République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulaire
Ministère de l'**E**nseignement **S**upérieur et de
la **R**echerche **S**cientifique
Université Ibn Khaldoun – Tiaret –

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département des MATHEMATIQUES

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

DOMAINE : Mathématiques et Informatique

FILIERE : Mathématiques

SPECIALITE: Analyse Fonctionnelle et Équation Différentielle

Présenté par

ZAABAT ASMAA

KASDI AMEL

SUJET DU MEMOIRE :

Principe du maximum et applications : Symétrie et monotonie des solutions positive

Soutenu le 7/10/ 2019Devant Le Jury Composé de :

Mr : A. Maatoug	Président
Mr : A.Dieb	Encadreur
Mr : M.Zian	Examinateur

Année Universitaire : 2019/2020

Remerciement

Je remercie tout d'abord «Allah»de m'avoir donné le courage d'entamer et de finir ce mémoire dans de bonnes conditions.

J'adresse mes vifs remerciements

À mon encadreur Mr DIEB ABDELRAZEK qui par ses conseils, ses recommandations, sa patience m'a permis de réaliser ce mémoire avec un très grand plaisir.

À messieurs les membres de jury de ce mémoire :

Mr.ZIANE MOHAMED comme examinateur,

Mr.MAATOUG ABDELKADER comme président pour avoir bien voulu examiner ce travail.

À tous les enseignants qui ont participé à la formation tout au long mon cycle Universitaire jusqu'aux jours d'aujourd'hui.

Enfin, je ne voudrai pas non plus oublier toutes les personnes que j'ai rencontre tout long de ces années universitaire et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail.

★ ★ ★

♡ *Je dédie ce travail à* ♡

À mes parents .Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie..

À mes très chers frères, à ma très chére sœur Karima

À toute ma famille chacun par son nom.

À mes aimables amis et collègues d'étude.

À mon binôme Amel.

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.

Zaabet Asmaa

♡ *Je dédie ce travail à* ♡

À mes chers parents, pour tout leurs sacrifices leur amours, leur amour, leur tendresse, long de mes études long de mes études an que je puisse réussir.

À mon très chers marie Ammar,

À mes chéres sœurs, pour leurs encouragement permanents, et leur soutien moral

À mon chers frère Aboubaker pour leur appui et leur encouragement .

À tous ma famille pour leur soutient tout au long de mon parcours universitaire

À toutes mes amies.

À mon binôme Asmaa.

Merci d'être toujours la ppour moi.

Kasdi Amel

Table des matières

INTRODUCTION

DAns ce travaille nous nous intéressons à l'étude de quelques propriétés qualitatives des solutions d'une classe de problème elliptique semi-linaires du second ordre plus précieusement nous démontrons des résultats de positivité, de monotonie et la symétrie des solutions positives. Pour avoir nos résultats nous utilisons le principe du maximum qui est l'un des outils importants dans la théorie des équations elliptiques. Nous introduisons aussi la méthode des hyperplan mobile pour donner une repense positive à la question suivante :

Si on ce donne une équation elliptique sur un domaine symétrique, est ce que les solutions hérite cette symétrie ?

ce type de problème trouves beaucoup d'applications par exemple pour avoir la forme explicite des solutions (le cas de symétrie radiale), pour comprendre des phénomènes de la physique qui d'écrit des lois de conservations. Ce mémoire et organisé de la manière suivante :

Nous démontrons dans le premier chapitre quelques outilles et définition de l'analyse fonctionnelle à savoir les espaces de Hilbert et les espaces de Sobolev et leurs propriétés. Dans le deuxième chapitre on démontre plusieurs versions du principe de maximum. par exemple le principe du maximum fort pour les solutions classiques (de classe C^2), le

principe du maximum faible pour les solutions dans $H^1(\Omega)$ et un principe du maximum pour les petits domaine.
Dans le dernier chapitre, nous démontrons le Lemme de Hopf et quelques conséquence. Finalement nous démontrons la symétrie des solutions positives d'un problème elliptique semi-linéaire en utilisant la méthode des hyperplans mobiles.

Chapitre 1

Préliminaire

Certaines notions seront énoncées le long de ce chapitre sans démonstration, le lecteur curieux peut trouver satisfaction dans **[1]** , **[2]**.

1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1. *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, f une application de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, On dit que f est un produit scalaire si et seulement si :*

1. *Soient u, v et $w \in H$,* $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$

$$f(u, \lambda v + \alpha w) = \lambda f(u, v) + \alpha f(u, w)$$

$$f(\lambda u + \alpha v, w) = \lambda f(u, w) + \alpha f(v, w)$$

2. $f(u, v) = f(v, u)$ *(symétrique).*
3. $f(u, u) \geq 0$ *et* $f(u, u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0 \quad \forall u \in H$ *(Définie positive).*

Le produit scalaire sera noté $(\cdot, \cdot)$

Théorème 1.1. ***"L'inégalité de Cauchy-Shwartz"***
Soit H un espace préhilbertien, alors :

$$\mid (u, v) \mid \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H. \tag{1.1}$$

Théorème 1.2. *Soit H un espace préhilbertien, l'application*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \quad & H \to \mathbb{R}^+ \\ & x \to \|x\| = \sqrt{(x,x)} \end{aligned} \tag{1.2}$$

est une norme.

Définition 1.2. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et complet pour la norme associe au produit scalaire.*
Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

Exemple :
Soit X un espace mesuré, μ un mesure positive sur X alors $L^2(X, d\mu)$ muni du produit scalaire $(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)d\mu$ est un espace de Hilbert.
On particulier si μ est la mesure de comptage on obtient l'espace

$$l^2 = \left\{ x = (x_n) \subset \mathbb{R}, \sum_{i=1^n} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

Théorème 1.3. ***"Théorème de représentation de Riesz-Fréchet"***
Étant donné $\varphi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que :

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \qquad \forall v \in H$$

De plus on a

$$\|f\|_H = \| \varphi \|_{H'}$$

Où on va noté par H' le dual topologique de H et $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le crochet de dualité

Nous présentons dans la suite quelles que résultats qui généralise le Théorème (1.3)

Définition 1.3. *On dit qu'une forme bilinéaire $a(u,v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est :*

1. *continue s'il existe une constante C telle que :*

$$| \, a(u,v) \, | \leq C\|u\|.\|v\|.$$

2. *coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :*

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2.$$

Théorème 1.4. ***"Théorème de Lax-Milgram"***
Soient H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire, continue et coercive sur H et l une forme linéaire continue sur H.
Alors, il existe un unique élément u de H solution du problème

$$l(v) = a(u,v), \quad \forall v \in H.$$

1.2 Espaces de L^p

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.4. *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$. On note par $L^p(\Omega)$ l'espace des classes d'équivalences de fonctions de puissance p-intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$:*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } ||f||_{L^p} < \infty\}$$

avec

$$||f||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Définition 1.5. *f est dite essentiellement bornée sur Ω s'il $\exists M > 0$ telle que,*

$$||f||_\infty = \sup_{x\in\Omega}|f(x)| = \inf\{M \geq 0; |f(x)| \leq M \quad p.p \text{ sur } \Omega\}$$

$(L^\infty(\Omega), ||.||_\infty)$ est un espace de Banach.

Théorème 1.5. *L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme $||.||_{L^p}$ est un espace de Banach.*

Si $p = +\infty$ on a

$$||f||_\infty = \sup_{x\in\Omega}|f(x)|,$$

et L^∞ est l'espace des fonctions essentiellement bornées sur (a,b).

Si $p = 2$ alors

$$L^2(\Omega) = \left\{f : \left(\int_\Omega |f(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\right\}$$

$\Big(L^2(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega)}\Big)$ *est un espace de Hilbert, ou* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\Omega)}$ *est le produit scalaire définit comme suit :*

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x).g(x)dx; \qquad \forall f, g \in L^2(\Omega)$$

1.3 Espace de Sobolev

On rappelle deux inégalités qui interviennent dans la démonstration de certaines inégalités qui seront énoncée ultérieurement.

Théorème 1.6. ***"Inégalité de Young"***
Soient a,b deux réelles strictement positive et $p, q \geq 1$*, tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Théorème 1.7. ***"Inégalité de Holder"***
$\forall f \in L^p(\Omega), \forall g \in L^q(\Omega), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Alors* $f, g \in L^1(\Omega)$

$$\| f.g \|_{L^1(\Omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)} \| g \|_{L^q(\Omega)} \tag{1.3}$$

Après ce bref préambule nous rappelons la définition et quelle que résultat nécessaire des espaces de Sobolev.

