RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET

Faculté des Mathématiques et d'Informatique

Département des Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquée

Option : Analyse Fonctionnelle et application

Présenté en vue d'obtenir le diplôme de MASTER

Présenté par :

DEDDOUCHE FATIMA ZOHRA

SEKKOUM MALIKA

Sujet de mémoire

Quelques généralisations liées aux inégalités intégrales fractionnaires

Devant le jury composé de :

Mr.Souid Med Said	**MCA**	**Président**
Mr.Mokhtari Mokhtar	**MCA**	**Examinateur**
Mr. Mohammed Sofrani	**MAA**	**Encadreur**

Promotion : 2019 / 2020

Table des matières

Dédicaces

...je dédie ce travail :

À

MES CHERS PARENTS pour tous leurs sacrifices, leur amour,
leur tendresse, leur soutien
et leurs prières tout au long de mes ètudes

À

Ma sœur ♡ Noura ♡ et mon frère ♡ Omar ♡ pour leur
disponibilité à entendre mes frustrations et les
sources de mes tensions et toujours m'aider avec mes
souhaits de bonheur et de réussite dans
leur vie ♡

À

Ma princesse ♡ Hanan ♡ ,
pour ses encouragements et son amour,
je lui souhaite le meilleur dans sa vie

À

Tous Les Enseignants
du département de Mathématique qui ont contribué à mon formation ♡

À

Tous Mes Amis et Collègue
surtout ♡ Habiba ♡ Hadjer ♡Ibtissam♡ Amel ♡ Wahiba ♡

♡♡ Fatima ♡♡

Dédicaces

...Je dédie ce travail :

À

Mon père ♡ Amar ♡ et Ma mère ♡ Aïcha Ziri ♡
pour leur patience, leur amour,
leur soutien et leurs encouragements.

À

Mes sœurs ♡ Sabrina, Assema ♡, pour leurs encouragement
permanents, et leur soutien moral,
Mes frères ♡ Youcef, Billal ♡ pour leur appui et leur encouragement
et Ma grande-mère ♡ Mellouka Achour , Lmazia Bouhliumi ♡
et tous la familles ♡ Sekkoum ♡ et ♡ Ziri♡

À

Tous Mes amis et Mes chères
♡♡

À

Tous ♡Les professeurs♡
que soit du primaire, du secondaire ou de l'enseignement supérieur

♡♡ Malika ♡♡

Remerciements

Je remercie tout d'abord ♡ ALLAH ♡ pour m'avoir donné la capacité de savoir et réussir afin de réaliser ce travail

A mon encadreur Mr : SOFRANI MOHAMMED

J'ai eu l'honneur d'être parmi vos étudiants de bénéficier de votre riche enseignement. Vos qualités pédagogiques et humaines sont pour moi un modéle. Votre gentillesse, et votre disponibilité permanente ont toujours suscité mon admiration. Veuillez bien Monsieur recevoir mes remerciements pour le grand honneur que vous m'avez fait d'accepter l'encadrement de cetravail.

Aux membres du jury

Messieurs les membres du jury, vous nous faites un grand honneur en accéptant de juger ce travail. Je dois un remerciement á toute l'équipe d'enseignement pour leurs qualités scientiqúes et pédagogiques. Je tiens à remercier chaleureusement, tous mes proches et tous ceux qui, de prés ou de loin, m'ont apporté leurs sollicitudes pour accomplir ce travail.

INTRODUCTION

Le 30 septembre 1695.L'Hôpital a écrit à Leibniz afin de l'interroger au sujet d'une notation particulière qu'il avait employée dans ses publications pour la n$^{\text{ième}}$ –dérivée d'une fonction $f(x)$. L'Hôpital pose alors la question à Leibniz, sur le résultat de cette dérivée pour l'ordre $d^{\frac{1}{2}}x$, qualifiée de «paradoxe apparent» [11, 12].

Dès le 18$^{\text{ème}}$ siècle, les prémices du concept de dérivation fractionnaire, c'est-à-dire d'une opérateur de dérivation de degré non entier, apparaissent dans des écrits de L.Euler de J.L.Lagrange et au début du 19$^{\text{ème}}$ siècle, avec P.S. Laplace et N.H. Abel.

Les avancés les plus marquantes sont celle de J-Liouville dans ses multiples mémoires à l'école polytechnique entre 1832 et 1835. Puis la contribution de B. Riemann en 1847 faisant que les noms de ces deux mathématiciens restent attachés à la fameuse définition que nous rappellerons plus loin. Une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20$^{\text{eme}}$ siècle, inclut :P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent

(1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890),J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. L'evy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945), E.R. Amour (1938-1996), A. Erd'elyi (1939-1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949), ...ect[11].

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de les inégalités intégrales fractionnaires en utilisant l'intégrale de Riemann-Liouville.
Dans ce mémoire non présentons de nouvelles inégalités intégrales fractionnaires utilisant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville généralisée.

Ce mémoire décomposée en trois chapitre de la manière suivante :

Dans le premier chapitre nous présentons les notions préliminaires utiles qui sont utilisées dans les autres chapires, donnons un rappel de l'intégrale, puis nous présentons l'espaces fonctionnels.

