||S(t)\left(S(h) - I\right)x|| \\ &\leq ||S(t)||_{\mathcal{B}(E)} \, ||S(h)x - x|| \\ &\leq Me^{\omega t} \, ||S(h)x - x|| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

1.2. Soient $t \geq 0, h < 0$ avec $t + h \geq 0$, alors on a :

$$\begin{aligned} ||S(t+h)x - S(t)x|| &= ||S(t+h)x - S(t+h-h)x|| \\ &\leq ||S(t+h)||_{\mathcal{B}(E)} \, ||x - S(-h)x|| \\ &\leq Me^{\omega(t+h)} \, ||S(-h)x - x|| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

2. Montrons que $S(t)x \in C^1([0, +\infty), E)$

2.1. Soient $x \in E, t \geq 0$ et $h > 0$, Alors :

$$\begin{aligned} \left|\left| \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} - S(t)Ax \right|\right| &\leq ||S(t)||_{\mathcal{B}(E)} \left|\left| \frac{S(h)x - x}{h} - Ax \right|\right| \\ &\leq Me^{\omega t} \left|\left| \frac{S(h)x - x}{h} - Ax \right|\right| \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{S(t+h)x-S(t)x}{h}=S(t)Ax$$

D'ou :

$$\frac{d^+}{dt}S(t)x=S(t)Ax, \qquad \forall t\geq 0$$

2.2.Soient $t\geq 0, h<0$ *avec* $t+h\geq 0$, *alors on a :*

$$\begin{aligned}\left\|\ \frac{S(t+h)x-S(t)x}{h}-S(t)Ax\right\| &\leq ||S(t+h)||_{\mathcal{B}(E)}\left\|\frac{x-S(-h)x}{h}-S(-h)Ax\right\| \\ &\leq ||S(t+h)||_{\mathcal{B}(E)}\left\|\frac{S(-h)x-x}{-h}+Ax-Ax-S(-h)Ax\right\| \\ &\leq Me^{\omega(t+h)}\left(\left\|\frac{S(-h)x-x}{-h}-Ax\right\|+||S(-h)Ax-Ax||\right)\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{S(t+h)x-S(t)x}{h}=S(t)Ax$$

D'ou :

$$\frac{d^-}{dt}S(t)x=S(t)Ax, \qquad \forall t\geq 0$$

Il s'en suit que l'application

$$S(t)x\in C^1([0,+\infty),E)\cap C([0,+\infty),\mathcal{D}(A))$$

De plus, on a l'égalité :

$$\frac{d}{dt}S(t)x=S(t)Ax=AS(t)x, \qquad \forall t\geq 0$$

Lemme 1. [7] *Soit* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0 *semi-groupe. Alors :*

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}S(s)xds=S(t)x$$

$\forall x\in E$ *et* $t\geq 0$

Preuve.

$$\begin{aligned}\left|\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)xds - S(t)x\right|\right| &= \left|\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)xds - \frac{h}{h}S(t)x\right|\right| \\ &= \left|\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} (S(s)x - S(t)x)ds\right|\right| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} ||S(s)x - S(t)x||\, ds\end{aligned}$$

Puisque $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0 *semi-groupe, alors l'application* $t \longrightarrow S(t)x$ *est continue.*

D'ou

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} ||S(s)x - S(t)x||\, ds = 0$$

Alors l'égalité en découle.

Proposition 1.5.4. [7] *Soient* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0 *semi groupe et* A *son générateur infinitésimal.*

Si $x \in E$, *alors*

$$\int_0^t S(t)xds \in \mathcal{D}(A)$$

et on a l'égalité :

$$A\int_0^t S(t)xds = S(t)x - x, \qquad \forall t \geq 0$$

Preuve.

$$\begin{aligned}A\left(\int_0^t S(s)xds\right) &= \left(\frac{S(h)-I}{h}\right)\left(\int_0^t S(s)xds\right) \\ &= \frac{1}{h}\int_0^t S(s+h)xds - \frac{1}{h}\int_0^t S(s)xds\end{aligned}$$

Posons $s + h = u$ *alors*

$$du = ds$$

$$s \longrightarrow t \quad donc \quad u \longrightarrow t+h$$

$$s \longrightarrow 0 \quad donc \quad u \longrightarrow h$$

$$\begin{aligned}A\left(\int_0^t S(s)xds\right) = \frac{1}{h}\int_0^t S(s+h)xds - \frac{1}{h}\int_0^t S(s)xds &= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} S(u)xdu - \frac{1}{h}\int_h^{t+h} S(u-h)xdu \\ &= S(t)x - \frac{1}{h}\int_h^{t+h} S(u-h)xdu\end{aligned}$$

Posons $u - h = w$ *alors*

$$du = dw$$

$$u \longrightarrow h \quad donc \quad w \longrightarrow 0$$

$$u \longrightarrow t + h \quad donc \quad w \longrightarrow t$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\int_h^{t+h} S(u-h)x du &= \frac{1}{h}\int_0^t S(w)x dw \\ &= x \end{aligned}$$

On déduit que

$$A\int_0^t S(t)x ds = S(t)x - x, \qquad \forall t \geq 0$$

Théorème 1.5.1. [7] *Soient* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0 *semi groupe et* A *son générateur infinitésimal. Alors :*

1. $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$.
2. A *est un opérateur fermé.*

Preuve. 1. *Soient* $x \in E,\ h > 0$

D'après la Proposition 1.5.4, *nous avons*

$$\frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)x d\tau \in \mathcal{D}(A)$$

Et

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)x d\tau = x$$

D'où

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = E$$

2. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $\mathcal{D}(A)$ *telle que :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} x_n = x\ , \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} Ax_n = y$$

On sait que

$$S(h)x_n - x_n = \int_0^h S(\tau)Ax_n d\tau$$

Par passage à la limite $n \longrightarrow +\infty$, on obtient :

$$S(h)x - x = \int_0^h S(\tau)yd\tau$$

D'après la Proposition 1.5.4 *:*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)yd\tau = y$$

Il vient que

$$x \in \mathcal{D}(A), \text{ et } y = Ax$$

Théorème 1.5.2. [7] *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ fortement continu sur E vérifiant*

$$||S(t)|| \leq Me^{\omega t}$$

Alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $(A - cI, \mathcal{D}(A))$ est le générateur infinitésimal du semi groupe $\{e^{-ct}S(t)\}_{t\geq 0}$ fortement continu sur E.

Preuve. *Il est facile de vérifier que $\{e^{-ct}S(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur E.*

Pour montrer que $(A - cI, \mathcal{D}(A))$ son générateur infinitésimal, il suffit d'appliquer la Définition 1.5.4.

Définition 1.5.5. [7] *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur linéaire non borné dans E.*

1. *On appelle l'ensemble résolvant de A, qu'on note $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \lambda I - A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow E\}$ est bijective*
2. *On appelle spectre de A, l'ensemble noté et défini par $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$*
3. *La famille d'opérateurs $R(\lambda; A)$, $\lambda > 0$, définie par $R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est appelée résolvante de A au point λ*
4. *L'opérateur $A_\lambda = \lambda AR(\lambda; A)$ est appelé l'approximation de Yoshida de A*

Remarque. *Nous avons*

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \lambda AR(\lambda; A) \\ &= \lambda(A - \lambda I + \lambda I)R(\lambda; A) \\ &= \lambda(A - \lambda I)R(\lambda; A) + \lambda^2 R(\lambda; A) \\ &= \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I \end{aligned}$$

L'opérateur A_λ est donc un opérateur borné dans E. De plus nous avons

$$A_\lambda x = \lambda R(\lambda; A)Ax \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{D}(A) \tag{1.2}$$

En effet, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\lambda R(\lambda; A)Ax &= \lambda R(\lambda; A)(A - \lambda I)x + \lambda^2 R(\lambda; A)x \\
&= -\lambda x + \lambda^2 R(\lambda; A)x \\
&= (-\lambda I + \lambda^2 R(\lambda; A))x \\
&= A_\lambda x
\end{aligned}$$

Théorème 1.5.3. [7] *Soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe sur E de générateur infinitésimal A, et soient $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que :*

$$||S(t)|| \leq Me^{\omega t} \quad \forall t \geq 0$$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re(\lambda) > \omega$, alors :

1. *l'application*
$$\begin{aligned}
R_\lambda : &E \longrightarrow E \\
x \mapsto R_\lambda x &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} S(s)x ds
\end{aligned}$$
définie un opérateur linéaire borné sur E

2. *$\forall \lambda \in \rho(A)$ et $\forall x \in E$ on a :*
$$R(\lambda; A)x = R_\lambda x$$

Preuve. 1. *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $Re(\lambda) > \omega$*

Il est claire que R_λ est un opérateur linéaire.

De plus, $\forall s \geq 0$ *et* $x \in E$ *on a :*

$$\begin{aligned}
||R_\lambda x|| &= \left|\left|\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} S(s) x ds\right|\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} ||e^{-\lambda s} S(s) x ds|| \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-Re(\lambda)s} ||S(s)||.||x|| ds \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-Re(\lambda)s} M e^{\omega s} ||x|| ds \\
&\leq M||x|| \int_0^{+\infty} e^{-(Re(\lambda)-\omega)s} ds \\
&\leq \frac{M}{Re(\lambda)-\omega} ||x|| \left(-e^{-(Re(\lambda)-\omega)s}\Big|_0^{+\infty} \right) \\
&\leq \frac{M}{Re(\lambda)-\omega} ||x||, \qquad \forall x \in E
\end{aligned}$$

D'ou R_λ *est linéaire borné sur E et que*

$$||R_\lambda|| \leq \frac{M}{Re(\lambda)-\omega} \tag{1.3}$$

2. Pour tout $x \in E, h > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{S(h)-I}{h} R_\lambda x &= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} [S(h) - I] S(t) x dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} [S(h)S(t) - S(t)] x dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} [S(h+t) - S(t)] x dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(h+t) x dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) x dt
\end{aligned}$$

On pose

$$I = \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)xdt$$

Posons h+t=u alors

$$du = dt$$

$$t \longrightarrow 0 \quad donc \quad u \longrightarrow h$$

$$t \longrightarrow +\infty \quad donc \quad u \longrightarrow +\infty$$

D'ou

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{h}\int_h^{+\infty} e^{-\lambda(u-h)} S(u)xdu \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^{+\infty} e^{-\lambda u} S(u)xdu \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^{+\infty} e^{-\lambda u} S(u)xdu + \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda u} S(u)xdu - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda u} S(u)xdu \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} S(u)xdu - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda u} S(u)xdu \end{aligned}$$

On peut écrire

$$I = \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} S(u)xdu - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda u} S(u)xdu$$

Donc

$$\frac{S(h)-I}{h}R_\lambda x = \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{h} e^{-\lambda t} S(t)xdt - \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)xdt$$

$$= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)xdt$$

En passant à la limite quand $h \longrightarrow 0$. Donc

$$AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

Ceci implique que

$$(\lambda I - A)R_\lambda = I \tag{1.4}$$

Soit $x \in \mathcal{D}(A)$

$$\frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}S(t)x) = -\lambda e^{-\lambda t}S(t) + e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}S(t)x$$

$$= -\lambda e^{-\lambda t}S(t)x + e^{-\lambda}S(t)Ax$$

Par conséquent

$$R_\lambda Ax = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)Axdt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}S(t)x)dt + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)xdt$$

$$= e^{-\lambda}S(t)x\Big|_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}S(t)xdt$$

$$= -x + \lambda R_\lambda x$$

Ceci implique que $\lambda R_\lambda x - R_\lambda Ax = x \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$ *c-à-d*

$$R_\lambda(\lambda I - A) = I \tag{1.5}$$

D'après (1.4) $=$ *et* (1.5) $=$ *on déduit que*

$$R(\lambda; A) = R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$$

Théorème de Feller-Maydera-Phillips :

Théorème 1.5.4. [7] *Soit* $A : \mathcal{D}(A) \subseteq E \longrightarrow E$ *est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi groupe de type* (M, ω) *si et seulement si :*

1. *A est fermé a domaine dense.*
2. $(\omega, +\infty) \subseteq \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda > \omega$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a :*

$$||R(\lambda; A)^n||_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$$

Preuve. *On utilise la démonstration par récurrence :*

Pour $n = 2$: Soit $x \in E$

$$\begin{aligned}
||R(\lambda; A)^2x|| &= ||R_\lambda^2 x|| \\
&= ||R_\lambda(R_\lambda x)|| \\
&= \left| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} S(s) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) x dt ds \right| \\
&= \left| \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(s+t)} S(s+t) x dt ds \right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(s+t)} ||S(s+t)||.||x|| dt ds \\
&\leq M.||x|| \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-\omega)(s+t)} dt ds \\
&\leq \frac{M.||x||}{\lambda - \omega} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-\omega)s} \left(-e^{-(\lambda-\omega)t} \Big|_0^{+\infty} \right) ds \\
&\leq \frac{M.||x||}{\lambda - \omega} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-\omega)s} ds \\
&\leq \frac{M.||x||}{(\lambda - \omega)^2} \left(-e^{-(\lambda-\omega)s} \Big|_0^{+\infty} \right) \\
&\leq \frac{M.||x||}{(\lambda - \omega)^2} \qquad \forall x \in E
\end{aligned}$$

Alors

$$||R(\lambda; A)^2|| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^2}$$

On suppose qu'elle est vraie pour $n = k$ et on démontre pour $n = k+1$

$$||R(\lambda;A)^{k+1}x|| = ||R_\lambda^{k+1}x|| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} S(s) \left(\underbrace{\int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty}}_{k\ fois} e^{-\lambda(s_1+\cdots+s_k)} S(s_1+\cdots s_k) x ds_1 \cdots ds_k \right) ds \right|$$

$$\leq \underbrace{\int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty}}_{k+1\ fois} e^{-\lambda(s_1+\cdots+s_{k+1})} |S(s_1+\cdots+s_k+s)|.|x| ds_1 \cdots ds_k ds$$

$$\leq M.||x||.(-1)^k \underbrace{\left. \frac{\left. \frac{\left. \frac{-e^{-(\lambda-\omega)(s_1+\cdots+s_{k+1})}}{(\lambda-\omega)} \right|_0^\infty}{(\lambda-\omega)} \right|_0^\infty + \cdots}{(\lambda-\omega)} \right|_0^\infty}_{k+1\ fois}$$

$$\leq \frac{M.||x||}{(\lambda-\omega)^{k+1}}$$

Donc

$$||R(\lambda;A)^{k+1}|| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^{k+1}}$$

CHAPITRE 2

SEMI-GROUPES ENGENDRÉS PAR DES OPÉRATEURS M-DISSIPATIFS

2.1 Les Opérateurs m-dissipatifs :

Définition 2.1.1. [7] *Un opérateur$(A, \mathcal{D}(A))$, linéaire non borné dans E est dissipatif si :*

$$||\lambda x - Ax||_E \geq \lambda ||x||_E$$

$\forall x \in \mathcal{D}(A), \forall \lambda > 0$

Définition 2.1.2. [7] *Un opérateur$(A, \mathcal{D}(A))$ linéaire non borné dans E est m-dissipatif si :*

1. *A est dissipatif*
2. $\forall \lambda > 0, \forall y \in E, \exists x \in \mathcal{D}(A)$ *tel que* $\lambda x - Ax = y$