Définition 1.6. *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $1 \leq i \leq N$*, une fonction* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *a une dérivée faible dans* $L^1_{loc}(\Omega)$ *s'il existe* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *telle que pour tout* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ *on a*

$$\int_\Omega u(x)\partial x \ dx = -\int_\Omega f(x)\varphi(x) \ dx \tag{1.4}$$

Cela revient à dire que la dérivée au sens des distribution de u appartient à $L^1_{loc}(\Omega)$*.*
Si f *est donnée par la relation ci-dessus, on posera*

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f$$

Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}^n$*, on note* $\mid \alpha \mid = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ *la longeur de* α *et on note* $\partial^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$ *dans la suite* $\partial^\alpha u$ *désigne la dérivée faible d'une fonction* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$

Définition 1.7. *Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est définie par :*

$$W^{m,p} := \{u \in L^p(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \mid \alpha \mid \leq m, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ étant muni de la norme $\| u \|_{L^p(\Omega)} = \| u \|_p$(ou pour $1 \leq p \leq \infty$, on note $\| u \|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega \mid u(x) \mid^p dx$).
On muni l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ de la norme

$$\| u \|_{m,p} = \| u \|_{W^{m,p}(\Omega)} = \| u \|_{m,p,(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \| \partial^\alpha u \|^p_p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.3.1 Les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$,$W_0^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.8. *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$W^{1,p} = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g_1 \cdots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tel que : } \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \varphi \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \forall i = 1 \cdots n \right\}.$$

On note $H_0^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$

Proposition 1.1. *L'espace $W^{1,p}$ est un espace de :*

1. *Banach pour $1 \leq p \leq \infty$*
2. *Réflexif pour $1 < p < \infty$*
3. *Séparable pour $1 \leq p < \infty$*

En particulier, l'espace H^1 est un espace de Hilbert séparable.

Définition 1.9. *Soit Ω un ouvert borné et régulier. On peut définir une application linéaire et continue*

$$\psi : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$
$$u \mapsto \psi(u)$$

Prolongeant l'application trace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$:

$$\forall u \in W^{m,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) : \psi(u) = u|_{\partial\Omega}$$

L'application trace est continue de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$, ce qui signifie qu'il existe une constante C_Ω telle que

$$\forall u \in W^{m,p}(\Omega), ||\psi(u)||_{L^p(\partial\Omega)} \leq C_\Omega ||u||_{W^{m,p}(\Omega)}$$

Proposition 1.2. *Soit Ω un ouvert borné et régulier. On peut définir une application linéaire et continue*

$$\psi : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$
$$u \mapsto \psi(u)$$

Prolongeant l'application trace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$:

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) : \psi(u) = u|_{\partial\Omega}$$

Donc, on peut définir l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme suit :

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &= \ker\psi = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \psi(u) = 0\} \\ &= \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\} \end{aligned}$$

L'application trace est continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\partial\Omega)$, ce qui signifie qu'il existe une constante C_Ω telle que

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), ||\psi(u)||_{L^p(\partial\Omega)} \leq C_\Omega ||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Remarques 1.1. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ avec supp $u \subset \Omega$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$*

Définition 1.10. *On définit $H_0^1(\Omega)$ comme la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

Autrement dit :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \exists \phi_n \in C_c^\infty(\Omega) \text{ tel que } \phi_n \longrightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega)\}$$

1.3.2 Inégalité de Sobolev

Théorème 1.8. ***"Sobolev Gagliardo Nirenberg"***

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, soit $1 \leq p < n$, on définit $p^* = \frac{np}{n-p}$ ou de façon équivalente par $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$

alors :

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$$

De plus, il existe une constante $C = C(p,n)$ telle que :

$$\| u \|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

1.3.3 Inégalité de Poincaré

Théorème 1.9. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.Alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ tel que :*

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Corollaire 1.1. *Soit Ω un ouvert borné. alors $\| u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ est équivalent a $\| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}$.*

Preuve C'est une application direct du Théorème d'isomorphisme de Banach.

1.3.4 Injections Sobolev

Théorème 1.10. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $p \in [1, n[$, alors l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continument dans $L^{p^*}(\Omega)$*

Plus précisément, il existe une constante $C_{n,p} > 0$ tel que :

$$||u||_{L^{p^*}} \leq C_{n,p} ||\nabla u||_{L^p}$$

avec

1. $C_{n,p} = \dfrac{(n-1)p}{n-p}$
2. $p^* = \dfrac{np}{n-p}$ *est l'exposant critique de Sobolev.*
3. $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$

Corollaire 1.2. *Soit $1 \leq p \leq \infty$ on a :*

1. $1 \leq p \leq N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ *ou* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$
2. $p = N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q \quad \forall q \in [p, +\infty[$
3. $p > N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty$

avec injections continues
De plus, si $p > N$ on a pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$| u(x) - u(y) | \leq C \parallel u \parallel_{W^{1,p}(\Omega)} | x - y |^{\alpha} \qquad p.p \; \forall x, y \in \Omega$$

avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ et C une constante qui dépend de p, N et Ω En particulier,

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$$

Théorème 1.11. ***"Rellich-Kondrachov"***
On suppose que Ω un ouvert borné de classe C^1, on a :

1. *si* $p < N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \forall p \in [1, p^*[$ *ou* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$
2. *si* $p = N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q \quad \forall q \in [1, +\infty[$
3. *si* $p > N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$

avec injections compactes

1.3.5 L'espace Dual de $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.11. *On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ et par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.*

Remarques 1.2. *On identifie $L^2(\Omega)$ et son dual, mais on'identifie par $H_0^1(\Omega)$ et son dual.On a le schéma suivant :*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

avec injections continues et denses.

1.4 Opérateurs elliptiques du deuxième ordre

Définition 1.12. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle équation aux dérivée partielles linéaire du second ordre, toute équation de la forme*

$$Lu(x) = \sum_{ij} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x), \tag{1.5}$$

ou les fonction a_{ij}, b_i, c et f ne dépendent que de la variable $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$. Soient $\lambda(x)$ (resp. $\Lambda(x)$) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de $[a_{ij}(x)]$. L'équation (1.5) *est dite elliptique en x si $\lambda(x)\Lambda(x) > 0$. Si l'équation* (1.5) *est elliptique et si les coefficients (a_{ij}) sont continus, on peut toujours supposer $\lambda(x) > 0$. Une classe particulièrement importante d'équation elliptique est celle ou $\Lambda(x)/\lambda(x)$ est borné indépendamment de x ; l'équation* (1.5) *est alors uniformément elliptique.*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On se donne n^2 fonction a_{ij} :

$$a_{ij} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i, j = 1, ..., n,$$

vérifions les hypothèses suivant sur les fonctions a_{ij}

H1 Les fonctions a_{ij} sont bornées

$$\exists\ C \geq 0,\ \forall x \in \Omega,\ \forall i, j, |a_{ij}(x)| \leq C.$$

H2 Les fonctions a_{ij} sont symétrique

$$\forall x \in \Omega,\ \forall i, j,\ a_{ij} = a_{ji}.$$

H3 Éllipticité

$$\exists(\alpha_0, \alpha_1), {\mathbb{R}_+^*}^2,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ \alpha_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \alpha_1 |\xi|^2.$$

où $|\xi|^2 = \xi_1^2 + ... + \xi_n^2$. En fait l'existence de α_1 résulte de H1.
L'hypothèse d'ellipticité montre en particulier que pour tout x, la matrice $A(x) \in M_n(\mathbb{R})$ définie par

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

est une matrice symétrique définie positive $\forall x \in \Omega$. De plus, sa plus petite valeur propre est minorée par α_0.

1.4.1 Opérateurs sous forme divergence

Nous considérons des opérateurs elliptiques sous forme divergence, de la forme

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = div(A(x)\nabla) \tag{1.6}$$

Il s'agit d'un opérateur différentiel du deuxième ordre. Il agit en particulier sur les fonctions C^∞ à support compact

$$\forall \varphi \in C_c^\infty, L\varphi = \sum_{i;j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right). \tag{1.7}$$

Si on ne fait pas l'hypothèse supplémentaire de régularité sur les coefficients a_{ij} (par exemple $a_{ij} \in C^1$) alors $L\varphi$ est définie au sens des distributions. De manière générale, si v appartient à un espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, alors on peut définir $Lv = f$ comme une distribution par

$$\forall \psi \in C_c^\infty, \langle Lv, \psi\rangle = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_j}. \tag{1.8}$$

La classe la plus générale dans laquelle (1.8) a encore un sens est

$$W_{loc}^{1,1}(\Omega) = \left\{u \in L_{loc}^1(\Omega) | \forall j \in \{1, ..., n\}, \frac{\partial u}{x_j} \in L_{loc}^1(\Omega)\right\}.$$

On rappelle que

$$L_{loc}^1(\Omega) = \{g \in L^1(K) |\ \forall K\ compact \subset \Omega\}.$$

Ainsi sous les hypothèses H1, H2, et H3, Lv peut être défini, au sens des distributions, pour tout $v \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$.

