République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulaire
Ministère de l'**E**nseignement **S**upérieur et de
La **R**echerche **S**cientifique
Université Ibn Khaldoun – Tiaret –

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département des MATHEMATIQUES

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

DOMAINE : MI

FILIERE : MATHEMATIQUES

SPECIALITE : ANALYSE FONCTIONNELLE ET APPLICATION

Présenté par :

Hassani Ali Taha

Fatah Nawal

Boussouar Badra

SUJET DU MEMOIRE :

Mesures de non compacité dans les espaces des fonctions continues et applications

SOUTENU LE : 02/ 11 / 2020 Devant Le Jury Composé de :

Mr : K.Benia		Président
Mr : S.Baghdad		Encadreur
Mme : S.Sabit		Examinatrice

Année Universitaire : 2019/2020

—— Je dédie ce travail à ——

Je dédie ce travail

À mon père et à ma mère qui m'a toujours encouragé,

sans oublier mes chers frères et ma grande famille,

avec l'espoir que ce travail peut apporter un plus de joie À tous ceux que j'aime et à qui m'aime

À mes chères amies , pour leurs soutien moral et leurs encouragements

Pour leur sincère amitié et confiance

À tous mes amis de la promotion de mathématique

Fateh Nawal

__________Je dédie ce travail à __________*

Après de longues années d'études et de travail, nous dédions ce modeste travail :

A mes très chers parents, que dieu les bénisse et les protège pour leurs soutien moral et financier, pour leurs encouragements et les sacrifices qu'ils ont endurés.

A mes frères et mes sœurs , A toute ma grande famille , A mes enseignants qui nous ont dirigé et aidé .

A tous ceux qui nous connaissent de près ou de loin.

Nous tenons enfin de dédier ce travail à tous mes amis d'étude et mes collègues .

A tous les proches qu'ils sont mentionnés et les autres qu'ils sont oubliés veuillez nous excuser.

Bousouar Badra

*_________ *Je dédie ce travail à* _________* *

Je dédie ce travail

A mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A mes chers frères , pour leurs soutien moral et leurs encouragements

A mes enseignants pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire .

_____________ *Hassani Ali Taha* _____________

__________ Remerciement __________*

Nos remerciements avant tout le Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.

Nous tenons également à exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur Monsieur S.Baghdad

pour m'avoir donné la chance de travailler tout le long de la réalisation de ce mémoire et qui n'a pas cessé de nous donner ses conseils et remarques.

Nous remerciements s'adressent aussi aux membres de jury, pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant de juger ce travail.

Nos remerciements vont également à tous les professeurs et enseignants du départment mathématique qui ont suivi toute au long de notre cycle d'étude.

Nous exprimons nos profondes gratitudes à nos parents pour leurs encouragements, leur soutien et pour les sacrifices qu'ils ont enduré. Nous tenons à remercier vivement toutes personnes qui nous ont aidés de près ou de loin à élaborer et réaliser ce mémoire.

Et un grand merci à nos familles ainsi que nos amis et collègues pour leurs encouragements.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'analyse mathématique est considérée comme l'une des sciences mathématiques, elle se développe dans ces dernières années par un afflux d'hypothèses et de théorèmes, en particulier dans l a notion de la mesure de non compacité , cette notion ayant plusieurs applications dans la topologie, l'analyse fonctionnelle et la Théorie des opérateurs. Elle est apparue la première fois par le mathématicien Kuratowski en 1930.

le théorème de points fixes est au cœur de l'analyse non linéaire puisqu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans beaucoup de problèmes non linéaires différents. Il y a différentes applications dans la topologie et dans les autres sciences telles que la physique, la chimie, la biologie et l'économie ... etc.

La première apparition de la théorie du point fixe était à la fin du 19 ème siècle par le mathématicien polonais Banach intitulée, le principe de la contraction. Ce théorème est souvent mentionné comme le théorème du point fixe de Banach qui l'a énoncé en 1922 dans le cadre de la résolution des équations intégrales. Il est employé pour trouver des solutions approximatives et successives et L'existence d'une seule solution des équations notamment les équations différentielles. Ce théorème est appliqué dans l'espace métrique complet .

Au cours des dernières années, des nombreux articles ont été consacrés à la notion de mesure de non-compacité. Les articles les plus explicatifs sur ce sujet. La notion de mesure de non-compacité a été définie de plusieurs façons. Où les mesures de non compacité se sont également avérées très utiles en théorie des points fixes métriques, donnant des résultats d'existence ou de stabilité pour des applications non expansives et uniformément lipchitziennes basées sur certains coefficients définis en termes de telles mesures .

En 1955, G. Darbo, en utilisant le concept d'une mesure de non-compacité, a prouvé un théorème garantissant l'existence de points fixes des opérateurs condensantes , Ce théorème trouvé une abondance d'applications pour prouver l'existence des solutions pour une large classe d'équations différentielles et intégrales .

Notre objectif dans ce sujet est comment utilisé la notion de la mesure de non compacité pour prouver l'existence de la solution d'une équation intégrale à l'aide de la théorie du point fixe Notre travail est divisé en trois chapitres :.

Le premier chapitre contient un rappel sur certaines notions utilisées tout au long de ce mémoire, comme : les espaces métriques, les espaces complets, les espaces de Banach, quelques éléments d'analyse fonctionnelle.

Le deuxième chapitre, on présente quelque définitions et notions sur la mesure de Non compacité comme la mesure de Kuratowski et Hausdorff sur les ensembles bornés et Les opérateurs, nous présenterons également quelques propriétés fondamentales ainsi que le théorème de Schauder et quelques théorèmes du point fixe qui sont liés à la mesure de non-compacité dans l'espace de Banach, (théorème de Darbo . . .) .

Dans le troisième chapitre , on va l'appliquer le théorème du point fixe sur les équations intégrales pour démontrer l'existence de la solution de cette équation. Avec la mesure de non compacité .

on va étudier l'existence et le comportement asymptotique des solutions de d'équation intégrale de type Hammerstein.

$$x(t) = g(t) + f(t, x(t)) \int_0^\infty K(t, s)h(s, x(s))ds; \quad t \geq 0.$$

et l'équation intégrale singulière non linéaire de type Volterra de la form :

$$x(t) = a(t) + x(t) \int_0^t \frac{v(t, s, x(s))}{(t-s)^\alpha} ds.$$

$$\text{où } t \in I = [0, M], \quad M < \infty \quad \text{et} \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRE

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.0.1 *Une distance sur un ensemble* E *est une application* $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ *telle que, pour tout* $x, y, z \in E$:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, ($d$ *est séparation)*
2. $d(x, y) = d(y, x)$, *(d est symétrie)*
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, *(inégalité triangulaire).*

Le couple (E, d) *est appelé un espace métrique.*

1.1.1 Topologie des espaces métriques

Définition 1.1.1.1 *Dans un espace métrique* (E, d), *on appelle boule ouverte (resp. boule fermé) de centre* $a \in E$ *et de rayon* $r > 0$, *le sous-ensemble :*

$$B(a, r) = \{x \in E, d(a, x) < r\} \text{ (resp. } B_f(a, r) = \{x \in E, d(a, x) \leq r\})$$

Définition 1.1.1.2 *Soient* (E, d) *un espace métrique et* A *une partie de* E. *On dit que* A *est bornée si et seulement si :*
$\exists M \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $\forall (x, y) \in A^2, \quad$ *on a* $\quad d(x, y) \leq M$.

Définition 1.1.1.3 *Soit* A *une partie non vide et bornée de* E*. On appelle diamètre de* A *le nombre* $\delta(A)$ *défini par :*

$$\delta(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} d(x,y)$$

Remarques 1.1.1.1 $\delta(\emptyset) = 0$

Définition 1.1.1.4 *Soit (E,d) un espace métrique, A et B sont des parties bornées de E et* $x \in E$
On définit la distance entre x *et* A *par*

$$d_A(x) = \inf_{y\in A} d(x,y)$$

1.1.2 Suites dans les espaces métriques

Définition 1.1.2.1 ***(Convergence)***
Soit (E, d) *un espace métrique. Une suite* $(x_n)_n$ *de* E *est dite convergente vers un élément* x *de* E *si*
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geqslant N_0 \Rightarrow d(x_n, x) \leq \varepsilon$ *.*

Définition 1.1.2.2 ***(Suite de Cauchy)***
Soit (E, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_n$ *est une suite de Cauchy si*
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}$ *tel que* $m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$*.*

Proposition 1.1.2.1

1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Proposition 1.1.2.2 ***(Espace métrique complet)***
Soit (E, d) *un espace métrique, on dit que* (E, d) *est complet si toute suite de Cauchy est convergente dans* E*.*

1.1.3 Applications continues

Définition 1.1.3.1 *Soient* (E, d) *et* (F, δ) *deux espaces métriques, et* $f : E \to F$ *est une application, on dit que* f *est continue en* $a \in E$ *si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E, d(x, a) < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Remarques 1.1.3.1 *Une application* f *est continue sur* E *si et seulement si elle est continue en tout point a de* E.

Définition 1.1.3.2 *on dit que* f *est uniformément continue si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in E, d(x, y) < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Théorème 1.1.3.1 *Soient E et* F *deux espaces métriques et* $f : E \to F$ *et soit* $b = f(a)$ *on* a f *est continue en* $a \Leftrightarrow$ *si* V *est un voisinage de* b *alors* $f^{-1}(V)$ *est un voisinage de a.*

Corollaire 1.1.3.1 ***(Caractérisation d'une application continue)***
Les trois conditions ci- dessous sont équivalentes.
(i) $f : E \to F$ *est continue en tout point de* E
(ii) Pour tout ouvert U *de* F *alors* $f^{-1}(U)$ *est un ouvert de* E
(iii) Pour tout fermé W *de* F *alors* $f^{-1}(W)$ *est un fermé de* E.

Définition 1.1.3.3 ***(Application lipschitzienne)***
Une application $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ *est dite lipschitzienne s'il existe une constante* $k \geq 0$ *telle que*

$$\forall (x, y) \in E^2, d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y)$$

Définition 1.1.3.4 *Toute application lipschitzienne est continue et en particulier, uniformément continue, i.e.*
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,$ *tel que* $\forall x, y \in E, d_E(x, y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$

Remarque 1.1.3.1 *Si la constante* $k < 1$ *et si* $E = F$, *on dit que* f *est une contraction.*

Définition 1.1.3.5 ***(Le point fixe)***
. Soient (E, d) *un espace métrique, et* $f : E \to E$ *une application, on dit qu'un point* $x \in E$ *est un point fixe de* f *si et seulement si* $f(x) = x$.

Définition 1.1.3.6 ***(La limite)***
. Soient $(E, \|.\|)$ *et* $(F\|.\|)$ *désignent deux espaces vectoriels normés,* A *est une partie de* E *et* $f : A \to F$ *est une fonction.*
Soit $a \in \bar{A}$. *On dit que* f *admet une limite en* a *sil existe* $l \in F$ *tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ \textit{tel que}\ \forall x \in B(a, \delta) \cap A, \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon$$

Si f *admet une limite en a, cette limite est nécessairement unique.*

1.1.4 Compacité

Définition 1.1.4.1 ***(Les ensembles compacts)***
On dit qu'un ensemble A *de E est compact si de toute suite d'éléments de* A, *on peut extraire une sous-suite converge vers un élément* deA.