Théorème 2.1.1. [7] *Si A est m-dissipatif alors, pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)$admet un inverse , $(\lambda I - A)^{-1}y$ appartient à $\mathcal{D}(A)$ pour tout $y \in E$,et $(\lambda I - A)^{-1}$est un opérateur linéaire borné sur E vérifiant*

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Preuve. *Supposons que A est m-dissipatif alors :*

1. $\forall x \in \mathcal{D}(A), \forall \lambda > 0, ||\lambda x - Ax||_E \geq ||x||_E$
2. $\forall \lambda > 0,\ \forall y \in E,\ \exists x \in \mathcal{D}(A),$ *tel que* $\lambda x - Ax = y$

Montrons que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe : on va démontrer que $(\lambda I - A)$ est bijectif

1. *Montrons que* $(\lambda I - A)$ *est injectif, comme* A *est linéaire alors* $(\lambda I - A)$ *est linéaire ,pour cela on va montrer que* $Ker(\lambda I - A) = \{0\}$

   On a : $(\lambda I - A)(0) = 0$ *donc* $0 \in Ker(\lambda I - A)$*,*

   Soit $x \in Ker(\lambda I - A)$ *: donc* $(\lambda I - A)(0) = 0$ *donc* $||(\lambda I - A)x|| = 0$ *mais* $x \in \mathcal{D}(A)$ *et d'après la Définition* 2.1.1 *on a ; :*

$$||\lambda x - Ax|| \geq \lambda ||x||$$

   et

$$||\lambda x - Ax|| = ||(\lambda I - A)x|| = 0 \geq \lambda ||x||$$

   mais $\lambda > 0$ *alors* $||x|| \leq 0$ *donc* $||x|| = 0$ *donc* $x = 0$ *c-à-d*

$$Ker(\lambda I - A) \subset \{0\}$$

   et comme $0 \in Ker(\lambda I - A)$ *D'ou* $Ker(\lambda I - A) = \{0\}$ *donc* $(\lambda I - A)$ *est injectif*

2. *Montrons que* $(\lambda I - A)$ *est surjectif, c-à-d on va montrer* $\forall z \in E, \exists x \in \mathcal{D}(A)$ *tel que* $\lambda x - Ax = z$

   Soit $z \in E$ *alors il existe un* $x \in \mathcal{D}(A)$ *tel que :*

$$\lambda x - Ax = z \quad donc \quad (\lambda I - A)x = z$$

   Donc $(\lambda I - A)$ *est surjectif. Alors l'opérateur* $(\lambda I - A)$ *est bijectif, donc* $(\lambda I - A)^{-1}$ *existe.*

   Montrons que $\forall y \in E, (\lambda I - A)^{-1} y \in \mathcal{D}(A)$ *on a :*

$$\lambda I - A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow E \quad donc \quad (\lambda I - A)^{-1} : E \longrightarrow \mathcal{D}(A)$$

   alors :

$$\forall y \in E; (\lambda I - A)^{-1} y \in \mathcal{D}(A)$$

   Montrons que $(\lambda I - A)^{-1}$ *est linéaire borné vérifiant :*

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}$$

   Comme $\lambda I - A$ *est linéaire et bijectif alors* $(\lambda I - A)^{-1}$ *existe et linéaire.*

Soit $y \in E$, alors $\exists x \in \mathcal{D}(A)$ tel que :

$$(\lambda I - A)^{-1} y = x$$

et

$$y = (\lambda I - A)x$$

on a

$$||(\lambda I - A)^{-1} y|| = ||x||$$

et on a

$$||\lambda x - Ax|| \geq \lambda ||x||$$

donc

$$||x|| \leq \frac{1}{\lambda} ||(\lambda I - A)x||$$

alors

$$||(\lambda I - A)^{-1} y|| \leq \frac{1}{\lambda} ||y||$$

donc

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Alors

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Remarque. *Du Théorème 2.1.1, il découle que l'opérateur $(\lambda I - A)|_{\mathcal{D}(A)}$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme du graphe sur E.*

Par abus nous dirons parfois que l'opérateur $(\lambda I - A)$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}(A)$ sur E

Corollaire 2.1.1. [7] *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur linéaire non borné dans E.*

1. *Si $(A, \mathcal{D}(A))$ est un opérateur dissipatif, alors : $\forall \lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)$ est injectif car :*

$$(\lambda I - A)x = 0 \Rightarrow ||x|| \leq ||(\lambda I - A)x|| = 0 \Rightarrow x = 0$$

2. *Si de plus :*
   $\forall \lambda > 0$, $(\lambda I - A)$ est surjectif, on dit que $(A, \mathcal{D}(A))$ est m-dissipatif

Théorème 2.1.2. [7] *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur linéaire non borné dissipatif dans E.*

L'opérateur A est m-dissipatif si et seulement si :

$$\exists \lambda_0 > 0 \ \ \text{tel que} \ \ \forall y \in E, \quad \exists x \in \mathcal{D}(A) \ \ \text{vérifiant} \ \ \lambda_0 x - Ax = y \tag{2.1}$$

Preuve. *Il est évident que si l'opérateur A est m-dissipatif alors la condition* (2.1) *est satisfaite.*

Montrons la réciproque. Supposons que (2.1) *est satisfaite et montrons que A est m-dissipatif.*

On a A est dissipatif, alors il suffit de montrer que

$$\forall \lambda > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall y \in E, \quad \exists x \in \mathcal{D}(A) : \lambda x - Ax = y$$

Soit $y \in E$ et soit $\lambda > 0$, on va chercher un $x \in \mathcal{D}(A)$ tel que :

$$\lambda x - Ax = y$$

On a $\lambda x - Ax = y$ alors

$$\lambda x - \lambda_0 x + \lambda_0 x - Ax = y$$

donc

$$\lambda_0 x - Ax = y + (\lambda_0 - \lambda)x$$

c-à-d on va chercher un $x \in \mathcal{D}(A)$ tel que

$$x = (\lambda_0 I - A)^{-1} [y + (\lambda_0 - \lambda)x]$$

alors x est un point fixe de la fonction F définie par

$$F : x \mapsto (\lambda_0 I - A)^{-1} [y + (\lambda_0 - \lambda)x]$$

Donc on va utiliser le Théorème de point fixe de Banach et on va montrer que F est une application contractante.

Soit $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$ on cherche $0 < k < 1$ tel que :

$$||F(x_1) - F(x_2)|| \leq k||x_1 - x_2||$$

On a

$$||F(x_1) - F(x_2)|| = ||(\lambda_0 I - A)^{-1}\left[y + (\lambda_0 - \lambda)x_1\right] - (\lambda_0 I - A)^{-1}\left[y + (\lambda_0 - \lambda)x_2\right]||$$

$$= ||(\lambda_0 I - A)^{-1}\left(y + (\lambda_0 - \lambda)x_1 - (y + (\lambda_0 - \lambda)x_2\right)||$$

$$= ||(\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 - \lambda)(x_1 - x_2)||$$

$$\leq ||(\lambda_0 I - A)^{-1}||.||x_1 - x_2||.|\lambda_0 - \lambda|$$

mais A est dissipatif alors on trouve que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ existe et

$$||(\lambda_0 I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda_0}$$

donc

$$||(\lambda_0 I - A)^{-1}||||x_1 - x_2|||\lambda_0 - \lambda| \leq \frac{|\lambda_0 - \lambda|}{\lambda_0}||x_1 - x_2||$$

alors

$$||F(x_1) - F(x_2)|| \leq \frac{|\lambda_0 - \lambda|}{\lambda_0}||x_1 - x_2||$$

Pour que F est contractante il suffit que

$$0 < \frac{|\lambda_0 - \lambda|}{\lambda_0} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |\lambda_0 - \lambda| < \lambda_0$$

alors

$$-\lambda_0 < \lambda_0 - \lambda < \lambda_0$$

$$0 < \lambda < 2\lambda_0$$

Donc $\forall \lambda \in]0, 2\lambda_0[$ on a F est contractante et donc admet un point fixe x.

En itérant ce procédé, nous pouvons résoudre l'équation $\lambda x - Ax = y$ pour tout $\lambda \in]0.2^n\lambda_0[, \ \forall n \in \mathbb{N}$ c-à-d $\forall \lambda > 0$

on suppose que

$$||(2^n\lambda_0 I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{2^n\lambda_0}$$

alors :

$$||F(x_1) - F(x_2)|| = ||(2^n\lambda_0 I - A)^{-1})\left[(2^n\lambda_0 - \lambda)(x_1 - x_2)\right]||$$

$$\leq \frac{|2^n\lambda_0 - \lambda|}{2^n\lambda_0}||x_1 - x_2||$$

Ceci implique que

$$\frac{|2^n\lambda_0 - \lambda|}{2^n\lambda_0} < 1 \Rightarrow \lambda \in]0, 2^{n+1}\lambda_0[$$

comme $n \longrightarrow +\infty$ on trouve : $\lambda \in]0, +\infty[$ D'ou le Théorème est bien démontré

Théorème 2.1.3. [7] *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur non borné dans E. S'il existe $\lambda_0 > 0$ pour lequel l'opérateur $\lambda_0 I - A$ est une bijection de $\mathcal{D}(A)$ sur E, et si $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur E, alors A est fermé*

Preuve. *Soit $(x_n)_n$ une suite de $\mathcal{D}(A)$ convergeant vers x dans E, et supposons que $(Ax_n)_n$ converge vers y dans E. L'opérateur $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ étant borné, nous obtenons*

$$x_n = (\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 x_n - Ax_n) \longrightarrow (\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 x - y) \quad \textit{quand } n \longrightarrow +\infty$$

Par conséquent, nous avons

$$x = (\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda_0 x - y) \in \mathcal{D}(A)$$

et $(\lambda_0 I - A)x = \lambda_0 x - y$, soit encore Ax=y.

La preuve est complète.

Remarquons que si $(A, \mathcal{D}(A))$ est un opérateur non borné sur E, l'application

$$x \mapsto ||x||_E + ||Ax||_E$$

est une norme sur $\mathcal{D}(A)$. Nous la noterons $||.||_{\mathcal{D}(A)}$

Théorème 2.1.4. [7] *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur linéaire non borné dissipatif dans E.*

Si A est m-dissipatif alors :

1. *A est un opérateur fermé*
2. *$\overline{\mathcal{D}(A)}$=E*

Preuve. *Le résultat (1) est déjà démontrer (Voir la preuve du Théorème* 2.1.3).

Montrons (2) :

Cette démonstration est basée sur la proposition suivante :

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0} R_\lambda(v) = v \qquad \forall v \in \mathcal{D}(A)$$

$\mathcal{D}(A)$ est dense dans E alors :

$$\forall f \in E, \exists (x_n)_n \in \mathcal{D}(A) \text{ tel que } x_n \longrightarrow f$$

Posons $x_n = R_n(f), \forall n \in \mathbb{N}^*$ avec $R_n = (I - \frac{1}{n}A)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{n}$

A est m-dissipatif implique que $x_n = R_n(f) \in \mathcal{D}(A)$

Par passage a la limite $(n \longrightarrow +\infty) \Longleftrightarrow (\lambda \longrightarrow 0)$ on trouve :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} R_n(f) = \lim_{\lambda \longrightarrow 0} R_\lambda(f) = f$$

Ceci implique que $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$, et le théorème en découle

Corollaire 2.1.2. [7] *Soit A un opérateur m-dissipatif. L'espace $(\mathcal{D}(A), ||.||_{\mathcal{D}(A)})$ est un espace de Banach et $A\Big|_{\mathcal{D}(A)} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A); E)$*

Preuve. *1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{D}(A)$*

$$||x_n||_{\mathcal{D}(A)} = ||x_n||_E + ||Ax_n||_E$$

Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy dans E.

Puisque E est complet, d'ou :

$$\exists (x, f) \in E \times E \;\; \text{tel que } x_n \longrightarrow x \;\; \text{et} \;\; Ax_n \longrightarrow f$$

Et comme A est un opérateur fermé alors $Ax = f$

Donc $(x_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers un élément $x \in \mathcal{D}(A)$, d'ou $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme $||.||_{\mathcal{D}(A)}$ est complet et par conséquent un espace de Banach

2. Soit $x \in E$

$$\begin{aligned} ||Ax||_E &\leq ||Ax||_E + ||x||_E \\ &\leq ||x||_{\mathcal{D}(A)} \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$A \in \mathcal{L}\left((\mathcal{D}(A), ||.||_{\mathcal{D}(A)}), (E, ||.||_E)\right)$$

Théorème 2.1.5. [7] *Soit A un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans E. Alors*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} ||\lambda R(\lambda; A)x - x|| = 0 \qquad \forall x \in E$$

De plus

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} ||A_\lambda x - Ax|| = 0 \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

Remarque. *Remarquons que le premier résultat du théorème signifie que $\lambda R(\lambda; A)$ est une approximation de l'identité. Le second signifie que $(A_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est une suite d'opérateurs bornés approchant A.*

Preuve. *1. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$, on a :*

$$\lambda R(\lambda; A)x - x = (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}x - x + A(\lambda I - A)^{-1}x = (\lambda I - A)^{-1}Ax$$

Nous en déduisons

$$||\lambda R(\lambda; A)x - x|| \leq \frac{1}{\lambda}||Ax|| \longrightarrow_{\lambda \longrightarrow \infty} 0$$

Le premier résultat est donc démontré pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$.

Soit $x \in E$ et soit $(x_n)_n$ une suite dans $\mathcal{D}(A)$ convergeant vers x dans E. Comme $||\lambda R(\lambda; A)|| \leq 1$, nous avons :

$$\begin{aligned} ||\lambda R(\lambda; A)x - x|| &\leq ||\lambda R(\lambda; A)x_n - x_n|| + ||\lambda R(\lambda; A)||||x_n - x|| + ||x_n - x|| \\ &\leq ||\lambda R(\lambda; A)x_n - x_n|| + 2||x_n - x|| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, nous avons :

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} ||A_\lambda x - Ax|| = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} ||\lambda R(\lambda; A)Ax - Ax|| = 0$$

2.2 Les Opérateurs m-dissipatifs dans un espace de Hilbert :

Dans cette section H désigne un espace de Hilbert.