Dans le deuxième chapitre nous commonçons par quelques fonctions spéciales importantes dans la théorie du calcul fractionnaire.

Le troisième chapitre nous présentons certaines inégalités intégrales,en utilisant l'intégarle fractionnaire de Riemann-Liouville généralisée.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Intégrale simple

Définition 1.1.1

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et F une de ces primitives, et a, b deux point de I.
La quantité $F(b) - F(a)$ est appelée intégrale de f entre a et b est notée $\int_a^b f\ (x)dx$, est la somme de ces aires algébriques quand x varie de a à b.

Pour calculer $\int_a^b f\ (x)\ dx$.

- Une intégration directe .
- Intégrale par partie

$$\int_a^b f'\ (x)\ g\ (x)\ dx = [f\ (x)\ g\ (x)]_a^b - \int_a^b f\ (x)\ g'\ (x)\ dx.$$

- Un changement de variable.

1.1.1 Propriétés usuelles de l'intégrale

• **Linéarité :** Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, λ et μ deux nombres réel ou complexes. Alors

$$\int_a^b (\lambda f\ (x) + \mu g\ (x))\ dx = \lambda \int_a^b f\ (x)\ dx + \mu \int_a^b g\ (x)\ dx$$

• **Positivé et croissance.** Si f est une fonction continue et positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f\ (x)\ dx \geq 0$.
Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de $[a,b]$, $f\ (x) \leq g\ (x)$, alors $\int_a^b f\ (x)\ dx \leq \int_a^b g\ (x)\ dx$

1.1.2 Fonctions définies par des intégrales

1. La fonction $\psi = \int_a^x f\ (t)\ dt$,
   f est intégrable sur un domaine D dans $\mathbb{R}$, a est un nombre fixé de D. La fonction ψ est continue et dérivable si f et continue.
2. La fonction $\psi = \int_a^b f\ (x,t)\ dt$,
   Cette fonction est définie sur D tel que, pour tout $(x,t) \in D \times [a,b]$, $f\ (x,t)$. Est continue, dérivable et intégrable sur D.

   * La dérivée de ψ est donnée par la formule

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f\ (x,t)\ dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\ (x,t)\ dt$$

Théorème 1.1.1 ***(Fubini)***

Soit $f \in L^1([a,b] \times [c,d])$ une fonction mesurable. Alors

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f\ (x,t)\ dxdt = \int_a^b \left(\int_c^d f\ (x,t)\ dt \right) = \int_c^d \left(\int_a^b f\ (x,t)\ dx \right)$$

1.2 Espace fonctionnels

1.2.1 Espaces des fonctions intégrales

Définition 1.2.1

Soient $\Omega = (a,b)(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p < \infty$.

1. Pour $1 \leq p < \infty$, L'espace $L^P(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions f réelles sur Ω telle que f est mesurable et
$$\int_a^b |f\ (x)|^p\ dx < +\infty$$
2. Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions mesurables f bornées presque partout $(p.p)$ sur Ω

Théorème 1.2.1

Soit $\Omega = (a,b)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

1. Pour $1 \leq p < +\infty$, L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :
$$\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p\ dx)^{1/p}$$
2. L'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :
$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M\ p.p\ sur\ \Omega\}$$

1.2.2 Espaces des fonction continues et absolument continues

Définition 1.2.2 [12]

Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ et $n = 0, 1, ...$
On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leur dérivées d'ordre inférieur ou égale à n, continues sur Ω, muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n} := \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_C := \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in\Omega} \left|f^{(k)}(x)\right|, n \in \mathbb{N}$$

En particulier si $n = 0$, $C^O(\Omega) \equiv C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_C := \max_{x\in\Omega} |f(x)|$$

Définition 1.2.3 [12]

Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ un intervalle fini.
On désigne par AC $([a, b])$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables, c'est à dire :

$$AC\ ([a, b]) = \{f / \exists\ \varphi \in L([a, b]) : f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt\}$$

et on appelle AC $([a, b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$

Définition 1.2.4 [12]

Pour $n = 0, 1, ...,$ on désigne par AC^n $([a, b])$ l'espace des fonctions f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ continues sur $[a, b]$ telles que $f^{(n-1)} \in AC$ $([a, b])$ c'est à dire

$$AC^n\ ([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad et \quad f^{(n-1)} \in AC\ ([a, b])\}$$

En particulier AC^1 $([a, b]) = AC$ $([a, b])$

1.2.3 Espaces des fonctions continues avec poids

$$C_\lambda\ ([a,b])$$

Définition 1.2.5 [12]

Soient $\Omega = [a,b]$ un intervalle fini et $\lambda \in \mathbb{C}(0 \leq \Re(\lambda) < 1)$.
On désigne par $C_\lambda\ ([a,b])$ l'espace des fonctions f définies sur $]a,b]$ telles que la fonction $(x-a)^\lambda\ f(x) \in C\ ([a,b])$ c'est à dire

$$C_\lambda\ ([a,b]) = \{f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{C}, (.-a)^\lambda f(.) \in C\ ([a,b])\} \tag{1.1}$$

muni de la norme :

$$\|f\|_{C\lambda} = \|(x-a)^\lambda f(x)\|_C = \max_{x\in\Omega} \left|(x-a)^\lambda f(x)\right| \tag{1.2}$$

