RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN TIARET

Faculté des Mathématiques et d'Informatique

Département des Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquée

Option : Analyse Fonctionnelle et application

Présenté en vue d'obtenir le diplôme de MASTER

Présenté par :

KHELLOUFI MOHAMED

BOUMEDIENE AHMED

KHALED KHODJA KARIMA

Quelques généralisations de L'inégalité de Gruss à l'aide de l'opérateur de Riemann Liouville

---

Devant le jury composé de :

Président	MCB	Mr.Halim Banali
Encadreur	MAA	Mr.Mohammed Sofrani
Examinateur	MCA	Mr.Souid Mohammed Said

Promotion : 2019 / 2020

Remerciement

Je remercie tout d'abord ALLAH pour m'avoir donné la capacité.

de savoir et réussir afin de réaliser ce travail

A mon encadreur Mr : SOFRANI MOHAMMED

Et A notre enseignant et modéle Mr : SENOUCI ABD-EL KADER ce qui nous encouragés et aides dans notre parcours académique

J'ai eu l'honneur d'être parmi vos étudiants de bénéficier de votre riche enseignement.

Vos qualités pédagogiques et humaines sont pour moi un modéle.

Votre gentillesse, et votre disponibilité permanente ont toujours suscité mon admiration.

Veuillez bien Monsieur recevoir mes remerciements pour le grand honneur que vous m'avez fait d'accepter l'encadrement de ce travail.

Aux membres du jury

Messieurs les membres du jury, vous nous faites un grand honneur en acceptant de juger ce travail.

Je dois un remerciement á toute l'équipe d'enseignement pour leurs qualités scientiques et pédagogiques.

Je tiens à remercier chaleureusement, tous mes proches et tous ceux qui, de prés ou de loin, m'ont apporté leurs sollicitudes pour accomplir ce travail.

Je dédie ce travail à

Ma mère et mon père pour leur soutien et leurs encouragements et que Dieu la protège.

À

Mes soeurs et mes frères et tout ma famille pour leurs disponibilités à entendre mes frustrations et les sources de mes tensions et toujours m'aider avec mes souhaits de bonheur et de réussite dans leurs vies

À

Ceux qui n'ont jamais cesse de m'aimer et me soutenir dans la vie avec sa gesse et effection

À

Tous les professeurs que soit du primaire, du secondaire ou de l'enseignement supérieur

Boumediene Ahmed

Je dédie ce travail à

Ma mère et mon père pour leur patience, leur amour,leur soutien et leurs encouragements.

À

Mes soeurs et mes frères pour leurs disponibilités à entendre mes frustrations et les sources de mes tensions et toujours m'aider avec mes souhaits de bonheur et de réussite dans leurs vies

À

Tous Mes amis et Mes chères

À

Tous les professeurs que soit du primaire, du secondaire ou de l'enseignement supérieur

Khelloifi Mohamed

Je dédie ce travail à

Mon père Habib qui était pour moi un symbole de courage de fierté merci pour ton soutien.

À

La plus belle perle dans le monde Amina ma chère mère que Dieu te garde et te protège

À

Mes soeurs Khadidja ;Nadia ;Aicha ;Ikram et mes frères Ahmed ;Abd-El-Rezak pour leurs disponibilités à entendre mes frustrations

À

Tous ma famille Khaled Khodja ;Ben Cheikh et Mes amis

Ikram ;Nawel ;Nassima ;Hanan ;Fatima et Mes chères

À

Toute personne m'ayant aidé à franchir un horizon dans ma vie

À

Tous les professeurs que soit du primaire, du secondaire ou de l'enseignement supérieur

Khaled Khodja Karima

Table des matières

Introduction **iii**

1 Espaces Fonctionnels **1**

1.1 Espaces Fonctionnels 1

1.1.1 Espaces des fonctions intégrables 1

1.1.2 L'inégalité de Holder 2

1.1.3 Espaces des fonctions continues et absolument continues 2

1.1.4 Espaces des fonctions continues avec poids $C_\lambda([a,b])$ 3

1.1.5 Théorème de Fubini 3

2 Calcul Fractionnaire **5**

2.1 Les fonctions spécifiques 5

2.1.1 Fonction Gamma 5

2.1.2 Fonction Bêta 6

2.2 Calcul Fractionnaire 8

2.2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville 8

2.2.2 Dérivation fractionnaire 10

3 Quelques nouvelles inégalités intégrales de type Gruss **14**

3.1 Inégalité de Gruss 14

3.2 Généralisations de l'inégalité de Gruss 16

3.2.1 En utilisant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville dans le première cas 16

3.2.2 En utilisant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville dans le deuxième cas 22
3.3 Conclusion 27

INTRODUCTION

Le sujet de calculs fractionnaires a gagné en popularité et en importance , au cours des trois derniers déconnes principalement en raison de ses applications démontres dans le nombreux de mains divergents de la science et de l'ingénierie ,il fournit en effet plusieurs outils potentiellement utiles pour résoudre des équations différentielles et Intégrales , et divers autres problèmes Impliquant des fonctions spéciales de la physique mathématiques [[6],[7]].
Le but du calcul fractionnaire est généraliser les dérivées des ordres entiers (classiques) à des ordres non entiers [[6],[7]].
En 1935,G Gruss [3] a prouvé l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx-(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx)(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx)\leqslant\frac{(M-m)(P-p)}{4} \tag{1}$$

avec f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ et satisfaisant les conditions $m\leq f\leq M, p\leq g\leq P$ et $m,M,p,P\in\mathbb{R}, x\in[a,b]$.
L'inégalité (1) a évoqué l'intérêt de nombreux chercheurs et de la nombreuses généralisation , extension sont apparus dans la littérature , en citer quelques uns voir[4],[5],[6],[7].
L'objectif principale de ce mémoire est d'établir de nouvelles généralisations L'inégalités de Gruss (1), en l'utilisant les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville.
Notre mémoire est organisé comme suit :

— Le premièr chapitre est destiné aux diffents outils et techniques mathématiques utilisés par la suite : Espaces des fonctions intégrables, espaces des fonctions continues et absoluments continues et espaces des fonctions continues avec poids.