Définition 1.1.4.2 ***(Autre définition d'ensemble compact)***
Soit A un ensemble d'un espace normé E, A *est dit compact si de tout recouvrement de* A *par des ouverts de* A *on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e.*

$$\forall V_j, j \in J(\textit{ ouverts });U \subset \bigcup_{j\in J} V_j, \exists V_{j(k)}, k = 1, 2, \ldots, n \ \textit{tel que}\ U \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{j(k)}$$

Proposition 1.1.4.1 .

1. *Si* A *est compact, alors* A *est fermé et borné.*
2. *Si* E *est de dimension finie, alors* A *est compact si et seulement si* A *est fermé et borné.*

Définition 1.1.4.3 ***(Les ensembles relativement compacts)***
On dit qu'un ensemble A *de* E *est relativement compact si et seulement si son adhérence* $\bar{A}$ *est compact.*

Définition 1.1.4.4 ***(L'application complètement continue)***
Soient E et F *deux espaces de Banach,*Ω *une partie non vide de* E
Une application $f : \Omega \subseteq E \to F$ *est dite complètement continue si et seulement si elle est continue et l'image de tout ensemble borné* X *de* Ω *est un ensemble relativement compact de* F c'*est-d-dire*, $\overline{f(X)}$ *est un compact.*

1.2 Espaces vectoriels normés

Définition 1.2.0.5 *Soit E un espace vectoriel sur R Une application* $N : E \to R$ *est une norme ssi*

1. . $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ *(homogénéité)*
2. $\forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire)*
3. $\forall x \in E, N(x) \geq 0$ *(positivité)*
4. $\forall x \in E, N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *(définie).*

Remarque 1.2.0.1 *Un espace vectoriel normé (e.v.n.) est un couple* $(E, \|.\|)$. *Il s'agit d'un cas particulier d'espace métrique muni de la distance*

$$d(x, y) := \|x - y\|, \quad x, y \in E$$

Définition 1.2.0.6 *(Normes équivalentes)*
Deux normes N_1 *et* N_2 *définies sur un espace vectoriel* E *sont équivalentes si*

$$\exists \alpha > 0, \beta > 0 \text{ t.q. } \forall x \in E \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

1.2.1 Convexité

Un sous-ensemble X d'un espace vectoriel normé E est dit :

1. $i)$ Affine si et seulement si :

$$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (1-\lambda)x + \lambda y \in X$$

2. ii) Convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0,1]\mathbb{R}, (1-\lambda)x + \lambda y \in X$$

Autrement dit, un ensemble est affine (resp. convexe) s'il contient toute droite (resp. tout segment) passant par deux de ses points.

Exemples :

Nous commençons par quelques exemples élémentaires.

1. i) Tout ensemble affine est convexe.
2. ii) Soit $\|.\|$ une norme sur l'espace vectoriel E. Pour tout $x \in E$ et $r \geq 0$, la boule centrée en x et de rayon r (ouverte ou fermée) est convexe
3. Pour toute forme linéaire $\varphi : E \to R$ et $b \in \mathbb{R}$, le sous-niveau

$$s = \{x \in E, \phi(x) \leq b\}$$

est un ensemble convexe appelé demi-espace.

En effet, soient x ; $y \in S$ et $\lambda \in [0;1]$ on a

$$\begin{aligned} \phi(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y) \\ &\leq \lambda b + (1-\lambda)b \\ &= b \end{aligned}$$

alors,

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in S$$

Définition 1.2.1.1 ***(L'enveloppe convexe et fermé)***

Soit Ω un ensemble d'un espace vectoriel normé E. On dit que l'enveloppe convexe et fermé d'ensemble Ω est un plus petit convexe et fermé contient à Ω i.e.

$$Conv\ \Omega = \bigcap\{K \subset E : K \supset \Omega, K \text{ est convexe et fermé }\}$$

Définition 1.2.1.2 ***(Les applications convexes)***
Soit f *une application d'espace vectoriel normé* E *dans* $\mathbb{R}$*. On dit que l'application* f *est convexe sur* E*, si pour tout* $x; y \in E$ *et* $\lambda \in [0; 1]$ *on a*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Exemple : La norme $\|.\|$définie sur l'espace de Banach E est une application convexe. En effet, soient $x; y \in E$ et $\lambda \in [0; 1]$ on a :

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| &\leq \|\lambda x\| + \|(1 - \lambda)y\| \\ &= |\lambda|\|x\| + |(1 - \lambda)|\|y\| \\ &= \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\| \end{aligned}$$

1.2.2 Espaces de Banach

Définition 1.2.2.1 *Tout espace vectoriel normé complet est dit espace de Banach.*

Corollaire 1.2.2.1 *out sous-espace vectoriel (sev) fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach pour la norme induite.*

Théorème 1.2.2.1 *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Corollaire 1.2.2.2 *Tout evn de dimension finie est un espace de Banach.*

Définition 1.2.2.2 ***(algèbre de Banach)***
Soit A *une Algèbre sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *équipée d'une norme* $\|.\|$*. et l'opération interne de multiplication* $(x, y) \to xy$ *de* $A \times A$ *dans* A *telle que, quels que soient* $x \in A$*,* $y \in A$ *et* $\lambda \in K$*, on a :*

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

A est une Algèbre de Banach si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
- $(A, \|.\|)$ *est un espace de Banach.*
- *Pour tous* $x, y \in A$ *on a*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

On dit que l'algèbre est unitaire si elle contient un élément unité, c'est-à-dire un élément e *tel que, pour tout* $x \in A$, $ex = xe = x$.

Enfin, nous dirons qu'une Algèbre A *est commutative si* $xy = yx$ *pour tous* $x, y \in A$

1.3 Espaces des fonctions continues

1.3.1 Espace des fonctions continues sur [a,b]

Définition 1.3.1.1 *Soit* $[a, b]$ *intervalle dans* $\mathbb{R}$ *Notons*

$$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ \textit{continue}\,\} \quad \textit{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[a;b]} |f(x)|$$

Si on définit le produit $(f.g)(x) = f(x).g(x), f, g \in C([a, b])$ *, alors* $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ *et* $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ *-est une algèbre de Banach.*

1.3.2 Espace des fonctions continues bornées

Définition 1.3.2.1 *soit* I *intervalle dans* $\mathbb{R}$ *, on note* $BC(I)$ *l'ensemble des fonctions continues et bornées sur* I *i.e :*

$$BC = \{f : I \to \mathbb{R} : f \textit{ est continue et bornée}\}$$

Théorème 1.3.2.1 ***(théorème de Valeur moyenne)***
Pour toute fonction f *à valeurs réelles, définie et continue sur* $[a, b]$*, avec* $a < b$*, il existe un réel* c *compris entre* a *et* b *vérifiant :*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

1.3.3 Théorème d'Ascoli-arzela

Définition 1.3.3.1 ***(Equicontinuité)***
Soit (E,d) et (F,d') deux espaces métriques et H *une partie de* $C(E, F)$. *On dira que* H *est équicontinue en* x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } d(x, x_0) \leq \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon, \forall f \in H$$

Théorème 1.3.3.1 *Soit* (E, d) *un espace métrique compact,* (F, δ) *un espace métrique complet. Une partie* A *de* $\mathcal{C}(E, F)$ *est relativement compacte si et seulement si :*

1. A *bornée*
2. A *est équicontinue*
3. $\{f(x), f \in A\}$ *est relativement compact.* $\forall x \in E$

Corollaire 1.3.3.1 *Soit* $C([a, b]; \mathbb{R})$ *L'espace des fonctions continues définies sur* $[a, b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *muni de distance de la convergence uniforme Alors* $H \subset C([a; b]; \mathbb{R})$ *est relativement compacte si et seulement si :*

1. H *équicontinue*
2. H *est bornée.*

Lemme 1.3.3.1 *Soit* $D \subset (BC)$. *Alors* D *est relativement compact dans* (BC) *si :*

- *(a)* D *est uniformément borné dans* (BC)
- *(b) les fonctions appartiennent à* D *sont équicontinues sur* R_+, *i.e équicontinues sur chaque compact de* R.
- *(c) les fonctions de* D *sont équiconvergent,* i.e *pour* $\varepsilon > 0, \exists T(\varepsilon)$ *tel que :* $|u(t) - u(+\infty)| < \varepsilon; \forall t \geq T(\varepsilon)$ *et* $u \in D$

CHAPITRE 2

MESURE DE NON COMPACITÉ

2.1 Mesure de non compacité standard

2.1.1 La mesure de non compacité en générale

Définition 2.1.1.1 ***(Notion générale)***
Une fonction ψ définie sur l'ensemble de parties d'un Banach E à valeurs dans un ensemble partiellement ordonné $(Q, \leq)$ est dite MNC si :

$$\psi(\overline{conv\Omega}) = \psi(\Omega); \qquad \forall\Omega \in P(E).$$

Définition 2.1.1.2 *Soit l'application $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty[$ On dit que μ est mesure de non compacité (MNC) avec propriétés maxima. dans l'espace de Banach X, si elle satisfait les conditions suivantes :*
$\forall A, B, B_1, B_2 \in \mathcal{M}$ *on a les propriétés suivantes*

1. *l'ensemble ker* $(\mu) = \{A \in \mathcal{M}$ *telle que :* $\mu(A) = 0\}$ *est un ensemble non vide et* $\ker(\mu) \subset \mathcal{M}$
2. *Si* $A \subset B$, *alors* $\mu(A) \leq \mu(B)$
3. $\mu(\bar{A}) = \mu(A)$
4. $\mu(\lambda A + (1-\lambda)B \leq \lambda\mu(A) + (1-\lambda)\mu(B) \quad , \forall\lambda \in [0, 1]$

5. $\mu(\text{conv}(A)) = \mu(A)$
6. $\mu(B_1 \cup B_2) = \max\{\mu(B_1), \mu(B_2)\}$
7. *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un ensemble des suites de* $\mathcal{M}$ *telle que* $A_{n+1} \subset A_n, \overline{A_n} = A_n (n = 1, 2, \dots)$ *et* $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$, *alors* $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \phi$ *et* $A_\infty \in \ker(\mu)$

Définition 2.1.1.3 *On dit que la mesure de non compacité* μ *sublinéaire, si* $\forall A, B \in \mathcal{M}$, *si elle satisfait les deux conditions suivantes :*

1. $\mu(\lambda A) = |\lambda|\mu(A) \forall \lambda \in \mathbb{R}$
2. $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$