Définition 2.2.1. [7] *Un opérateur $(A, \mathcal{D}(A))$, linéaire non borné dans H, est dissipatif si et seulement si :*

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) \ : \ \langle Ax, x \rangle \leq 0$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente est remplacée par :

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) \;:\; Re\,\langle Ax, x\rangle \leq 0$$

Preuve. *Supposons que A est dissipatif. Pour tout* $x \in \mathcal{D}(A)$*, non nul, et tout* $\lambda > 0$*, posons*

$$y_{x,\lambda} = \lambda x - Ax$$

et

$$z_{x,\lambda} = \frac{y_{x,\lambda}}{||y_{x,\lambda}||}$$

L'opérateur A étant dissipatif, on a :

$$\lambda||x|| \leq ||\lambda x - Ax|| = \langle \lambda x - Ax, z_{x,\lambda}\rangle = \lambda Re\,\langle x, z_{x,\lambda}\rangle - Re\,\langle Ax, z_{x,\lambda}\rangle \leq \lambda||x|| - Re\,\langle Ax, z_{x,\lambda}\rangle$$

Par conséquent, nous avons

$$Re\,\langle Ax, z_{x,\lambda}\rangle \leq 0$$

et

$$Re\,\langle Ax, z_{x,\lambda}\rangle \geq ||x|| - \frac{1}{\lambda}||Ax||$$

La suite $(z_{x,\lambda})_\lambda$ *étant bornée dans H, il existe* $z_x \in H$ *et une suite* $(\lambda_n)_n$ *convergeant vers l'infini tels que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} z_{x,\lambda_n} = z_x$$

Avec les inégalités précédentes, par passage à la limite, nous obtenons

$$Re\,\langle Ax, z_x\rangle \leq 0$$

et

$$Re\,\langle x, z_x\rangle \geq ||x||$$

Comme

$$Re\,\langle x, z_x\rangle \leq |\,\langle x, z_x\rangle\,| \leq ||x||$$

nous obtenons

$$\langle x, z_x\rangle = ||x|| \qquad et \qquad z = x$$

Nous avons donc

$$Re \langle Ax, x \rangle \leq 0$$

Réciproquement, supposons que $Re \langle Ax, x \rangle \leq 0$ *pour tout* $x \in \mathcal{D}(A)$. *Alors nous avons*

$$||\lambda x - Ax|| \; ||x|| \geq | \langle \lambda x - Ax, x \rangle | \geq Re \langle \lambda x - Ax, x \rangle \geq \lambda ||x||^2$$

La condition de dissipativité en déccoule.

Théorème 2.2.1. [7] *Si* A *est m-dissipatif alors* $\mathcal{D}(A)$ *est dense dans* H.

Preuve. *Supposons que* A *est m-dissipatif*

Soit $y_0 \in H$ *tel que* $(y_0, x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathcal{D}(A)$.

Alors $y_0 \in \mathcal{D}(A)^{\perp}$

On a

$$(I - A)^{-1} y_0 \in \mathcal{D}(A) \quad alors \quad \left\langle y_0, (I - A)^{-1} y_0 \right\rangle = 0$$

et

$$\left\langle y_0, (I - A)^{-1} y_0 \right\rangle = \left\langle (I - A)(I - A)^{-1}) y_0, (I - A)^{-1} y_0 \right\rangle$$

$$= \left\langle (I - A)^{-1} y_0, (I - A)^{-1} y_0 \right\rangle - \left\langle A(I - A)^{-1} y_0), (I - A) y_0 \right\rangle$$

$$= ||(I - A)^{-1} y_0||^2 - \left\langle A(I - A)^{-1} y_0), (I - A)^{-1} y_0 \right\rangle = 0$$

Alors

$$||(I - A)^{-1} y_0||^2 = \left\langle A(I - A)^{-1} y_0), (I - A)^{-1} y_0 \right\rangle \leq 0$$

D'ou

$$(I - A)^{-1} y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$$

Donc

$$\mathcal{D}(A)^{\perp} = \{0\}$$

On déduit que

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = H$$

Adjoint d'un opérateur linéaire :

Définition 2.2.2. [1] *Soit* $(A, \mathcal{D}(A))$ *un opérateur linéaire non borné dans* E *de domaine dense.*

On appelle adjoint de A, l'opérateur $(A^*, \mathcal{D}(A^*))$ *défini par :*

$$\mathcal{D}(A^*) = \{y \in E, \exists C \geq 0 \text{ tel que : } \quad |\langle Ax, y\rangle| \leq C||x|| \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)\}$$

et

$$\langle x, A^*y\rangle_{E,E'} = \langle Ax, y\rangle_{E,E'}, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A), \forall y \in \mathcal{D}(A^*)$$

Théorème de Raymond :

Théorème 2.2.2. [7] *Soit* $(A, \mathcal{D}(A))$ *un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans E.*

Si E est un espace réflexif et A est fermé alors $\mathcal{D}(A^*)$ *est dense dans* E'

Preuve. *Voir* [7] *page* 5

Théorème 2.2.3. [7] *Soit A un opérateur dissipatif et de domaine dense dans H. Alors A est m-dissipatif si et seulement si A est fermé et* A^* *est dissipatif*

Preuve. $(\Rightarrow)$*Supposons que A est m-dissipatif. Nous savons que A est fermé, nous devons montrer que* A^* *est dissipatif.*

De manière à simplifier la preuve nous identifions H et H'.

Dans ce cas, $\mathcal{D}(A^*)$ *est un sous espace vectoriel de* H'.

Pour tout $y \in \mathcal{D}(A^*)$, *nous avons*

$$\begin{aligned}
\langle A^*y, \lambda R(\lambda; A)y\rangle &= \langle y, \lambda AR(\lambda; A)y\rangle \\
&= \langle y, A_\lambda y\rangle \\
&= \left\langle y, \lambda^2 R(\lambda; A)y - \lambda y\right\rangle \\
&= \left\langle y, \lambda^2 R(\lambda; A)y\right\rangle - \lambda||y||^2 \\
&\leq \lambda^2||R(\lambda; A)||.||y||^2 - \lambda||y||^2 \leq 0
\end{aligned}$$

et

$$\langle A^*y, \lambda R(\lambda; A)y\rangle \longrightarrow \langle A^*y, y\rangle \quad \text{quand} \quad (\lambda \longrightarrow 0)$$

On en déduit que

$$\langle A^*y, y\rangle \leq 0$$

Donc A^* *est dissipatif.*

$(\Leftarrow)$ *Montrons tout d'abord que* $(I - A)(\mathcal{D}(A))$ *est fermé dans E.*

Soit $(f_n)_n$ *une suite dans* $(I-A)(\mathcal{D}(A))$ *convergeant vers* f *dans* E.

Comme $f_n \in (I-A)(\mathcal{D}(A))$, *il existe* $x_n \in \mathcal{D}(A)$ *tel que* $x_n - Ax_n = f_n$.

L'opérateur A *étant dissipatif, on a*

$$||x_n|| \leq ||f_n||$$

la suite $(x_n)_n$ *converge donc vers un élément* $x \in E$. *Nous en déduisons que* $Ax_n = x_n - f_n$ *converge vers* $x - f$.

L'opérateur A *étant fermé, nous avons* $Ax = x - f$. *Donc* $F \in (I-A)(\mathcal{D})(A)$ *et* $(I-A)(\mathcal{D})(A)$ *est fermé dans* E.

De [1, *Théorème II*.18] *nous déduisons*

$$[(I-A)(\mathcal{D})(A)]^{\perp} = Ker(I-A^*) = \{0\}.$$

et nous avons $Ker(I-A^*) = \{0\}$, *car* A^* *est dissipatif.*

Donc $(I-A)(\mathcal{D})(A) = E$ *et* A *est m-dissipatif d'après le Théorème* 2.1.2.

Définition 2.2.3. [7] *Un opérateur linéaire non borné* $(A, \mathcal{D}(A))$, *de domaine dense dans* H *est dit auto-adjoint si* $A = A^*$. *Il est dit anti-adjoint si* $A = -A^*$

Corollaire 2.2.1. [7] *Soit* $(A, \mathcal{D}(A))$ *un opérateur linéaire non borné dans* H, *alors :*

1. *Si* $(A, \mathcal{D}(A))$ *est dissipatif, auto-adjoint, à domaine dense, alors il est m-dissipatif.*
2. *Si* $(A, \mathcal{D}(A))$ *est anti-adjoint, à domaine dense, alors il est m-dissipatif.*
   (la condition de dissipativité n'est pas nécessaire car $(A, \mathcal{D}(A))$ *est anti-adjoint entraine que* $\langle Ax, x\rangle = 0$ *donc la dissipativité)*

2.3 Exemples d'opérateurs m-dissipatif

Dans cette section, Ω désigne un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}$, de frontière Γ.

2.3.1 L'opérateur de la chaleur dans $L^2(\Omega)$:

On pose $E = L^2(\Omega)$, $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $Au = \Delta u$ pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$.

Démontrer que $(A, \mathcal{D}(A))$ est m-dissipatif dans $L^2(\Omega)$.

Solution. *On a*

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \\ Au = \Delta u \qquad \forall u \in \mathcal{D}(A) \end{cases}$$

Nous sommes dans le bon cadre pour utiliser la théorie des semi-groupe et le Théorème de Hille-Yoshida.

Reste à montrer que l'opérateur A est m-dissipatif.

Il est bien connu que laplacien est un opérateur auto-adjoint :

$$\langle Au, v\rangle_E = \int_\Omega \nabla u.\nabla v = \int_\Omega u(\Delta v) = \langle u, Av\rangle_E$$

Par double intégration par parties, et que $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, il suffit donc de montrer qu'il est dissipatif ou de façon équivalente que $Re(\langle Ax, x\rangle_E) \leq 0$.

Or tout $x \in \mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est de trace nulle, donc en intégrant par parties :

$$Re(\langle Ax, x\rangle_E) = -\int_\Omega |\nabla x|^2 \leq 0$$

Le Corollaire 2.2.1 et le Théorème de Hille-Yoshida permettent enfin de conclure quant à l'existence-unicité et la régularité des solutions.

On remarque de plus que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(||x(t)||_E^2\right) &= \frac{d}{dt}\langle x(t), x(t)\rangle_E \\ &= \langle x'(t), x(t)\rangle_E + \langle x(t), x'(t)\rangle_E \\ &= 2\langle x'(t), x(t)\rangle_E \\ &= 2\langle Ax(t), x(t)\rangle_E \leq 0\end{aligned}$$

On retrouve, bien sûr,le côté dissipatif de l'équation de la chaleur.

2.3.2 L'opérateur de convection :

Soit $1 \leq p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}$. On pose $E = L^p(\Omega)$.

Nous définissons A par :

$$\mathcal{D}(A) = \left\{u \in E;\ -a \cdot \frac{du}{dx} \in E\right\}$$

et

$$Au = -a \cdot \frac{du}{dx} \qquad \forall u \in \mathcal{D}(A)$$

ou $a \in,]0, \infty[$

Démontrer que $(A, \mathcal{D}(A))$ est m-dissipatif dans E.

Indication : Pour $\lambda > 0$ et $f \in L^p(\Omega)$, on pourra rechercher la solution de l'équation

$$\lambda u + a \cdot \frac{du}{dx} = f$$

sous la forme

$$u(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(x - as) ds$$

Solution. *Soit*

$$u \in \mathcal{D}(A) \ \textit{et} \ u^* = |u|^\alpha u \in L^q, \quad \textit{avec} \ \alpha = \begin{cases} p-1 & 1 < p < 2 \\ p-2 & p > 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\langle Au, u^* \rangle &= \int_\Omega -a\frac{du}{dx}.u^* \\
&= \int_\Omega -a\frac{du}{dx}.|u|^\alpha u \\
&= \int_{\partial\Omega} -a|u|^\alpha u^2 + \int_\Omega \alpha a|u|^\alpha \frac{du}{dx}.u \\
\langle Au, (1+\alpha)u^* \rangle &= -a\int_{\partial\Omega} |u|^\alpha u^2 \leq 0
\end{aligned}$$

Donc, on prend

$$v^* = \lambda u^* \in L^q \quad \textit{avec } \lambda \textit{ est une constante de normalisation}$$

De la caractérisation de Lumer-Phillips, on déduit que : A est dissipatif.

Le semi-groupe associé est donné par

$$T(t)u(x) = u(x - at)$$

Montrons que

$$\lambda u + a\frac{du}{dx} = f \tag{2.2}$$

pour avoir la surjectivité de l'opérateur $(\lambda I + a\frac{d}{dx})$ *c-à-d que l'équation* (2.2) *admet une solution, il suffit de remarquer que*

$$u(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(x - as) ds$$

est bien définie et satisfait (2.2)

Par conséquent : $(A, \mathcal{D}(A))$ *est m-dissipatif.*

2.4 Les Opérateurs maximaux monotones :

Dans cette section H désigne un espace de Hilbert.

Définition 2.4.1. [1] *Soit* $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ *un opérateur linéaire non borné,*
On dit que A *est monotone si :*

$$\langle Av, v\rangle \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A)$$

A *est maximal monotone si de plus* $Im(I + A) = H$, *(c-à-d) :*

$$\forall f \in H, \exists u \in \mathcal{D}(A) \quad tel\ que \quad u + Au = f$$

Remarque. *Dans un cadre Hilbertien, on remarque que*

$$A\ est\ maximal\ monotone \Longleftrightarrow -A\ est\ maximal\ dissipatif$$

Proposition 2.4.1. [1] *Soit* A *un opérateur maximal monotone. Alors*

1. $\mathcal{D}(A)$ *est dense dans* H
2. A *est fermé*
3. *Pour tout* $\lambda > 0, (I + \lambda A)$ *est bijectif de* $\mathcal{D}(A)$ *sur* H, $(I + \lambda A)^{-1}$ *est un opérateur borné et* $||(I + \lambda A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

Preuve.

1. *Soit* $f \in H$ *tel que* $\langle f, v\rangle = 0$ *pour tout* $v \in \mathcal{D}(A)$. *Vérifions que f=0. En effet, il existe* $v_0 \in \mathcal{D}(A)$ *tel que* $v_0 + Av_0 = f$. *On a*

$$0 = \langle f, v\rangle = |v_0|^2 + \langle Av_0, v_0\rangle \geq |v_0|^2$$

. *Donc* $v_0 = 0$ *et par suite f=0*

2. *Notons d'abord que pour tout* $f \in H$ *il existe* $u \in \mathcal{D}(A)$ *unique tel que* $u + Au = f$.
En effet si $\overline{u}$ *désigne une autre solution alors on a* $(u - \overline{u}) + A(u - \overline{u}) = 0$. *Prenons le produit scalaire avec* $(u - \overline{u})$ *et appliquant la monotonie de* A *on voit que* $u - \overline{u} = 0$.
D'autre part on a

$$|u|^2 + \langle Au, u\rangle = \langle f, v\rangle$$

et par suite $|u| \leq |f|$.

L'opérateur $f \mapsto u$ *noté* $(I+A)^{-1}$ *est donc un opérateur linéaire borné de* H *dans* H *et* $||(I+A)^{-1}||_{\mathcal{D}(A)} \leq 1$.

Montrons que A *est fermé.*

Soit (u_n) *une suite telle que* $u_n \in \mathcal{D}(A)$ *pour tout* n, $u_n \longrightarrow u$ *et* $Au_n \longrightarrow f$. *Il faut vérifier que* $u \in \mathcal{D}(A)$ *et que* $Au = f$. *On a* $u_n + Au_n \longrightarrow u + f$ *et donc*

$$u_n = (I+A)^{-1}(u_n + Au_n) \longrightarrow (I+A)^{-1}(u+f)$$

Par conséquent $u = (I+A)^{-1}(u+f)$ *c-à-d* $u \in \mathcal{D}(A)$ *et* $u + Au = f$.