— Dans le deuxième chapitre nous présentons les définitions des fonctions spéciales les fonctions(Gamma, Beta), et ses propriétes, les définitions de dérivations et intégrations fractionnaires aux sens Riemann-Liouville

— l'objet de troisième chapitre est consacré à quelques nouvelles inégalités de type Gruss. Nous utilisons l'intégrale fractionnaire de Riemann-liouville avec un paramètre et encore avec deux paramètres.

Notations 1. *A :moyenne arithmétique*

G :moyenne géométrique

H :moyenne harmonique

Q :moyenne quadratique

Chapitre 1

Espaces Fonctionnels

1.1 Espaces Fonctionnels

1.1.1 Espaces des fonctions intégrables

Définition 1.1. *Soit* $\Omega = [a,b];(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$ *un intervalle finie ou infinie de* $\mathbb{R}$ *et* $p \in [1,+\infty]$

1. *Pour* $1 \leq p < +\infty$ *,l'espace des fonctions P-intégrables(*$L_p(\Omega)$*) est l'espace des (classes de) fonctions* f *réelles sur* Ω *telles que* f *est mesurables et*

$$\int_{\Omega} |f(x)|dx < +\infty$$

2. *Pour* $p = \infty$*,l'espace* $L_{\infty}(\Omega)$ *est l'espace des(classes de) fonctions mesurables* f *bornées presque par tout (p.p) sur* Ω

Théorème 1. *Soit* $\Omega = (a,b)$ *un intervalle finie ou infinie de* $\mathbb{R}$

1. *Pour* $1 \leq p < +\infty$ *,l'espace vectoriel normé et complet ie : un espace de Banach donc la norme donnée par :*

$$\|f(x)\|_{L_p(\Omega)} = \|f(x)\|_{L_p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

2. *Pour $p=\infty$,l'espace $L_\infty(\Omega)$est de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \ p.p \ sur \ \Omega\}$$

3. *Pour $p=2$,alors :*
   $L^2(\Omega)=\{f : f$ *mesurable à carré intégrable sur* $\Omega; \int\limits_\Omega f^2(x)dx < \infty\}$

1.1.2 L'inégalité de Holder

Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ ou les réels p et q satisfait a $q=\frac{p}{p-1}$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ On a l'inégalité :

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \left[\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\int_\Omega |g(x)|^q\,dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

Cette inégalité se généralise en considérant les réels $p_j>1$ donc la somme des inverse est égale à 1 : $\forall f \in L^p(\Omega), \int\limits_\Omega \left|\prod f_j(x)\right|dx \leq \prod\left(\int\limits_\Omega \left|f_j(x)\right|^{p_j}dx\right)^{\frac{1}{p_j}}$

Théorème 2. *(Inégalité de Cauchy-Schwartz intégrable)*
Soient $f,g \in (C([a,b],\mathbb{R}))^2$ alors :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.1.3 Espaces des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.2. *(voir[6])*
Soit $\Omega=[a,b];(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$ et $n \in \mathbb{N}=0,1,2,...$ On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n} := \sum_{k=0}^{n}\left\|f^{(k)}\right\|_C := \sum_{k=0}^{n}\max_{x\in\Omega}\left|f^{(k)}(x)\right|, n \in \mathbb{N}$$

En particulier si $n=0$, $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_C := \max_{x\in\Omega}|f(x)|$$

Définition 1.3. *(voir[6])*
Soit $\Omega = [a,b]; (-\infty < a < b < +\infty)$ *un intervalle finie On désigne par* $AC([a,b])$ *l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables , c'est à dire :*

$$AC([a,b]) = \left\{ f/\exists \varphi \in L([a,b]) : \ f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt \right\}$$

et on appelle $AC([a,b])$*l'espace des fonctions absolument continues sur* $[a,b]$

Définition 1.4. *(voir[6])*
Pour $n \in \mathbb{N} = 0,1,2,...$ *on désigne par* $AC^n([a,b])$ *l'espace des fonctions* f *ayant des dérivées jusqu'à l'ordre* $(n-1)$ *continues sur* $[a,b]$ *telles que* $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$ *c'est à dire :*

$$AC^n([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \ et \ f^{(n-1)} \in AC([a,b])\}$$

En particulier $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$

1.1.4 Espaces des fonctions continues avec poids $C_\lambda([a,b])$

Définition 1.5. *(voir[6])*
Soient $\Omega = [a,b]$ *un intervalle finie et* $\lambda \in \mathbb{C}; (0 \leq \Re e(\lambda) < 1)$*. On désigne par* $C_\lambda([a,b])$ *l'espace des fonctions* f *définies sur* $]a,b]$ *telles que la fonction* $(x-a)^\lambda f(x) \in C[a,b]$ *c'est à dire :*

$$C_\lambda([a,b]) = \{f :]a,b] \to \mathbb{C}, (.-a^\lambda) f(.) \in C([a,b])\} \tag{1.1}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C_\lambda} = \left\|(x-a)^\lambda f(x)\right\|_C = \max_{x\in\Omega} \left|(x-a)^\lambda f(x)\right| \tag{1.2}$$

L'espace $C_\lambda([a,b])$ *est appelé l'espace des fonctions continues avec poids.*
En particulier :$C_0([a,b]) = C([a,b])$

1.1.5 Théorème de Fubini

Soient $\Omega_1 = [a,b], \Omega_2 = [c,d], -\infty \leq a < b \leq +\infty, -\infty \leq c < d \leq +\infty$ $f(x,y)$ une fonction définie sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ mesurable .Si au moins l'une des intégrales suivantes converge absolument :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} f(x,y)dy, \int_{\Omega 2} dy \int_{\Omega_1} f(x,y)dx, \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} f(x,y)dxdy. \tag{1.3}$$

alors elles coïncident.