2.1.2 La mesure de kuratowski

Définition 2.1.2.1 *Soit* (X, d) *un espace métrique, et* Q *un sous ensemble borné de* X, *alors la mesure de non compacité de Kuratowski de* Q *noté par* $\alpha(Q)$, *avec* $\alpha(Q)$ *est la borne inférieure de l'ensemble de tous les nombres* $\epsilon \geq 0$, *tels que l'ensemble* Q *admet un recouvrement fini par des ensembles* (S_i) *avec le diamètre* $\leq \epsilon$
où

$$\alpha(Q) = \inf\left\{\epsilon > 0 : Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i : S_i \subset X, \text{diam}(S_i) < \epsilon (i = 1, \dots, n); n \in \mathbb{N}\right\}$$

la fonctions α *est dit mesure de non compacité de kuratowski.*

2.1.3 La mesure de Hausdorff

Définition 2.1.3.1 *Soit* $(X, \|.\|)$ *espace métrique et* Q *un sous ensemble borné de* X, *alors la mesure de non compacité de Hausdorff de l'ensemble* Q, *noté par* $\chi(Q)$, *i.e,* $\chi(Q)$ *la borne inférieure de l'ensemble de tous les nombres* $\epsilon \geq 0$, *tel que l'ensemble* Q *admet un recouvrement fini par des boules de rayon* $r \leq \epsilon$ *autrement dit :*

$$\chi(Q) = \inf\left\{\epsilon > 0 : Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i), x_i \in X, r_i < \epsilon (i = 1, \dots, n) n \in \mathbb{N}\right\}$$

Remarque 2.1.3.1 *1. On appelle diamètre d'un ensemble Q est le nombre*

$$\sup\{d(x, y) : x \in Q, y \in Q\}$$

noté par diam(Q), ou $\delta(Q)$ *avec diam*$(\emptyset) = 0$*, Il est clair que*

$$0 \leq \alpha(Q) \leq \text{diam}(Q) < +\infty$$

pour chaque ensemble Q *borné et non vide dans l'espace de Banach* X *et* $\mathrm{diam}(Q) = 0$ *si seulement si* Q *est un ensemble vide ou se compose exactement d'un point, et on a aussi les propriétés du diamètre suivantes :*

- *Si* $Q_1 \subset Q_2$ *alors diam* $(Q_1) \leq \text{diam}\,(Q_2)$
- $\text{diam}(\bar{Q}) = \text{diam}(Q)$
- $\text{diam}\,(Q_1 + Q_2) \leq \text{diam}\,(Q_1) + \text{diam}\,(Q_2)$
- $\text{diam}(x + Q) = \text{diam}(Q), \quad \forall x \in X$
- $\text{diam}(\lambda Q) = |\lambda|\,\text{diam}(Q), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2 . Soit X *espace de Banach, ensemble finie* $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n\}$ *dans X, on dit que* ϵ *- net de l'ensemble* B*, si pou tout point*$\psi \in B$*il existe* φ_j *tel que* $\|\psi - \varphi_j\| < \epsilon$

Proposition 2.1.3.1 *Soient* Q, Q_1 *et* Q_2 *des sous ensembles borné dans un espace normé* $(X, \| - \|)$ *alors*

1. $\chi\,(Q_1 + Q_2) \leq \chi\,(Q_1) + \chi\,(Q_2)$
2. $\chi\,(Q_1 + x) = \chi\,(Q_1) \quad ,\forall x \in X$
3. $\chi\,(\lambda Q_1) = \lambda\chi\,(Q_1) \quad ,\forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. $\chi\,(Q_1) = \chi\,(\text{conv}\,(Q_1))$

Théorème 2.1.3.1 *Soient* $(X, \|\|)$ *un espace métrique,* Q *un sous-ensemble borné de* X*, alors*

$$\chi(Q) \leq \alpha(Q) \leq 2\chi(Q)$$

Dans la classe de tous les espaces de Banach de dimension infinie, ces inégalités sont les meilleur possible.

Théorème 2.1.3.2 *Soit* B *la boule unitaire* $(B(0,1))$ *dans l'espace de Banach* E, *alors* $\alpha(B) = \chi(B) = 0$ *si* E *de dimension finie, et* $\alpha(B) = 2, \chi(B) = 1$ *si* E *de dimension infinie.*

Théorème 2.1.3.3 *Les MNCs* α *et* χ *sont invariantes par passage à l'adhérence, et à l'enveloppe convexe i.e :*

$$\psi(\Omega) = \psi(\bar{\Omega}) = \psi(\text{conv}\Omega)$$

preuve : $\psi(\Omega) = \psi(\bar{\Omega})$ est évidente.

1. si S est un ε -réseau fini de Ω, alors conv S est un ε -réseau totalement borné de $conv\Omega$

$$\text{, donc}\, \chi(\Omega) = \chi(\text{conv}\,\Omega)$$

2. pour prouver que $\alpha(\Omega) = \alpha(\text{ conv }\Omega)$, on suppose que $\Omega = \cup_{k=1}^{m} \Omega_k$ et diam $\Omega_k < d; \forall k$ il est clair que : conv $\Omega = \cup \sum_{k=1}^{m} \lambda_k$ conv Ω_k où $\lambda_k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$, avec une précision arbitraire $\delta(\varepsilon)$ au sens de la métrique de Hausdorff $(\lim_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon) = 0)$, l'union de toutes les sommes peut être approchée par union finie des sommes de même forme, dans lesquelles λ parcourt un ε -réseau fini $\delta(\varepsilon)$(ou δ pour simplifier)
   D'après les propriétés de MNC α on obtiens :

$$\alpha(\text{conv}\,\Omega) = \alpha\left(\cup_{\lambda\in\delta}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\,\text{conv}\,\Omega_k\right) \leq \alpha\left(\cup_{\lambda\in\delta}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\,\text{conv}\,\Omega_k\right) + 2\delta(\varepsilon)$$
$$= \max\alpha\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\,\text{conv}\,\Omega_k\right) + 2\delta(\varepsilon) \leq \max\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\alpha\left(\text{conv}\,\Omega_k\right) + 2\delta(\varepsilon)$$

   Puisque diam (conv $\Omega_k) = \text{diam}\,\Omega_k < d$, on conclus que :

$$\alpha(\text{conv}\,\Omega) \leq d + 2\delta(\varepsilon) \text{ donc } : \alpha(\text{conv}\,\Omega) \leq \alpha(\Omega)$$

2.1.4 MNC avec Noyau

La MNC avec noyau est une sous classe de toutes les classes de MNCs dans le sens général de la définition, satisfaite des axiomes additionnels. Une famille P des parties bornées non vides d'un Banach E est dite noyau de MNC ψ si :

1. $\Omega \in P \Rightarrow \bar{\Omega} \in P$ et $conv\Omega \in P$
2. $\Omega \in P, \Omega_1 \subset \Omega$ si $\Omega_1 \neq \emptyset \Rightarrow \Omega_1 \in P$
3. $\Omega_1, \Omega_2 \in P$ et $\lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda\Omega_1 + (1-\lambda)\Omega_2 \in P$
4. l'ensemble de toutes les parties fermées de P est fermé dans M_E^c suivant la métrique de Hausdorff.

Si $\psi : 2^E \to [0, +\infty[$ est une MNC avec noyau P alors :
- ψ est monotone.
- $\psi\left[\lambda\Omega_1 + (1-\lambda)\Omega_2\right] \leq \lambda\psi\left(\Omega_1\right) + (1-\lambda)\Omega_2; \forall\lambda \in [0,1]$
- $si\left(\Omega_n\right) \subset M_E^c$, une suite décroissante i.e $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ pour tout $n = 1, 2\ldots$ et $si \lim_{n\to\infty} \psi\left(\Omega_n\right) = 0$ alors : $\Omega_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n \neq \emptyset$

La MNC ψ s'appelle aussi la fonctionnelle de Sadovskij.

Remarques 2.1.4.1 *Les MNCs α et χ sont des MNCs avec noyau N_E, le simple exemple de mesure avec $P \neq N_E$ est le diam X , où le noyau est la famille de tous les ensembles à un seul élément.*

2.2 Opérateurs Condensés

Un opérateur condensé est une application telle que l'image de tout ensemble dans certain sens est plus compact que lui même, et on peut aussi dire que cet opérateur satisfait la condition de Darbo.

2.2.1 Définitions et propriétés générales

Définition 2.2.1.1 *Soient* E_1 *et* E_2 *deux espaces de Banach, et soient* ψ_1 *et* ψ_2 *deux MNCs dans* E_1 *et* E_2 *respectivement, à valeurs dans un ensemble partiellement ordonné*$(Q, \leq)$

1. *Un opérateur continu* $f : D(f) \subset E_1 \to E_2$ *est dit* (ψ_1, ψ_2) *-condensé si* $\Omega \subset D(f)$

   $$\psi_1(\Omega) \leq \psi_2[f(\Omega)] \quad \text{implique} \quad \Omega \quad \text{est} \quad \text{relativement} \quad \text{compact.}$$

2. *Supposons que sur Q est défini une opération de multiplication par un scalaire non négatif. Un opérateur continu f est dit* (q, ψ_1, ψ_2) *-borné si pour tout* $\Omega \subset D(f)$

   $$\psi_2[f(\Omega)] \leq q\psi_1(\Omega)$$

   Quand $E_1 = E_2$ *et* $\psi_1 = \psi_2$ *nous dirons* ψ_1 *-condensé et* (q, ψ_1) *-borné.*

Exemple 2.2.1.1 1. *Tout opérateur complètement continu défini sur un ensemble borné d'un espace de Banach E est* ψ*-condensé, o'u* ψ *est définie par :*

$$\psi_1(\Omega) = \begin{cases} 0, & \textit{si } \Omega \textit{ est relativement compact} \\ 1, & \textit{autrement.} \end{cases}$$

2. *Une contraction définie sur des ensembles bornés est* ψ_2 *-condensé où* ψ_2 *est définie* du *même exemple par :*
   $\psi_2(\Omega) = \text{diam}(\Omega)$. *En effet, soit* Ω *tel que diam(* $\Omega) > 0$,
   puisque f *est contractante alors* $\exists k \in [0, 1[$ *tel que*

   $$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|, \forall x, y \in \Omega,$$

   par suite

   $$\text{diam}[f(\Omega)] \leq k\,\text{diam}(\Omega) < \text{diam}(\Omega)$$

   L'opérateur f *est ainsi* ψ_2- *condensé.*

3. *Les opérateurs complètement continus et les contractions sont* α *-condensés. De plus un opérateur complètement continu est* χ *-condensé.*

4. *Plus généralement, si* ψ *est une MNC régulière, tout opérateur complètement continu est* ψ *-condensé.*
5. *Soient deux opérateurs* $f, g : E_1 \to E_2$ *tels que f est complètement continu et* g *est contractant. Alors la somme* $h = f + g$ *est un opérateur* α *-condensé. En effet, soit* Ω *un ensemble borné dans* E_1. *On a d'une part,* $\alpha(g(\Omega)) < \alpha(\Omega)$. *D'autre part, comme* f *est complètement continu,* $\alpha(f(\Omega)) = 0$.
   Par conséquent :
   $$\alpha(h(\Omega)) \leq \alpha[f(\Omega) + \alpha(\Omega)] \leq \alpha[f(\Omega)] + \alpha[g(\Omega)] < \alpha(\Omega)$$

Proposition 2.2.1.1

1. *Si la MNC* ψ_1 *est régulière, alors tout opérateur* (q, ψ_1, ψ_2) *borné avec* $q < 1$ *est* (ψ_1, ψ_2) *-condensé.*
2. *Soient* f_1 *un opérateur* (q_1, ψ_1, ψ_2) *-borné et* f_2 *un opérateur* (q_2, ψ_2, ψ_3) *-borné alors l'opérateur* $f_2 \circ f_1$ *est* $(q_1, q_2, \psi_1, \psi_3)$ *-borné.*
3. *Soient* f_1 *un opérateur* (q_1, ψ_1, ψ_2) *-borné et* f_2 *un opérateur* (q_2, ψ_1, ψ_2) *-borné, de plus la MNC* ψ_2 *est algébriquement semi-additive et monotone, alors la somme* $f_1 + f_2$ *est un opérateur* $(q_1 + q_2, \psi_1, \psi_2) -$ *borné.*
4. *Si* f_1 *est un opérateur* (ψ_1, ψ_2) *-condensé,* f_2 *est un opérateur* (ψ_2, ψ_3) *-condensé qui transforme les ensembles relativement compacts en des ensembles relativement compacts,* ψ_1 *et* ψ_2 *sont des MNCs régulières et l'ensemble* $Q = [0, \infty)$ *alors l'opérateur composé* $f_2 \circ f_1$ *est* (ψ_1, ψ_3) *-condensé.*

2.3 Quelque théorèmes de points fixes

Définition 2.3.0.2 *Soit* T *un opérateur défini dans un espace de Banach* E *dans lui-même, alors pour tout* $x \in E$, *tel que* $x = T(x)$ *, s'appelle un point fixe de l'opérateur* T.