3. *Supposons que pour un certain* $\lambda_0 > 0$ *on ait* $R(I + \lambda_0 A) = H$. *On va montrer que pour tout*

$$\lambda > \frac{\lambda_0}{2} \quad \text{on a} \quad R(I + \lambda_0 A) = H$$

. *Commençons par noter "exactement comme en (2)" que pour tout* $f \in H$ *il existe* $u \in \mathcal{D}(A)$ *unique tel que* $u + \lambda_0 Au = f$ *; l'opérateur* $f \mapsto u$ *est noté* $(I + \lambda_0 A)^{-1}$ *et l'on a* $||(I + \lambda_0 A)^{-1}||_{\mathcal{D}(A)} \leq 1$. *On cherche à résoudre l'équation*

$$u + \lambda Au = f \tag{2.3}$$

On écrit (2.3) *sous la forme*

$$u + \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u$$

ou encore

$$u = (I + \lambda_0 A)^{-1} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u\right] \tag{2.4}$$

On voit alors que si $\left|1 - \dfrac{\lambda_0}{\lambda}\right| < 1$ *c-à-d* $\lambda > \dfrac{\lambda_0}{2}$, *alors* (2.4) *admet une solution grâce au théorème de point fixe de Banach.*

Concluons. Si A *est maximal monotone alors* $I + A$ *est surjectif. D'après ce qui précède* $I + \lambda A$ *est surjectif pour* $\lambda > \dfrac{1}{2}$ *donc aussi pour* $\lambda > \dfrac{1}{4}$, *etc. Par récurrence on voit que* $I + \lambda A$ *est surjectif pour tout* $\lambda > 0$

Proposition 2.4.2. [2] *Si* A *est maximal monotone, alors* λA *est aussi maximal monotone pour tout* $\lambda > 0$. *Par contre si* A *et* B *sont deux opérateurs maximaux monotones alors* $A+B$ *définis sur* $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ *n'est pas nécessairement maximal monotone.*

Preuve. *Voir* [2] *page* 13

Définition 2.4.2. [1] *Soit A un opérateur maximal monotone. On pose, pour tout $\lambda > 0$*

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \quad et \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$$

J_λ est la résolvante de A et A_λ est la régularisée de Yoshida de A

On retiendra que $||J_\lambda||_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$

Proposition 2.4.3. [1] *Soit A un opérateur maximal monotone. On a*

1. $A_\lambda v = A(J_\lambda v) \qquad \forall v \in H$ *et* $\lambda > 0$
2. $A_\lambda v = J_\lambda(Av) \qquad \forall v \in \mathcal{D}(A)$ *et* $\lambda > 0$
3. $|A_\lambda v| \leq |Av| \qquad \forall v \in \mathcal{D}(A)$ *et* $\lambda > 0$
4. $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} J_\lambda v = v \qquad \forall v \in H$
5. $\lim\limits_{\lambda \longrightarrow 0} A_\lambda v = Av \qquad \forall v \in \mathcal{D}(A)$
6. $\langle A_\lambda v, v\rangle \geq 0 \qquad \forall v \in H$ *et* $\forall \lambda > 0$
7. $|A_\lambda v| \leq \frac{1}{\lambda}|v| \qquad \forall v \in H$ *et* $\forall \lambda > 0$

Preuve.

1. *On a*

$$v = (I + \lambda A)(J_\lambda v) = (J_\lambda v) + \lambda A(J_\lambda v)$$

Alors

$$A(J_\lambda v) = \frac{1}{\lambda}\left(v - (J_\lambda v)\right) = A_\lambda v$$

2. *On a*

$$Av = \frac{1}{\lambda}\left[(I + \lambda A)v - v\right] = \frac{1}{\lambda}(I + \lambda A)(v - J_\lambda v)$$

et donc

$$J_\lambda A v = \frac{1}{\lambda}(v - J_\lambda v) = A_\lambda v$$

3. *D'après (2)*

$$A_\lambda v = J_\lambda(Av)$$

D'ou

$$|A_\lambda v| = |J_\lambda(Av)| \leq |Av|$$

4. *Supposons d'abord que $v \in \mathcal{D}(A)$. Alors*

$$|v - J_\lambda| = \lambda|A_\lambda v| \leq \lambda|Av| \quad d\,'aprs\ (3)$$

Donc

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0} J_\lambda v = v \qquad \forall v \in \mathcal{D}(A)$$

Passons au cas général. Soit $v \in H$ *et soit* $\epsilon > 0$*. Comme* $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$ (*Proposition* 2.4.1) *il existe* $v_1 \in \mathcal{D}(A)$ *tel que* $|v - v_1| \leq \epsilon$*. On a*

$$\begin{aligned} |J_\lambda v - v| &\leq |J_\lambda v - J_\lambda v_1| + |J_\lambda v_1 - v_1| + |v_1 - v| \\ &\leq 2|v - v_1| + |J_\lambda v_1 - v_1| \\ &\leq 2\epsilon + |J_\lambda v_1 - v_1| \end{aligned}$$

Puisque $v_1 \in \mathcal{D}(A)$ *alors :*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0} |J_\lambda v_1 - v_1| = 0$$

Par conséquent

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0} \sup_{v \in H} |J_\lambda v - v| \leq 2\epsilon \qquad \forall \epsilon > 0$$

et donc

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0} |J_\lambda v - v| = 0 \qquad \forall v \in H$$

5. *D'après (2) et (4) on a*

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \longrightarrow 0} A_\lambda v &= \lim_{\lambda \longrightarrow 0} A(J_\lambda v) \\ &= \lim_{\lambda \longrightarrow 0} J_\lambda(Av) \\ &= Av \end{aligned}$$

6. *On a*

$$\begin{aligned} \langle A_\lambda v, v \rangle &= \langle A_\lambda v, v - J_\lambda v \rangle + \langle A_\lambda v, J_\lambda v \rangle \\ &= \lambda |A_\lambda v|^2 + \langle A(J_\lambda v), J_\lambda v \rangle \end{aligned}$$

Puisque A *est maximal monotone alors :*

$$\langle A(J_\lambda v), J_\lambda v \rangle \geq 0$$

Donc

$$\langle A_\lambda v, v \rangle \geq \lambda |A_\lambda v|^2 \geq 0 \tag{2.5}$$

7. *Résulte de* (2.5) *et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz.*

   En effet :

$$\lambda|A_\lambda v|^2 \leq \langle A_\lambda v, v\rangle \leq |A_\lambda v|.|v|$$

   D'ou

$$|A_\lambda v| \leq \frac{1}{\lambda}|v|$$

Remarque. *Il convient de retenir de la Proposition* 2.4.3 *que* $(A_\lambda)_{\lambda>0}$ *est une famille d'opérateurs borné qui approchent* A *quand* $\lambda \longrightarrow 0$. *Bien entendu* $||A_\lambda||_{\mathcal{L}(H)}$ *explose quand* $\lambda \longrightarrow 0$.

2.5 Théorème de Hille-Yoshida :

Théorème de Hille-Yoshida 1 :

Théorème 2.5.1. [6] *Un opérateur linéaire non borné* $(A, \mathcal{D}(A))$ *dans* E *est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe de contraction sur* E *si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. A *est fermé*
2. $\mathcal{D}(A)$ *est dense dans* E
3. *Pour tout* $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)$ *est une application bijective de* $\mathcal{D}(A)$ *sur* E, *et* $(\lambda I - A)^{-1}$ *est un opérateur borné sur* E *vérifiant*

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Corollaire 2.5.1. [7] *Soit* A *est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe de contraction* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. *L'ensemble résolvant de* A *contient toujours le demi-plan ouvert droit, c-à-d*

$$\{\lambda : Re(\lambda) > 0\} \subseteq \rho(A)$$

et pour tout $\lambda \in \rho(A)$

$$||R(\lambda; A)|| \leq \frac{1}{Re(\lambda)}$$

Théorème de Hille-Yoshida 2 :

Théorème 2.5.2. [6] *Un opérateur linéaire non borné* $(A, \mathcal{D}(A))$ *dans* E *est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe de contraction sur* E *si et seulement si* A *est m-dissipatif.*

Preuve. $\Rightarrow$ *Supposons que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi groupe de contraction sue E.*

Soit A est fermé et de domaine dense.

Comme $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe de contraction sur E, on a

$$||S(t)x|| \leq x \qquad \forall x \in E$$

1. *Soit $x \in \mathcal{D}(A)$ et $\lambda \in \rho(A)$ et $h > 0$*

$$\begin{aligned}
||\lambda x - Ax|| &= \left|\left|\lambda x - \frac{S(h)x - x}{h}\right|\right| \\
&\geq ||\lambda x|| - \left|\left|\frac{S(h)x - x}{h}\right|\right| \\
&\geq ||\lambda x|| - \left(\frac{||S(h)||.||x|| - ||x||}{h}\right) \\
&\geq \lambda ||x||
\end{aligned}$$

D'ou A est dissipatif

2. $\forall \lambda \in \rho(A), \forall y \in E, \exists x \in \mathcal{D}(A)$ *tel que* $\lambda x - Ax = y$

Alors

$$x = R(\lambda; A)y$$

Donc d'après la densité de $\mathcal{D}(A)$ on déduit directement que $\lambda I - A$ est surjectif.

Donc l'opérateur A est m-dissipatif.

$\Leftarrow$ *Supposons que A est m-dissipatif et $\overline{\mathcal{D}(A)} = E$. Montrons que A est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction sur E. On pose*

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda; A)$$

qui est un opérateur linéaire borné car

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda; A) = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)R(\lambda; A) &= I \\ \lambda R(\lambda; A) - AR(\lambda; A) &= I \\ \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda AR(\lambda; A) &= \lambda I \\ \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I &= \lambda AR(\lambda; A)\end{aligned}$$

En conséquence, A_λ engendre un semi-groupe d'opérateurs uniformément continus $\{e^{A_\lambda t}\}_{t\geq 0}$ De plus, il s'agit de contraction car

$$||e^{A_\lambda t}|| = ||e^{t(\lambda^2(\lambda I - A)^{-1} - \lambda I)}|| \leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 ||(\lambda I - A)^{-1}||} \leq 1$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, on a

$$A(\lambda I - A)^{-1}x = (\lambda I - A)^{-1}Ax$$

qui tend vers 0 quand $\lambda \longrightarrow +\infty$ d'après Théorème 2.5.1 *et* 2.5.2.

Par densité de $\mathcal{D}(A)$, cette convergence ponctuelle est vraie partout. Donc pour $x \in \mathcal{D}(A)$,

$$A_\lambda x = \lambda(\lambda I - A)^{-1}Ax \longrightarrow_{\lambda \longrightarrow +\infty} Ax$$

Comme A_λ et A_μ commutent,

$$e^{A_\lambda t}x - e^{A_\mu t}x = \int_0^1 \frac{d}{ds} e^{stA_\lambda + (1-s)tA_\mu} x ds = \int_0^1 e^{stA_\lambda + (1-s)tA_\mu} t(A_\lambda - A_\mu)x ds.$$

De plus

$$\begin{aligned}||e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu}|| &= ||\int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda + t(1-s)A_\mu})|| \\ &\leq \int_0^1 t||e^{stA_\lambda + (1-s)tA_\mu} t(A_\lambda x - A_\mu x)||ds \\ &\leq t||A_\lambda x - A_\mu x||\end{aligned}$$

D'ou

$$||e^{A_\lambda t} - e^{A_\mu t}|| \leq t||A_\lambda - A_\mu||$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathcal{D}(A), e^{A_\lambda t}x$ converge vers un point S(t)x uniformément en t dans un intervalle. Ce résultat s'étend sur E par densité car $\{e^{A_\lambda t}\}_{t\geq 0}$ sont des contractions.

On obtient facilement que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0 *semi-groupe de contraction.*

Il reste à voir que le générateur infinitésimal de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *est* A*. Pour cela, on utilise la formule*

$$S(t)x - x = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{A_\lambda t}x - x = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \int_0^t e^{A_\lambda s} A_\lambda x ds$$

Car $\dfrac{d}{dt}e^{A_\lambda t} = e^{A_\lambda t}A_\lambda$*. De plus* $e^{A_\lambda t}A_\lambda$ *converge vers S(t)Ax uniformément sur* $[0,t]$*. On a donc*

$$S(t)x - x = \int_0^t S(s)Axds$$

Notons $(B, \mathcal{D}(B))$ *le générateur infinitésimal de* $\{S(t)\}_{t>0}$*. En divisant l'égalité précédente par t et en faisant tendre t vers zéro, on obtient*

$$Bx = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} = Ax \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

On a donc

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B) \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

L'opérateur $(B, \mathcal{D}(B))$ *est le générateur infinitésimal du* C_0 *semi-groupe de contractions* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$*.*

De la première partie de la preuve, nous déduisons que B est m-dissipatif. Donc $(I - B)$ *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}(B)$ *sur E. Nous avons*

$$(I - B)\mathcal{D}(A) = (I - A)\mathcal{D}(A) = E$$

Car Bx=Ax si $x \in \mathcal{D}(A)$*, et* $(I - A)\mathcal{D}(A) = E$

Car A est m-dissipatif. Donc

$$\mathcal{D}(B) = (I - B)^{-1}E = (I - B)^{-1}(I - B)\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A)$$

Théorème 2.5.3. [6] *Soit* $(A, \mathcal{D}(A))$ *le générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *fortement continu sur E. Pour tout* $x_0 \in \mathcal{D}(A), x(t) = S(t)x_0$ *est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} x \in C([0,\infty); \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,\infty); E), \\ x'(t) = Ax(t) \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Preuve. *Soit* $x_0 \in \mathcal{D}(A)$*, posons* $x(t) = S(t)x_0$*. Du Proposition* 1.5.4*, nous déduisons que*

$x \in C([0,\infty);\mathcal{D}(A))$. *Du proposition* 1.5.2, *nous déduisons que* $x \in C^1([0,\infty);E)$ *et que* $x' = Ax$

montrons l'unicité. Soient $t > 0$ *arbitraire fixé,* $u \in C([0,\infty);\mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,\infty);E)$ *une autre solution du problème* (2.6). *Posons*

$$v(s) = S(t-s)u(s) \quad \text{pour} \quad 0 \leq s \leq t$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}v(s) &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)u'(s)\\ &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)Au(s)\\ &= -S(t-s)Au(s) + S(t-s)Au(s)\\ &= 0\end{aligned}$$

Par conséquent $v(s) = v(0)$ *pour tout* $s \in [0,t]$. *En particulier* $v(t) = u(t)$ *et* $v(0) = x(t)$. *Donc* $u(t) = x(t)$. *La preuve est complète.*

2.6 Théorème de Lumer-Phillips :

Dans la section précédente, nous avons vu la caractérisation Hille-Yoshida du générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions. Dans cette section, nous verrons une caractérisation différente de ces générateurs infinitésimaux.

Afin d'énoncer et de prouver le résultat, nous avons besoin de quelques préliminaires.

Soit E un espace de Banach, et E' son dual. On note la valeur de $f \in E'$ en $x \in E$ par $\langle f, x\rangle$ ou $\langle x, f\rangle$. Pour tout $x \in E$, nous définissons l'ensemble de dualité $F(x) \subseteq E'$ par :

$$F(x) = \left\{f : f \in E' \quad \text{et} \quad \langle f, x\rangle = ||x||^2 = ||f||^2\right\} = S_{E'}(0, ||x||)$$

Du théorème de Hahn-Banach, il suit que $F(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in E$.