L'espace $C_\lambda\ ([a,b])$ est appelé l'espace des fonctions continues avec poids.
En particulier, $C_0\ ([a,b]) = C\ ([a,b])$

Définition 1.2.6

L'espace $L_{p,k}([a,b])$: est l'espace des fonctions f mesurables sur $[a,b]$ c'est-à-dire :

$$f \in L_{p,k}([a,b]) \Leftrightarrow \int_{[a,b]} |f\ (x)|^p x^k\ dx, \qquad k \geq 0\ \ , 1 \leq p < \infty$$

Définition 1.2.7 [6]

Soit $f \in L_{1,k}([a,b])$. L'intégrale fractionnaire généralisée de Riemann-Liouville $J_a^{\alpha,k}$ d'ordre $\alpha \geq 0$ et $k \geq 0$ est défini par

$$J_a^{\alpha,k} f(t) = \frac{(k+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^{k+1} - x^{k+1})^{\alpha-1} x^k f(x) dx, \alpha > 0, a < t \leq b,$$

$$J_a^{0,k} f(t) = f(t),$$

voir [5, 8, 10].

Chapitre 2

Eléments de Calcul Fractionnaire

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord deux fonctions importantes dans la théorie du calcul fractionnaire. Puis, on définit l'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire et leurs propriétés.

2.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les définitions et quelques propriétés de la fonction Gamma d'Euler et la fonction Bêta liée a cette fonction.

2.1.1 Fonction Gamma d'Euler

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge la fonction factorielle aux nombres réels positifs(et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 2.1.1 [13]

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, la fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale d'Euler de second espèce

$$\Gamma\ (x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

avec $t^{x-1} = e^{[(x-1)\ lnt]}$.
Cette intégrale est convergente pour tous les réels positifs.

Preuve.

$$\begin{aligned} \Gamma\ (x) &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \\ &= \int_0^{1} t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \end{aligned}$$

On applique le théorème de la convergence dominé
Si $t \in [0, 1]$
Lorsque t tend vers à 0^+

$$\varphi\ (t) = t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1},$$

$\int_0^1 \varphi\ (t)\ dt$ a un sens si $x > 0$.
Si $t \in [1, +\infty[$
Lorsque t tend vers à $+\infty$

$$\varphi\ (t) \leq \frac{1}{t^2},$$

Alors $\int_1^0 \varphi\ (t)\ dt$ est convergente pour tout x réel.
Donc la fonction Gamma est convergente pour tous les réels positifs.

Exemple 2.1.1

Calculons $\Gamma\ (1)$ et $\Gamma\ (\frac{1}{2})$

$$\Gamma\ (1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$
$$\Gamma\ \left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt,$$

Posons $t = x^2; dt = 2t^{\frac{1}{2}} dx$. Donc

$$\Gamma\ \left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$

Pour calculer cette intégrale posons

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Prenons

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_0^{+\infty} e^{+y^2} dy \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx, \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Le calcul est plus simple à réaliser qu'on effectue les coordonnées polaires

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr d\theta, \\ &= \frac{\pi}{4}, \\ A &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Alors

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Proposition 2.1.1 [13]

pour tout $x\in\mathbb{R}_*^+, t>0, n\in\mathbb{N}$, on a

1. $\Gamma\,(x+1)=x\Gamma\,(x)$.
2. $\Gamma\,(0)=\infty$.
3. $\Gamma\,(n+1)=(n)!$.
4. $\Gamma\,(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.

preuve.

1. Représentons $\Gamma\,(x+1)$ par l'intégrale d'Euler et intégrons par parties

$$\begin{aligned}\Gamma\,(x+1)&=\int_0^{+\infty}t^xe^{-t}dt,\\&=\left[-t^xe^{-t}\right]_0^{+\infty}+x\int_0^{+\infty}e^{-t}dt,\\\Gamma\,(x+1)&=x\Gamma\,(x).\end{aligned}$$

D'où la relation dite de récurrence.

2. De (1) on a

$$\begin{aligned}\Gamma\,(x)&=\frac{\Gamma\,(x+1)}{x},\\\lim_{x\to0}\Gamma\,(x)&=\lim_{x\to0}\frac{\Gamma\,(x+1)}{x},\\\lim_{x\to0}\Gamma\,(x)&=\infty.\end{aligned}$$

3. Il suffit d'appliquer (1) pour $x = n$.

$$\Gamma\ (n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt,$$

intégrons par partie n fois. on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma\ (n+1) &= n(n-1)(n-2)\dots 1, \\ \Gamma\ (n+1) &= n!. \end{aligned} \tag{2.1}$$

4. On va démontrer la formule $\Gamma\ (n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$, par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$.
   $*$ Pour $n = 0$, on a $\Gamma\ (0+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
   $*$ Supposons que la formule est vérifiée pour $(n-1)$ et considérons n. C'est à dire que $\Gamma\ ((n-1)+\frac{1}{2}) = \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!}$, est vérifié. Alors

$$\begin{aligned} \Gamma\ \left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\ \Gamma\ \left(n-\frac{1}{2}\right), \\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\ \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!}, \\ &= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\ \frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!}, \\ &= \frac{2n}{2n}\frac{(2n-1)}{2}\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{n-1}(n-1)!}, \\ \Gamma\ \left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}. \end{aligned}$$

Donc la formule est vérifiée pour n.