Remarques 1.3. *Si les coefficients a_{ij} sont des fonctions plus régulières, alors on peut définir Lv pour des classes plus larges de fonctions.*
Par exemple $a_{ij} \in C^\infty(\Omega)$, alors Lv peut être défini pour toute distribution $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\forall \psi \in C_c^\infty,\ \langle Lv, \psi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\sum_{i,j=1}^{n}\left\langle v(x), \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)\right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$$

L'expression du membre de gauche appartient à $C_c^\infty(\Omega) = D(\Omega)$ car $a_{ij}(x) \in C^\infty(\Omega)$

et $\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \in C_c^\infty(\Omega)$

Exemple : L'exemple le plus simple d'un opérateur elliptique est celui où les coefficients sont a_{ij} constants, en particulier le cas où

$$a_{ij} = \delta_{ij}, \qquad \forall i, j, \forall x \in \Omega$$

avec

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Autrement dit

$$A(x) = Id_{\mathbb{R}^n} \quad \forall x \in \Omega$$

On a alors

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

Dans ce cas, L est appelé Laplacien, et on note

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Au vu de la discussion précédente, on peut définir Δv pour $v \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ distribution sur Ω, et plus généralement pour tout $v \in D'(\Omega)$

1.4.2 Opérateurs qui ne sont pas sous forme divergence

On peut également considérer des opérateurs de la forme

$$\overline{L} = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}$$

Bien entendu, si les coefficients a_{ij} sont constants ,les deux opérateurs L, et $\overline{L}$ coïncident. En revenche, si on ne fait pas d'hypothèse de régularité sur les coefficients a_{ij}, on voit que $\overline{L}$ ne peut être défini pour des fonctions de $W^{1,1}_{loc}$ Néanmoins il est facile de voir que $\overline{L}$ peut être défini pour $W^{1,2}_{loc}$

$$W^{1,2}_{loc} = \left\{ u \in W^{1,1}_{loc} \mid \forall i, j \, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^1_{loc}(\Omega) \right\}.$$

Dans la suite de ce travaille, nous nous intéresserons au problème "inverse" : étant donné f une fonction sur Ω, et v tels que

$$Lv = f,$$

que peut-on dire de v ? Dans un premier temps nous supposerons qu'un tel v existe, et nous nous intéresserons aux propriétés de qualitatives de v. Le cas le plus simple est bien entendu $f = 0$, où nous considérons les solutions du problème homogène

$$Lv = 0. \tag{1.9}$$

Chapitre 2

Principe du maximum pour les opérateurs elliptique du deuxième ordre

Dans ce chapitre, nous démontrons plusieurs version du principe de maximum pour les équation elliptique du second ordre à savoir un principe du maximum pour les fonctions de H^1. Nous discutons de plus l'effet des termes d'ordre 1 et d'ordre 0.

2.1 Formes classiques du principe du maximum

Nous commençons, pour fixer les idées, par étudier le principe du maximum pour $L = -\Delta$, le Laplacien.

2.1.1 Le laplacien

Soit Ω un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^n$. On a

Théorème 2.1. *Soit u une fonction de classe $C^2(\Omega)$ telle que $u \in C(\overline{\Omega})$. On suppose que*

$$-\Delta u(x) \geq 0, \qquad \forall x \in \Omega \qquad (H1)$$

Alors

$$\inf_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \inf_{x\in\partial\Omega} u(x) \tag{2.1}$$

En particulier, si $u(x) \geq 0, \forall x \in \partial\Omega$*, alors*

$$u(x) \geq 0, \qquad \forall x \in \Omega \tag{2.2}$$

Remarques 2.1.

1. *Si* $-\Delta u(x) \leq 0, \forall x \in \Omega$ *en considérant -u, on déduit du Théorème* (2.1) *qu'alors*

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

2. *En particulier si* $\Delta u(x) = 0, \forall x \in \Omega$*, on obtient*

$$\inf_{y\in\partial\Omega} u(y) \leq u(x) \leq \sup_{y\in\partial\Omega} u(y) \quad \forall x \in \Omega$$

Preuve du Théorème (2.1) **:** Nous allons commencer par donner la preuve dans le cas où la fonction u vérifie l'hypothèse plus forte (inégalité stricte) suivant

$$-\Delta u(x) > 0, \forall x \in \Omega \qquad (H2)$$

Ensuite par un argument d'approximation nous en déduirons la preuve dans le cas général.

A . Preuve de (2.1) lorsque u vérifie(H2)

Comme $\overline{\Omega}$ est fermé borné et qu'on y a supposé u continue, il existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tel que

$$u(x_0) = \inf_{y\in\overline{\Omega}} u(y)$$

i.e

$$u(x_0) \leq u(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

Nous avons alors l'alternative suivante.

i) $x_0 \in \partial\Omega$, alors (2.1) est automatiquement vérifiée.

ii) $x_0 \in \Omega$, on peut alors écrire la forme classique de minimalité sous la forme :

$$\nabla u(x_0) = 0,\ i.e\ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0),\ \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{2.3}$$

$$Hess\ u(x_0) \geq 0, et\ en\ particulier\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0) \geq 0,\ \ \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{2.4}$$

Rappelons que Hess u(x) représente la Hessienne de u, i.e

$$Hess\ u(x) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

La condition du deuxième ordre (2.4) signifiée que Hess u est positive en x_0. Comme

$$\Delta u(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0)$$

on déduit donc de (2.4) que

$$\Delta u(x_0) \geq 0$$

ce qui contredit (H2). L'alternative (ii). est donc exclue, ce qui établit (2.1) sous l'hypothèse (H2).

B. Cas général Preuve de (2.1) lorsque u vérifiée (H1)

On utilise un argument perturbatif. l'idée est de construire une fonction $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ qui vérifie (H2)

$$-\Delta\varphi > 0\ sur\ \Omega$$

Ensuite pour $\varepsilon > 0$ on pose $u_\varepsilon = u + \varepsilon\varphi$ de sorte que u_ε vérifie (H2). On applique alors la partie A, puis on fait tendre ε vers 0 pour conclure.

i) Construction de φ : Soit x_1 la première coordonnée de $\mathbb{R}^n$. Considérons la fonction

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, ..., x_n) \equiv -\exp(x_1), \forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

On a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = -\exp x_1 \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0, si\ i \neq 1$$

donc

$$-\Delta\varphi = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \exp x_1 > 0, \forall \in \Omega$$

ii) Etude de u_ε. Posons $u_\varepsilon = u+\varepsilon\varphi$, pour $\varepsilon > 0$ Comme $-\Delta\varphi > 0$ et par hypothèse $-\Delta u \geq 0$ on a :

$$-\Delta u_\varepsilon > 0,\ \ sur\ \Omega\ , \forall\varepsilon > 0$$

i.e u_ε vérifie(H2) donc

$$\inf_{x\in\overline{\Omega}} u_\varepsilon(x) = \inf_{x\in\partial\Omega} u_\varepsilon(x)$$

Comme $u_\varepsilon \longrightarrow u$ uniformément, on en déduit (2.1)

2.1.2 Opérateurs elliptique avec un terme d'ordre 1

Le résultat précèdent peut se généraliser aux opérateurs du type

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

où les fonctions a_{ij} définies sur $\overline{\Omega}$ sont continues et vérifient

$$\forall x, \forall i,j,\ a_{ji}(x) = a_{ij}(x)$$

et telles qu'il existe $\alpha_0 > 0, \alpha_1$ tels que $\forall \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha_0|\xi|^2 \le \sum_{i,j}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \le \alpha_1|\xi|^2$$

i.e $A(x) = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ est elliptique. On a alors

Théorème 2.2. *Soit $A(x) = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ comme ci-dessus, et b une fonction continue de $\overline{\Omega}$ vers $\mathbb{R}^n$ .Soit $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$*

$$-Lu(x) + b\cdot\nabla u(x) \ge 0, \quad \forall x \in \Omega \qquad (H1\ bis)$$

i.e

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \forall x \in \Omega$$

Alors

$$\inf_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \inf_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

Preuve Elle est similaire à celle du Théorème (2.1) On commence par démontrer (2.1) sous l'hypothèse plus forte

$$-Lu(x) + b\cdot\nabla u(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega \qquad (H2\ bis)$$

A Preuve de (2.1) lorsque u vérifie (H2 bis) Soit $x_0 \in \Omega$ tel que

$$u(x_0) = \inf_{y \in \overline{\Omega}} u(y)$$

Si $x \in \partial\Omega$ la propriété est vérifie. Sinon $x \in \Omega$ et la condition du 1^{er} ordre donne $\nabla u(x_0) = 0$ i.e $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0$ et donc

$$b \cdot \nabla u(x_0) = 0 \tag{2.5}$$

c'est-à-dire la condition du deuxième ordre donne

$$Hess\ u(x_0) \geq 0 \ \ (au\ sens\ des\ matrices\ symtriques) \tag{2.6}$$

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthogonal dans laquelle la matrice $(a_{ij}(x_0))_{1 \leq i,j \leq n}$ soit diagonalisable de la forme diag $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où $\lambda_i \geq \alpha_0, \forall i \in \{1, ..., n\}$ Dans cette base, soit $(x_1, ..., x_n)$ les coordonnées cartésiennes associées. On a alors

$$Lu(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0) \geq \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0)$$

et donc

$$Lu(x_0) \geq 0 \tag{2.7}$$

par (2.5) Ainsi en combinant (2.5) et (2.7), on obtient

$$-Lu(x_0) + b \cdot \nabla u(x_0) \leq 0$$

ce qui contredit (H2 bis). Il en résulte que l'hypothèse $x_0 \in \Omega$ est à exclure et donc $x_0 \in \partial\Omega$ ceci donne donc (2.1).