1.1.5.1 Formule de Dirichlet

Comme cas particulier on a l'égalité suivantes avec comme hypothèse la convergence absolue au moins de l'une des deux intégrales ,alors

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dx \tag{1.4}$$

Chapitre 2

Calcul Fractionnaire

2.1 Les fonctions spécifiques

2.1.1 Fonction Gamma

L'une des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge naturellement la factorielle aux nombre réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 2.1. *(voir[8])*
Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$ *La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp^{-t} t^{x-1} dt \tag{2.1}$$

(cette intégrale est convergente pour tout $x > 0$*)*

2.1.1.1 Propriétés de la fonction Gamma

Propriétés 1. *(voir[8])*
Pour tout $x > 0$, *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a :*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{2.2}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{2.3}$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)} \tag{2.4}$$

$$CasParticuliers$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{1-1}dx = 1 \tag{2.5}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{2.6}$$

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} \tag{2.7}$$

2.1.2 Fonction Bêta

Définition 2.2. *(voir[8])*

Soient $x, y > 0$,*la fonction Bêta est la fonction définie par :*

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad (\Re e(x) > 0, \Re e(y) > 0) \tag{2.8}$$

2.1.2.1 Propriétés de la fonction Bêta

Proposition 1. *(voir[8])*

La fonction Bêta est reliée aux fonctions Gamma par la relation suivante : $\forall x, y > 0$ *on a*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.9}$$

Démonstration

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty t_1^{x-1}e^{-t_1}t_2^{y-1}e^{-t_2}dt_1dt_2 = \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}\left(\int_0^{+\infty} t_2^{y-1}e^{-|t_1+t_2|}dt_2\right)dt_1$$

en effectue le changement de variable

$$t' = t_1 + t_2$$

On trouve

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} dt_1 \int_{t_1}^{+\infty} (t^{'} - t_1)^{y-1} e^{-t^{'}} dt^{'} \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t^{'}} dt^{'} \int_0^{t_1} (t^{'} - t_1)^{y-1} t^{x-1} dt_1\end{aligned}$$

Si on pose $r = \frac{t_1}{t^{'}}$ et on aboutit à :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} e^{-t^{'}} dt^{'} (\int_0^1 (rt^{'})^{t_1} (t^{'} - rt^{'})^{y-1} t^{'} dr) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t^{'}} dt^{'} ((t^{'})^{x+y-1} B(x,y)) \\ &= \int_0^{+\infty} (t^{'})^{x+y-1} e^{-t^{'}} dt^{'} B(x,y) \\ B(x,y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat désiré.

Propriétés 2. *Pour tout* $(x,y) \in \mathbb{C}$ *,avec* $\mathfrak{Re}(x) > 0$ *et* $\mathfrak{Re}(y) > 0$*,On a :*

1. *la fonction Bêta est symétrique c'est-à-dire que :*

$$\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$$

2.

$$B(x+1,y) = xB(x,y+1)$$

3. *Si* $n = y+1$ *est un entier, cela donne une relation de récurrence*

$$B(x,y) = \frac{n-1}{x} B(x+1,n-1)$$

4.

$$B(x,1) = \frac{1}{x}$$

5. *Si* $x = m$ *rt* $y = n$*, on obtient*

$$B(m,n) = \frac{(m-1)(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

2.2 Calcul Fractionnaire

2.2.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}; (\Re e(\alpha) > 0)$,selon l'approche de Riemann-Liouville généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répété n-fois :

$$\begin{aligned}(I_a^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \times \int_a^{t_1} dt_2 .... \times \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad ; (n \in \mathbb{N}^*)\end{aligned}$$

Définition 2.3. *(voir[6],[7])*
Soit $f \in L^1([a,b])$.L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}; (\Re e(\alpha) > 0)$ notée $I_a^\alpha f$ est définie par :

$$(\mathrm{I}_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad ; x > a \quad (gauche) \tag{2.10}$$

Théorème 3. *(voir[6],[7])*
Si $f \in L^1([a,b])$, alors $I_a^\alpha f$ existe pour presque tout $x \in [a,b]$ et de plus $I_a^\alpha f \in L^1([a,b])$
Démonstration (voir[6],[7])

Exemple 2.1. *Soient $\alpha > 0, \beta > -1$ et $f(x) = (x-a)^\beta$,alors :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt \tag{2.11}$$

En effectuant le changement de variable

$$t = a + (x-a)y \ ; \ (0 \leq y \leq 1)$$

alors (2.11) devient

$$\begin{aligned}(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-a-(x-a)y)^{\alpha-1}[x+(x-a)y-x]^\beta (x-a)dy\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 [(x-a)(1-y)]^{\alpha-1}(x-a)^{\beta+1}y^\beta dy\\ &= \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^\beta dy\\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{(\beta+1)-1}dy\end{aligned}$$

En tenant compte de la fonction Bêta (2.8) puis de la relation (2.9) on arrive à :

$$\begin{aligned}(I_a^\alpha f)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta+1)\\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\\ &= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}\end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$(I_a^\alpha (t-\alpha)^\beta)(x) = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta} \tag{2.12}$$

Exemple 2.2. *Soit $f(x) = x^\beta$ avec $\beta > -1$ On a*

$$(I_0^\alpha f)(x) := I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}t^\beta dt \tag{2.13}$$

En posant : $t = xu$, (2.13) devient

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}(xu)^\beta x du$$

En utilisant la fonction Bêta (2.8)puis de la relation (2.9) on arrive à :

$$\begin{aligned}I^\alpha f(x) &= \frac{x^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}u^\beta du\\ &= \frac{x^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}B(\beta+1,\alpha)\\ &= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x)^{\alpha+\beta}\end{aligned}$$

Proposition 2. *(voir[6],[7])*

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $(\Re(\alpha), \Re(\beta) > 0)$, pour toute fonction $f \in L^1([a,b])$, on a :

$$I_a^\alpha(I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f = I_a^\beta(I_a^\alpha f)$$

Pour presque tout $x \in [a,b]$.Si de plus $f \in C([a,b])$,alors cette identité est vrai pour tout $x \in [a,b]$

Démonstration (voir[6],[7])

Théorème 4. *Soient $\alpha > 0$, et $(f_k)_{k=1}^{+\infty}$ est une suite de fonctions continues et simplement convergentes sur $[a,b]$. Alors on peut invertir l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et le signe limite comme suit :*

$$\left[I_a^\alpha(\lim_{k\to+\infty} f_k)\right](x) = \lim_{k\to+\infty}(I_a^\alpha f_k)(x)$$

Démonstration (voir[6],[7])

2.2.2 Dérivation fractionnaire

Il existe plusieurs définition mathématique pour la dérivation d'ordre fractionnaire .Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identique mais elles sont équivalentes pour un large panel de fonctions .Nous allons souligner les définitions qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

2.2.2.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est la plus connue et répandue.