2.3.1 Théorème de Banach

Théorème 2.3.1.1 *Soit* (E, d) *un espace métrique complet non vide et soit* $f : E \to E$ *une application* $\alpha - \mathrm{contraction}$ *i.e il existe* $0 < \alpha < 1$ *tel que*

$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$, *pour tout* $x, y \in E$. *Alors* f *possède un unique point fixe.*

2.3.2 Théorème de Schauder

Corollaire 2.3.2.1 *Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach* E *et* $T : C \to C$ *une application compacte. Alors* T *a au moins un point fixe.*

Corollaire 2.3.2.2 *Soit* C *un sous-ensemble convexe, compact, non vide d'un espace de* Ba *Banach* E *et* $f : C \to C$ *une application continue. Alors* f *a au moins un point fixe.*

Corollaire 2.3.2.3 *Soit* C *un sous-ensemble convexe, fermé, non vide,* C *non nécessairement borné d'un espace de Banach* E *et* $f : C \to C$ *une application continue tel que* $f(C)$ *inclus dans un compact de C. Alors f a au moins un point fixe.*

2.3.3 Alternative Non Linéaire de Leray-Schauder

Théorème 2.3.3.1 *Soit* Ω *un ouvert borné d'un espace de Banach E et* $f : \Omega \to E$ *une application compacte. Alors :* ou *(i)* f *admet un point fixe dans* Ω *ou (ii) il existe* $x \in \partial\Omega$ *et* $t \in [0, 1]/x = tf(x)$.

Corollaire 2.3.3.1 *Soit* E *un espace de Banach et* $T : E \to E$ *une application compacte admettons l'hypothèse :* $(H)\forall t \in [0, 1], \exists r > 0/ [tT(x) = x \Rightarrow x \in B_r]$ *Alors* T *admet au moins un point fixe dans* B_r.

2.3.4 Théorème de Darbo

Théorème 2.3.4.1 *Soit Q un sous-ensemble borne non vide, fermé et convexe d'un espace de Banach* E, *et* $T : Q \to Q$ *un opérateur continu tel que* $\psi(TX) \leq k\psi(X)$ *pour toute partie non vide de* Q, *où* $k \in [0, 1[$. *Alors* T *a au moins un*

point fixe dans Q
ψ *désigne la M N C définie sur* E.

Remarques 2.3.4.1 *sous les hypothèses du théorème ci-dessus, il peut être montré que l'ensemble* $\mathrm{Fix}T$ *des points fixes de* T *appartenant à* Q *est un membre de la famille* $\ker\psi$ *Ce fait nous permet de caractériser des solutions d'équations d'opérateurs considérées .*

2.4 Mesure de Non Compacité dans les espaces des fonction continues

2.4.1 La mesure de Hausdorff dans C[a,b]

Théorème 2.4.1.1 *Soit* Q *ensemble borné dans* $C[a,b]$ *alors :*

$$\chi(Q) = \frac{1}{2}\lim_{\delta\to 0}\left\{\sup_{x\in Q}\left[\max_{0\le r\le\delta}\|x-x_r\|\right]\right\}$$

oû

$$x_r(t) = \begin{cases} x(t+r) & ,a \le t \le b-r \\ x(b) & ,b-r \le t \le b \end{cases}$$

2.4.2 Mesure de non compacité sur les opérateurs

Mesure de kuratowski et Hausdorff

Définition 2.4.2.1 *Soit* $T : D(T) \subseteq X \to X$ *un opérateur continu et a(.) la mesure de non compacité de kurntowski dans* X, *pour tout* $k \ge 0$

1. *On dit que* T *est un* k *- ensemble - contraction (opérateur con-tractive), si pour tout ensemble borné* A *de* $D(T), T(A)$ *est un sous-ensemble borné de* X

$$a(T(A)) \le ka(A)$$

2. *On dit que* T *est non expansive, ai pour tout sous-ensemble borné* A *de D* (T), *tel que a* $(A) > 0, T(A)$ *est une sous ensemble borné de* X, *et*

$$a(T(A)) \leq a(A)$$

- *Soit* $T : D(T) \subseteq X - X$ *wo opérateur continu, et soit* $\chi(.)$ *la mesure de non compacité de Hausdorff dans* X, *pour tout* $k \geq 0$, *On dit que* T *est* k *- boule-contraction, ai pour tout sous ensemble borne* A *de* $D(T)$, $T(A)$ *est un sous-ensemble borné dans* X, *et*

$$\chi(T(A)) \leq k\chi(A)$$

CHAPITRE 3

RÉSULTATS D'EXISTENCE DES SOLUTIONS POUR DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

NOTATIONS

Dans cette section, nous rassemblons des définitions et des faits auxiliaires qui seront nécessaires plus loin
Suppose que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach de dimension infinie avec l'élément zéro θ Notons $B(x,r)$ la boule fermée centrée en x et de rayon r. Le symbole B_r représente la boule $B(\theta, r)$ Si X est un sous-ensemble de E, alors , $\bar{X}$, $convX$ désignent respectivement la fermeture et la fermeture convexe de X Nous utilisons les symboles λX et $X + Y$ pour désigner les opérations algébriques sur les ensembles. La famille de tous les sous-ensembles non vides et bornés de E sera notée $\mathfrak{M}_E$ et sa sous-famille constituée de tous les ensembles relativement compacts est désignée par $\mathfrak{N}_E$.

3.1 Équation intégrale de type Hammerstein

Dans cette partie , on va étudier l'existence et le comportement asymptotique des solutions de d'équation intégrale de type Hammerstein.

$$x(t) = g(t) + f(t, x(t)) \int_0^\infty K(t, s)h(s, x(s))ds; \quad t \geq 0 \tag{3.1}$$

En utilisant de la méthode associée à la technique de MNCs et le théorème de points fixes de Darbo.

3.1.1 Définition de la MNC

Définition 3.1.1.1 *Soit* $X \subset M_{(BC)}$ *et* $T > 0$*, pour* $x \in X$ *et* $\varepsilon \geq 0$*, on désigne par* $\omega^T(x, \varepsilon)$ *le module de continuité de la fonction x sur l'intervalle* $[0, T]$ *i.e*

$$\omega^T(x, \varepsilon) = \sup[|x(t) - x(s)|; t, s \in [0, T]; |t - s| \leq \varepsilon]$$

En suite, nous mettons :

$$\begin{aligned} \omega^T(X, \varepsilon) &= \sup\left[\omega^T(x, \varepsilon); x \in X\right] \\ \omega_0^T(X) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \omega^T(X, \varepsilon) \\ \omega_0(X) &= \lim_{T \to \infty} \omega_0^T(X) \end{aligned}$$

En plus, on pose :

$$\beta(X) = \lim_{T \to \infty} \left\{ \sup_{x \in X} \{\sup[|x(t)|; t \geq T]\} \right\}$$

Finalement, on définis la fonction μ *sur la famille* $M_{(BC)}$ *par la formule :*

$$\mu(X) = \omega_0(X) + \beta(X)$$

Définition 3.1.1.2 *Une application* $\psi : M_E \to \mathbb{R}_+$ *est dite MNC sur* E *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *la famille ker* $\psi = \{X \in M_E; \psi(X) = 0\}$ *est non vide et ker* $\psi \in N_E$

2. $\psi(\operatorname{conv} X) = \psi(X) = \psi(\bar{X})$
3. . $X \subset Y \Rightarrow \psi(X) \leq \psi(Y)$
4. $\psi(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\psi(X) + (1-\lambda)\psi(Y) \quad \lambda \in [0, 1]$
5. si (X_n) *une suite de* M_E^c *telle que* $X_{n+1} \subset X_n$ *et* $\lim_{n\to\infty} \psi(X) = 0$ *Alors* $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ *est non vide.*
6. $\psi(\lambda X) = |\lambda|\psi(X); \quad \lambda \in \mathbb{R}$
7. $\psi(X+Y) \leq \psi(X) + \psi(Y)$
8. $\psi(X \cup Y) = \max\{\psi(X), \psi(Y)\}$
   Dans ce cas ψ *est dite MNC avec propriétés maxima.*

On peut vérifier que la fonction μ est une MNC avec propriétés maxima sur BC , et l'ensemble ker μ contient les parties X telles que les fonctions de X sont localement équicontinues sur $\mathbb{R}_+$ et elle tendent vers zéro uniformément à l'infinie avec respect de l'ensemble X , d'apres le lemme (1.3.3.1) on assure que si $\mu(X) = 0$ alors X est relativement compact.

Remarques 3.1.1.1 *Les propriétés de ker* μ *nous permettent de caractériser (dans le terme de comportement asymptotique) les solutions de l'équation (3.1)*

3.1.2 Résultats Principaux

On considère que L'équation 3.1 satisfait les conditions suivantes :

- (H_1) $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ est continue et $\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$
- (H_2) $f : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue et la fonction $t \mapsto f(t, 0) \in BC$
- (H_3) il existe une fonction continue $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que :

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq m(t)|x-y|; \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; \forall t \in \mathbb{R}$$

- (H_4) $h : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est uniformément continue sur chaque domaine de la forme

$$\mathbb{R}_+ \times [-\nu, \nu]$$

– (H_s) il existe une fonction continue $a : \mathbf{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et une autre croissante $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que :

$$|h(t,x)| \leq a(t)b(|x|); \quad t \geq 0, x \in R$$

– (H_6) $K : R_+ \times R_+ \to R$ est continue et il existe deux fonctions continues $p, q : R_+ \to R_+$ telles que $q(t)$ et $a(t)q(t)$ sont intégrables sur R_+ et vitrifient l'inéquation :

$$|K(t,s)| \leq p(t)q(s); \quad t, s \in R_+$$

De plus, on suppose que $\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$ et la fonction $m(t)p(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ Maintenant, et surtout au-dessus de notre hypothèses, on peux déduire que les constants F M, P définis par les formules :

$$F = \sup[f(t,0)]; t \geq 0]$$
$$M = \sup[m(t)p(t); t \geq 0]$$
$$P = \sup[p(t); t \geq 0]$$

Sont finis. On désigne par Q le constant : $Q = \int_0^\infty a(s)q(s)ds$, il est clair que $Q < \infty$ Dans Ia suite on suppose aussi que :

– (H_7) $\|g\| + b(r)(MQr + FPQ) \leq r$ a une solution r_0 positive.