B Cas général : u vérifie (H1 bis) on construit φ tel que :

$$-L\varphi + b \cdot \nabla\varphi \geq 0, sur\ \Omega \tag{2.8}$$

a cet effet, introduisons $\mu > 0$ et considérons

$$\psi_\mu = -\exp(\mu x_1)$$

On a alors

$$-L\psi_\mu = a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\exp(\mu x_1) = \mu^2 a_{11}\exp(\mu x_1)$$

de même

$$b\cdot\nabla\psi_\mu = b_1\frac{\partial\psi_\mu}{\partial x_1} = -\mu b_1\exp(\mu x_1)$$

et donc

$$-L\psi_\mu + b\cdot\nabla\psi_\mu = (\mu^2 a_{11} - \mu b_1)\exp(\mu x_1)$$

L'hypothèse d'ellipticité donne $a_{11} > \alpha_0$. Donc

$$\mu^2 a_{11} - \mu b_1 \geq \mu^2\alpha_0 - \mu\|b\|_{L^\infty} = \mu(\mu\alpha_0 - \|b\|_{L^\infty})$$

de sorte que si $\mu > \mu_0 = \frac{\|b\|_{L^\infty}}{\alpha_0}$, on a

$$-L\psi_{\mu_0} + b\cdot\nabla\psi_{\mu_0} > 0$$

On choisit donc $\varphi = \psi_\mu$ pour $\mu > \mu_0$ de sorte que φ vérifie (2.8). On pose ensuite $u_\varepsilon = u + \varepsilon\varphi$, pour $\varepsilon > 0$ et comme $-L\varphi + b\cdot\nabla\varphi > 0$ et par l'hypothèse on a

$$-Lu_\varepsilon + b\cdot\nabla u_\varepsilon > 0$$

i.e u_ε vérifie (H2 bis) donc

$$\inf_{x\in\overline{\Omega}} u_\varepsilon(x) = \inf_{x\in\partial\Omega} u_\varepsilon(x)$$

par passage au limite $\varepsilon \longrightarrow 0$ en déduit le résultat du Théorème (2.2).

2.1.3 Opérateurs elliptique avec un termes d'ordre 0 et d'ordre 1

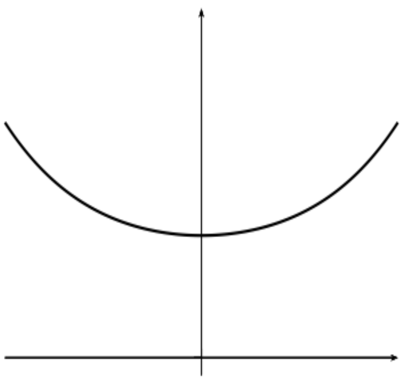
Le résultat précédent ne s'étend pas au cas des opérateurs avec un terme d'ordre quelconque 0, i.e du type

$$Lu + b\cdot\nabla u + cu = -\sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u(x) + b\cdot\nabla u(x) + c(x)u(x)$$

Pour s'en convaincre, considérons le cas n=1, $I\ =]-1;1[$, et l'opérateur $-u''+u$, la fonction u(x) = exp(-x) + exp(x) vérifie

$$-u''+u=0$$

mais ne vérifie pas (2.1)



En revenche, la conclusion (2.2) reste vraie, comme nous allons le voir dans le résultat suivant, si en fait plus de condition sur le terme d'ordre 0

Théorème 2.3. *Soit Ω un domaine bornée de $\mathbb{R}^n$. On fait les même hypothèses sur A et b que dans le théorème* (2.2) *Soit c une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, supposant que i.e*

$$c(x) \geq 0, \qquad \forall x \in \Omega$$

Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ telle que

$$-Lu + b \cdot \nabla u + cu \geq 0, \qquad sur\ \Omega$$

c'est-à-dire

$$-\sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) + b \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) \geq 0, \qquad \forall x \in \Omega$$

Si, de plus $u(x) \geq 0$, $x \in \partial\Omega$, alors

$$u(x) \geq 0, \qquad \forall x \in \Omega$$

Preuve On commence par démontrer le résultat sous l'hypothèse plus forte :

$$-Lu(x) + b \cdot \nabla u(x) + cu(x) > 0, \ \forall x \in \Omega \qquad (H2\ ter)$$

A . Preuve lorsque u vérifie (H2 ter). Par l'absurde, on suppose qu'il existe $x \in \Omega$ tel que

$$u(x) < 0 \tag{2.9}$$

$$u(x_0) = \inf_{x \in \overline{\Omega}} u(x) < 0 \tag{2.10}$$

et donc x_0, le minimum, appartient à Ω (car $u(x) \geq 0\ sur\ \partial\Omega$) Comme dans la preuve du Théorème (2.2), on a

$$-Lu(x_0) + b \cdot \nabla u(x_0) \leq 0$$

Comme $c \geq 0$, par l'hypothèse (2.9), on en déduit que

$$c(x_0)u(x_0) \leq 0$$

Donc

$$-Lu(x_0) + b \cdot \nabla u(x_0) + c(x_0)u(x_0) \leq 0$$

ce qui contredit (H2 ter). L'hypothèse (2.9) est donc fausse, et (2.3) est vérifie.

B cas général On construit comme pour les Théorèmes (2.1) et (2.2) une fonction φ. Soit $\mu > 0$ et considérons

$$\varphi = -exp(\mu x_1)$$

on a alors

$$-L\varphi = \mu^2 a_{11} \exp(\mu x_1)$$
$$b \cdot \nabla\varphi = -\mu^2 b_1 \exp(\mu x_1)$$
$$c\varphi = -c \exp(\mu x_1)$$

et donc

$$-L\varphi + b \cdot \nabla\varphi + c\varphi = (\mu^2 a_{11} - \mu^2 b_1 - c) \exp(\mu x_1)$$

comme c une fonction continue sur , $\exists \beta \geq 0$ telle que

$$|c| \leq \beta$$

Alors d'après l'hypothèse d'ellipticité et $|b_1| \leq \|b\|_{L_\infty}$

$$(\mu^2 a_{11} - \mu^2 b_1 - c) \exp(\mu x_1) \geq \mu^2 \alpha_0 - \mu \|b\|_{L_\infty} - \beta$$

Soit $f(\mu) = \mu^2 \alpha_0 - \mu \|b\|_{L_\infty} - \beta$, en étudier le signe de la fonction f, calculons Δ_μ et $\lambda_1, \ \lambda_2$

$$\Delta_\mu = \|b\|_\infty^2 + 4\alpha_0 \beta \geq 0,$$
$$\lambda_1 = \frac{\|b\| - \sqrt{\Delta_\mu}}{2\alpha_0}, \qquad \lambda_2 = \frac{\|b\| + \sqrt{\Delta_\mu}}{2\alpha_0}$$

Alors pour $\mu_0 \in \mathbb{R}_+^* / [\lambda_1, \lambda_2]$ et $\mu > \mu_0$

$$\mu_0^2 \alpha_0 - \mu_0 \|b\|_{L_\infty} - \beta > 0$$

par suite

$$-L\varphi + b \cdot \nabla \varphi + c\varphi > 0 \ dans \ \Omega$$

Ensuite en pose $u_\varepsilon = u + \varepsilon \varphi$ et on conclut par la partie A que

$$u_\varepsilon > 0 \ dans \ \Omega,$$

Par passage a la limite $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$u \geq 0 \ dans \ \Omega,$$

2.2 Principe de maximum pour les opérateurs elliptique sous forme divergence

Dans cette partie, on considère un domaine Ω borné régulier de $\mathbb{R}^n$, un opérateur elliptique du deuxième ordre sous forme divergence, i.e

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}u\right) \equiv -div(A(x)\nabla u)$$

Où les coefficients a_{ij} sont des fonctions bornées sur Ω telles qu'il existe $\alpha_0 > 0, et\ \alpha_1 > 0$ vérifiant

$$\alpha_0|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j}\xi_i\xi_j \leq \alpha_1|\xi|^2, \qquad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.11}$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \qquad \forall x \in \Omega, \forall i, j \tag{2.12}$$