Définition 2.4. *(voir[6],[7])*

Soit $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$,la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}(\Re(\alpha) > 0)$ notée $D_a^\alpha f$ est définie par :

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{I}_a^{n-\alpha} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt \tag{2.14}$$

avec $(n-1) < [\Re e(\alpha)] < n$ *et* $x > 0$ *En particulier , pour* $\alpha = m \in \mathbb{N}$, *on a*

$$(D_a^0 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_a^x f(t)dt = f(x) \tag{2.15}$$

$$(D_a^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\right)\int_a^x f(t)dt = \left(\frac{d^m}{dx^m}\right)f(x) \tag{2.16}$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$

Exemple 2.3. *Reprenons l'exemple de la fonction* $f(x) = (x-a)^\beta$*,où* $\beta \in \mathbb{R}$
.on aura

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{d^n}{dx^n}\left(\mathrm{I}_a^{n-\alpha}(x-a)^\beta\right) \\ &= \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}(x-a)^{n-\alpha+\beta}\right) \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

2.2.2.2 Propriétés de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Par analogie avec la dérivation usuelle , et comme conséquence directe de la relation (2.10), L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est linéaire

Théorème 5. *(voir[6],[7]) Soient* f *et* g *deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre* α *existent . Alors pour* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)$ *existe et on a :*

$$D_a^\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda (D_a^\alpha f)(x) + \mu (D_a^\alpha g)(x)$$

Lemme 1. *Soit* $\alpha \in]n-1, n[$ *et* f *une fonction vérifiant* $D_a^\alpha f = 0$ *alors :*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-n)}(x-a)^{j+\alpha-n}$$

Démonstration. Soit

$$(D_a^\alpha f)(x) = 0$$

En tenant compte de la remarque(2.13) on a :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m [I_a^{m-\alpha} f](x) = 0$$

et par suite

$$[I_a^{m-\alpha} f](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (x-a)^j$$

Maintenant , l'application de l'opérateur I_a^α à l'équation précédente donne

$$(I_a^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j I_a^\alpha \left((x-a)^j\right)$$

En utilisant la relation (2.12) on obtient ainsi

$$(I_a^m f)(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} (x-a)^{j+\alpha}$$

Enfin, la dérivation classique et l'utilisation de la formule

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-m+1)} (x-a)^{\alpha-m}$$

établit le résultat désiré

2.2.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.5. *(voir[6],[7])*
Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\mathfrak{Re}(\alpha) > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(n-1) < \mathfrak{Re}(\alpha) < n$ et $f \in C^n([a,b])$.
La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f notée ${}^cD_a^\alpha f$ est définie par :

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(x) &= \mathrm{I}_a^{n-\alpha} D^n f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \end{aligned} \tag{2.17}$$

2.2.2.4 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivants établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 6. *(voir[6],[7])*

Soient $\alpha \leq 0, n = [\alpha] + 1$. *Si* f *possède* $(n-1)$*dérivée en a et si* $D_a^\alpha f$ *existe alors :*

$$({}^cD_a^\alpha f)(x) = D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k \right]$$

Chapitre 3

Quelques nouvelles inégalités intégrales de type Gruss

3.1 Inégalité de Gruss

Soient f et g :$[a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $[a,b]$,tells que :

$$m \leq f(x) \leq M, p \leq g(x) \leq P \tag{3.1}$$

Alors

$$|T(f,g)| \leqslant \frac{1}{4}(M-m)(P-p) \tag{3.2}$$

où

$$T(f,g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$$

et $m, M, p, P \in \mathbb{R}$

Théorème 7. *Soient x et y deux nombres strictement positifs et soient Q, A, G et H leurs différentes moyennes. Alors on a les inégalités :*

$$Q \geq A \geq G \geq H$$

et

$$Q = A = G = H$$

Si et seulement si $x = y$

Lemme 2. *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, telle que $m \leq f(x) \leq M$.*
Alors

$$\begin{aligned}(M - A(f(x)))(A(f(x)) - m) - \frac{1}{b-a}\int_a^b (M - f(x))(f(x) - m)\,dx \\ = A\left(f^2(x)\right) - A^2(f(x)) \\ et \;\; A\left(f^2(x)\right) - A^2(f(x)) \geq 0\end{aligned} \tag{3.3}$$

avec

$$A(f(x)) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Preuve 3.1. *d'un cote* $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) - m \leq M - m \\ 0 \leq M - f(x) \leq M - m \end{cases}$ *.....(1)*

et d'autre part $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq M - A(f(x)) \leq M - m \\ 0 \leq A(f(x)) - m \leq M - m \end{cases}$ *....(2)*

D'après (1) :

$$(f(x) - m)(M - f(x)) \geq 0$$

et D'après (2) :

$$(M - A(f(x)))(A(f(x)) - m) \geqslant 0$$

Donc :

$$\begin{aligned}(M - A(f(x)))(A(f(x)) - m) - \frac{1}{b-a}\int_a^b (M - f(x))(f(x) - m)\,dx \\ = A\left(f^2(x)\right) - A^2(f(x))\end{aligned}$$

D'après la relation entre le moyenne A et Q on obtient $\Rightarrow A(f^2(x)) - A^2(f(x)) \geq 0$

Corollaire 3.1.