Définition 2.6.1. [6] *A un opérateur linéaire dissipatif si :*

$$\forall x \in \mathcal{D}(A),\ \exists f \in F(x) \quad \textit{tel que} \quad Re\,\langle Ax, f\rangle \leq 0$$

Théorème 2.6.1. [6] *Soit A un opérateur linéaire à domaine dense* $\mathcal{D}(A)$ *dans E.*

1. *Si A est dissipatif et qu'il existe* $\lambda_0 > 0$ *tel que* $Im(\lambda_0 I - A) = E$, *alors A est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe de contractions sur E.*

2. *Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions sur E alors $Im(\lambda I - A) = E$ pour tout $\lambda > 0$ et A est dissipatif. De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et tout $f \in F(x)$, $Re\langle Ax, f\rangle \leq 0$.*

Preuve. *Voir* [6] *page* 14

Corollaire 2.6.1. *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans E. Si A est fermé et si A^*, A sont dissipatifs alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction sur E.*

Preuve. *Voir le Théorème* 2.2.3 *et* 2.5.2.

Corollaire 2.6.2. [7] *Si $(A, \mathcal{D}(A))$ est un opérateur linéaire non borné dans E, nous pouvons définir les puissances de A en étant que des opérateurs non bornés de la façon suivante :*

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A^2) = \{x \in \mathcal{D}(A) | Ax \in \mathcal{D}(A)\} \\ A^2 x = A(Ax) \end{cases}$$

De manière itérative, pour tout entier $k \geq 2$, nous posons

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A^k) = \{x \in \mathcal{D}(A^{k-1}) | Ax \in \mathcal{D}(A^{k-1})\} \\ A^k x = A(A^{k-1} x) \end{cases}$$

Si $(A, \mathcal{D}(A))$ est un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans E, Il est possible de définir des nouveaux opérateurs m-dissipatifs comme suit. Nous définissons $(A_1, \mathcal{D}(A_1))$ par

$$\mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(A^2) \quad et \quad A_1 x = Ax \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

Théorème 2.6.2. [7] *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans E, et soit $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ le semi-groupe sur E engendré par A. Alors $(A_1, \mathcal{D}(A_1))$ est un opérateur m-dissipatif dans $D(A)$ (muni de la norme du graphe). De plus le semi-groupe $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ sur $D(A)$ engendré par A_1 vérifie $S_1(t)x = S(t)x$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$*

Preuve. *(i) Montrons tout d'abord que A_1 est un opérateur dissipatif dans $\mathcal{D}(A)$. Pour tout $x \in \mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(A^2)$, et tout $\lambda > 0$, nous avons*

$$||A(\lambda x - Ax)||_E = ||\lambda(Ax) - A(Ax)||_E \geq \lambda ||Ax||_E$$

car A est dissipatif. nous en déduisons

$$||\lambda x - Ax||_{\mathcal{D}(A)} = ||\lambda x - Ax||_E + ||A(\lambda x - Ax)||_E \geq \lambda(||x||_E + ||Ax||_E) = \lambda||x||_{\mathcal{D}(A)}$$

Donc A_1 est dissipatif.

(ii) *Soit $\lambda > 0$ et $f \in \mathcal{D}(A)$. Alors $x = R(\lambda; A)f$ est la solution dans $\mathcal{D}(A)$ de l'équation*

$$\lambda x - Ax = f,$$

et Ax est la solution dans $\mathcal{D}(A)$ de

$$\lambda(Ax) - A(Ax) = Af.$$

Donc $x \in \mathcal{D}(A)$ et A_1 est m-dissipatif dans $\mathcal{D}(A)$.

(iii) *Montrons que $\mathcal{D}(A^2)$ est dense dans $\mathcal{D}(A)$. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Pour tout $\lambda > 0$, posons $x_\lambda = \lambda R(\lambda; A)x$. Comme en (ii), nous pouvons montrer que $x_\lambda \in \mathcal{D}(A_1)$. Du Théorème* 2.1.5 *nous déduisons*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} ||x_\lambda - x||_E = 0$$

et

$$Ax_\lambda = \lambda AR(\lambda; A)x = A_\lambda x \longrightarrow Ax \quad \textit{quand} \quad \lambda \longrightarrow \infty$$

On a donc montré que

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} ||x_\lambda - x||_{\mathcal{D}(A)} = 0$$

(iv) *Du Théorème* 2.5.2 *il découle que $(A_1, \mathcal{D}(A_1))$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe de contractions $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{D}(A)$. Nous allons établir que $S_1(t) = S(t)|_{\mathcal{D}(A)}$. Soit $x_0 \in \mathcal{D}(A^2)$. Posons $x(t) = S(t)x_0$. Du Théorème* 2.5.3 *il découle que x est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} y \in C([0,\infty); \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,\infty); E), \\ x'(t) = Ax(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \end{cases}$$

Mais, toujours d'après le Théorème 2.5.3 *,$y(t) = Ax(t) = AS(t)x_0 = S(t)Ax_0$ est* *l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} y \in C([0,\infty);\mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,\infty);E), \\ y'(t) = Ay(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0, \quad y(0) = Ax_0 \end{cases}$$

Comme $y(t) = x'(t)$ *et* $y(t) = Ax(t) = A_1x(t)$, *nous obtenons* $x \in C([0,\infty);\mathcal{D}(A^2)) \cap C^1([0,\infty)\mathcal{D}(A))$. *Donc* x *est l'unique solution du problème*

$$\begin{cases} x \in C([0,\infty);\mathcal{D}(A_1)) \cap C^1([0,\infty))\mathcal{D}(A)) \\ x'(t) = Ax(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Appliquant le Théorème 2.5.3 *au problème* (2.7), *nous obtenons*

$$S_1(t)x_0 = S(t)x_0 \quad \textit{pour tout} \quad x_0 \in \mathcal{D}(A_1)$$

Par densité le résultat reste vrai pour tout $x_0 \in \mathcal{D}(A)$

Si $(A,\mathcal{D}(A))$ *est un opérateur m-dissipatif dans* E , *pour tout* $k \geq 1$, *nous définissons* $(A_k,\mathcal{D}(A_k))$ *par :*

$$\mathcal{D}(A_k) = \mathcal{D}(A^{k+1}) \quad \textit{et} \quad A_kx = Ax \quad \textit{pour tout} \quad x \in \mathcal{D}(A_k)$$

Corollaire 2.6.3. [7] *Soit* $(A,\mathcal{D}(A))$ *un opérateur m-dissipatif de domaine dense dans* E *et soit* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *le semi-groupe sur* E *engendré par* A. *Alors* $(A_k,\mathcal{D}(A_k))$ *est un opérateur m-dissipatif dans* $\mathcal{D}(A^k)$ *(muni de la norme du graphe). De plus le semi-groupe* $\{(S_k(t)\}_{t\geq 0}$ *le semi-groupe sur* $\mathcal{D}(A^k)$ *engendré par* A_k *vérifie* $S_k(t)x = S(t)x$ *pour tout* $x \in \mathcal{D}(A^k)$.

Preuve. *Le corollaire se démontre par récurrence sur* k, *et la preuve est analogue à celle du Théorème* 2.6.2.

CHAPITRE 3

APPLICATIONS AUX ÉQUATIONS D'ÉVOLUTIONS

3.1 Le problème de Cauchy Abstrait :

Soient E un espace de Banach.

3.1.1 Problème de Cauchy abstrait homogène :

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur linéaire non borné. Le problème de Cauchy abstrait pour A avec la donné initial $x \in E$ consiste à trouver une solution $u(t)$ du problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) \quad t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \tag{PCA$_h$}$$

Définition 3.1.1. [6] *Une fonction $u : \Omega \times [0, +\infty) \longrightarrow E$ est dite solution classique du problème (PCA_h) si :*

1. *$u(t)$ est une fonction continue pour tout $t \geq 0$*
2. *$u(t)$ est continument différentiable et $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour tout $t > 0$*
3. *$u(t)$ vérifie (PCA_h)*

D'après les résultats du Chapitre 2 il est clair que si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, le problème (PCA_h) admet une solution unique qu'on notera $u(t) = S(t)x$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ (Voir Théorème 2.5.3).

Remarque.

1. *l'unicité de solution classique découle immédiatement de l'unicité du semi-groupe engendré par A.*
2. *On note que puisque $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour tout $t > 0$ et u est continue en $t = 0$, le problème (PCA_h) n'admet pas une solution pour $x \notin \overline{\mathcal{D}(A)}$*
3. *Si u est une solution classique du problème (PCA_h) donc :*

$$u \in C^1([0, +\infty), E) \cap C([0, +\infty), \mathcal{D}(A))$$

Existence et unicité des solutions :

Théorème 3.1.1. [6] *Soit A un opérateur linéaire non borné a domaine dense avec un ensemble résolvant $\rho(A)$ non vide.*

Le problème (PCA_h) admet une unique solution $u(t)$ continument différentiable sur $[0, +\infty[$, pour tout valeur initiale $x \in \mathcal{D}(A)$ si et seulement si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t)$

Preuve.

1. *Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $S(t)$ alors, $S(t)x$ est l'unique solution de (PCA_h) pour toute valeur initiale $x \in \mathcal{D}(A)$.*

   De plus : $S(t)x$ est continument différentiable $\forall t \in [0, +\infty)$
2. *Si (PCA_h) admet une unique solution continument différentiable $\forall t \in [0, +\infty), \forall x \in \mathcal{D}(A)$, alors on trouve que A est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe.*

   En effet : supposons que pour toute valeur initiale $x \in \mathcal{D}(A)$, le problème (PCA_h) admet une unique solution continument différentiable qui on la note par $u(t, x)$.

   $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ on définie la norme de graphe par $|x|_G = ||x||_E + ||Ax||_E$, puisque $\rho(A) \neq \emptyset$ et A est fermé alors l'ensemble $\mathcal{D}(A)$ muni la norme de graphe est un espace de Banach.

   Soit E_{t_0} un espace de Banach des fonctions continues de $[0, t_0]$ à valeurs dans $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme Sup.

   On considère l'application pour tout $0 \leq t < t_0$

$$\begin{aligned} S :& \mathcal{D}(A) \longrightarrow E_{t_0} \\ & x \mapsto Sx = u(t, x) \end{aligned}$$

   D'après la linéarité de (PCA_h) et l'unicité de la solution, il est évident que S est un opérateur linéaire défini sur $\mathcal{D}(A)$.

Si $x_n \longrightarrow x \in \mathcal{D}(A)$ *et* $Sx_n \longrightarrow v \in E_{t_0}$ *alors de la fermeture da* A *et*

$$u(t,x) = x_n + \int_0^t Au(\tau, x_n)d\tau$$

Par passage à la limite $n \longrightarrow +\infty$

$$v(t) = x + \int_0^t Av(t)d\tau$$

Ceci implique que $v(t) = u(t,x)$ *et* S *est fermé. alors d'après le théorème de graphe fermé* S *est borné, et*

$$\sup_{t\in[0,t_0]} |u(t,x)|_G \leq |x|_G \tag{3.1}$$

Maintenant on définie l'application

$$\begin{aligned} T(t) :& \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A) \\ & x \mapsto T(t)x = u(t,x) \end{aligned}$$

De l'unicité de la solution de (PCA_h)*, il suit que* $T(t)$ *a la propriété de semi-groupe.*

D'après (3.1)*, on trouve que* $\forall t \in [0, t_0]$*,* $T(t)$ *est uniformément borné et prolongeable par* $T(t)x = T(t - nt_0)T(t_0)^n x$ *pour* $nt_0 \leq t < (n+1)t_0$ *à un semi-groupe sur* $\mathcal{D}(A)$ *satisfaisant* $|T(t)x|_G \leq Me^{\omega t}|x|_G$

Montrons que

$$T(t)Ay = AT(t) \qquad \forall y \in \mathcal{D}(A^2) \tag{3.2}$$

Posons

$$v(t) = y + \int_0^t u(s, Ay)ds \tag{3.3}$$

On a

$$v'(t) = u(t, Ay) = Ay + \int_0^t \frac{d}{ds}u(s, Ay)ds = A\left(y + \int_0^t u(s, Ay)ds\right) = Av(t) \tag{3.4}$$

Puisque $v(0) = y$ *on a par l'unicité de la solution de* (PCA_h)*,* $v(t) = u(t,y)$ *et alors* $Au(t,y) = v'(t) = u(t, Ay)$ *qui est la même que* (3.2)

Maintenant, puisque $\mathcal{D}(A)$ *est dense dans* E *et* $\rho(A) \neq \emptyset$*,* $\mathcal{D}(A^2)$ *est aussi dense dans* E*.*

Soient $\lambda_0 \in \rho(A), \lambda_0 \neq 0, \quad y \in \mathcal{D}(A^2)$

$x = (\lambda_0 I - A)y$ alors, de (3.2), $T(t)x = (\lambda_0 T - A)T(t)y$ *et donc*

$$||T(t)x|| = ||(\lambda_0 I - A)T(t)y|| \leq C|T(t)y|_G \leq C_1 e^{\omega t}|y|_G \tag{3.5}$$

Mais

$$|y|_G = ||y|| + ||Ay|| \leq C_2||x||$$

Qui implique

$$||T(t)x|| \leq C_2 e^{\omega t}||x|| \tag{3.6}$$

Alors, $T(t)$ peut être prolongé sur tous E par continuité, après cette extension $T(t)$ devient un C_0 semi-groupe sur E.

Il reste a montrer que A est le générateur infinitésimal de $T(t)$.

Posons A_1 est le générateur infinitésimal de $T(t)$. Si $x \in \mathcal{D}(A)$ alors de la définition de $T(t)$ on a

$$T(t)x = u(t,x)$$

et donc

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x \qquad \forall t \geq 0$$

qui implique en particulier que $\left.\frac{d}{dt}T(t)x\right|_{t=0} = Ax$ *et que* $A \subset A_1$.

Soient $Re(\lambda) > \omega$ et $y \in \mathcal{D}(A)$. De (3.2) *et $A \subset A_1$ on a :*

$$e^{-\lambda t}AT(t)y = e^{-\lambda t}T(t)Ay = e^{-\lambda t}T(t)A_1 y \tag{3.7}$$

Intégrant (3.7) *de 0 à ∞ donne*

$$AR(\lambda; A_1)y = R(\lambda; A_1)A_1 y$$

Or $R(\lambda; A_1)A_1 y = A_1 R(\lambda; A_1)y$ donc $AR(\lambda; A_1)y = A_1 R(\lambda; A_1)$ $\forall y \in \mathcal{D}(A^2)$.

Puisque $A_1R(\lambda; A_1)$ est uniformément borné, A est fermé, $\mathcal{D}(A^2)$ est dense dans E, alors $AR(\lambda; A_1)y = A_1 R(\lambda, A_1)y$ $\forall y \in \mathcal{D}(A)$. Ceci implique que $\mathcal{D}(A) \supset Im(R(\lambda; A_1)) = \mathcal{D}(A_1)$ et $A_1 \subset A$ donc $A = A_1$

Remarque. *Soient A,B deux opérateurs non bornés, B est dit une extension de A si :*

$$A \subset B = \begin{cases} \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B) \\ B|_{\mathcal{D}(A)} \equiv A \end{cases}$$

Corollaire 3.1.1. [6] *Si A est m-dissipatif, le problème (PCA_h) admet une unique solution $u(t)$ continument différentiable sur $[0, +\infty[$, pour toute valeur initiale $x \in \mathcal{D}(A)$.*

Preuve. *La preuve est évidente par le fait que si A est m-dissipatif, alors il engendre un C_0 semi-groupe de contraction.*

Les théorèmes suivants décrivent la situation ou le problème (PCA_h) admet une solution pour tout $x \in E$.