Définition 2.1. *([2]) Soit $u \in H_0^1$ alors u vérifiée*

$$-\,div(A(x)\nabla u) \geq f \tag{2.13}$$

Si $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \geq \int_\Omega f\varphi,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),\ \forall \varphi \geq 0 \tag{2.14}$$

Remarques 2.2. *On montre que les fonctions $C_c^\infty(\Omega)$ sont denses dans $H_0^1(\Omega)$,(2.14) est donc équivalente à*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} \geq \int_\Omega f\varphi, \forall v \in H_0^1(\Omega), t.q\ v \geq 0\ sur\ \Omega \tag{2.15}$$

Théorème 2.4. *Soit $A(x) = a_{ij}(x)_{1\leq i,j\leq n}$ vérifiant (2.11), (2.12) . Soit $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant*

$$-\,div(A(x)\nabla u) \geq 0,\ dans\ \Omega \tag{2.16}$$

Alors

$$\inf_{x\in\Omega} u(x) = \inf_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

Preuve On utilise une méthode de troncature. Posons

$$k = \inf_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

On supposera $-\infty < k < +\infty$, sinon $k = -\infty$ implique par le Théorème de Trace que $\inf_{x\in\Omega} u(x) = -\infty$. Considérons alors la fonction

$$w = -(u-k)^-$$

de sorte que $w \geq 0$, et $w = 0$ sur $\partial\Omega$ et donc $w \in H_0^1(\Omega)$. On peut donc utiliser w comme fonction test dans (2.15). Il en résulte

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial(u-k)^-}{\partial x_j} \geq 0,$$

i.e

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial (u-k)^-}{\partial x_i}\frac{\partial(u-k)^-}{\partial x_j} \leq 0,$$

et par (2.12) on a donc

$$\alpha_0\int_\Omega |\nabla(u-k)^-|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial (u-k)^-}{\partial x_i}\frac{\partial(u-k)^-}{\partial x_j} \leq 0$$

Ainsi

$$\int_\Omega |\nabla(u-k)^-|^2 = 0.$$

et donc

$$(u-k)^- = 0.$$

Ceci signifie $u(x) \geq k$ sur Ω et la conclusion en découle.

Théorème 2.5. *Soit* $A(x) = a_{ij}(x)_{1\leq i,j\leq n}$ *vérifiant* (2.11),(2.12) *et* c *une fonction de* $L^\infty(\Omega)$ *tel que*

$$c(x) \geq 0$$

Soit $u \in H^1(\Omega)$*tel que*

$$-div(A(x)\nabla u) + cu \geq 0, \quad dans\ \Omega$$

i.e

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}+cu\varphi \geq 0, \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega),\ t.q\ \varphi \geq 0\ sur\ \Omega \tag{2.17}$$

et

$$u(x) \geq 0, \quad sur\ \partial\Omega \tag{2.18}$$

Alors

$$u(x) \geq 0, \quad dans\ \forall x \in \Omega \tag{2.19}$$

Preuve : Par densité (2.17) est équivalent à

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+cuv \geq 0, v \in H_0^1(\Omega), t.q\ v \geq 0\ sur\ \Omega \tag{2.20}$$

Prenons alors

$$v = -u^{-}$$

de sorte que $v = -\inf(u,0) \geq 0\ sur\ \Omega$ comme $u \geq 0\ sur\ \partial\Omega, u^{-} = 0\ sur\ \partial\Omega$ et donc $v \in H_0^1(\Omega)$ par (2.20) on a alors

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u^{-}}{\partial x_j}+cuu^{-} \geq 0,$$

i.e

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}(x)\frac{\partial u^{-}}{\partial x_i}\frac{\partial u^{-}}{\partial x_j}+c|u^{-}|^2 \leq 0,$$

et par ellipticité

$$\int_{\Omega}\alpha_0|\nabla u^{-}|^2+c|u^{-}|^2 \leq 0 \tag{2.21}$$

Comme $c \geq 0,\ u^{-} = 0$ et donc $u \geq 0$ sur Ω

Remarques 2.3.

1 *Si c n'est pas positive, la conclusion du Théorème peut-être contredite. par exemple pour n=1,* $\Omega =]0,1[, L = u''$ *, et* $c = -k^2\pi^2$ *alors pour* $u = \sin k\pi x$ *on a*

$$\begin{cases} -u''+cu = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

mais u change de signe sur Ω

2 *Néanmoins, pour un domaine Ω donné, la condition*

$$c(x) \geq 0.$$

peut-être affaiblie par la condition

$$c(x) \geq -\lambda_1 \tag{2.22}$$

où

$$\lambda_1 = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla v|^2, v \in H_0^1, \|v\|_{L^2(\Omega)} = 1\right\}$$

En effet, par définition de $\lambda_1, \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\lambda_1 \int_\Omega |v|^2 \leq \int_\Omega |\nabla v|^2$$

En retournant à (2.21)*, on voit que* (2.21) *implique sous l'hypothèse* (2.22) $u^- = 0$ *et donc $u \geq 0$, sur Ω*

2.3 Le principe du maximum fort

2.3.1 Une première version du principe maximum

Soit $\Omega = (a, b)$ .Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ telle que

$$u'' \geq 0 \ sur \ (a, b). \tag{2.23}$$

En suite, nous affirmons que

$$u(x) < u(a) \vee u(b) \ \forall x \in (a, b). \tag{2.24}$$

où $\vee$ désigne le maximum entre deux nombres. En effet si u atteint un maximum intérieur x_0,

ı.e

$$u(x_0) \geq u(x) \ pour \ tout \ x \ dans \ un \ voisinage \ x_0 \tag{2.25}$$

En utilisant un développement de Taylor, on obtient

$$u(x) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + \frac{u''(\xi_x)}{2}(x - x_0)^2$$

est compris entre x_0 et x. De (2.25) on obtient

$$(x - x_0)\left\{u'(x_0) + u''(\xi_x)\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right\} \leq 0$$

pour x proche de x_0. nous donne

$$u'(x_0) = 0 \quad u''(\xi_x) \leq 0$$

pare passage a la limite $x \to x_0$, nous avons

$$u'(x_0) = 0 \quad u''(x_0) \leq 0. \ \textit{ceci conredit } (2.23)$$

Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $a_{ij}, b_i, i, j = 1, ..., n$ des fonctions dans Ω tel que a_{ij} satisfait

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.26}$$

nous avons

Théorème 2.6. *Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ supposons que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial^2_{x_ix_j}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i}u > 0 \quad \forall x \in \Omega \tag{2.27}$$

alors

$$u(x) < \max_{\partial\Omega} u(x) \qquad \forall x \in \Omega. \tag{2.28}$$

Preuve pour une $C^2 - fonctions$ on a

$$\partial^2_{x_ix_j}u = \partial^2_{x_jx_i}u$$

Sans perte de généralité supposant que $A = (a_{ij})$ est une matrice symétrique. sinon on remplace a_{ij} par $\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ dans (2.27).Comme $u \in C(\overline{\Omega})$ et $\overline{\Omega}$ compact ,u atteint son maximum en un point de $\overline{\Omega}$ .si (2.28) n'est pas vérifier , alors u atteint son maximum en un point $x_0 \in \Omega$ alors pour chaque $\xi \in \mathbb{R}^n$ la fonction

$$v(t) = u(x_0 + t\xi)$$

atteint a maximum locale en t=0 cela implique que

$$v'(0) = 0 \ , \quad v''(0) \leq 0.$$

i.e

$$\partial_{x_i} u(x_0)\xi_i = 0, \ \partial^2_{x_i x_j} u(x_0)\xi_i\xi_j \leq 0, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.29}$$

Comme $A = a_{ij}(x_0)$ est symétrique il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D tell que

$$A = QDQ^t$$

Supposent que

$$D = \begin{pmatrix} d_1(x_0) & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & d_n(x_0) \end{pmatrix}$$

Si " $\cdot$ " dénote le produit scalaire habituel dans $\mathbb{R}^n$ alors (2.26) s'écrit

$$A\xi \cdot \xi \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Cela implique que

$$D\xi \cdot \xi = Q^t AQ\xi \cdot \xi = AQ\xi \cdot Q\xi \geq 0, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

et en particulier pour $\xi = e_i$

$$d_i(x_0) \geq 0 \qquad \forall i = 1, ..., n \tag{2.30}$$

Si $\partial^2 u$ désigne la matrice Hessian de u à x_0 on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\partial^2_{x_i x_j} u(x_0) = tr(A\partial^2 u) = tr(QDQ^t\partial^2 u) = tr(DQ^t\partial^2 uQ) \tag{2.31}$$