Théorème 3.1.2.1 *Sous les hypothèses* $(H_1) - (H_7)$ *l'équation (3.1) a au moins une solution* $x = x(t)$ *dans* BC, *en plus toutes les solutions appartiennent à la boule* B_{r0} *tendent vers zéro uniformément a l'infinie avec respect la boule* B_{r_0}

Preuve 3.1.2.1 *Considérons L'opérateur* H *défini sur* BC *par la formule :*

$$(Hx)(t) = |g| + f(t, x(t)) \int_0^\infty K(t,s)h(s,x(s))ds; t \geq 0$$

A partir des hypothèses $(H_1), (H_2)$ *et* $(H_4) - (H_6)$ *la fonction* Hx *est continue sur* R_+, $\forall x \in BC$

Par application de notre hypothèses on conduit l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
|(Hx)(t)| &\leq |g| + |f(t,x(t))| \int_0^\infty |K(t,s)| \cdot |h(s,x(s))| ds \\
&\leq \|g\| + [|f(t,x(t)) - f(t,0)| + |f(t,0)|] \int_0^\infty p(t)q(s)a(s)b(|x(s)|) ds \\
&\leq \|g\| + [m(t)|x(t)| + |f(t,0)|b(\|x\|)] \int_0^\infty p(t)q(s)a(s) ds \\
&\leq \|g\| + m(t)p(t)\|x\|b(\|x\|)Q + FQb(\|x\|)p(t) \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Donc on déduis que la fonction Hx *est bornée sur* $\mathbb{R}_+$, *et on obtiens :*

$$\|Hx\| \leq \|g\| + MQ\|x\|b(\|x\|) + b(\|x\|)$$

Par conjonction de cette inéquation avec l'hypothèse (H_7) *on assure qu'il existe un nombre positif* r_0 *tel que l'opérateur* H *transforme la boule* B_{r_0} *dans elle même. Pour montrer que* H *est continu sur* B_{r_0}, *fixons* $\varepsilon > 0$ *et prenons* $x, y \in B_{r_0}$ *tels que* $\|x - y\| \leq \varepsilon$ *Alors pour* $t \in R_+$ *fixé arbitraire on obtiens :*

$$\begin{aligned}
|(Hx)(t) - (Hy)(t)| &\leq \left| f(t,x(t)) - f(t,y(t)) \int_0^\infty \right| K(t,s)| \cdot |h(s,x(s)) \mid ds + \\
&\quad |f(t,y(t))| \int_0^\infty |K(t,s)||h(s,x(s)) - h(s,y(s))| ds \\
&\leq m(t)|x(t) - y(t)| \int_0^\infty p(t)q(s)a(s)b(|x(s)|) ds + \\
&\quad [|f(t,x(t)) - f(t,0)| + |f(t,0)|] \int_0^\infty p(t)q(s)|h(s,x(s)) - h(s,y(s))| ds \\
&\leq \varepsilon m(t)p(t)b\,(r_0) \int_0^\infty q(s)a(s) ds \\
&\quad + [m(t)r_0| f(t,0)|]p(t) \int_0^\infty q(s)\omega_{r_0}(\varepsilon) ds \\
&\leq \varepsilon MQb\,(r_0) + (Mr_0 + F)\, P\omega_{r_0}(\varepsilon) \int_0^\infty q(s) ds \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Où on définit :

$$\omega_{r_0} = \sup\,[|h(s,x) - h(s,y)|; s \geq 0; x, y \in [-r_0, r_0]\,; |x - y| \leq \varepsilon]$$

Par hypothèse (H_4) *on déduit que* $\lim_{\varepsilon\to 0}\omega_{r_0}(\varepsilon)=0$. *Ainsi par (3) on conclut que l'opérateur* H *est continu sur la boule* B_{r_0} *Maintenant, on prend* $X\subset B_{r_0}$ *non vide, après fixons* $T>0$ *arbitraire et* $\varepsilon>0$, *et choisissons une fonction* $x\in X$ *et prend* $t,s\in[0,T]$ *tels que* $|t-s|\leq\varepsilon$

Alors, en vertu de notre hypothèses on a :

$$
\begin{aligned}
&|(Hx)(t)-(Hx)(s)|\leq|g(t)-g(s)|\\
&+\left|f(t,x(t))\int_0^\infty K(t,\tau)h(\tau,x(\tau))d\tau-f(s,x(s))\int_0^\infty K(t,\tau)h(\tau,x(\tau))d\tau\right|\\
&+\left|f(s,x(t))\int_0^\infty K(t,\tau)h(\tau,x(\tau))d\tau-f(s,x(s))\int_0^\infty K(s,\tau)h(\tau,x(\tau))d\tau\right|\\
&\leq|g(t)-g(s)|+|f(t,x(t))-f(s,x(s))|\int_0^\infty|K(t,\tau)|\cdot|h(\tau,x(\tau))|d\tau\\
&+|f(s,x(s))|\int_0^\infty|K(t,\tau)-K(s,\tau)|\cdot|h(\tau,x(\tau))|d\tau\leq|g(t)-g(s)|\\
&+[|f(t,x(t))-f(t,x(s))|+|f(t,x(s))-f(s,x(s))|]\int_0^\infty p(t)q(\tau)a(\tau)b(|x(\tau)|)d\tau\\
&+[|f(s,x(s))-f(s,0)|+|f(s,0)|]\int_0^\infty|K(t,\tau)-K(s,\tau)|a(\tau)b(|x(\tau)|)d\tau\\
&\leq\omega^T(g,\varepsilon)+\left\{m(t)|x(t)-x(s)|+\omega_{r_0}^T(f,\varepsilon)\right\}b\left(r_0\right)p(t)\int_0^\infty a(\tau)q(\tau)d\tau\\
&+\{m(s)|x(s)|+|f(s,0)|\}b\left(r_0\right)\int_0^\infty|K(t,\tau)-K(s,\tau)|a(\tau)d\tau\\
&\leq\omega^T(g,\varepsilon)+MQb\left(r_0\right)\omega^T(x,\varepsilon)+PQ\left(r_0\right)\omega_{r_0}^T(f,\epsilon)\\
&\qquad+\left(M_Tr_0+F\right)b\left(r_0\right)\int_0^\infty|K(t,\tau)-K(s,\tau)|a(\tau)d\tau
\end{aligned}\tag{3.4}
$$

Où on définit :

$M_T=\max\{m(t);t\leq T\}$

$\omega_{r_0}^T(f,\epsilon)=\sup\left[|f(t,x)-f(s,x)|;t,s\in[0,T];|t-s|\leq\epsilon;|x|\leq r_0\right]$

Et puis, on peut obtenir les estimation suivantes :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |K(t,\tau)-K(s,\tau)|a(\tau)d\tau &\le \int_0^T |K(t,\tau)-K(s,\tau)|a(\tau)d\tau \\
&+\int_T^\infty |K(t,\tau)-K(s,\tau)|a(\tau)d\tau \\
&\le \int_0^T |K(t,\tau)-K(s,\tau)|a(\tau)d\tau \\
&+\int_T^\infty [|K(t,\tau)|+\mid K(s,\tau)] \mid a(\tau)d\tau \\
&\le A_T\int_0^T |K(t,\tau)-K(s,\tau)|d\tau \\
&+\int_T^\infty (p(t)+p(s))q(\tau)a(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

$$\le A_T \cdot T\omega^T(K,\varepsilon)+2P_T\int_T^\infty a(\tau)q(\tau)d\tau \qquad (3.5)$$

Ou :
$A_T=\max[a(t);t\in[0,T]]$
$P_T=\max[p(t);t\in[0,T]]$
$\omega^T(K,\varepsilon)=[|K(t,\tau)-K(s,\tau)|;t,s,\tau\in[0,T];|t-s|\le\varepsilon]$

Maintenant, par les estimations 3.4 et 3.5 on obtient :

$$\omega^T(Hx,\varepsilon)\le\omega^T(g,\varepsilon)+MQb\,(r_0)\,\omega^T(x,\varepsilon)+PQb\,(r_0)\,\omega^T(x,\varepsilon)+PQb\,(r_0)\,\omega^T_{r_0}(f,\varepsilon)$$

$$+\,(M_Tr_0+F)\,b\,(r_0)\left[TA_T\omega_T(K,\varepsilon)+2P_T\int_T^\infty a(\tau)q(\tau)d\tau\right] \qquad (3.6)$$

L'hypothèse (H_1) *rapport que* $\lim_{\varepsilon\to 0}\omega^T(g,\varepsilon)=0$. *De plus, et par l'hypothèse* (H_3) *on déduis que la fonction* $f=f(t,x)$ *est uniformément continue sur le domaine* $[0,T]\times[-r_0,r_0]$. *Alors :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\omega_T(f,\varepsilon)=0$$

De même façon, et par l'hypothèse (H_6) *on a :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\omega_T(K,\varepsilon)=0$$

En suite et par l'inéquation (3.6) on obtient :

$$\omega_0^T(Hx) \leq MQb\,(r_0)\,\omega_0^T(X) + 2\,(M_T r_0 + F)\,b\,(r_0)\,P_T \int_T^{\infty} a(\tau)q(\tau)d\tau$$

Cette inéquation avec conjonction avec la propriété de l'intégrale impropre nous donne :

$$\omega_0(HX) \leq MQb\,(r_0)\,\omega_0(X) \tag{3.7}$$

En outre, prendre une fonction arbitraire $x \in X$ *et* $T > 0$*. Alors par l'estimation 3.2 on déduit l'inéquation suivante :*

$$\sup[|(Hx)(t)|; t \geq T] \leq \sup[|g(t)|; t \geq T] + MQb\,(r_0)\sup[|x(t)|; t \geq T]$$
$$+FQb\,(r_0)\sup[p(t); t \geq T]$$

Et puisque $\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} p(t) = 0$*. Alors :*

$$\beta(HX) \leq MQb\,(r_0)\,\beta(X) \tag{3.8}$$

Finalement, d'après les inéquations 3.7 et 3.8 et la définition (I) de la MNC μ *on obtient :*

$$\mu(HX) \leq MQb\,(r_0)\,\mu(X) \tag{3.9}$$

Maintenant, l'hypothèse (H_7) *nous conduit à l'inéquation suivante :*

$$MQb\,(r_0) \leq \frac{FPQb\,(r_0) + \|g\|}{r_0} < 1 \tag{3.10}$$

En appliquant le théorème de Darbo, on conclut que l'opérateur H *a au moins un point fixe dans la boule* B_{r_0}

L'ensemble Fixe H des points fixes (solution de L'équation (3.1)) de L'opérateur H appartiennent à B_{r_0} est un élément de la famille $\ker\mu$, donc les solutions tendent vers zéro uniformément à L'infinie avec respect la boule B_{r_0}.