Théorème 3.1.2. [6] *Soit A un opérateur linéaire non borné, si $R(\lambda; A)$ existe pour tout valeurs réelles $\lambda > 0$ et*

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \sup \lambda^{-1} \log ||R(\lambda; A)|| \leq 0 \tag{3.8}$$

Alors le problème à valeur initiale (PCA_h) admet au plus une solution pour tout $x \in E$

Preuve. *Voir* [6] *page* 101.

Corollaire 3.1.2. *Si A est un opérateur m-dissipatif, Alors le problème (PCA_h) admet au plus une solution pour tout $x \in E$*

Preuve. *Si A est un opérateur m-dissipatif alors $R(\lambda; A)$ existe et vérifie que $\forall x \in E$*

$$||(R\lambda; A)|| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Or $u \mapsto \log u$ est une fonction croissante, Alors

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} \log ||R(\lambda; A)|| &\leq \lambda^{-1} \log \frac{1}{\lambda} \\ &\leq \frac{-\log \lambda}{\lambda} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \sup \lambda^{-1} \log ||R(\lambda; A)|| \leq 0$$

Ceci implique que (PCA_h) admet au plus une solution pour tout $x \in E$

Régularité des solutions :

Théorème 3.1.3. [7] *Soit $(A, \mathcal{D}(A))$ un opérateur m-dissipatif dans E, et soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ le semi-groupe sur E engendré par A. Si $x_0 \in \mathcal{D}(A^2)$ alors la solution $x(t) = S(t)x_0$ du problème*

(PCA_h) *vérifie*

$$x \in C^2([0,\infty);E) \cap C^1([0,\infty);\mathcal{D}(A)) \cap C([(0,\infty);\mathcal{D}(A^2))$$

Plus généralement si $x_0 \in \mathcal{D}(A^k)$ *alors*

$$x \in \bigcap_{j=0}^{k} C^{k-j}([0,\infty);\mathcal{D}(A^j))$$

Preuve. *On démontre par récurrence la forme générale de la régularité des solutions.*

1. *Pour* $k=1$ *Voir la preuve du Théorème* 2.5.3.
2. *On suppose qu'elle est vraie pour* k*, alors :*

$$x \in \bigcap_{j=0}^{k} C^{k-j}([0,\infty),\mathcal{D}(A^j)) \qquad \forall x_0 \in \mathcal{D}(A^k)$$

D'ou
$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}x(t) = x^{(k-1)}(t) \in C^1([0,\infty[,E) \cap C([0,\infty[,\mathcal{D}(A))$$

Alors d'après le Corollaire (2.6.3) *et le Théorème* (2.5.3)*, on a :*

$$x^{(k-1)}(t) = S(t)x_0 \quad \text{est solution de} \quad \frac{d}{dt}x^{(k-1)} = Ax^{(k-1)}$$

On démontre pour $k+1$

Soit $x_0 \in \mathcal{D}(A^{k+1})$*, alors*

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} = \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}x(t) &= \frac{d}{dt}x^{(k)} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}x^{(k-1)}\right) \\ &= \frac{d}{dt}(Ax^{(k-1)}(t)) \\ &= A\left(\frac{d}{dt}x^{(k-1)}(t)\right) \qquad \text{(A est fermé)} \\ &= Ax^{(k)}(t) \end{aligned}$$

du Corollaire 2.6.3*, on obtient que :*

$$x^{(k)}(t) = S_k(t)x_0 = S(t)x_0.$$

Appliquons le Théorème 2.5.3, on trouve :

$$x^{(k)}(t) = S(t)x_0 \in C^1([0,\infty); E) \cap C([0,\infty); \mathcal{D}(A^{k+1}))$$

Et

$$\begin{cases} x_0 \in \mathcal{D}(A^{k+1}) \subset \mathcal{D}(A^k) \subset .... \subset \mathcal{D}(A) \subset E \quad \textit{alors} \quad x_0 \in \bigcap_{j=0}^{k+1} \mathcal{D}(A^j) \\ \forall j = 0, k \quad \textit{on a :} \quad C^{k-j}([0,+\infty[, \mathcal{D}(A^{j+1})) \subset C^{k-j}([0,+\infty[, \mathcal{D}(A^j)) \end{cases}$$

Donc

$$x(t) \in \bigcap_{j=0}^{k+1} C^{k+1-j}([0,\infty); \mathcal{D}(A^j))$$

3.1.2 Problème de Cauchy abstrait non homogène :

Dans cette section, on considère le problème à valeur initiale non homogène

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t) \quad t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \tag{PCA$_{nh}$}$$

Avec $f : [0, T[\longrightarrow E$. Supposons tout au long cette section que A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ pour que l'équation homogène correspondante c-à-d $f \equiv 0$, admet une solution unique pour toute valeur initiale $x \in \mathcal{D}(A)$

Définition 3.1.2. [6] *Une fonction $u : [0, T[\longrightarrow E$ est une solution classique de (PCA_{nh}) si :*

1. *u est continue sur $[0, T[$*
2. *u est continument différentiable sur $[0, T[$*
3. *$u(t) \in \mathcal{D}(A) \quad$ pour tout $\quad 0 < t < T$*
4. *u satisfait (PCA_{nh}) sur $[0, T[$*

Définition 3.1.3. [6] *Soient A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$, $x \in E$, et $f \in L^1([0, T[, E)$.*

La fonction $u \in C([0, T], E)$ donnée par

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \qquad 0 \le t \le T \tag{3.9}$$

est la forme générale de la solution faible (mild) du problème (PCA_{nh})

Preuve. *Soient $T(t)$ le C_0 semi-groupe engendré par A et u la solution de (PCA_{nh}). Alors la fonction à valeurs dans E définie par $g(s) = T(t-s)u(s)$ est différentiable en $0 < s < t$ et*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}g(s) &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s)) \\
&= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\
&= T(t-s)f(s)
\end{aligned}$$

$f \in L^1([0,T[: E)$ *alors*

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left|\left|\frac{d}{ds}g(s)ds\right|\right| &= \int_0^t ||T(t-s)f(s)|| \\
&= \int_0^t ||T(t-s)||.|f(s)|ds \\
&\leq M\int_0^t e^{\omega(t-s)}|f(s)|ds \\
&\leq M\int_0^t e^{\omega t}|f(s)|ds \\
&\leq Me^{\omega T}\int_0^T |f(s)|ds \\
&\leq Me^{\omega T}||f||_{L^1([0,T[)} \leq \infty
\end{aligned}$$

D'ou $T(t-s)f(s)$ est intégrable au sens de Bochner, ainsi

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds$$

Existence et unicité des solutions :

La définition de la solution faible (mild) du problème (PCA_{nh}) coïncide avec celle de l'équation homogène correspondante. Il est donc clair que toute solution faible (mild) du problème (PCA_{nh}) n'est pas forcement une solution classique même si $f \equiv 0$.

Nous allons maintenant nous intéresser à imposer des conditions supplémentaires sur f afin que pour $x \in \mathcal{D}(A)$, la solution faible (mild) devienne classique et prouver ainsi, dans ces conditions, l'existence de solutions du problème (PCA_{nh}) pour $x \in \mathcal{D}(A)$.

Nous commençons par montrer que, en général la continuité de f n'est pas suffisante pour assurer l'existence de solutions du problème (PCA_{nh}) pour $x \in \mathcal{D}(A)$.

En effet, soient A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ et

$$x \in E \quad \text{tel que} \quad T(t)x \notin \mathcal{D}(A) \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0. \tag{3.10}$$

Soit $f(s) = T(s)x$. Alors $f(s)$ est continue pour $s \geq 0$.

Considérons le problème de la valeur initiale

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) + T(t)x \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Nous affirmons que (3.11) n'a pas de solution même si $u(0) = 0 \in \mathcal{D}(A)$.

En effet, la solution faible (mild) de (3.11) est :

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)T(s)xds = tT(t)x$$

Soit $t_0 > 0$

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{u(t,x) - u(t_0,x)}{t - t_0} = \frac{tT(t)x - t_0T(t_0)x}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{tT(t)x - t_0T(t)x + t_0T(t)x - t_0T(t_0)x}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \longrightarrow t_0} T(t)x + \frac{t_0}{t - t_0}\left[\frac{T(t)x - T(t_0)x}{t - t_0}\right]$$

Si cette limite existe, elle contredit la supposition (3.10), alors $t \mapsto tT(t)x$ n'est pas différentiable pour $t > 0$, et donc ne peut pas être une solution de (PCA_{nh})

Ainsi, pour prouver l'existence de solutions du problème (PCA_{nh}) nous devons exiger plus que la continuité de f.

Nous partons par un théorème général d'existence de solutions du problème à valeur initiale (PCA_{nh}).

Théorème 3.1.4. [6] *Soient A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$, et $f \in L^1([0,T],E)$ continue sur $]0,T]$.*

Posons

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \qquad 0 \leq t \leq T \tag{3.12}$$

Le problème à valeur initiale (PCA_{nh}) *admet une solution sur* $[0,T[\ \ \forall x \in \mathcal{D}(A)$ *si l'une des conditions suivantes est satisfait :*

(i) $v(t)$ *est continument différentiable sur* $]0,T[$

(ii) $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ *pour* $0 < t < T$ *et* $Av(t)$ *est continue sur* $]0,T[$

Si (PCA_{nh}) *admet une solution* u *sur* $[0,T[$ *pour un certain* $x \in \mathcal{D}(A)$, *alors* v *satisfait les deux conditions à la fois.*

Preuve. *Si le problème à valeur initiale* (PCA_{nh}) *admet une solution* u *pour un certain* $x \in \mathcal{D}(A)$, *alors cette solution est donnée par* (3.9).

Par conséquent

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = u(t) - T(t)x$$

est différentiable pour $t > 0$ *comme la différence de deux fonctions différentiables et*

$$v'(t) = u'(t) - T(t)Ax$$

est évidemment continue sur $]0,T[$.

Par conséquent (i) est satisfaite.

Aussi si $x \in \mathcal{D}(A)$ *alors* $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *pour* $t \geq 0$ *et donc* $v(t) = u(t) - T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *pour* $t > 0$ *et*

$$Av(t) = Au(t) - AT(t)x = u'(t) - f(t) - T(t)Ax$$

est continue sur $]0,T[$.

Ainsi également (ii) est satisfaite.

Par contre, il est facile de vérifier pour h> 0 l'identité

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}v(t) &= \frac{T(h)v(t)-v(t)}{h} \\
&= \frac{\displaystyle\int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds}{h} \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t T(t-s)f(s)ds\right) \\
&= \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

A partir de la continuité de f, *il est clair que le second terme sur le côté droit de* (3.13) *a la limite* $f(t)$ *comme* $h \longrightarrow 0$.

Si $v(t)$ est continuellement dérivable sur $]0,T[$ alors, il résulte de (3.13) que $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $0 < t < T$ et $Av(t) = v'(t) - f(t)$.

Puisque $v(0) = 0$, il s'ensuit que $u(t) = T(t)x + v(t)$ est la solution du problème à valeur initiale (PCA_{nh}) pour $x \in \mathcal{D}(A)$.

Si $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ il découle de (3.13) que $v(t)$ est différentiable de la droite en t et la dérivée droite $D^+v(t)$ de v satisfait $D^+v(t) = Av(t) + f(t)$.

Puisque $D^+v(t)$ est continue, $v(t)$ est continuellement différentiable et $v'(t) = Av(t) + f(t)$. Alors $u(t) = T(t)x + v(t)$ est la solution de (PCA_{nh}) pour $x \in \mathcal{D}(A)$.

Corollaire 3.1.3. [6] *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$.*

Si $f(s)$ est continuellement différentiable sur $[0,T]$ alors, le problème à valeur initiale (PCA_{nh}) admet une solution u sur $[0,T[$ pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$.

Preuve. *On a*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(w)f(t-w)dw \tag{3.14}$$

Il est clair d'après (3.14) que $v(t)$ est différentiable pour $t > 0$ et que sa dérivée

$$\begin{aligned}
v'(t) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_0^{t+h} T(w)f(t+h-w)dw - \int_0^t T(w)f(t-w)dw \right) \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \left(\int_0^{t+h} T(w) \left(\frac{f(t+h-w) - f(t-w)}{h} \right) dw + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(w)f(t+h-w)dw \right) \\
&= T(t)f(0) + \int_0^t T(w)f'(t-w)dw \\
&= T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds
\end{aligned}$$

est continue sur $]0,T[$.

Le résultat découle donc du Théorème (3.1.4.i).

Corollaire 3.1.4. [6] *Soient A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$, et $f \in L^1([0,T[,E)$ continue sur $]0,T[$.*

Si $f(s) \in \mathcal{D}(A)$ pour $0 < s < T$ et $Af(s) \in L^1([0,T[,E)$ alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ le problème à valeur initiale (PCA_{nh}) admet une solution sur $[0,T[$.

Preuve. *Il résulte des conditions que pour $s > 0$, $T(t-s)f(s) \in \mathcal{D}(A)$ et que $AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$ est intégrable.*

Donc $v(t)$ définie par (3.9) satisfait $v(t) \in \mathcal{D}(A)$ pour $t > 0$ et

$$Av(t) = A\int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(t-s)Af(s)ds$$

est continue.

Le résultat découle maintenant du Théorème (3.1.4.ii).

Régularité des solutions :

Théorème 3.1.5. [6] *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$.*

Si $f(s)$ est continuellement différentiable sur $[0,T]$ alors, la solution faible (mild) devienne classique pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$.

Preuve. *Voir* [6] *page* 187

3.2 Problème d'évolution semi-linéaire :

Dans cette section, nous étudions le problème de valeur initiale semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t,u(t)) & t > t_0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \tag{PESL}$$

où A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$, sur un espace de Banach E et $f : [t_0,T] \times E \longrightarrow E$ est continue en t et satisfait la condition de Lipschitz en u.

Définition 3.2.1. [6] *Soient A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$, $x \in E$, et $f : [t_0,T] \times E \longrightarrow E$ est continue en t et satisfait la condition de Lipschitz en u.*

La fonction $u \in C([0,T],E)$ donnée par

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^t T(t-s)f(s,u(s))ds, \qquad t_0 \leq t \leq T \tag{3.15}$$

est la forme générale de la solution faible (mild) du problème $(PESL)$

Existence et unicité des solutions :

Nous commençons par le résultat classique suivant qui assure l'existence et l'unicité des solutions faibles de $(PESL)$ pour les fonctions continues de Lipschitz f.

Théorème 3.2.1. [6] *Soit $f : [t_0, T] \times E \longrightarrow E$ continue en t sur $[t_0, T]$ et uniformément Lipschitzienne continue avec la constante de Lipschitz L sur E.*

Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ sur E alors pour chaque $u_0 \in E$ le problème à valeur initiale $(PESL)$ admet une solution faible (mild) unique $u \in C([t_0, T], E)$.