(nous avons utilisé le fait que pour deux matrices$M_1, M_2, tr(M_1M_2) = tr(M_2M_1)$) Si nous définissons $C = Q^t\partial^2 u(x_0)Q = (c_{ij})$ par (2.29) on a

$$C\xi \cdot \xi = \partial^2 u(x_0)Q\xi \cdot Q\xi \leq 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

et donc comme ci-dessus $c_{ii}(x_0) \leq 0, \forall i = 1, ..., n$. En Combinant (2.29),(2.30),(2.31) on obtient

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\partial^2_{x_i x_j} u(x_0) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x_0)\partial_{x_i} u(x_0) = tr(DC) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_0)c_{ii}(x_0)$$

qui contredit (2.27) et conclut la preuve du Théorème (2.6)

Remarques 2.4. *Le résultat ci-dessus est vrai pour* $A = (a_{ij}) \equiv 0$
Le problème suivant est de voir ce qui se passe lorsque l'inégalité (2.27) n'est pas stricte. Dans ce cas, nous avons

Théorème 2.7. *Supposons qu'il existe un vecteur $\xi \neq 0$ tel que pour certaines constantes positives γ, δ*

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \gamma > 0, \quad b_i(x)\xi_i \geq -\delta, \qquad \forall x \in \Omega. \tag{2.32}$$

Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaisant

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial^2_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i} u \geq 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.33}$$

alors

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega} \tag{2.34}$$

Preuve Considérons la fonction

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\alpha(\xi \cdot x)}$$

(α est une constante positive à choisir ultérieurement). On a

$$\partial_{x_i} u_\varepsilon = \partial_{x_i} u + \varepsilon \alpha e^{\alpha(\xi \cdot x)} \xi_i$$
$$\partial^2_{x_i x_j} u_\varepsilon = \partial^2_{x_i x_j} u + \varepsilon \alpha^2 e^{\alpha(\xi \cdot x)} \xi_i \xi_j$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n} \partial^2_{x_i x_j} a_{ij} u_\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} b_i u_\varepsilon \\
&\qquad = \sum_{i,j=1}^{n} \partial^2_{x_i x_j} a_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} b_i u + \alpha e^{\alpha(\xi \cdot x)} \{\alpha^2 a_{ij} \xi_i \xi_j + \alpha b_i \xi_i\} \\
&\qquad \geq \alpha e^{\alpha(\xi \cdot x)} \{\alpha^2 \gamma - \alpha \delta\} > 0
\end{aligned}$$

pour α assez grand. En appliquant le Théorème (2.6) , nous déduisons que

$$u_\varepsilon(x) < \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} e^{\alpha(\xi \cdot x)} \qquad \forall x \in \Omega.$$

quand $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u(x), \quad \forall x \in \Omega$$

Remarques 2.5. *Dans le cas de (2.33) on ne peut pas avoir (2.28) car $u \equiv cte$ est une solution de (2.33).*

Théorème 2.8. *Supposons que les hypothèses du Théorème* (2.7) *(2.26), (2.32) sans vérifie. Notons c une fonction telle que*

$$c(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \Omega \tag{2.35}$$

Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfaisant

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \partial^2_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \partial_{x_i} u - c(x) u \geq 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.36}$$

Alors

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u^+(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega} \tag{2.37}$$

Preuve Considérez l'ensemble ouvert

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}.$$

si Ω^+ est vide , alors (2.37) tient clairement. Sinon (2.36), nous avons

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial^2_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i} u \geq c(x)u \geq 0, \quad sur\ \Omega^+$$

et par le Théorème (2.7)

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega^+} u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u^+(x),$$

Ceci complète la preuve du Théorème.

Remarques 2.6. *(Principe de minimum). Sous les hypothèses du Théorème* (2.8) *si u*

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial^2_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i} u - c(x)u \leq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

alors -u satisfait (2.36) et on a

$$-u(x) \leq \max_{\partial\Omega}(-u^+)(x) \Longleftrightarrow u(x) \geq -\max_{\partial\Omega} u^-(x) = \min{(u^-)}$$

Remarques 2.7. *Une conséquence du principe maximum est l'unicité de la solution du Problème de Dirichlet associé à l'opérateur L défini en remarque* (2.6) *plus généralement si* $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfaire*

$$\begin{cases} -Lu \leq -Lv\ dans\ \Omega \\ u \leq v\ sur\ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.38}$$

alors

$$u \leq v\ dans\ \Omega \tag{2.39}$$

2.4 Principe du maximum dans les petits domaine

Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi \in C_c^\infty$ on note

$$\lambda_1(\Omega) = \inf \frac{\int_\Omega M\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi}{\int_\Omega \varphi^2}$$

c'est-à-dire $\lambda_1(\Omega)$ est la première valeur propre du problème :

$$\begin{cases} -div(M\nabla\varphi) = \lambda_1\varphi & dans\ \Omega \\ v = 0 & sur\ \Omega \end{cases}$$

Lemme 2.1. *Soit*

$$\omega(r) := \inf\{\lambda_1(\Omega), |\Omega| = r\}$$

Alors $\omega(r) \to +\infty$ *si* $r \to 0$

Théorème 2.9. *Soit* $u \in H_0^1(\Omega), c(x) \in L^\infty(\Omega)$ *tel que*

$$\|c^+(x)\|_\infty < \lambda_1(\Omega) \tag{2.40}$$

si

$$-\,div(M\nabla u) \geq c(x)u(x) \tag{2.41}$$

alors

$$u \geq 0.$$

Preuve On a

$$\lambda_1(\Omega) = \int \frac{\int_\Omega M\nabla u^- \cdot \nabla u^-}{\int_\Omega (u^-)^2}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1(\Omega)\int_\Omega u^{-2} &\leq \int_\Omega M\nabla u^- \cdot \nabla u^- \\ &\leq -\int_\Omega M\nabla u \cdot \nabla u^- \\ &\leq \int_\Omega c(x)(u^-)^2 \\ &\leq \int_\Omega c^+(x)(u^-)^2 \end{aligned}$$

par suit

$$\lambda_1(\Omega)\int_\Omega (u^-)^2 \ \leq \|c^+\| \ \int_\Omega (u^-)^2$$

d'après (2.40)

$$(\lambda_1(\Omega) - \|c^+\|) \int_\Omega (u^-)^2 \leq 0$$

alors

$$u^- = 0.$$

Chapitre 3

Symétrie des solutions positives de quelque problème elliptique semi-linéaire

Dans ce chapitre, nous démontrons le Lemme de Hopf et la symétrie des solutions positives d'un problème elliptique semi-linéaire en utilisant la méthode des hyperplans mobiles.

3.1 Le principe du maximum de Hopf

Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^(\overline{\Omega})$ tel que

$$u'' \geq 0 \quad dans \ \Omega = (a, b) \tag{3.1}$$

Par le Théorème (2.7)

$$u(x) \leq M = \max\{u(a), u(b)\}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Supposons que le maximum M soit atteint en un point donné $x_0 \in \Omega$, donc

$$u'(x_0) = 0$$

par, (3.1) u' est croissant, par suite $u'(x) \leq 0$ si $x \leq x_0$ et $u' \geq 0$ si $x \geq x_0$, autrement dit $u(x)$ est décroissant si $x \leq x_0$ est croissant si $x \geq x_0$, mais $u(x_0) = M$ alors u est nécessairement constante. Notre objectif dans ce qui suit est de généraliser ce résultat pour les opérateurs elliptique sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.1. ***"sphère intérieure"*** *([2];page 102)*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on dit que Ω vérifier la condition de sphère intérieure en un point x_0 de $\partial\Omega$ s'il existe une boule ouverte $B(y,r) \subset \Omega$ de sorte que $x_0 \in \overline{B}(y,r)$.