$$A\left(f^2(x)\right) - A^2(f(x)) \leq (M - A(f(x)))(A(f(x)) - m) \tag{3.4}$$

Preuve 3.2. *(Inégalité de Gruss)*
Pour prouver cet inégalité on suive la méthode suivante :
D'après lemme(2)

$$T(f,f) \geq 0 \text{ et } T(g,g) \geq 0$$

et d'après (3.4) on a

$$T(f,f) \leq (M - A(f(x)))(A(f(x)) - m)$$

et

$$T(g,g) \leq (P - A(g(x)))(A(g(x)) - p)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous avons :

$$T^2(f,g) \leq T(f,f)T(g,g)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |T(f,g)| &\leq \sqrt{T(f,f)}\sqrt{T(g,g)} \\
&\leq (M - A(f(x)))(A(f(x)) - m).(P - A(g(x)))(A(g(x)) - p)
\end{aligned}$$

En utilisant la relation entre le moyenne A et G on obtient

$$\begin{aligned}
&(M - A(f(x)))(A(f(x)) - m) \leq (M - A(f(x)) + A(f(x)) - m)^2 \\
&\Rightarrow (M - A(f(x)))(A(f(x)) - m) \leq \frac{1}{4}(M - m)^2 \\
&\Rightarrow T(f,f) \leq \frac{1}{4}(M - m)^2
\end{aligned}$$

de même :

$$T(g,g) \leq \frac{1}{4}(P - p)^2$$

Alors

$$\begin{aligned}
&T(f,f).T(g,g) \leq \frac{1}{16}(M - m)^2(P - p)^2 \\
&\Rightarrow T^2(f,g) \leq \frac{1}{16}(M - m)^2(P - p)^2 \\
&\Rightarrow |T(f,g)| \leq \frac{1}{4}(M - m)(P - p)
\end{aligned}$$

3.2 Généralisations de l'inégalité de Gruss

3.2.1 En utilisant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville dans le première cas

Lemme 3. *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b[$.Vérifiant la condition (3.1) sur $[a,b[$, alors pour tout $x \in [a,b]$,$\alpha > 0$*

On a :

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\alpha}f^{2}(x)-(I^{\alpha}f(x))^{2}\\
&=\left(M\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}f(x)\right)\left(I^{\alpha}f(x)-m\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\\
&-\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\alpha}\left(M-f(x)\right)\left(f(x)-m\right)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Preuve 3.3. *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b[$ satisfaisant la condition (3.1) sur $[a,b]$, $\forall x,y\in[a,b]$ on a :*

$$\begin{aligned}
&(M-f(x))\,(f(y)-m)+(M-f(y))\,(f(x)-m)\\
&-(M-f(y))\,(f(y)-m)-(M-f(x))\,(f(x)-m)\\
&=f^{2}(x)+f^{2}(y)-2f(x)f(y)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

On multiplie (3.6) par $\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $y\in[a,b]$ on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[(M-f(x))(f(y)-m)\right]+\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[(M-f(y))(f(x)-m)\right]\\
&-\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[(M-f(y))(f(y)-m)\right]-\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[(M-f(x))(f(x)-m)\right]\\
&=\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[f^{2}(y)+f^{2}(x)-2f(x)f(y)\right]
\end{aligned}$$

Par intégration on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{a}^{b}(M-f(x))\left(\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(y)-\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}m\right)dy\\
&-\int_{a}^{b}\left(\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}M-\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(y)\right)(f(x)-m)\,dy\\
&-\int_{a}^{b}\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,(M-f(y))\,(f(y)-m)dy\\
&-\int_{a}^{b}\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,(M-f(x))\,(f(x)-m)dy\\
&=\left(\int_{a}^{b}\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f^{2}(x)dy\right)+\left(\int_{a}^{b}\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f^{2}(y)dy\right)-2\left(\int_{a}^{b}\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(x)f(y)dy\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (M-f(x))\int_a^b\left(\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(y)-\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}m\right)dy$$
$$-\int_a^b\left(\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}M-\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(y)\right)dy\,(f(x)-m)$$
$$-\int_a^b\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(M-f(y))(f(y)-m)dy$$
$$-(M-f(x))(f(x)-m)\int_a^b\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dy$$
$$=f^2(x)\left(\int_a^b\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dy\right)+\left(\int_a^b\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f^2(y)dy\right)-2f(x)\left(\int_a^b\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(y)dy\right)$$
$$\Rightarrow (M-f(x))\left(I^\alpha f(y)-\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}m\right)+\left(\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}M-I^\alpha f(y)\right)(f(x)-m)$$
$$-I^\alpha((M-f(y))(f(y)-m))-(M-f(x))(f(x)-m)\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{3.7}$$
$$=I^\alpha f^2(y)+f^2(x)\left(\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)-2f(x)(I^\alpha f(y))$$

Et maintenant a la même manière en multiplie (3.7) par $\frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ *et* $x\in[a,b]$ *et par intégration on obtient :*

$$\left(I^\alpha f(y)-\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}m\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}(M-f(x))dx$$
$$+\left(\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}M-I^\alpha f(y)\right)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}(f(x)-m)dx$$
$$-I^\alpha((M-f(y))(f(y)-m))\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}dx$$
$$-\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}(M-f(x))(f(x)-m)dx$$
$$=\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}I^\alpha f^2(y)+\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}I^\alpha f^2(x)-2I^\alpha f(x)I^\alpha f(y)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad &\left(I^{\alpha}f(y)-\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}m\right)\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}M-I^{\alpha}f(x)\right)\\
&+\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}M-I^{\alpha}f(y)\right)\left(I^{\alpha}f(x)-\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}m\right)\\
&-I^{\alpha}\left((M-f(y))(f(y)-m)\right)\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}\left((M-f(x))(f(x)-m)\right)\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\\
&=\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\alpha}f^{2}(y)+\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\alpha}f^{2}(x)-2I^{\alpha}f(x)I^{\alpha}f(y)
\end{aligned}\tag{3.8}$$

Si on appliqué $x=y$ dans (3.8) on obtient le lemme (3) :