Corollaire 2.1.1

La détermination de la fonction Gamma pour les valeur négatifs non entiers par la formule

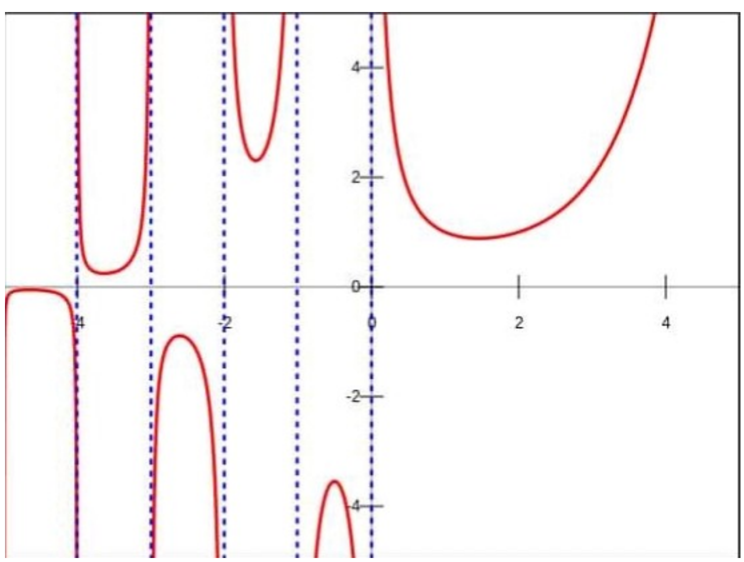
$$\Gamma\ (x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}, \quad 0 \leq x+n \leq 1.$$

Exemple 2.1.2

Calculons $\Gamma\ \left(-\frac{1}{2}\right)$ dans ce cas $n=1$,

$$\Gamma\ \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\ \left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)},$$
$$\Gamma\ \left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

- **Le graphe de la fonction Gamma**



2.1.2 Fonction Bêta

Définition 2.1.2 [13]

La fonction Bêta est définie par l'intégrale d'Euler de premier espèce

$$B\ (p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}, \quad \forall p,q > 0.$$

Théorème 2.1.1

La fonction Bêta est raccordée avec la fonction Gamma par la relation suivante

$$B\ (p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \forall p,q > 0. \tag{2.2}$$

Preuve.

Soit $D = [0,+\infty[\, \times [0,+\infty[\,,$
On a

$$\begin{aligned}\Gamma\ (p)\ \Gamma\ (q) &= \int_0^{+\infty} e^{(-x)}x^{(p-1)}dx \int_0^{+\infty} e^{(-y)}y^{(q-1)}dy,\\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}x^{p-1}y^{q-1}dxdy,\end{aligned}$$

On pose $\quad y = u - x; \quad dy = du$

$$\begin{aligned}\Gamma\ (p)\ \Gamma\ (q) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{u} e^{(-u)}x^{p-1}(u-x)^{q-1}\ dxdu,\\ &= \int_0^{+\infty} e^{(-u)}\int_0^{u} x^{p-1}(u-x)^{q-1}\ dxdu,\end{aligned}$$

On pose $x = tu;\ dx = udt$

$$\begin{aligned}\Gamma\ (p)\ \Gamma\ (q) &= \int_0^{+\infty} e^{(-u)} \int_0^1 t^{p-1} u (1-t)^{q-1} u^q\ dtdu; \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{p+q-1} du\ \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt; \\ \Gamma\ (p)\ \Gamma\ (q) &= \Gamma\ (p+q)\ B(p,q).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$B\ (p,q) = \frac{\Gamma\ (p)\ \Gamma\ (q)}{\Gamma\ (p+q)}.$$

Exemple 2.1.3

Calculons $B\ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned}B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\ \left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\ \left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\ (1)} \\ &= \pi\end{aligned}$$

Propriétés

[13]

1. B (p, q) = B (q, p).
2. aB (a, b+1) = bB (a+1, b).
3. B (a, 1) = $\frac{1}{a}$ $\qquad a > 0$.
4. On peut prendre aussi la forme d'intégrale

$$B\ (p,q) = 2 \int_0^1 (\sin\theta)^{2p-1} (\cos\theta)^{2q-1}\, d\theta.$$

preuve

1. $B\ (a,b) = \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$
   On fait le changement de variable
   $S = 1-t \Rightarrow t = 1-s; \quad dt = -ds$

$$\begin{aligned} B\ (a,b) &= \int\limits_1^0 (1-s)^{a-1} s^{b-1}(-1)\ ds \\ &= \int\limits_0^1 s^{b-1}(1-s)^{a-1}ds \\ &= B\ (b,a) \end{aligned}$$