Remarques 3.1. *Ω satisfait la condition de la sphère intérieure si cette condition est vérifiée en tout point x_0 de $\partial\Omega$*

- *Intuitivement la boule $B(y,R)$ est "tangente" à $\partial\Omega$ du moins quand $\partial\Omega$ est régulier.*
- *Le vecteur normale en x_0 est donné par $\frac{(x_0-y)}{R}$*

Lemme de Hopf 3.1. *Soit c une fonction bornée. supposons qu'il existe λ positifs tel que*

$$\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$$

Soit $u \in C^2(\Omega)$ tel que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial^2_{x_i,x_j}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_{x_i}u - c(x)u \geq 0, \quad \textit{dans } \Omega \tag{3.2}$$

Considérons un point $x_0 \in \partial\Omega$ et supposons que

$$(i)\ u \textit{ est continu en } x_0 \tag{3.3}$$

$$(ii)\ u(x_0) > u(x), \quad \forall x \in \Omega \tag{3.4}$$

$$(iii)\ satisfait\ une\ condition\ de\ sphere\ intrieure\ en\ \ x_0 \tag{3.5}$$

Soit ν un vecteur normale à $\partial\Omega$ en x_0 alors si la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial v}(x_0)$ existe, on a

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0, \tag{3.6}$$

pour

$$\begin{array}{ll} c = 0 & u(x_0) \textit{ arbitraire.} \\ c \geq 0 & u(x_0) \geq 0. \\ c \textit{ arbitraire} & u(x_0) = 0. \end{array} \tag{3.7}$$

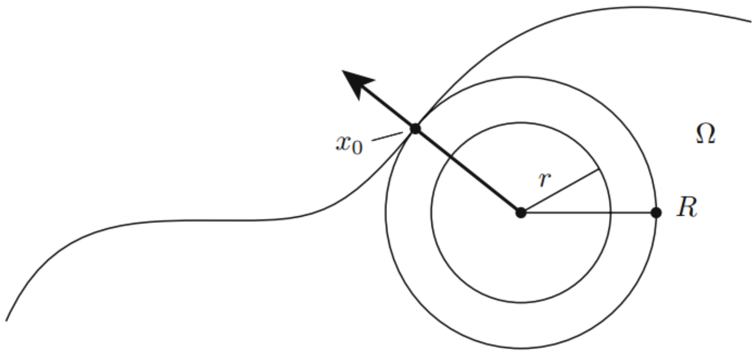


FIGURE 3.1 –

Preuve

Considérons la fonction v définit par

$$v(x) = e^{-\alpha\rho^2} - e^{-\alpha R^2} \geq 0 \tag{3.8}$$

où $\rho = |x-y|, r < \rho < R$ et α est une constante positive a choisir . On a

$$\partial_{x_i} v = \partial_{x_i} e^{-\alpha|x-y|^2} = -2\alpha e^{-\alpha\rho^2}(x_i - y_i)$$
$$\partial^2_{x_i x_j} v = 4\alpha^2 e^{-\alpha\rho^2}(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\alpha e^{-\alpha\rho^2}\delta_{ij}$$

Ainsi, si Lu est défini comme le côté gauche de (3.2), notons L^+ l'opérateur défini comme L avec c remplacé par c^+. Nous avons avec la convention de sommation

$$\begin{aligned}
L^+ v &= a_{ij}\{4\alpha^2 e^{-\alpha\rho^2}(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\alpha e^{-\alpha\rho^2}\delta_{ij}\} + b_i\{-2\alpha e^{-\alpha\rho^2}(x_i - y_i)\} - c\{e^{-\alpha\rho^2} - e^{-\alpha R^2}\} \\
&\geq e^{-\alpha\rho^2}\{4\alpha^2 a_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\alpha(a_{ii} + b_i(x_i - y_i)) - c^+\} \\
&\geq e^{-\alpha\rho^2}\{4\alpha^2\lambda|x-y|^2 - 2\alpha(|a_{ii}| + |b||x-y|) - c^+\} \\
&\geq e^{-\alpha\rho^2}\{4\alpha^2\lambda r^2 - 2\alpha(|a_{ii}| + |b|R) - c^+\} \geq 0 \; sur \; B_R(y) \setminus B_r(y)
\end{aligned}$$

pour α assez grand

A la frontière de $B_r(y)$ nous avons, comme u est continu,

$$u - u(x_0) \leq -\gamma_0 < 0$$

pour une constante positive γ. et pour ε assez petit, nous avons

$$u - u(x_0) + \varepsilon v \leq 0 \; sur \; \partial B_r(y) \tag{3.9}$$

De plus sur $\partial B_R(y)$ nous avons (voir (3.4) (3.8))

$$u - u(x_0) + \varepsilon v \leq 0 \quad sur \; \partial B_R(y)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} L^+(u - u(x_0) + \varepsilon v) &= Lu - c^- u + c^+ u(x_0) + \varepsilon L^+(v) \\ &\geq -c^-(u - u(x_0) - c^- u(x_0 + c^- u(x_0 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

pour toutes les fonctions c vérifiant (3.7). En appliquant le Théorème (2.8) avec L remplacé par L^+ on déduit

$$u - u(x_0) + \varepsilon v \leq 0 \quad sur \; B_R(y) \setminus B_r(y)$$

comme $v(x) = 0$, nous avons pour $h > 0$ assez petit

$$u(x_0 - h\nu) - u(x_0) + \varepsilon(v(x_0 - h\nu) - v(x_0)) \leq 0$$

par passage à la limite $h \to 0$ on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0)$$

Mais

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \nabla v(x_0) \cdot \nu = -2\alpha e^{-\alpha|x_0 - y|^2}(x_0 - y) \cdot \nu < 0$$

Théorème 3.1. *supposons que les hypothèses du lemme* (3.1) *sont vérifiés. Soit* $u \in C^2(\Omega)$ *satisfaisant*

$$Lu \geq 0 \quad sur \; \Omega$$

Si Ω est connexe et si

$$\begin{aligned}
&c = 0 \ et \ u \ atteint \ son \ maximum \ \ l'intrieur \ de \ \Omega \\
&ou \ c \ \geq 0 \ et \ u \ atteint \ un \ maximum \ non \ negatif \ \ l'intrieur \ de \ \Omega \\
&ou \ bien \ c \ arbitraire \ et \ le \ maximum \ de \ u \ sur \ \Omega \ egale \ 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

alors u est constant dans Ω

Preuve : Supposons que u n'est pas constant et atteint un maximum M dans Ω. Soit l'ensemble

$$\Omega^- = \{x| \ u(x) < M\}$$

Puisque u n'est pas constant, Ω^- est un sous-ensemble ouvert de Ω qui n'est pas vide et tel que $\partial\Omega^- \cap \ \Omega$ n'est pas vide (sinon, alors $\Omega \subset \Omega^- \cup (\mathbb{R}^n - \overline{\Omega}^-)$ ce qui contredit la connectivité de Ω.) .Soit $y \in \Omega$ tel que y soit plus proche de $\partial\Omega^-$ que de $\partial\Omega$. Considérons alors $B_R(y)$ la plus grande boule contenue dans Ω soit $x_0 \in B_R(y)$ tel que $u(x_0) = M$ .d'après le lemme (3.1) on a

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$$

(ν est la normale extérieure de l'ensemble $B_R(y)$) mais cela contredit le fait que $x_0 \in \Omega$ est un point le maximum car $\nabla u(x_0) \equiv 0$ Ainsi, u est constant. Ceci complète la preuve du Théorème.

Remarques 3.2. *Une conséquence du Théorème* (3.1) *est que si Ω est borné et M dénote le maximum de u en Ω et si nous sommes sous les hypothèses du Théorème* (3.1) *alors*

$$u \equiv M \ sur \ \Omega \ ou \ u < M \quad sur \ \Omega$$

3.2 Application : Symétrie des solution positives

Le principe de maximum que nous venons de voir permet d'obtenir des propriété qualitatives des solutions des équations elliptiques.

Définition 3.2. *([3];page 255) Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$. On dit que Ω est convexe dans la direction x_1 si*

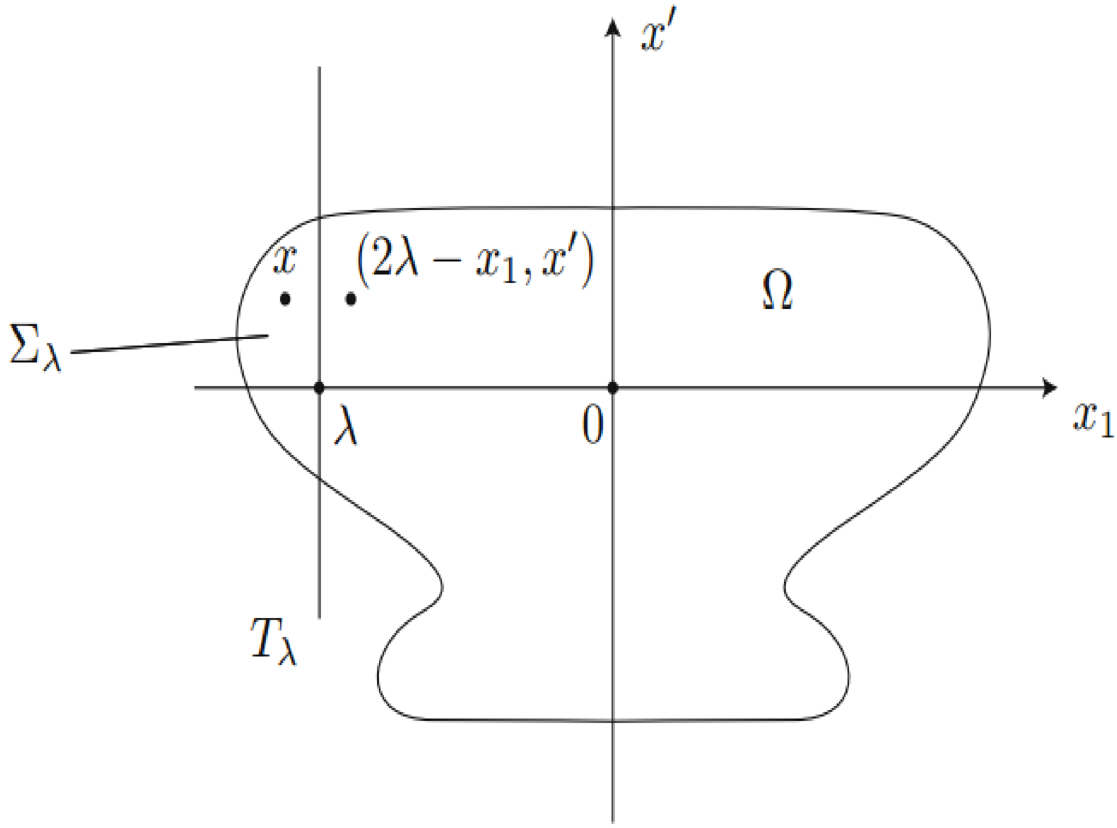
$$\forall (x_1, x'), (y_1, x') \in \Omega \ alors \ (\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1, x') \in \Omega \quad \forall \alpha \in (0,1). \tag{3.11}$$