De plus. l'application $u_0 \longrightarrow u$ est Lipschitz continue de E vers $C([t_0, T], E)$.

Preuve. *Soit $u_0 \in E$, on définit l'application*

$$F : C([t_0, T], E) \longrightarrow C([t_0, T], E)$$

par

$$(Fu)(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t - s)f(s, u(s))ds \qquad t_0 \leq t \leq T \tag{3.16}$$

En notant $||u||_\infty$ la norme de u comme un élément de $C([t_0, T], E)$ il découle de la définition de F que

$$||(Fu)(t) - (Fv)(t)|| = ML(t - t_0)||u - v||_\infty$$

itérant sur n il en résulte que

$$\begin{aligned} ||(F^n u)(t) - (F^n v)(t)|| &\leq \frac{(ML(t - t_0))^n}{n!}||u - v||_\infty \\ &\leq \frac{(MLT)^n}{n!}||u - v||_\infty \end{aligned} \tag{3.17}$$

Pour n assez grand $\dfrac{(MLT)^n}{n!} < 1$ et par une extension bien connue du principe de contraction, F admet un point fixe unique u dans $C([t_0, T], E)$.

Ce point fixe est la solution souhaitée de l'équation intégrale (3.15)*.*

L'unicité de u et la continuité de Lipschitz de l'application $u_0 \longrightarrow u$ sont des conséquences de l'argument suivant.

Soit v une solution faible (mild) du problème $(PESL)$ avec la valeur initiale v_0 sur $[t_0, T]$, *alors*

$$\begin{aligned}||u(t)-v(t)|| &\leq ||T(t-t_0)u_0 - T(t-t_0)v_0|| + \int_{t_0}^{t} ||T(t-s)(f(s,u(s)-f(s,v(s)))||ds \\ &\leq M||u_0-v_0|| + ML\int_{t_0}^{t} ||u(s)-v(s)||ds\end{aligned}$$

ce qui implique, par l'inégalité de Gronwall, que

$$||u(t)-v(t)|| \leq Me^{ML(T-t_0)}||u_0-v_0||$$

et donc

$$||u-v||_\infty \leq Me^{ML(T-t_0)}||u_0-v_0||$$

ce qui donne à la fois l'unicité de u et la continuité de Lipschitz de l'application $u_0 \longrightarrow u$

Il n'est pas difficile de voir que si $g \in C([t_0,T],E)$ et dans la preuve du Théorème (3.2.1) on modifie la définition de F à

$$(Fu)(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds$$

on obtient le résultat un peu plus général suivant.

Corollaire 3.2.1. [6] *Si A et f satisfont les conditions du Théorème* (3.2.1) *alors pour tout* $g \in C([t_0,T],E)$ *l'équation intégrale*

$$w(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,w(s))ds$$

admet une solution unique $w \in C([t_0,T],E)$

La condition uniforme de Lipschitz de la fonction f dans le théorème (3.2.1) assure l'existence d'une solution faible (mild) globale (c-à-d définie sur l'ensemble $[t_0,T]$) du problème $(PESL)$.

Si nous supposons que f ne satisfait qu'une condition de Lipschitz locale en u, uniformément en t sur des intervalles bornés, c-à-d que pour tout $t' \geq 0$ et constante $c \geq 0$ il existe une constante $L(c,t')$ telle que

$$||f(t,u)-f(t,v)|| \leq L(c,t')||u-v|| \quad \forall t \in [0,t'] \tag{3.18}$$

Alors, pour tout $u, v \in E$ avec $||u|| \leq c$, $||v|| \leq c$ et $t \in [0, t']$, alors nous avons la version locale suivante du Théorème (3.2.1)

Théorème 3.2.2. [6] *Soit $f : [0, \infty[\times E \longrightarrow E$ continue en t pour $t \geq 0$ et localement Lipschitzienne continue en u, uniformément en t sur des intervalles bornés.*

Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ sur E, alors pour tout $u_0 \in E$ il existe un $t_{max} \leq \infty$ tel que le problème à valeurs initiale $(PESL)$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t, u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

admet une solution faible (mild) unique u sur $[0, t_{max}[$

De plus : si $t_{max} < \infty$ alors :

$$\lim_{t \longrightarrow t_{max}} ||u(t)|| = \infty$$

Preuve. *Nous commençons par montrer que pour tout $t \geq 0$, $u_0 \in E$ le problème à valeur initiale $(PESL)$, sous les hypothèses du Théorème, a une solution faible (mild) unique u sur un intervalle $[t_0, t_1]$ dont la longueur est bornée par*

$$\delta(t_0, ||u_0||) = \min\left\{1, \frac{||u_0||}{K(t_0)L(K(t_0), t_0 + 1) + N(t_0)}\right\} \tag{3.19}$$

Avec

1. *$L(c, t)$ est la constante de Lipschitz locale de f définie en* (3.18)
2. *$M(t_0) = \sup\{||T(t)|| : 0 \leq t \leq t_0 + 1\}$*
3. *$K(t_0) = 2||u_0||M(t_0)$*
4. *$N(t_0) = \max\{||f(t, 0)|| : 0 \leq t \leq t_0 + 1\}$*

En effet, soit $t_1 = t_0 + \delta(t_0, ||u_0||)$ où $\delta(t_0, ||u_0||)$ est donné par (3.19).

L'application F définie par (3.16) *transforme la boule de rayon $K(t_0)$ centrée à* 0 *de $C([t_0, t_1], E)$ en elle-même.*

Cela découle de l'estimation

$$||f(u)(t)|| \leq M(t_0)||u_0|| + \int_{t_0}^{t} ||T(t-s)||(||f(s,u(s)-f(s,0))|| + ||f(s,0)||)ds$$

$$\leq M(t_0)||u_0|| + M(t_0)K(t_0)L(K(t_0),t_0+1)(t-t_0) + M(t_0)N(t_0)(t-t_0)$$

$$\leq M(t_0)\{||u_0|| + K(t_0)L(K(t_0),t_0+1)(t-t_0) + K(t_0)(t-t_0)\}$$

$$\leq 2M(t_0)||u_0|| = K(t_0)$$

où la dernière inégalité découle de la définition de t_1.

Dans cette boule, F *satisfait une condition de Lipschitz uniforme avec la constante* $L = L(K(t_0), t_0+1)$ *et donc comme dans la démonstration du Théorème* (3.2.1) *elle possède un unique point fixe* u *dans la boule.*

Ce point fixe est la solution souhaitée de $(PESL)$ *sur l'intervalle* $[t_0, t_]$.

De ce que nous venons de montrer, il s'ensuit que si u *est une solution faible (mild) du problème* $(PESL)$ *sur l'intervalle* $[0,\tau]$ *elle peut être prolongée sur l'intervalle* $[0,\tau+\delta]$ *avec* $\delta > 0$ *en définissant sur* $[\tau,\tau+\delta], u(t) = w(t)$ *où* $w(t)$ *est la solution de l'équation intégrale*

$$w(t) = T(t-\tau)u(\tau) + \int_{\tau}^{t} T(t-s)f(s,w(s))ds \qquad \tau \leq t \leq \tau+\delta \tag{3.20}$$

De plus, δ *ne dépend que de* $||u(\tau)||, K(\tau),$ *et* $N(\tau)$

Soit $[0, t_{max}[$ *l'intervalle maximal de l'existence de la solution faible (mild) du problème* $(PESL)$.

Si $t_{max} < \infty$ *alors*

$$\lim_{t \longrightarrow t_{max}} ||u(t)|| = \infty$$

car sinon il existe une suite $t_n \longrightarrow t_{max}$ *telle que* $||u(t)|| \leq C$ *pour tout* n.

Cela impliquerait par ce que nous venons de prouver que pour chaque t_n *assez proche de* t_{max}, u *défini sur* $[0, t_n]$ *peut être prolongée à* $[0, t_n+\delta]$ *où* $\delta > 0$ *est indépendant de* t_n *et donc* u *peut être prolongée au-delà de* t_{max} *en contradiction avec la définition de* t_{max}.

Pour prouver l'unicité de la solution faible (mild) locale du problème $(PESL)$*, on note que si* v *est une solution faible de* $(PESL)$ *sur tout intervalle fermé* $[0, t_0]$ *pour lequel* u *et* v *existent* *et coïncident par le critère d'unicité cité à la fin de la preuve du Théorème* (3.2.1)*, donc*

$$\forall t \in [t_0, t_{max}] \qquad u \equiv v$$

Théorème 3.2.3. [6] *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $T(t)$ sur un espace de Banach réflexif E.*

Si $f : [t_0, T] \times E \longrightarrow E$ est Lipschitzienne continue par rapport à les deux variables alors, le problème $(PESL)$ admet une solution faible u pour tout $u_0 \in \mathcal{D}(A)$

Preuve. *Voir* [2] *page* 189

Régularité des solutions :

Théorème 3.2.4. [6] *Soit $f : [t_0, T] \times E \longrightarrow E$ uniformément Lipschitzienne sur E et pour chaque $x \in E$, $f(t, x)$ est continue de $[t_0, T]$ dans E.*

Si $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ alors, le problème à valeur initiale $(PESL)$ admet une solution classique unique sur $[t_0, T]$.

Preuve. *Voir* [6] *page* 190

3.3 Applications aux problèmes paraboliques semi-linéaires :

Dans le chapitre présent, nous limiterons notre attention à les applications liées à la résolution du problème à valeur initiale pour les équations aux dérivées partielles.

Les différentes sections de ce chapitre sont essentiellement indépendantes l'une de l'autre et chacune d'elles décrit une application particulière. Les résultats de base de la théorie générale des équations aux dérivées partielles qui seront utilisées seront énoncés, sans preuve, si nécessaire.

Dans les applications de la théorie abstraite, il est généralement montré qu'un opérateur différentiel donné A est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe dans un certain espace de Banach E. Cela nous fournit l'existence et l'unicité d'une solution du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = Au(t,x) + f(t, u(t,x)) & \text{dans } (0,T) \times \Omega \\ u(t,x) = 0 & \text{dans } (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0 & u_0 \in L^p(\Omega) \end{cases} \tag{3.21}$$

au sens de l'espace de Banach E. La solution u ainsi obtenue peut être en fait une solution classique du problème de la valeur initiale (3.21). Si tel est le cas, il est généralement prouvé en montrant que u est plus régulier que la régularité fournie par la théorie abstraite. Un outil commun dans de telles preuves de régularité est le théorème d'injection de Sobolev, dont une version sera indiquée à la fin de cette section.

3.3.1 Équations Parabolique - Théorie de L^2 :

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$.

Considérons l'opérateur différentiel d'ordre 2,

$$\begin{aligned} A(x,D)u(x) &= \sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) \\ &= -div(M(x)\nabla u(x)) + b(x).\nabla u(x) + c(x).u(x) \end{aligned}$$

Où

1. $b : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bornée, avec $\begin{cases} 0< \text{div(b(x))} <\alpha \\ \sup\limits_{x\in\Omega} |b(x)| = B \end{cases}$
2. $c \in L^\infty(\Omega)$ positive
3. $M(x) = (a_{i,j}(x))_{i,j=1,n}$ est une matrice coercitive à coefficients bornés (c-à-d) :
   (a) M est bornée : $\exists C > 0$:
   $$|a_{i,j}(x)| \leq C \quad \forall i,j = 1,n \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$
   (b) M est coercitive : $\exists \mu > 0$ tel que $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$:
   $$M\xi.\xi \geq \mu |\xi|^2$$

L'opérateur d'ordre supérieur de A est :

$$\begin{aligned} L(x,D)u(x) &= \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha D^\alpha u(x) \\ &= -div(M(x)\nabla u(x)) \end{aligned}$$

Alors, on considère le problème parabolique semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) = A(x,D)u(t,x) + f(t,u(t,x)) & \text{dans } (0,T)\times\Omega \\ u(t,x) = 0 & \text{dans } \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0 & u_0 \in L^2(\Omega) \end{cases} \tag{PPSL$^{L^2}$}$$

Le but est de trouver une fonction u solution de $(PPSL^{L^2})$ et qui vérifie ces conditions aux bords. L'existence d'une telle solution s'obtient grâce à l'inégalité de Garding et le théorème de Lax-Milgram.

Théorème 3.3.1. [6] *L'opérateur A est fortement elliptique s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$Re(-1)^m L(x,\xi) \geq C|\xi|^2 \qquad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

L'opérateur A défini dans $(PPSL)$ est un opérateur fortement elliptique.

Pour les opérateurs fortement elliptiques, nous avons l'estimation importante suivante.

Théorème 3.3.2. [6]***(L'inégalité de Garding)*** *Si A est un opérateur fortement elliptique d'ordre 2 alors, il existe des constantes $C_0 > 0$ et $\lambda_0 \geq 0$ telles que on a :*

$$\forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad Re(Au,u)_{L^2} \geq C_0||u||^2_{W^{1,2}} - \lambda_0||u||^2_{L^2}$$

La preuve de l'inégalité de Garding est généralement basée sur la définition d'une ellipticité forte.

$$\begin{aligned} \langle Au,u\rangle &= \langle -div(M\nabla u) + b(x)\nabla u + c(x)u, u\rangle \\ &= \int_\Omega -div(M\nabla u).u + \int_\Omega b(x)\nabla u.u + \int_\Omega c(x)u^2 \\ &\geq \int_\Omega M\nabla u.\nabla u + \int_\Omega b(x)\nabla u.u \\ &\geq \mu|\nabla u|^2 - \int_\Omega div(b(x))u^2 \\ &\geq \mu||\nabla u||^2_{L^2} - \frac{\alpha}{2}||u||^2_{L^2} \\ &\geq \mu||u||^2_{W^{1,2}} - \frac{\alpha}{2}||u||^2_{L^2} \end{aligned}$$

Théorème 3.3.3. [6] *Soit $A(x,D)$ défini dans $(PPSL^{L^2})$. Pour tout λ satisfaisant $Re\lambda \geq \lambda_0$*

et pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ satisfaisant l'équation

$$\lambda u + A(x, D)u = f$$

Preuve. *On peut donc appliquer le théorème de Schauder et prouver l'existence d'une solution faible unique $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème aux limites*

$$\lambda u + A(x, D)u = \lambda u - div(M\nabla u) + b(x)\nabla u + c(x)u = f \tag{3.22}$$

On définit l'opérateur

$$\begin{array}{rlll} F : H_0^1(\Omega) \longrightarrow & L^2(\Omega) \longrightarrow & H_0^1(\Omega) \longrightarrow & H_0^1(\Omega) \\ v \longrightarrow & \overline{f}(v) \longrightarrow & i(\overline{f}(v)) \longrightarrow & u \end{array}$$

avec $\overline{f}(v) = f - b(x)v$ et u est solution du problème

$$\begin{cases} -div(M\nabla u) + c(x)u = f - b(x).\nabla v & dans\ \Omega \\ u = 0 & dans\ \partial\Omega \end{cases} \tag{$\bigstar$}$$