2. $aB\ (a,b+1) = b\mathrm{B}(a+1,b)$

$$aB\ (a,b+1) = a\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b}dt$$

   Par une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} &= a\left[\left[\frac{1}{a}t^{a}(1-t)^{b}\right]_0^1 + \frac{b}{a}\int\limits_0^1 t^{a}(1-t)^{b-1}dt\right] \\ &= b\int\limits_0^1 t^{a}(1-t)^{b-1}dt \\ &= bB\ (a-1,b) \end{aligned}$$

3. $B\ (a,1) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{1-1}dt$

$$= \int_0^1 t^{a-1}dt$$
$$= \left[\frac{1}{a}t^a\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{a}$$

4. $B(\ a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$
   On fait le changement de variable $t = \sin\theta^2$ alors
   $dt = 2\cos\theta\sin\theta d\theta$
   Donc

$$B\ (a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta^{2(a-1)}\cos\theta^{2(b-1)} 2\cos\theta\sin\theta\ d\theta$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta^{2a-1}\cos\theta^{2b-1}d\theta$$

2.2 Intégrale et Dérivée fractionnaire

Cette section contient les définitions et quelques propriétés des intégrales et dérivées fractionnaires du type de Riemann-Liouville.

2.2.1 Intégrale Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intégrale

$$J_a^1 f\ (x) = \int_a^x f\ (t)\ dt.$$

La primitive seconde de f définit comme suite

$$J_a^2 f\ (x) = \int_a^x \left(\int_a^u f\ (t)\ dt \right)\ du,$$

Permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$J_a^2 f\ (x) = \int_a^x \left(\int_t^x du \right) f\ (t)\ dt,$$
$$J_a^2 f\ (x) = \int_a^x (x - t)\ f\ (t)\ dt.$$

Le $n^{\text{ième}}$ itéré de l'opérateur J peut s'écrire

$$J_a^{(n)} f\ (x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f\ (x_n)\ dx_n, = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f\ (t)\ dt.$$

Pour tout entier n
Depuis (2.1)

$$J_a^{(n)} f\ (x) = \frac{1}{\Gamma\ (n)} \int_a^x (x - t)^{n-1} f\ (t)\ dt. \tag{2.3}$$

Cette formule (2.3) a un sens même quand n prenant une valeur non-entière, on définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

Définition 2.2.1 [11, 12]

Soit $f \in C([a,b])$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha > 0$ est définie par

$$J_a^\alpha f\ (x) = \frac{1}{\Gamma\ (\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f\ (t)\ dt, \quad \alpha \notin \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Exemple 2.2.1

Considérons la fonction $f\ (x) = (x-a)^\beta$, on calcule l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

$$J_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma\ (\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (x-a)^\beta dt,$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $t = a + (x-a)z$, alors $dt = (x-a)\ dz$, d'où

$$\begin{aligned} J_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma\ (\alpha)} \int_0^1 z^\beta (1-z)^{\alpha-1} dz, \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma\ (\alpha)} B(\beta+1, \alpha), \end{aligned}$$

Après l'utilisation de la relation $(2,2)$ on a

$$J_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma\ (\beta+1)}{\Gamma\ (\alpha+\beta+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}.$$

Proposition 2.2.1 ***(loi de composition)***[11, 12]

Soient α et β deux réels strictement positifs et f une fonction intégrable, on a

$$J^\alpha \left(J^\beta f\ (x) \right) = J^\beta \left(J^\alpha f\ (x) \right) = J^{\alpha+\beta} f\ (x).$$

Preuve.

La preuve directement de la définition

$$\begin{aligned} J^{\alpha}\left({}^{J}\beta f\ (x)\right) &= \frac{1}{\Gamma\ (\alpha)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} I^{\beta} f\ (y)\ dy, \\ &= \frac{1}{\Gamma\ (\alpha)\ \Gamma\ (\beta)} \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} \int_a^y (y-t)^{\beta-1} f\ (t)\ dtdy, \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini on a

$$J^{\alpha}\left(J^{\beta} f\ (x)\right) = \frac{1}{\Gamma\ (\alpha)\ \Gamma\ (\beta)} \int_a^x f\ (t)\ dt \int_t^x (x-y)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1} dy,$$

Par le changement de variable

$$y = t + (x-t)\tau, \qquad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Alors

$$dy = (x-t)\ d\tau.$$

on obtient

$$\begin{aligned} J^{\alpha}\left(J^{\beta} f\ (x)\right) &= \frac{1}{\Gamma\ (\alpha)\ \Gamma\ (\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f\ (t)\ dt \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau, \\ &= \frac{B\ (\alpha,\beta)}{\Gamma\ (\alpha)\ \Gamma\ (\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f\ (t)\ dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma\ (\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f\ (t)\ dt, \\ J^{\alpha}\left(J^{\beta} f\ (x)\right) &= J^{\alpha+\beta} f\ (x). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Lemme 2.2.1

L'opérateur d'intégrale fractional J_a^α avec $\alpha > 0$ est borné dans $L^P([a,b]) \quad 0 \leq p \leq +\infty$

$$\|J_a^\alpha f\|_p \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma\ (\alpha+1)}\|f\|_p. \tag{2.5}$$

2.2.2 Dérivée Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires. Dans cette partie on va présenter la dérivée de Riemann-Liouville, qu'est la plus utilisée.