Théorème 8. *Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b[$ satisfaisant la condition (3.1) sur $[a,b[$ alors pour tout $\forall x\in[a,b]$ et $\alpha>0$*

On a :

$$\left|\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\alpha}f(x)g(x)-I^{\alpha}f(x)I^{\alpha}g(x)\right|\leq\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+1)}\right)^{2}(M-m)(P-p)\tag{3.9}$$

Preuve 3.4. *Soit f et g deux fonctions satisfaisant la condition (3.1) définie par :*

$$H(x,y)=(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\quad ;x,y\in[a,b]\tag{3.10}$$

On multiplie (3.10) par :$\frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$

et En intégrant par rapport x on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b\frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[f(x)g(x)-f(x)g(y)-f(y)g(x)+f(y)g(y)]\,dx\\
&=\int_a^b\frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(f(x)g(x))\,dx-\int_a^b\frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(f(x)g(y))\,dx\\
&-\int_a^b\frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(f(y)g(x))\,dx+\int_a^b\frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(f(y)g(y))\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}(f(x)g(x))\,dx-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}(f(x)g(y))\,dx\\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}(f(y)g(x))\,dx+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}(f(y)g(y))\,dx\\
&=I^{\alpha}(f(x)g(x))-g(y)I^{\alpha}f(x)-f(y)I^{\alpha}g(x)+\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(f(y)g(y))
\end{aligned}\tag{3.11}$$

De la même manière en multiplie (3.11) par $\frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$

et en intégrant par rapport y on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^b \frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I^{\alpha}\left(f(x)g(x)\right)dy\right) - I^{\alpha}f(x)\left(\int_a^b \frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(y)dy\right)\\
&-I^{\alpha}g(x)\left(\int_a^b \frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(y)dy\right) + \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\int_a^b \frac{(b-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(f(y)g(y)\right)dy\right)\\
&= \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\alpha}\left(f(x)g(x)\right) - I^{\alpha}f(x)I^{\alpha}g(y) - I^{\alpha}g(x)I^{\alpha}f(y) + \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\alpha}\left(f(y)g(y)\right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Pour $x = y$ Alors on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\alpha}\left(f(x)g(x)\right) - I^{\alpha}f(x)I^{\alpha}g(y) - I^{\alpha}g(x)I^{\alpha}f(y) + \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\alpha}\left(f(y)g(y)\right)\\
&= 2\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\alpha}\left(f(x)g(x)\right) - 2I^{\alpha}f(x)I^{\alpha}g(x)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

On appliqué l'inégalité de Cauchy Schwartz on obtient :

$$\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\alpha}f(x)g(x) - I^{\alpha}f(x)g(x)\right)^2 \leq \left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\alpha}f^2(x) - I^{\alpha}f(x)^2\right)\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\alpha}g^2(x) - I^{\alpha}g(x)^2\right) \tag{3.14}$$

On sait que :

$$\begin{cases}(M-f(x))(f(x)-m) \geq 0\\ (P-g(x))(g(x)-p) \geq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\alpha}\left(M-f(x)\right)\left(f(x)-m\right) \geq 0\\ et\\ \dfrac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\alpha}\left(P-g(x)\right)\left(g(x)-p\right) \geq 0\end{cases} \tag{3.15}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\left(\dfrac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\alpha}f^2(x) - I^{\alpha}f(x)^2\right) \leq \left(M\dfrac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - I^{\alpha}f(x)\right)\left(I^{\alpha}f(x) - m\dfrac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\\ et\\ \left(\dfrac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\alpha}g^2(x) - I^{\alpha}g(x)^2\right) \leq \left(P\dfrac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - I^{\alpha}g(x)\right)\left(I^{\alpha}g(x) - p\dfrac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\end{cases} \tag{3.16}$$

d'après lemme (3) et les inégalités (3.14),(3.16) en déduit que :

$$\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\alpha}f(x)g(x)-I^{\alpha}f(x)I^{\alpha}g(x)\right)^{2}\leq\left(M\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}f(x)\right)\left(I^{\alpha}f(x)-m\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\times\left(P\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}g(x)\right)\left(I^{\alpha}g(x)-p\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \tag{3.17}$$

En utilisant la relation entre le moyenne A et G on obtient :

$$\begin{cases} 4\left(M\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}f(x)\right)\left(I^{\alpha}f(x)-m\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\leq\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(M-m)\right)^{2} \\ et \\ 4\left(P\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}g(x)\right)\left(I^{\alpha}g(x)-p\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\leq\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(P-p)\right)^{2} \end{cases} \tag{3.18}$$

d'après (3.17),(3.18) on trouve le théoreme(8) :

$$\Rightarrow\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\alpha}f(x)g(x)-I^{\alpha}f(x)I^{\alpha}g(x)\right)^{2}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(M-m)\right)^{2}\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(P-p)\right)^{2}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\alpha}f(x)g(x)-I^{\alpha}f(x)I^{\alpha}g(x)\right|\leq\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+1)}\right)^{2}(M-m)(P-p)$$

Corollaire 3.2. *Si $\alpha=1$ on obtient :*

$$\left|\frac{(b-a)^{1}}{\Gamma(2)}I^{1}f(x)g(x)-I^{1}f(x)I^{1}g(x)\right|\leq\left(\frac{(b-a)^{1}}{2\Gamma(2)}\right)^{2}(M-m)(P-p)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)g(x)dx-\frac{1}{(b-a)^{2}}\int_{a}^{b}f(x)dx\int_{a}^{b}g(x)dx\leq\frac{1}{4}(M-m)(P-p)$$

3.2.2 En utilisant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville dans le deuxième cas

Théorème 9. *Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b[$ satisfaisant la condition (3.1) sur $[a,b[$.alors pour tout $\alpha > 0, \beta > 0$ On a :*

$$\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}f(x)g(x)+\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}f(x)g(x)-I^{\alpha}f(x)I^{\beta}g(x)-I^{\beta}f(x)I^{\alpha}g(x)\right)^{2}$$
$$\leq\left[\left(M\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}f(x)\right)\left(I^{\beta}f(x)-m\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)+\left(M\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-I^{\beta}f(x)\right)\left(I^{\alpha}f(x)-m\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right]$$
$$\times\left[\left(P\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}g(x)\right)\left(I^{\beta}g(x)-p\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)+\left(P\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-I^{\beta}g(x)\right)\left(I^{\alpha}g(x)-p\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right] \tag{3.19}$$