3.2 Équation intégrale singulière non linéaire de type Volterra

Introduction

Dans cette section , nous allons étudier la solvabilité d'une équation intégrale singulière non linéaire de type Volterra de la form :

$$x(t) = a(t) + x(t)\int_0^t \frac{v(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha} ds \tag{3.11}$$

$$\text{où } t \in I = [0, M], \quad M < \infty \quad \text{et} \quad 0 < \alpha \leq 1$$

Nous cherchons des solutions de cette équation dans l'espace de Banach de fonctions réelles définies et continues sur un intervalle borné et fermé. L'outil principal utilisé dans Dans cette partie est une mesure de non-compacité construite de manière à nous permettre d'étudier la solvabilité des équations considérées dans la classe des fonctions monotones.

Définition 3.2.0.1 *définition de La mesure de non compacité $\rightarrow$ [voir (2.1.1.2)]*

Théorème 3.2.0.2 *théorème de points fixes de Darbo [Voir $\rightarrow$ (2.3.4.1)*

Dans ce qui suit, nous travaillerons dans l'espace classique de Banach $C[0, M]$ constitué de toutes les fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0, M]$ Pour plus de commodité, nous écrivons $I = [0, M]$ et $C(I) = C[0, M]$.

Pour faire ça , fixons un sous-ensemble X non vide et borné de $C(I)$. Pour $x \in X$ et $\varepsilon \geq 0$ noté $\omega(x, \varepsilon)$, le module de continuité de la fonction x,c'est-à-dire :

$$\omega(x, \varepsilon) = \sup\{|x(t) - x(\tau)| : t, \tau \in I, |t - \tau| \leq \varepsilon\}$$

En suite, nous mettons

$$\omega(X, \varepsilon) = \sup\{\omega(x, \varepsilon) : x \in X\}$$

$$\omega_o(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega(X, \varepsilon)$$

En plus, on pose :

$$\begin{aligned} d(x) &= \sup\{|x(\tau) - x(t)| - [x(\tau) - x(t)] : t, \tau \in I, t \leq \tau\} \\ i(x) &= \sup\{|x(t) - x(\tau)| - [x(t) - x(\tau)] : t, \tau \in I, t \leq \tau\} \\ d(X) &= \sup\{d(x) : x \in X\} \\ i(X) &= \sup\{i(x) : x \in X\} \end{aligned}$$

On observe que $d(X) = 0$ si et seulement si toutes les fonctions appartenant à X sont croissent sur I. De la même manière, on peut caractériser l'ensemble X avec $i(X) = 0$.

Enfin, on définit la fonction μ sur la famille $\mathfrak{M}_{C(I)}$ en mettant :

$$\mu(X) = \omega_o(X) + d(X)$$

On peut montrer que la fonction μ est une mesure de non-compacité dans l'espace $C(I)$ [11]
Le noyau μ de cette mesure contient des ensembles X non vides et bornés tels que les fonctions de X sont équicontinues et croissantes sur l'intervalle I.

Remarques 3.2.0.1 *Les propriétés décrites ci-dessus du ker μ de la mesure de la non-compacité μ en conjonction avec la remarque 2.3.4.1 nous permettent de caractériser les solutions de l'équation intégrale non linéaire considérée dans la section suivante .*

Remarques 3.2.0.2 *Observez que, de manière similaire, nous pouvons définir la mesure de non-compacité associée à la quantité définie $i(X)$ définie ci-dessus. Nous omettons les détails concernant cette mesure.*

3.2.1 Résultats principaux

Dans cette section, nous étudierons la solvabilité de l'équation intégrale singulière quadratique non linéaire de type Volterra (3.11) Nous chercherons des solutions de cette équation dans l'espace de Banach de fonctions réelles définies et continues sur un intervalle borné et fermé. L'outil utilisé est une mesure de non-compacité construite de telle manière que son utilisation nous permet d'étudier la solvabilité de l'équation considérée dans la classe des fonctions monotones.

Premièrement, dans l'équation (3.11) , nous remarquons que les fonctions $a = a(t)$ et $v = v(t, s, x)$ sont données tandis que $x = x(t)$ est une fonction inconnue.
Nous étudierons l'équation (3.11) en supposant que l'ensemble d'hypothèses suivant est satisfait :

- (i) $a \in C(I)$ et la fonction a est croissante et positive sur I :
- (ii) $v : I \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $v : I \times I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et pour s fixes arbitraires $\in$ I et $x \in \mathbb{R}_+$ la fonction $t \to v(t, s, x)$ est croissante sur I.
- (iii) il existe une fonction croissante $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que l'inégalité :
$$|v(t, s, x)| \leq f(|x|)$$
est vrai pour tout $t, s \in I$ et $x \in \mathbb{R}$;
- (iv) l'inégalité
$$\|a\| + r\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha}f(r) \leq r$$
a une solution positive r_0 telle que $\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha}f(r_0) \leq 1$ Maintenant, nous pouvons formuler notre principal résultat d'existence

Théorème 3.2.1.1 *Sous les hypothèses* $(i) - (iv)$, *l'équation 3.11 a au moins une solution* $x = x(t)$ *qui appartient à l'espace* $C(I)$ *et elle est croissante sur l'intervalle* I

Preuve 3.2.1.1 *Considérons l'opérateur A défini sur l'espace C (I) de la manière suivante :*
$$(Ax)(t) = a(t) + x(t)\int_0^t \frac{v(t, s, x(s))}{(t+s)^\alpha}ds$$

Au vu des hypothèses (i) et (ii), il s'ensuit que la fonction A_x est continue sur I pour toute fonction $x \in C(I)$, c'est-à-dire que A transforme l'espace $C(I)$ en lui-même.

Par application de notre hypothèses (iii) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|(Ax)(t)| &\leq |a(t)| + |x(t)| \left| \int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha} ds \right| \\
&\leq \|a\| + \|x\| \int_0^t \frac{f(|x|)}{(t-s)^\alpha} ds \\
&\leq \|a\| + \|x\| f(\|x\|) \int_0^t (t-s)^{-\alpha} ds \\
&\leq \|a\| + \|x\| \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(\|x\|) \\
&\leq \|a\| + \|x\| \frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(\|x\|)
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$|(Ax)(t)| \leq \|a\| + \|x\| \frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(\|x\|)$$

Ainsi, d'après l'hypothèse (iv), on en déduit qu'il existe $r_0 > 0$ avec $\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(r_0) \leq 1$ et tel que l'opérateur A transforme la boule B_{r_o} en elle-même

Dans ce qui suit, nous considérerons l'opérateur A sur le sous-ensemble $B^+_{r_0}$ de la boule B_{r_o} définie de la manière suivante :

$$B^+_{r_0} = \{x \in B_{r_o} : x(t) \geq 0 \quad \text{pour} \quad t \in I\}$$

De manière générale, l'ensemble $B^+_{r_0}$ est non vide, borné, fermé et convexe . Au vu des hypothèses (i) et (ii), on en déduit que A transforme l'ensemble $B^+_{r_0}$ en lui-même

Maintenant, nous allons montrer que A est continue sur l'ensemble $B^+_{r_0}$. Pour ce faire, fixons $\varepsilon \geq 0$ et prenons arbitraire $x, y \in B^+_{r_0}$ tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon$

Ensuite, pour $t \in I$, nous dérivons les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
|(Ax)(t)-(Ay)(t)| &\leq \left| x(t)\int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^{\alpha}}ds - y(t)\int_0^t \frac{\nu(t,s,y(s))}{(t-s)^{\alpha}}ds \right| \\
&\leq \left| x(t)\int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^{a}}ds - y(t)\int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^{a}}ds \right| \\
&+ \left| y(t)\int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^{\alpha}}ds - y(t)\int_0^t \frac{\nu(t,s,y(s))}{(t-s)^{\alpha}}ds \right| \\
&\leq \|x-y\| \int_0^t \frac{|\nu(t,s,x(s))|}{(t-s)^{\alpha}}ds + \|y\| \int_0^t \frac{|\nu(t,s,x(s))-\nu(t,s,y(s))|}{(t-s)^{\alpha}}ds \\
&\leq \varepsilon f(r_o) \int_0^t (t-s)^{-\alpha}ds + r_o\beta_{r_o}(\varepsilon)\int_0^t (t-s)^{-\alpha}ds \\
&\leq \varepsilon f(r_o) \frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} + r_o\beta_{r_o}(\varepsilon)\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

où nous avons noté

$$\beta_{r_o}(\varepsilon) = \sup\{|\nu(t,s,x)-\nu(t,s,y)| : t,s \in I, x,y \in [0,r_o], |x-y| \leq \varepsilon\}$$

Évidemment, $B_{r_o}(\varepsilon) \to 0$ comme $\varepsilon \to 0$ qui est une simple conséquence de la continuité uniforme de la fonction ν sur l'ensemble $I \times I \times [0, r_o]$ À partir de l'estimation ci-dessus, nous déduisons l'inégalité suivante :

$$\|Ax - Ay\| \leq \varepsilon f(r_o) \frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} + r_o\beta_{r_o}(\varepsilon)\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

ce qui implique la continuité de l'opérateur A sur l'ensemble $B^+_{r_0}$
Dans ce qui suit, prenons un ensemble non vide $X \subset B^+_{r_0}$. De plus, fixez le nombre arbitraire $\varepsilon > 0$ et choisissez $x \in X$ et $t, \tau \in [0, M]$ tels que $|t-\tau| \leq \varepsilon$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $t \leq \tau$
Puis , au vu de nos hypothèses, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
|(Ax)(\tau)-(Ax)(t)| &\leq |a(\tau)-a(t)| + \left| x(\tau)\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - x(t)\int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha}ds \right| \\
&\leq \quad w(a,\varepsilon) + \left| x(\tau)\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - x(t)\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds \right| \\
&+ \left| x(t)\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - x(t)\int_0^\tau \frac{\nu(t,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds \right| \\
&+ \quad \left| x(t)\int_0^\tau \frac{\nu(t,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - x(t)\int_0^\tau \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha}ds \right| \\
&+ \quad \left| x(t)\int_0^\tau \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha}ds - x(t)\int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha}ds \right| \\
&\leq \quad \omega(a,\varepsilon) + |x(\tau)-x(t)|\int_0^\tau \frac{|\nu(\tau,s,x(s))|}{(\tau-s)^\alpha}ds \\
&+ \quad |x(t)|\int_0^\tau \frac{|\nu(\tau,s,x(s))-\nu(t,s,x(s))|}{(\tau-s)^\alpha}ds \\
&+ \quad |x(t)|\int_0^\tau |\nu(t,s,x(s))| \left[\frac{1}{(\tau-s)^\alpha} - \frac{1}{(t-s)^\alpha}\right] ds \\
&+ \quad |x(t)|\int_t^\tau |\nu(t,s,x(s))| \left[\frac{1}{(t-s)^\alpha}\right] ds \\
&\leq \omega(a,\varepsilon) + \omega(x,\varepsilon)\int_0^\tau f(r_o)\,\frac{1}{(\tau-s)^\alpha}ds + r_o\int_0^\tau \gamma_{r_o}(\varepsilon)\frac{1}{(\tau-s)^\alpha}ds \\
&+ r_o\int_0^\tau f(r_o)\left[\frac{1}{(\tau-s)^\alpha} - \frac{1}{(t-s)^\alpha}\right] ds + r_o\int_t^\tau f(r_o)\left[\frac{1}{(t-s)^\alpha}\right] ds \\
&\leq \omega(a,\varepsilon) + \omega(x,\varepsilon) f(r_o)\,\frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha} + r_o\gamma_{r_o}(\varepsilon)\frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\
&+ \quad r_o f(r_o)\left[\frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] + r_o f(r_o)\left[-\frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] \\
&\leq \omega(a,\varepsilon) + \omega(x,\varepsilon) f(r_o)\,\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} + r_o\gamma_{r_o}(\varepsilon)\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\
&+ r_o f(r_o)\left[\frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]
\end{aligned}
$$