Définition 2.2.2 [11, 12]

Soit f une fonction intégrale sur l'intervalle$[a,b]$, la dérivée d'ordre α non entier $(avec\ n-1 < \alpha < n; \quad n \neq 0)$ au sens de Riemann-Liouville définit par

$$D_a^\alpha f\ (x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[J^{n-\alpha} f\ (x)\right],$$

$$D_a^\alpha f\ (x) = \frac{1}{\Gamma\ (n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f\ (t)\ dt, \tag{2.6}$$

où $n = [\alpha] + 1$.
En particulier, si $\alpha = 0$ on aura

$$D_a^0 f\ (x) = f\ (x).$$

De plus si $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$, d'où

$$D_a^\alpha f\ (x) = \frac{1}{\Gamma\ (1-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{-\alpha} f\ (x)\ dt.$$

Exemple 2.2.2

On calcul la dérivée fractionnaire d'ordre α de la fonction $f = (x-\alpha)^{\beta}$

$$D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{d^n}{dx^n}\left[J^{n-\alpha}(x-a)^{\beta}\right],$$

L'intégrale calcule dans l'exemple précédent

$$D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{\Gamma\ (\beta+1)}{\Gamma\ (n+\beta-\alpha+1)}(x-a)^{n-\alpha+\beta}\right],$$

Dérive n fois, on obtient

$$D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma\ (\beta+1)}{\Gamma\ (\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-1},$$

Comme cas particulier $\alpha = 1$

$$D_a(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma\ (\beta+1)}{\Gamma\ (\beta)}(x-a)^{\beta-1},$$
$$D_a(x-a)^{\beta} = \beta(x-a)^{\beta-1}.$$

Par suit la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$

Remarque 2.2.1

La dérivée fractionnaire d'une fonction constante n'est pas nulle ni constante

$$D_a^{\alpha}C = \frac{1}{\Gamma\ (1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$$

Proposition 2.2.2 [11, 12]

L'opérateur de dérivée fractionnaire possède les propriétés suivants

1. La différentiation est un opérateur linéaire
$$D_a^\alpha(\lambda f\ (t) + \mu g\ (t)) = \lambda\ (D_a^\alpha f)\ (t) + \mu\ (D_a^\alpha f)\ (t)$$
2. Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^p(]a,b[)$, $1 \leq p \leq +\infty$ alors
$$D_a^\alpha J_a^\alpha f\ (x) = f\ (x) \quad \textit{presque par tout dans } [a,b].$$
3. Soient $0 < \alpha < 1$, $\ f \in L^1(]a,b[)$ et $J^{1-\alpha} \in AC^1[a,b]$ alors on a
$$J_a^\alpha D_a^\alpha f\ (x) = f\ (x) - \frac{(J^{1-\alpha} f)\ (a)}{\Gamma\ (\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} \tag{2.7}$$
AC l'espace des fonctions absolument continue sur $[a,b]$.
4. L'application de l'intégrale fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville sur la fonction $f\ (x) = (x-a)^\beta$ est donnée par :
$$J_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma\ (\beta+1)}{\Gamma\ (\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}; \quad x > a, \quad \alpha,\ 1\beta > 0.$$

2.2.3 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.2.3 [11, 12]

Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\alpha) > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \Re(\alpha) < n$ et $f \in C^m([a,b])$.
La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f notée ${}^cD_a^\alpha f$ est définie par :
$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f\ (x) &:= J^{(n-\alpha)} D^{(n)} f\ (x) \\ &= \frac{1}{\Gamma\ (n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t)\ (x-t)^{n-\alpha-1} dt \end{aligned}$$

Exemple 2.2.3

Pour $f\ (x) = (x-a)^{\beta}$ avec $\beta \geq 0$, on a

$$^{c}D_{a}^{\alpha} f\ (x) = \begin{cases} 0 \qquad si \quad \beta \in \{0, 1, 2, ..., m-1\} \\ \frac{\Gamma\ (\beta+1)}{\Gamma\ (\beta+1-\alpha)} (x-\alpha)^{\beta-\alpha} \qquad si \quad \beta > n-1 \end{cases} \tag{2.8}$$

En particulier, si f est constante sur $[a, b]$, alors :

$$^{c}D_{a}^{\alpha} f = 0$$

2.2.4 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivants établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 2.2.1

Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$. Si f possède $(n-1)$ dérivée en a et si $D_{a}^{\alpha} f$ existe, alors :

$$(^{c}D_{a}^{\alpha} f)(x) = D_{a}^{\alpha} \left[f\ (x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{k}(a)}{k!} (x-a)^{k} \right]$$

presque partout sur $[a, b]$.