Nous avons besoin du lemme suivant pour preuve cet théorème

Lemme 4. *Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b[$ .alors pour tout $x \in [a,b], \alpha > 0, \beta > 0$ On a :*

$$\begin{aligned}&\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}f(x)g(x)+\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}f(x)g(x)-I^{\alpha}f(x)I^{\beta}g(x)-I^{\beta}f(x)I^{\alpha}g(x)\right)^{2}\\ &\leq\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}f^{2}(x)+\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}f^{2}(x)-2I^{\alpha}f(x)I^{\beta}f(x)\right)\\ &\times\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}g^{2}(x)+\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}g^{2}(x)-2I^{\alpha}g(x)I^{\beta}g(x)\right)\end{aligned} \tag{3.20}$$

Preuve 3.5. *Multiplie (3.10) par $\frac{(b-x)^{\alpha-1}(b-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}, x, y \in [a.b]$ Alors :*

$$\Rightarrow \frac{(b-x)^{\alpha-1}(b-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[f(x)g(x)+f(y)g(y)-f(x)g(y)-f(y)g(x)\right]$$

En intégrant par rapport x on obtient l'égalité (3.11) d'après la preuve de théorème(8) :

$$\begin{aligned}&\int_a^b\frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[f(x)g(x)-f(x)g(y)-f(y)g(x)+f(y)g(y)\right]dx\\ &=\int_a^b\frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(f(x)g(x))\,dx-\int_a^b\frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(f(x)g(y))\,dx\\ &-\int_a^b\frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(f(y)g(x))\,dx+\int_a^b\frac{(b-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(f(y)g(y))\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left(f(x)g(x)\right)dx - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left(f(x)g(y)\right)dx \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left(f(y)g(x)\right)dx + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}\left(f(y)g(y)\right)dx \\
&\quad = I^{\alpha}\left(f(x)g(x)\right) - g(y)I^{\alpha}f(x) - f(y)I^{\alpha}g(x) + \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(f(y)g(y)\right)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

de la même manière en intégrant (3.21) par rapport y on trouve :

$$\begin{aligned}
&\left(\int_a^b \frac{(b-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} I^{\alpha}\left(f(x)g(x)\right)dy\right) - I^{\alpha}f(x)\left(\int_a^b \frac{(b-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} g(y)dy\right) \\
&- I^{\alpha}g(x)\left(\int_a^b \frac{(b-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(y)dy\right) + \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\int_a^b \frac{(b-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\left(f(y)g(y)\right)dy\right) \\
&= \frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} I^{\alpha}\left(f(x)g(x)\right) - I^{\alpha}f(x)I^{\beta}g(y) - I^{\alpha}g(x)I^{\beta}f(y) + \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\beta}\left(f(y)g(y)\right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Pour $x = y$ et d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz :

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left[\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\beta}f(x)g(x) + \frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} I^{\alpha}f(x)g(x) - I^{\alpha}f(x)I^{\beta}g(x) - I^{\beta}f(x)I^{\alpha}g(x)\right)^2\right] \\
&\leq \left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\beta}f^2(x) + \frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} I^{\alpha}f^2(x) - 2I^{\alpha}f(x)I^{\beta}f(x)\right) \\
&\times \left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\beta}g^2(x) + \frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} I^{\alpha}g^2(x) - 2I^{\alpha}g(x)I^{\beta}g(x)\right)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Lemme 5. *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b[$ satisfaisant la condition (3.1),alors pour tout $x \in [a, b]$,$\alpha > 0$,$\beta > 0$ On a :*

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\beta}f^2(x) + \frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} I^{\alpha}f^2(x) - 2I^{\alpha}f(x)I^{\beta}f(x) \\
&= \left(M\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - I^{\alpha}f(x)\right)\left(I^{\beta}f(x) - m\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right) + \left(M\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} - I^{\beta}f(x)\right)\left(I^{\alpha}f(x) - m\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\
&- \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\beta}(M-f(x))(f(x)-m) - \frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} I^{\alpha}(M-f(x))(f(x)-m)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Preuve 3.6. *On multiplie (3.7) par* $\frac{(b-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$ *et en intégrant par rapport* $x \in [a,b]$ *on trouve :*

$$\Rightarrow \left(I^{\alpha} f(y) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} m\right) \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^b (b-x)^{\beta-1} (M - f(x))\, dx$$
$$+ \left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} M - I^{\alpha} f(y)\right) \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^b (b-x)^{\beta-1} (f(x) - m)\, dx$$
$$- I^{\alpha}((M - f(y))(f(y) - m)) \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^b (b-x)^{\beta-1} dx$$
$$- \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^b (b-x)^{\beta-1} (M - f(x))(f(x) - m)\, dx$$
$$= \frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} I^{\alpha} f^2(y) + \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\beta} f^2(x) - 2 I^{\beta} f(x) I^{\alpha} f(y)$$

$$\Rightarrow \left(I^{\alpha} f(y) - \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} m\right)\left(\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} M - I^{\beta} f(x)\right) + \left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} M - I^{\alpha} f(y)\right)\left(I^{\beta} f(x) - \frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} m\right)$$
$$- I^{\alpha}((M - f(y))(f(y) - m)) \frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} - I^{\beta}((M - f(x))(f(x) - m)) \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$
$$= \frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} I^{\alpha} f^2(y) + \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\beta} f^2(x) - 2 I^{\beta} f(x) I^{\alpha} f(y) \tag{3.25}$$