Montrons tout d'abord que F est bien défini. En effet

pour tout $\varphi \in H_0^1$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega -div(M\nabla u).\varphi + c(x)u.\varphi &= \int_\Omega -div(M\nabla u).\varphi + \int_\Omega c(x)u.\varphi \\ &= \int_\Omega M\nabla u.\nabla\varphi + \int_\Omega c(x)u.\varphi \\ &= \int_\Omega f.\varphi - \int_\Omega b(x)\nabla v.\varphi \end{aligned}$$

On pose

$$a(u, \varphi) = \int_\Omega c(x)u.\varphi + \int_\Omega M\nabla u.\nabla\varphi$$

$$l(\varphi) = \int_\Omega f.\varphi - \int_\Omega b(x)\nabla v.\varphi$$

1. *La coercitivité de $a(.,.)$:*

$$a(u,u) = \int_\Omega c(x)u^2 + \int_\Omega M\nabla u.\nabla u$$

$$\geq ||u||^2_{L^2(\Omega)} + \mu||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\geq C\left(||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}\right) \quad (C = \min(1,\mu))$$

$$\geq C||u||^2_{H^1_0(\Omega)}$$

2. *La bilinéarité de $a(.,.)$:*

$$a(u+w,\varphi) = \int_\Omega c(x)(u+w).\varphi + \int_\Omega M\nabla(u+w)\nabla\varphi$$

$$= \int_\Omega c(x)u.\varphi + \int_\Omega c(x)w.\varphi + \int_\Omega M\nabla u\nabla\varphi + \int_\Omega M\nabla w\nabla\varphi$$

$$= a(u,\varphi) + a(w,\varphi)$$

$$a(u,\varphi+\Psi) = \int_\Omega c(x)u.(\varphi+\Psi) + \int_\Omega M\nabla u\nabla(\varphi+\Psi)$$

$$= \int_\Omega c(x)u.\varphi + \int_\Omega M\nabla u\nabla\varphi + \int_\Omega c(x)u.\Psi + \int_\Omega M\nabla u\nabla\Psi$$

$$= a(u,\varphi) + a(u,\Psi)$$

3. *La continuité de* $a(.,.)$ *:*

$$|a(u,\varphi)| = \left|\int_\Omega c(x)u.\varphi + \int_\Omega M\nabla u.\nabla\varphi\right|$$

$$\leq C\int_\Omega |u.\varphi| + \int_\Omega |M\nabla u.\nabla\varphi|$$

$$\leq C||u||_{L^2(\Omega)}.||\varphi||_{L^2(\Omega)} + \mu||\nabla u||_{L^2(\Omega)}.||\nabla\varphi||_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq (C+\mu)||u||_{H_0^1(\Omega)}.||\varphi||_{H_0^1(\Omega)}$$

4. *La linéarité de* $l(.)$

$$l(\varphi+\Psi) = \int_\Omega f.(\varphi+\Psi) - \int_\Omega b(x)\nabla v(\varphi+\Psi)$$

$$= \int_\Omega f.\varphi + \int_\Omega f.\Psi - \int_\Omega b(x)\nabla v.\varphi - \int_\Omega b(x)\nabla v.\Psi$$

$$= l(\varphi) + l(\Psi)$$

5. *La continuité de* $l(.)$

$$|l(\varphi) = \left|\int_\Omega f.\varphi - \int_\Omega b(x)\nabla v.\varphi\right|$$

$$\leq \int_\Omega |f.\varphi| + \int_\Omega |b(x)\nabla v.\varphi|$$

$$\leq ||f||_{L^2(\Omega)}.||\varphi||_{L^2(\Omega)} + B\int_\Omega \nabla v.\varphi$$

$$\leq ||f||_{L^2(\Omega)}.||\varphi||_{H_0^1(\Omega)} + B||\nabla v||_{L^2(\Omega)}.||\varphi||_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C||\varphi||_{H_0^1(\Omega)}$$

D'après le théorème de Lax-Milgram on déduit qu'il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfaisant le problème (★), ainsi F est bien défini.

Montrons que F admet un point fixe, pour ce faire nous utilisons le théorème de Schauder.

Montrons qu'il existe un convexe C tel que $F(C) \subset C$

Soit

$$v \in B(0,R) \subset H_0^1(\Omega), \qquad notons \;\; u = F(v)$$

On a

$$\int_\Omega M\nabla u.\nabla u + \int_\Omega c(x)u^2 = \int_\Omega f.u - \int_\Omega b(x)\nabla u.u$$

$$\mu \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq ||f||_{L^2(\Omega)}||u||_{L^2(\Omega)} + \sup_{x\in\Omega}|b(x)| \int_\Omega |\nabla u||u|$$

$$\leq ||f||_{L^2(\Omega)}||u||_{H_0^1(\Omega)} + B||v||_{H_0^1(\Omega)}||u||_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\mu||u||^2_{h_0^1(\Omega)} \leq \left[||f||_{L^2(\Omega)} + B||v||_{H_0^1(\Omega)}\right] ||u||_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\mu||u||_{H_0^1(\Omega)} \leq \left[||f||_{L^2(\Omega)} + BR\right] = R$$

Alors

$$R = \frac{||f||_{L^2(\Omega)}}{\mu - B}$$

Montrons que F est complètement continu :

En effet, comme F est la composée d'application continue et l'injection compacte de $L^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$

Par conséquent, par le théorème de Schauder F admet un point fixe u, autrement dit : u est la solution de

$$\begin{cases} \lambda u - div(M\nabla u(t,x)) + b(x)\nabla u(t,x) + c(x)u(t,x) = f & dans \ (0,T)\times\Omega \\ u(t,x) = 0 & dans \ \partial\Omega \end{cases}$$

Ainsi $(\lambda I + A(x,D))$ est surjectif.

Définition 3.3.1. [6] *Soit $A(x,D)$ l'opérateur défini dans $(PPSL^{L^2})$ et $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.*

Pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$, on définit

$$Au = A(x, D)u$$

Avec cette définition on a :

Existence et unicité des solutions :

Théorème 3.3.4. [6] *Soit $H = L^2(\Omega)$ et soit A l'opérateur défini ci-dessus.*

Pour tout λ satisfaisant $Re\ \lambda \geq 0$ l'opérateur $A_\lambda = -(A+\lambda I)$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions sur $H = L^2(\Omega)$.

De plus

Si $\lambda = 0$, alors le problème à valeur initiale $(PPSL^{L^2})$ admet une solution unique u.

Preuve. *Il est Clair que $\mathcal{D}(A_\lambda) = \mathcal{D}(A) \supset C_0^\infty(\Omega)$. Puisque $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans H, il s'ensuit que $\mathcal{D}(A_\lambda)$ est dense dans H.*

Aussi, de l'inégalité de Garding nous avons :

$$\begin{aligned} Re\ (A_\lambda u, u)_{L^2} &= \langle -Au - \lambda u, u\rangle \\ &= \langle div(M\nabla u) - b(x)u - c(x)u - \lambda u, u\rangle \\ &= \int_\Omega -M\nabla u.\nabla u - \int_\Omega b(x)\nabla u.u - \int_\Omega (c(x)+\lambda)|u|^2 \\ &\leq -\mu||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\alpha}{2}||u||^2_{L^2(\Omega)} - (c(x)+\lambda)||u||^2_{L^2(\Omega)} \leq 0 \end{aligned}$$

Puisque $Re\ \lambda \geq 0$, $Re(A_\lambda u, u)_{L^2}(\Omega) \leq 0$ et A_λ est dissipatif.

Enfin, si $Re\ \lambda \geq 0$, alors

$$Im\ (\mu I + A_\lambda) = H \qquad pour\ chaque \qquad \mu > 0$$

Ceci est une conséquence directe du Théorème (3.3.3).

Du Théorème 2.5.2, il suit maintenant que A_λ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions sur $H = L^2(\Omega)$.

Si $\lambda = 0$ alors $A_\lambda = -A$, est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contraction.

D'après le Théorème de Hille-Yoshida $-A$ est m-dissipatif. Par conséquent l'existence et l'unicité de la solution du problème $(PPSL^{L^2})$ est une conséquence du Théorème (3.2.1)

Régularité des solution :

Théorème 3.3.5. [6] *Soit A l'opérateur défini dans* $(PPSL^{L^2})$.

Pour tout $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *le problème* $(PPSL_h^{L^2})$ *admet une solution unique*

$$u \in C^1([0, +\infty[, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

De plus, Pour tout $f \in L^2(\Omega)$ *satisfaisant*

$$\int_\Omega |f(t,x) - f(s,x)|^2 dx \leq K|t-s|^2 \qquad (\bigstar\bigstar)$$

Alors, pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$ *le problème* $(PPSL_{nh}^{L^2})$ *admet une solution unique*

$$u \in C^1(]0, +\infty[, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

Preuve. *Existence, unicité et la régularité de solution du problème* $(PPSL_h^{L^2})$ *découle du Théorème* (3.1.3).

Par contre la régularité de solution du problème $(PPSL_{nh}^{L^2})$ *est une conséquence du Théorème* (3.2.1) *en remarquant que* $(\bigstar\bigstar)$ *n'est autre que la lipschitziennité de f dans* $L^2(\Omega)$.

3.3.2 Équations Parabolique - Théorie de L^p :

Soit Ω un domaine borné avec une frontière régulière dans $\mathbb{R}^n$.

Dans la section précédente, nous avons considéré les semi-groupes définis sur l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$. Il est souvent utile de remplacer l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ par l'espace de Banach $L^P(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Ceci est généralement important si l'on souhaite obtenir des résultats de régularité optimaux.

Dans la présente section, nous discuterons de la théorie des semi-groupes associés aux opérateurs différentiels fortement elliptiques de type divergence dans $L^P(\Omega)$.

Considérons le problème parabolique semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = div(M(x)u(t,x)) + f(t, u(t,x)) & \text{dans } (0,T) \times \Omega \\ u(t,x) = 0 & \text{dans } \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0 & u_0 \in L^p(\Omega) \end{cases} \qquad (\text{PPSL}^{L^p})$$

Définition 3.3.2. [6] *Soit A un opérateur fortement elliptique d'ordre 2 sur un domaine borné*

Ω à frontière régulière $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^n$ et $1 < p < \infty$

L'opérateur défini par

$$A^*(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\overline{a_\alpha(x)} u)$$

est appelé l'adjoint formel de A

Théorème 3.3.6. [6] *Soit A un opérateur fortement elliptique d'ordre 2 sur un domaine borné Ω à frontière régulière $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^n$ et soit $1 < p < \infty$. Il existe une constante C telle que*

$$||u||_{W^{2,p}} \leq C(||Au||_{L^p} + ||u||_{L^p}) \tag{3.23}$$

pour tout $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$

l'utilisation de cette estimation à priori prouve le théorème suivant.

Théorème 3.3.7. *Soit A un opérateur fortement elliptique d'ordre 2 sur un domaine borné Ω à frontière régulière $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^n$ et soit $1 < p < \infty$. Il existe une constante $C > 0$ tel que*

$$||u||_{L^p} \leq \frac{C}{\lambda} ||(\lambda I + A)u||_{L^p} \tag{3.24}$$

pour tout $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\lambda > 0$.

Pour un opérateur fortement elliptique A, on associe un opérateur linéaire non borné A_p dans $L^P(\Omega)$ comme suit :

Définition 3.3.3. [6] *Soit A un opérateur fortement elliptique d'ordre 2 sur un domaine borné Ω à frontière régulière $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^n$ et $1 < p < \infty$.*

On pose

$$\mathcal{D}(A_p) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.25}$$

et

$$A_p u = Au \quad \forall u \in \mathcal{D}(A_p) \tag{3.26}$$

Le domaine $\mathcal{D}(A_p)$ contient $C_0^\infty(\Omega)$ et il est donc dense dans $L^P(\Omega)$.

De plus, du Théorème (3.3.6) il découle aisément. que A_p est un opérateur fermé dans $L^P(\Omega)$.

Avec cette définition, nous avons :

Lemme 2. *Soit A un opérateur fortement elliptique d'ordre 2 sur Ω et soit A_p, $1 < p < \infty$, l'opérateur qui lui est associé par la définition* (3.3.3) .

L'opérateur A_q^* , $q = \dfrac{p}{p-1}$ *associé par la définition* (3.3.3) *à l'adjoint formel* A^* *de* A *sur* $L^q(\Omega)$ *est l'opérateur adjoint de* A_p.

En effet : Des Théorèmes (3.3.7) et (3.3.6) on déduit,

Existence et unicité des solutions :

Théorème 3.3.8. [6] *Si* A_p *est l'opérateur associé à* A *par la définition* (3.3.3) *alors* A_p *est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe de contraction sur* $L^P(\Omega)$.

De plus, Le problème à valeur initiale $(PPSL^{L^p})$ *admet une unique solution* u.

Preuve. *Il suffit de montrer que* A_p *est m-dissipatif dans* L^p

On utilise la caractérisation de Lumer-Phillips avec $u^* = |u|^\alpha u$, *avec*

$$\alpha = \begin{cases} p-2 & p > 2 \\ p-1 & 1 < p < 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\langle A_p u, u^* \rangle &= \langle div(M\nabla u), |u|^\alpha u \rangle \\
&= -\int_\Omega M\nabla u.\nabla \left[|u|^\alpha u\right] \\
&= -(\alpha+1)\int_\Omega M\nabla u.|u|^\alpha \nabla u \\
&\leq -(\alpha+1)C_0 \int_\Omega |\nabla u|^2.|u|^\alpha \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Alors A_p *est dissipatif, par conséquent*

$$||\lambda u - A_p u||_{L^p(\Omega)} \geq \lambda ||u||_{L^p(\Omega)} \tag{3.27}$$

Pour montrer la surjectivité de l'opérateur $(\lambda I - A_p)$ *c-à-d*

$$\forall f \in L^p(\Omega),\ \exists u \in \mathcal{D}(A_p), \qquad \lambda u - A_p u = f$$

il suffit de montrer que

$$(Im(\lambda I - A_p))^{\perp} = \{0\}$$

c-à-d

$$\langle(\lambda I - A_p)u, v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{D}(A_p), \quad \forall v \in L^q$$

En effet

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \lambda u - A_p u, v\rangle \\ &= \langle u, \lambda v - A_q v\rangle \end{aligned}$$

Remplacent dans (3.27)*, on trouve :*

$$\lambda ||v||_{L^q(\Omega)} \leq 0 \Rightarrow v = 0$$

Par conséquent

$$(Im(\lambda I - A_p))^{\perp} = \{0\} \Rightarrow Im(\lambda I - A_p) = E$$

D'après le Théorème 2.4.1*,* A_p *est m-dissipatif.*

Alors A_p *est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe de contraction dans* $L^p(\Omega)$*.*

Par conséquent, le problème $(PPSL^{L^p})$ *admet une solution unique.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Haim Brezis**, Analyse Fonctionnelle Théorie et Application, Masson, Paris, 1983.

[2] **Haim Brezis**, Initiation à l'analyse des opérateurs monotones, 1966.

[3] **Cazenave T, Haraux A**, An Introduction to Semilinear Evolution Equations

[4] **G. CARLIER**, ANALYSE FONCTIONNELLE, ENS, 2009-2010.

[5] **S. LUBKIN**, C_0-Semigroups and applications, Elsevier Science B. V. 2003.

[6] **A. Pazy**, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations

[7] **Jean-Pierre-RAYMOND**, Équations d'évolutions