Remarque 2.2.2

Le résultat du théorème 2.2.1 signifie que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction f est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de f

Chapitre 3

Inégalités Intégrales Fractionnaires

3.1 Inégalité de Tchebyshev

On considère la fonctionnelle :

$$T\left(f,g\right)=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx-\left(\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f\ \left(x\right)\ dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}g\ \left(x\right)\ dx\right)$$

On va supposer que f et g sont synchrones (les deux fonctions croissants ou décroissants) sur $[a,b]$

$$\left(f\ \left(x\right)-f\ \left(y\right)\right)\left(g\ \left(x\right)-g\ \left(y\right)\right)\geq 0;\qquad x,y\in[a,b] \tag{3.1}$$

Preuve

Puisque f et g sont synchrones sur $[a,b]$, alors pour tout $x,y\in[a,b]$, on a :

$$(f\ (x)-f\ (y))(g\ (x)-g\ (y))\geq 0$$

par conséquent

$$f\ (x)g\ (x) + f\ (y)g\ (y) \geq g\ (x)f\ (y) + f\ (x)g\ (y) \tag{3.2}$$

En intégrant (3.2)

$$\begin{gathered}\int_a^b \int_a^b f(x)g(x)\ dxdy + \int_a^b \int_a^b f(y)g(y)\ dxdy \geq \\ \int_a^b \int_a^b g(x)f(y)\ dxdy + \int_a^b \int_a^b f(x)g(y)\ dxdy\end{gathered} \tag{3.3}$$

alors

$$\begin{gathered}\int_a^b f(x)g(x) \left(\int_a^b 1dy\right) dx + \int_a^b f(y)g(y) \left(\int_a^b 1dx\right) dy \geq \\ \int_a^b f(y) \left(\int_a^b g(x)dx\right) dy + \int_a^b g(y) \left(\int_a^b f(x)dx\right) dy\end{gathered} \tag{3.4}$$

donc nous avons

$$\begin{gathered}(b-a) \int_a^b f(x)g(x)dx + (b-a) \int_a^b f(y)g(y)dy \geq \\ \int_a^b g(x)dx \int_a^b f(y)dy + \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(y)dy\end{gathered} \tag{3.5}$$

ce qui implique

$$2(b-a) \int_a^b f(x)g(x)dx \geq 2 \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \tag{3.6}$$

Multiplier (3.6) par $\frac{1}{(b-a)^2}$, on obtient :

$$\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)g(x)dx \geq \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \tag{3.7}$$

donc

$$T\left(f,g\right)=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx-\left(\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f\;\left(x\right)\;dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}g\;\left(x\right)\;dx\right)$$

Théorème 3.1.1

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si f et g vérifient la condition (3.1), on a

$$\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}J_{a}^{\alpha}(fg)\;(t)\geq J_{a}^{\alpha}f\;(t)J_{a}^{\alpha}g\;(t);\qquad\alpha>0,\;t\in[a,b].\tag{3.8}$$

Preuve

Puisque f et g sont synchrones sur $[a,b]$, alors pour tout $x,y\in[a,b]$, on a :

$$(f\;(x)-f\;(y))(g\;(x)-g\;(y))\geq0$$

par conséquent

$$f\;(x)g\;(x)+f\;(y)g\;(y)\geq g\;(x)f\;(y)+f\;(x)g\;(y)$$

Multipliant les deux côtés par $\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f\;(x)g\;(x)+\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f\;(y)g\;(y)\geq\\ \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g\;(x)f\;(y)+\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f\;(x)g\;(y)\end{aligned}\tag{3.9}$$

En intégrant (3.9) par rapport à x sur (a,t), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t}(t-x)^{\alpha-1}f\;(x)g\;(x)dx+\frac{f\;(y)g\;(y)}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t}(t-x)^{\alpha-1}dx\geq\\ \frac{f\;(y)}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t}(t-x)^{\alpha-1}g\;(x)dx+\frac{g\;(y)}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{b}(t-x)^{\alpha-1}f\;(x)dx\end{aligned}\tag{3.10}$$

par conséquent

$$J_a^\alpha(fg)(t)+f\ (y)g\ (y)\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \geq g\ (y)J_a^\alpha(f)(t)+f\ (y)J_a^\alpha(g)(t) \quad (3.11)$$

en multipliant maintenant (3.11) par $\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, et intégrant par rapport à y sur (a,t), on obtient

$$\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma\ (\alpha+1)}J_a^\alpha(fg)\ (t) \geq J_a^\alpha f\ (t)J_a^\alpha g\ (t), \alpha > 0,\ t \in [a,b]$$

Théorème 3.1.2

Soient f et g deux fonctions synchrones sur $[a,b]$, $\alpha,\beta > 0$, $t \in [a,b]$. alors on a l'inégalité suivante

$$\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma\ (\alpha+1)}J_a^\alpha(fg)\ (t)+\frac{(t-a)^\beta}{\Gamma\ (\beta+1)}J_a^\beta(fg)\ (t) \geq J_a^\alpha f\ (t)\ J_a^\beta g\ (t)+J_a^\beta f\ (t)\ J_a^\alpha g\ (t).$$

Remarque 3.1.1

Dans ce Théorème, si on prend $\alpha = \beta$ on obtient le théorème 3.1.1.