Si on appliqué $x = y$ *dans l'égalité (3.25) on obtient le lemme (5)*

Preuve 3.7. *(prouve le théorème (9))*

On a :

$$\begin{cases} (M - f(x))(f(x) - m) \geq 0 \\ (P - g(x))(g(x) - p) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\beta}(M - f(x))(f(x) - m) \geq 0 \text{ et } \frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} I^{\alpha}(M - f(x))(f(x) - m) \geq 0 \\ et \\ \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\beta}(P - g(x))(g(x) - p) \geq 0 \text{ et } \frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} I^{\alpha}(P - g(x))(g(x) - p) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\beta}(M - f(x))(f(x) - m)) - \frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} I^{\alpha}(M - f(x))(f(x) - m)) \leq 0 \\ et \\ -\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} I^{\beta}(P - g(x))(g(x) - p)) - \frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} I^{\alpha}(P - g(x))(g(x) - p)) \leq 0 \end{cases} \tag{3.26}$$

On appliqué le lemme (5) pour f et g on trouve :

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}f^{2}(x)+\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}f^{2}(x)-2I^{\alpha}f(x)I^{\beta}f(x)\\
=\left(M\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}f(x)\right)\left(I^{\beta}f(x)-m\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\\
\quad+\left(M\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-I^{\beta}f(x)\right)\left(I^{\alpha}f(x)-m\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\\
\quad-\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}(M-f(x))(f(x)-m)-\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}(M-f(x))(f(x)-m)\\
et\\
\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}g^{2}(x)+\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}g^{2}(x)-2I^{\alpha}g(x)I^{\beta}g(x)\\
=\left(P\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}g(x)\right)\left(I^{\beta}g(x)-p\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)\\
\quad+\left(P\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-I^{\beta}g(x)\right)\left(I^{\alpha}g(x)-p\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\\
\quad-\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}(P-g(x))(g(x)-p)-\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}(P-g(x))(g(x)-p)
\end{array}\right. \tag{3.27}$$

D'après on applique le lemme (4) on obtient :

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}f(x)g(x)+\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}f(x)g(x)-I^{\alpha}f(x)I^{\beta}g(x)-I^{\beta}f(x)I^{\alpha}g(x)\right)^{2}\\
&\le\left(M\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}f(x)\right)\left(I^{\beta}f(x)-m\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)+\left(M\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-I^{\beta}f(x)\right)\left(I^{\alpha}f(x)-m\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\\
&-\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}(M-f(x))(f(x)-m)-\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}(M-f(x))(f(x)-m)\\
&\times\left(P\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}g(x)\right)\left(I^{\beta}g(x)-p\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\right)+\left(P\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-I^{\beta}g(x)\right)\left(I^{\alpha}g(x)-p\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\\
&-\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\beta}(P-g(x))(g(x)-p)-\frac{(b-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}I^{\alpha}(P-g(x))(g(x)-p)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Alors d'après les égalités (3.28) et (3.26) on obtient le théorème (9)

Corollaire 3.3. *pour $\alpha = \beta$ appliqué dans la théorème (9) on a :*

$$\Rightarrow\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\alpha}f(x)g(x)-I^{\alpha}f(x)I^{\alpha}g(x)\right)^{2}$$
$$\leq\left(M\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}f(x)\right)\left(I^{\alpha}f(x)-m\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\times\left(P\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-I^{\alpha}g(x)\right)\left(I^{\alpha}g(x)-p\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)$$

D'après la relation entre le moyenne A et G (l'égalité(3.18)) on trouve :

$$\Rightarrow\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\alpha}f(x)g(x)-I^{\alpha}f(x)I^{\alpha}g(x)\right)^{2}\leq\frac{1}{16}\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(M-m)\right)^{2}\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(P-p)\right)^{2}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}I^{\alpha}f(x)g(x)-I^{\alpha}f(x)I^{\alpha}g(x)\right|\leq\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{2\Gamma(\alpha+1)}\right)^{2}(M-m)(P-p)$$

Corollaire 3.4. *Si $\alpha = \beta = 1$ on obtient :*

$$\left|\frac{(b-a)^{1}}{\Gamma(2)}I^{1}f(x)g(x)-I^{1}f(x)I^{1}g(x)\right|\leq\left(\frac{(b-a)^{1}}{2\Gamma(2)}\right)^{2}(M-m)(P-p)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)g(x)dx-\frac{1}{(b-a)^{2}}\int_{a}^{b}f(x)dx\int_{a}^{b}g(x)dx\leqslant\frac{1}{4}(M-m)(P-p)$$

3.3 Conclusion

L'objet de ce mémoire on utilise l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville pour établir de nouvelles Inégalités intégrales de type Gruss .
Nous donnons deux résultat principaux sont :

- *le première traite certains inégalités en utilisant un paramètre fractionnaire*
- *le deuxième résultat concerne d'autre inégalités utilisant deux paramètre fractionnaires*

Bibliographie

[1] S.S Dragomir, *Some integral inequalities of Gruss type*,Indien J.Pur.Apple. Math.31(4) (2002),397-415

[2] D. Gruss,*Uber das maximum des absoluten Betrages von* $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$. Math.Z. 39 (1935), 215-226.

[3] A. McD Mercer,*An improvement of the Gruss inequality*,Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, vol. 6, Iss. 4, Art.93 (2005), 1-4.

[4] A. McD Mercer, P. Mercer, *New proofs of the Gruss inequality*,, Aust. J. Math. Anal.Appl. 1(2) (2004), Art. 12.

[5] B.G. Pachpatte,*On multidimensional Gruss type inetegral inequalities*,Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol 03, Iss. 2, Art. 27, (2002), 1-7

[6] A.A.A Kilbas,H.M.Sirvastava et JJ.Trujillo.*Theory and applications of fractional differential Equations North-Holland Mathematical studies 204*, Ed van Mill. Amsterdam,(2006)

[7] Samko S.G. Kilbas A.A and Marichev O.I.(1993),*Fractional integrals and derivatives : theory and applications* Gordon and Breach, New York.

[8] Erdelyi A.Magnus W.Oberhettinger F and Tricomi F, Higher Transcendental Functions ,Voll.III,Krieger Pub ,Melbourne, Florida,(1981)