Théorème 3.2. *Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ convexe dans la direction x_1 et symétrique par rapport à l'hyperplan $x_1 = 0$ (voir figure* (3.2) *). Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ une solution positive du problème*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) \ dans \ \Omega \\ u = 0 \ sur \ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.12}$$

ou f est une fonction continue de lipschitzienne. Alors u est symétrique par rapport à l'hyperplan $x_1 = 0$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} > 0 \ sur \ \Omega^- = \{x \in \Omega | x_1 < 0\} \tag{3.13}$$



Preuve On utilise la technique dite des hyperplans mobiles. Posons

$$-a = \inf_{(x_1,x')\in\Omega} x_1 \tag{3.14}$$

Pour $-a < \lambda < 0$ nous définissons T_λ, Σ_λ comme

$$T_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \lambda\}, \quad \Sigma_\lambda = \{x \in \Omega \mid x_1 < \lambda\} \tag{3.15}$$

On Définit

$$\omega_\lambda(x) = u(2\lambda - x_1, x') - u(x_1, x'), \quad x = (x_1, x') \in \Sigma_\lambda \tag{3.16}$$

Nous avons dans Σ_λ

$$\begin{aligned}
-\Delta\omega_\lambda &= -\Delta u(2\lambda - x_1, x') + \Delta u(x_1, x') \\
&= \frac{\{f(u(2\lambda - x_1, x')) - f(u(x_1, x'))\}}{\omega_\lambda}\omega_\lambda \\
&=: c(x,\lambda)\omega_\lambda
\end{aligned}$$

avec $c(x,\lambda) = 0$ si $\omega_\lambda = 0$. De plus nous avons par le fait que f est Lipschitziennes que c(x) est uniformément bornée par rapport à λ puisque

$$|c(x,\lambda)| \leq L \quad \forall x \in \Sigma_\lambda \quad \forall \lambda, \tag{3.17}$$

ou L est la constante de lipschitzienne de f. Puisque u est positif, nous avons par le principe maximum

$$\omega_\lambda \geq 0, \omega_\lambda \neq 0 \quad sur \ \ \partial\Sigma_\lambda. \tag{3.18}$$

(notons que $\omega_\lambda = 0$ sur $T_\lambda \cap \Omega$.) Pour $-\alpha < \lambda + a$ assez petit , Σ_λ est étroit dans la direction x_1 et par le principe du maximum dans les petites domaines on déduit

$$\omega_\lambda(x) \geq 0 \quad dans \ \Sigma_\lambda \tag{3.19}$$

(Voir (3.17)) Par le principe du maximum fort (Théorème (3.1)) nous avons en fait

$$\omega_\lambda(x) > 0 \quad dans \ \Sigma_\lambda \tag{3.20}$$

Soit $(-a, \mu)$ le plus grand intervalle pour lequel

$$\omega_\lambda(x) > 0 \; dans \; \Sigma_\lambda \quad \forall \lambda \in (-a, \mu) \tag{3.21}$$

Nous affirmons que $\mu = 0$. sinon supposons $\mu < 0$. Par continuité, nous avons

$$\omega_\mu(x) \geq 0 \quad dans \;\; \Sigma_\mu$$

et par le principe de maximum de Hopf

$$\omega_\mu(x) > 0 \quad \text{en } \Sigma_\mu$$

Notons K un ensemble compact dans Σ_μ tel que

$$|\Sigma_\mu \setminus K| \leq \frac{\delta}{2}$$

Ou δ est un nombre réel que nous fixerons plus tard. ($|\cdot|$ est la mesure de Lebesgue) . sur K nous avons

$$\omega_\mu \geq m > 0$$

Ainsi par continuité pour ε assez petit on a

$$\omega_{\mu+\varepsilon} \geq \frac{m}{2} > 0 \quad sur \;\; K$$

On peut aussi choisir ε suffisamment petit pour que

$$|\Sigma_{\mu+\varepsilon} \setminus K| \leq \delta$$

Maintenant pour δ assez petit (voir (3.17)) Le principe du maximum s'applique à $\widetilde{\Sigma}_{\mu+\varepsilon} = \Sigma_{\mu+\varepsilon} \setminus K$. plus précisément puisque

$$\begin{aligned} -\Delta\omega_{\mu+\varepsilon} - c\omega_{\mu+\varepsilon} = 0 \quad & dans \;\; \widetilde{\Sigma}_{\mu+\varepsilon}, \\ \omega_{\mu+\varepsilon(x)} \geq 0 \quad & sur \;\; \partial\widetilde{\Sigma}_{\mu+\varepsilon}. \end{aligned}$$

On déduit donc que $\omega_{\mu+\varepsilon} \geq 0$ dans $\widetilde{\Sigma}_{\mu+\varepsilon}$ et enfin par le principe du maximum fort

$$\omega_{\mu+\varepsilon} > 0 \quad \text{dans } \Sigma_{\mu+\varepsilon}$$

Cela contredit la maximalité de μ et nous avons donc

$$\omega_\lambda(x) > 0 \text{ dans } \Sigma_\lambda \qquad \forall \lambda \in (-a, 0).$$

Laissons $\lambda \to 0$ dans l'inégalité ci-dessus et rappelons la définition de ω_λ on arrive à

$$u(-x_1, x') \geq u(x_1, x) \quad \forall (x_1, x) \in \Omega, x_1 < 0$$

Comme $u(-x_1, x')$ est également une solution positive de (3.12)

$$u(x_1, x') \geq u(-x_1, x'), \quad \forall (x_1, x') \in \Omega, \; x_1 < 0.$$

cela montre que

$$u(-x_1, x') = u(x_1, x') \quad \forall (x_1, x') \in \Omega \;\; x_1 < 0$$

et la symétrie de u par rapport à l'hyperplan $x_1 = 0$ est démontrée. Maintenant pour chaque $\lambda \in (-a, 0)$ que nous avons

$$\omega_\lambda(x_1, x') > 0 \;\; dans \; \Sigma_\lambda, \quad \omega_\lambda(x_1, x') = 0 \;\; sur \; T_\lambda \cap \Omega.$$

Par Lemme de Hopf et le fait que la normale en (λ, x') est donnés par e_1, on obtient

$$\frac{\partial \omega_\lambda}{\partial \nu}(\lambda, x') = \frac{\partial \omega_\lambda}{\partial x_1}(\lambda, x') < 0 \; \forall x' \; tel \; que \; (\lambda, x') \in \Omega$$

revenons à (3.16) nous obtenons

$$-2\partial x_1 u(\lambda, x') < 0 \quad \forall x' \text{ tel que } (\lambda, x') \in \Omega$$

C'est (3.13) et ceci complété la preuve du Théorème.

Remarques 3.3. *On a par symétrie de u*

$$\partial x_1 u < 0 \; sur \; \Omega^+ = \{x \in \Omega | x_1 > 0\}$$

et par la continuité de $\partial_{x_i} u, \partial_{x_1} u = 0$ sur $T_0 \cap \Omega$.

Corollaire 3.1. *Soit $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ une solution positive de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & dans \;\; B_R(0) \\ u = 0 & sur \;\; \partial B_R(0) \end{cases}$$

Ou f est lipschitzienne continu alors u est une fonction radiale autrement dit

$$u(x) = \widetilde{u}(|x|)$$

avec $\widetilde{u} : (0, R) \to \mathbb{R}$. *De plus* $\widetilde{u}' < 0$ *sur* $(0, R)$

Preuve : Cela découle directement du Théorème (3.2) puisque u est symétrique par a port à tout hyperplan passant par l'origine.

Bibliographie

[1] **H. Brezis**. Analyse fonctionnelle Théorie et Application.deuxième édition, 1987.

[2] **H.Le Dret** .Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires non linéaires

[3] **Chipot. M**.Elliptic Equations : An Introductory Course (2009)