où nous avons noté

$$
\gamma_{r_o}(\varepsilon) = \sup\{|\nu(\tau,s,x)-\nu(t,s,x)| : t,\tau\in I, |\tau-t|\leq\varepsilon, x\in[0,r_o]\}
$$

En appliquant le théorème de la valeur moyenne sur $\left[\frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]$ on a

$$\left[\frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]=\frac{(\tau-t)}{\delta^{\alpha}}<\frac{\varepsilon}{\delta^{\alpha}}$$

pour tous $t<\delta<\tau$
Puis on a

$$|(Ax)(\tau)-(Ax)(t)|\leq\omega(a,\varepsilon)+\omega(x,\varepsilon)f\left(r_o\right)\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha}+r_o\gamma_{r_o}(\varepsilon)\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha}+r_o f\left(r_o\right)\frac{\varepsilon}{\delta^{\alpha}} \tag{3.12}$$

Remarquerez que . vue de la continuité uniforme de la fonction ν sur l'ensemble $I\times I\times[0,r_o]$ on a $\delta_{r_o}(\varepsilon)\rightarrow 0$ comme $\varepsilon\rightarrow 0$.
Maintenant, fixons arbitraires $x\in X$ et $t,\tau\in I$ tels que $t\leq\tau$. Ensuite, nous avons la chaîne d'estimations suivante :

$$\begin{aligned}
&|(Ax)(\tau)-(Ax)(t)|-[(Ax)(\tau)-(Ax)(t)]\\
=&\left|a(\tau)+x(\tau)\int_0^{\tau}\frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^{\alpha}}ds-a(t)-x(t)\int_0^{t}\frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^{\alpha}}ds\right|\\
-&\left[a(\tau)+x(\tau)\int_0^{\tau}\frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^{\alpha}}ds-a(t)-x(t)\int_0^{t}\frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^{\alpha}}ds\right]\\
\leq&\{|a(\tau)-a(t)|-[a(\tau)-a(t)]\}+\left|x(\tau)\int_0^{\tau}\frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^{\alpha}}ds-x(t)\int_0^{t}\frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^{\alpha}}ds\right|\\
-&\left[x(\tau)\int_0^{\tau}\frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^{\alpha}}ds-x(t)\int_0^{t}\frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^{\alpha}}ds\right]
\end{aligned}$$

et comme $a(t)$ croissante , on peut déduire, d'après la définition de $d(x)$, que :

$$d(C(I))=\sup\{d(a):a\in C(I)\}=0$$

Puis,

$$
\begin{aligned}
&|(Ax)(\tau)-(Ax)(t)|-[(Ax)(\tau)-(Ax)(t)]\\
&\leq \left|x(\tau)\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - x(t)\int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha}ds\right|\\
&-\left[x(\tau)\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - x(t)\int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha}ds\right]\\
&\leq \left|x(\tau)\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - x(t)\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds\right|\\
&+\quad \left|x(t)\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - x(t)\int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha}ds\right|\\
&-\left[x(\tau)\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - x(t)\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds\right]\\
&-\left[x(t)\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - x(t)\int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha}ds\right]\\
&\leq |x(\tau)-x(t)|\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds + |x(t)|\left|\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - \int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha}ds\right|\\
&-[x(\tau)-x(t)]\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - x(t)\left[\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - \int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha}ds\right]\\
&\leq \{|x(\tau)-x(t)|-[x(\tau)-x(t)]\}\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds\\
&+\quad x(t)\left\{\int_0^\tau \nu(\tau,s,x(s))\left|(\tau-s)^{-\alpha}-(t-s)^{-\alpha}\right|ds\right.\\
&\left.+\int_0^\tau |\nu(\tau,s,x(s))-\nu(t,s,x(s))|(t-s)^{-\alpha}ds + \int_t^\tau \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha}\right\}ds\\
&-x(t)\left\{\int_0^\tau \nu(\tau,s,x(s))\left[(\tau-s)^{-\alpha}-(t-s)^{-\alpha}\right]ds\right.\\
&\left.+\int_0^\tau [\nu(\tau,s,x(s))-\nu(t,s,x(s))](t-s)^{-\alpha}ds + \int_t^\tau \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha}\right\}ds
\end{aligned}
$$

Encore une fois, comme ci-dessus, appliquons le théorème de la valeur moyenne sur $[(\tau-s)^{-\alpha}-(t-s)^{-\alpha}]$ on a :

$$\left[(\tau-s)^{-\alpha}-(t-s)^{-\alpha}\right] = -\alpha\frac{(\tau-t)}{\delta_1^{1+\alpha}} < -\alpha\frac{\varepsilon}{\delta_1^{1+\alpha}}$$

pour tout $t < \delta_1 < \tau$ alors , On obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
&|(Ax)(\tau)-(Ax)(t)|-[(Ax)(\tau)-(Ax)(t)] \\
&\leq \{|x(\tau)-x(t)|-[x(\tau)-x(t)]\}\int_0^\tau \tfrac{f(r_o)}{(\tau-s)^\alpha}ds \\
+ \quad & 2\alpha\tfrac{\varepsilon}{\delta_1^{1+\alpha}}x(t)\int_0^\tau \nu(\tau,s,x(s))ds \\
+ \quad & x(t)\int_0^\tau\{|\nu(\tau,s,x(s))-\nu(t,s,x(s))|-[\nu(\tau,s,x(s))-\nu(t,s,x(s))]\}(t-s)^{-\alpha}ds
\end{aligned}$$

Tenant compte du fait que le dernier terme de l'inégalité ci-dessus disparaîtra (notez que la fonction $t \to \nu(t,s,x)$ croissante sur I) Enfin nous obtenons

$$\begin{aligned}
&|(Ax)(\tau)-(Ax)(t)|-[(Ax)(\tau)-(Ax)(t)] \\
&\leq \{|x(\tau)-x(t)|-[x(\tau)-x(t)]\}\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha}f(r_o)+2\alpha\frac{\varepsilon}{\delta_1^{1+\alpha}}x(t)\int_0^\tau \nu(\tau,s,x(s))ds
\end{aligned} \tag{3.13}$$

En additionnant l'équation (3.12) et l'équation (3.13) et en prenant le supremum de l'inégalité résultante, alors soit $\epsilon \to 0$, d'après la définition de la mesure de la non-compacité $\mu(X) = \omega_o(X) + d(X)$,donc nous obtenons

$$\mu(AX) \leq \frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha}f(r_o)\,\mu(X)$$

Maintenant, en tenant compte de l'inégalité ci-dessus et du fait que $\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha}f(r_0) < 1$ et appliquer le théorème (2.3.4.1), on complétons la preuve

Remarques 3.2.1.1 *Compte tenu des remarques (2.3.4.1) et (3.2.0.1) et de la description du noyau de la mesure de non-compacité* μ *donnée dans la section 1, on déduit facilement de la preuve du théorème (3.2.1.1) que les solutions de l'équation intégrale (3.11) appartenant à l'ensemble* $B_{r_o}^+$ *sont croissantes et continus sur l'intervalle* I

De plus, ces solutions sont également positives à condition que $a(t) > 0$ pour $t \in I$

3.2.2 Résultats généralisés

Les résultats de cette section généralisent et complètent les résultats de la section (3.2.1) . Nous considérons l'équation intégrale singulière non linéaire suivante de type Volterra :

$$x(t) = a(t) + (Bx)(t)\int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha} ds \tag{3.14}$$

où l'opérateur B satisfait l'ensemble de conditions suivant :

- (i') L'opérateur $B : C(I) \to C(I)$ est continu et satisfait aux conditions du théorème 3.2.0.2 pour la mesure de la non-compacité μ avec une constante K et, de plus, B est un opérateur positif, c'est-à-dire $Bx \geq 0$ si $x \geq 0$.
- (ii') Il existe des constantes non négatives b et c telles que :

  $$|(Bx(t)| \leq b + c\|x\|$$

  pour chaque $x \in C(I)$ et $t \in I$
- (iii') L'inégalité

  $$\|a\| + (b + cr)\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha}f(r) \leq r$$

  a une solution positive r_o tel que $K\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha}f(r_0) < 1$

En reliant les hypothèses (i) - (iii), dans la section 3.2.1 , et les hypothèses (i') - (iii'), nous pouvons formuler le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.2.2.1 *Sous les hypothèses* (i) - (iii) *et* (i') -(iii'), *l'équation (3.14) a au moins une solution* $x = x(t)$ *qui appartient à l'espace* $C(I)$ *et est croissante sur l'intervalle* I

Preuve 3.2.2.1 *Considérons l'opérateur* V *défini sur l'espace* $C(I)$ *de la manière suivante :*

$$(Vx)(t) = a(t) + (Bx)(t)\int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha} ds$$

De la même manière que dans la Preuve de Théorème (3.2.1.1) , nous obtenons les estimations suivantes :

$$|(Vx)(t)| \leq \|a\| + (b + c\|x\|)\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha}f(\|x\|)$$

ce qui prouve que V *transforme l'espace* $C(I)$ *en lui-même*

$$|(Vx)(t)-(Vy)(t)| \leq \|Bx-By\| f(r_o) \frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} + (b+cr_o)\,\beta_{r_o}(\varepsilon)\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

et d'après la continuité uniforme de la fonction ν *sur l'ensemble* $I \times I \times [0, r_o]$ *et la continuité de* V, *la dernière inégalité implique la continuité de l'opérateur* V *sur l'ensemble* $B^{+}_{r_0}$

$$\begin{aligned}
&|(Vx)(\tau)-(Vy)(t)| \\
&\quad\leq |a(\tau)-a(t)| + \left|(Bx)(\tau)\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - (Bx)(t)\int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha}ds\right| \\
&\quad\leq w(a,\varepsilon) + \left|(Bx)(\tau)\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - (Bx)(t)\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds\right| \\
&\quad+ \quad \left|(Bx)(t)\int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - (Bx)(t)\int_0^\tau \frac{\nu(t,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds\right| \\
&\quad+ \quad \left|(Bx)(t)\int_0^\tau \frac{\nu(t,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha}ds - (Bx)(t)\int_0^\tau \frac{\nu(t,s,x(s)}{(t-s)^\alpha}ds\right| \\
&\quad+ \left|(Bx)(t)\int_0^\tau \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha}ds - (Bx)(t)\int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s)}{(t-s)^\alpha}ds\right| \\
&\quad\leq \omega(a,\varepsilon) + |(Bx)(\tau)-(Bx)(t)|\int_0^\tau \frac{|\nu(\tau,s,x(s))|}{(\tau-s)^\alpha}ds \\
&\quad+ |(Bx)(t)|\int_0^\tau \frac{|\nu(\tau,s,x(s))-\nu(t,s,x(s))|}{(\tau-s)^\alpha}ds \\
&\quad+ |(Bx)(t)|\int_0^\tau |\nu(t,s,x(s))|\left[\frac{1}{(\tau-s)^\alpha}-\frac{1}{(t-s)^\alpha}\right]ds \\
&\quad+ |(Bx)(t)|\int_t^\tau |\nu(t,s,x(s))|\left[\frac{1}{(t-s)^\alpha}\right]ds \\
&\quad\leq \omega(a,\varepsilon) + \omega(Bx,\varepsilon)\int_0^\tau f(r_o)\frac{1}{(\tau-s)^\alpha}ds + (b+cr_o)\int_0^\tau \gamma_{r_o}(\varepsilon)\frac{1}{(\tau-s)^\alpha}ds \\
&\quad+ (b+cr_o)\int_0^\tau f(r_o)\left[\frac{1}{(\tau-s)^\alpha}-\frac{1}{(t-s)^\alpha}\right]ds + (b+cr_o)\int_t^\tau f(r_o)\left[\frac{1}{(t-s)^\alpha}\right]ds \\
&\quad\leq \omega(a,\varepsilon) + \omega(Bx,\varepsilon)f(r_o)\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} + (b+cr_o)\,\gamma_{r_o}(\varepsilon)\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} + (b+cr_o)\,f(r_o)\frac{\varepsilon}{\delta^\alpha}
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$|(Vx)(\tau)-(Vy)(t)|$$
$$\leq \omega(a,\varepsilon)+\omega(Bx,\varepsilon)f\left(r_o\right)\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\left(b+cr_o\right)\gamma_{r_o}(\varepsilon)\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\left(b+cr_o\right)f\left(r_o\right)\frac{\varepsilon}{\delta^{\alpha}} \tag{3.15}$$

Remarquerez que, au vu de la continuité uniforme de la fonction ν *sur l'ensemble* $I\times I\times\times[0,r_0]$ *on a* $\gamma_{r_0}(\varepsilon)\to 0$ *comme* $\varepsilon\to 0$.

$$|(Vx)(\tau)-(Vx)(t)|-|(Vx)(\tau)-(Vx)(t)|$$
$$=\left|a(\tau)+(Bx)(\tau)\int_0^{\tau}\frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^{\alpha}}ds-a(t)-(Bx)(t)\int_0^{t}\frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^{\alpha}}ds\right|$$
$$-\left[a(\tau)+(Bx)(\tau)\int_0^{\tau}\frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^{\alpha}}ds-a(t)-(Bx)(t)\int_0^{t}\frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^{\alpha}}ds\right]$$
$$\leq\{|a(\tau)-a(t)|-[a(\tau)-a(t)]\}+\left|(Bx)(\tau)\int_0^{\tau}\frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^{\alpha}}ds-(Bx)(t)\int_0^{t}\frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^{\alpha}}ds\right|$$
$$-\left[(Bx)(\tau)\int_0^{\tau}\frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^{\alpha}}ds-(Bx)(t)\int_0^{t}\frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^{\alpha}}ds\right]$$
$$\leq\left|(Bx)(\tau)\int_0^{\tau}\frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^{\alpha}}ds-(Bx)(t)\int_0^{t}\frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^{\alpha}}ds\right|$$
$$-\left[(Bx)(\tau)\int_0^{\tau}\frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^{\alpha}}ds-(Bx)(t)\int_0^{t}\frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^{\alpha}}ds\right]$$
$$\leq\left|(Bx)(\tau)\int_0^{\tau}\frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^{\alpha}}ds-(Bx)(t)\int_0^{\tau}\frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^{\alpha}}ds\right|$$
$$+\quad\left|(Bx)(t)\int_0^{\tau}\frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^{\alpha}}ds-(Bx)(t)\int_0^{t}\frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^{\alpha}}ds\right|$$
$$-\left[(Bx)(\tau)\int_0^{\tau}\frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^{\alpha}}ds-(Bx)(t)\int_0^{\tau}\frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^{\alpha}}ds\right]$$

$$- \left[(Bx)(t) \int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha} ds - (Bx)(t) \int_0^t \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha} ds \right]$$

$$\leq \{|(Bx)(\tau) - (Bx)(t)| - [(Bx)(\tau) - (Bx)(t)]\} \int_0^\tau \frac{\nu(\tau,s,x(s))}{(\tau-s)^\alpha} ds$$

$$+ (Bx)(t) \left\{ \int_0^\tau \nu(\tau,s,x(s)) \left| (\tau-s)^{-\alpha} - (t-s)^{-\alpha} \right| ds \right.$$

$$\left. + \int_0^\tau |\nu(\tau,s,x(s)) - \nu(t,s,x(s))|(t-s)^{-\alpha} ds + \int_t^\tau \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha} \right\} ds$$

$$- \quad (Bx)(t) \left\{ \int_0^\tau \nu(\tau,s,x(s)) \left[(\tau-s)^{-\alpha} - (t-s)^{-\alpha} \right] ds \right.$$

$$\left. + \int_0^\tau [\nu(\tau,s,x(s)) - \nu(t,s,x(s))](t-s)^{-\alpha} ds + \int_t^\tau \frac{\nu(t,s,x(s))}{(t-s)^\alpha} \right\} ds$$

$$\leq \{|(Bx)(\tau) - (Bx)(t)| - [(Bx)(\tau) - (Bx)(t)]\} \int_0^\tau \frac{f(r_o)}{(\tau-s)^\alpha} ds$$

$$+ \quad 2\alpha \frac{\varepsilon}{\delta_1^{1+\alpha}} (Bx)(t) \int_0^\tau \nu(\tau,s,x(s)) ds$$

$$+ (Bx)(t) \int_0^\tau \{|\nu(\tau,s,x(s)) - \nu(t,s,x(s))| - [\nu(\tau,s,x(s)) - \nu(t,s,x(s))]\}(t-s)^{-\alpha} ds$$

$$= \{|(Bx)(\tau) - (Bx)(t)| - [(Bx)(\tau) - (Bx)(t)]\} \frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(r_o)$$

$$+ 2\alpha \frac{\varepsilon}{\delta_1^{1+\alpha}} (Bx)(t) \int_0^\tau \nu(\tau,s,x(s)) ds$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned} |(Vx)(\tau) - (Vx)(t)| - [(Vx)(\tau) - (Vx)(t)] \\ \leq \{|(Bx)(\tau) - (Bx)(t)| - [(Bx)(\tau) - (Bx)(t)]\} \frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(r_o) \\ + 2\alpha \frac{\varepsilon}{\delta_1^{1+\alpha}} (Bx)(t) \int_0^\tau \nu(\tau,s,x(s)) ds \end{aligned} \tag{3.16}$$

Enfin (comme dans la section précédente), en ajoutant les équations (3.15) et (3.16) et d'après la définition de la mesure de la non-compacité μ*, on obtient :*

$$\mu(VX) \leq \frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(r_o)\, \mu(BX) \leq \frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(r_o)\, K\mu(X)$$

Maintenant, en tenant compte de l'inégalité ci-dessus et du fait que $\frac{M^{1-\alpha}}{1-\alpha} f(r_o) K < 1$ *et en appliquant le théorème (2.3.4.1) , nous complétons la preuve .*

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce mémoire , nous sommes concentrés sur le rôle de mesure de non compacité avec la théorie du point fixe de darbo pour prouver l'existence des points fixes dans les applications continues sur les ensembles non vides , bornés, fermés et convexes des espaces de fonctions continues.

nous avons appliqué le théorème de Darbo pour étudier l'existence et le comportement asymptotique des solutions de d'équation intégrale de type Hammerstein.

et aussi pour étudier l'existence et la Monotonie des solutions de d'équation intégrale non linéaire de type Volterra.

i.e que nous avons étudié l'existence et la qualité des solutions de l'équation .

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.R.Akhmerov-M.I.Kamenskii-A.S.Potapov-A.E.Rodkina-B.N. Sadovskii *Measures of noncompactness and condensing operators* Birkhäuser Verlag Basel.Boston.Berlin -1992-.

[2] J. Appell - Petr P. Zabreiko *Nonlinear superposition operators (1989).*

[3] J. Banas and B. Rzepka On existence and asymptotic stability of solutions of nonlinear integral equation *J.Math.Anal.Appel.*284(2003) 165-173.

[4] J. Banas - Bapurao C. Dhage Global asymptotic stability of solutions of functional inte gral equation *Nonlinear Analysis* (2007).

[5] J. Banas - Ignacio J. Cabrera On existence and asymptotic behaviour of solutions of a functional integral equation *Nonlinear Analysis* 66 (2007) 2246-2254.

[6] J. Banas - J.Caballero - J.Rocha and K.Sadarangani Monotonic solutions of a class of quadratic integral equations of Volterra type *Computers and Mathematic with Applications 49 (2005) 943-952.*

[7] J. Banas and B. Rzepka Nondeceasing solutions of quadratic singular Volterra integral equation Mathematical and Computer Modelling (2008).

[8] J. Banas - J.R. Martin - K.Sadarangani On solutions of a quadratic integral equation of Hammerstein type Mathematical and Computer Modelling 43 (2006) 97-104.

[9] J. Banas-D. O'Regan On existence and local attractivity of solutions of a quadratic Volterra integral equation of fractional order *J.Math.Anal.Appl.345 573-582 (2008).*

[10] J. Banas and B.C.Dhage Global asymptotic stability of solutions of a functional integral equation *Nonlinear Anal*.69 (7) (2008) 1945 - 1952.

[11] J. Banas, K. Geobel, Measure of Noncompactness in Banach Spaces , in :*Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, Vol.60, Dekker, New York, 1980.

[12] S. Djebali *Le degré topologique théorie et applications* B.P 92 Kouba -Alger- 2007

[13] A.Mostefaï Cours de topologie O.D.P.U Ben Aknoun -Alger- 1994.