3.2 Inégalité de Grüss

Théorème 3.2.1

Soient f et g deux fonctions continues définies de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ telles que $m \leq f\ (x) \leq M,\ q \leq g\ (x) \leq Q$ et $x \in [a,b]$, alors on a

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\ (x)\ g\ (x)\ dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\ (x)\ dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g\ (x)\ dx\right) \leq \frac{(M-m)(Q-q)}{4}.$$

Théorème 3.2.2

Soient f et g deux fonctions continues définies de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ telle que $m \leq f\ (x) \leq M,\ q \leq g\ (x) \leq Q,\quad \alpha > 0$ et $x \in [a,b]$, $t \in [a,b]$ alors on a

$$\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma\ (\alpha+1)} J_a^{\alpha} fg\ (t) - J_a^{\alpha} f\ (t)\ J_a^{\alpha} g\ (t) \leq \left[\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma\ (\alpha+1)}\right]^2 \frac{(M-m)(Q-q)}{4}.$$

Remarque 3.2.1

Si on pose $\alpha = 1$ et $t = b$ on obtient l'inégalité de Grüss.

3.2.1 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville généralisée

Nous présentons quelques nouvelles inégalités intégrales fractionnaires en utilisant l'intégrale fractionnaire de RL généralisée.

Théorème 3.2.3 [6]

Soient $f, h\ et\ g$ trois fonctions continues positives sur $[a,b]$, $x, y \in [a,t],\ a < t \leq b$ telle que

$$h\ (x)\ \frac{f(y)}{g(y)} + h\ (y)\frac{f(x)}{g(x)} \geq h(x)\ \frac{f(x)}{g(x)} + h\ (y)\frac{f(y)}{g(y)}. \tag{3.12}$$

Alors l'inégalité intégrale fractionnaire généralisée

$$J_a^{\alpha,k}[g\ (t)]\ J_a^{\alpha,k}[f\ (t)h\ (t)] \leq J_a^{\alpha,k}[f\ (t)]\ J_a^{\alpha,k}[h\ (t)g\ (t)] \tag{3.13}$$

est vérifie pour tout $a < t \leq b$ $, \alpha > 0,\ k \geq 0$.

Preuve

Supposons que f, h *et* g sont des fonctions positives et continues sur $[a, b]$ satisfaisant la condition (3.12).
On a

$$\begin{aligned}\phi(x,y) = \varphi_\alpha^k(t,x)\ (f\ (y)\ g\ (x)\ h\ (x) + g\ (y)\ h\ (y)\ f\ (x) \\ - g\ (y)\ h\ (x)\ f\ (x) - h\ (y)\ f\ (y)\ g\ (x)),\end{aligned} \tag{3.14}$$

où

$$\varphi_\alpha^k(t,x) := \frac{(k+1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(t^{k+1} - x^{k+1})^{\alpha-1}x^k \tag{3.15}$$

Il est clair que

$$\phi(x,y) \geq 0. \tag{3.16}$$

En intégrant (3.16) par rapport à x sur (a, t), donne

$$0 \leq \int_a^t \phi\ (x,y)dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^t \varphi_\alpha^k(t,x)\ (f\ (y)\ g\ (x)\ h(\ x) + g\ (y)\ h\ (y)\ f\ (x) \\ &\qquad -g\ (y)\ h\ (x)\ f\ (x) - h\ (y)\ f\ (y)\ g\ (x))\ dx \\ &= J_a^{\alpha,k}[g\ (t)\ h\ (t)]\ f\ (y) + J_a^{\alpha,k}[f\ (t)]\ g\ (y)\ h\ (y) \\ &\quad -J_a^{\alpha,k}[h\ (t)\ f\ (t)]\ g\ (y) - J_a^{\alpha,k}[g\ (t)]\ h\ (y)\ f\ (y).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Maintenant, multipliant $(3,17)$ par $\varphi_\alpha^k(t,y),\ y \in (a,t),\quad a < t \leq b$ et en intégrant par rapport à y sur (a, t), on peut écrire

$$0 \leq \int_a^t \int_a^t \varphi_a^k(t,y)\phi(x,y)\ dxdy. \tag{3.18}$$

$$= \int_a^t \int_a^t \varphi_a^k(t,y)\ \varphi_\alpha^k(t,x)\ (f\ (y)\ g\ (x)\ h\ (x) + g\ (y)\ h\ (y)\ f(x)$$
$$- g\ (y)\ h\ (x)\ f\ (x) - h\ (y)\ f\ (y)\ g\ (x))\ dxdy$$

$$= J_a^{a,k}[g\ (t)\ h\ (t)] \int_a^t \varphi_a^k(t,y)\ f\ (y)\ dy + J_a^{\alpha,k}[f\ (t)] \int_a^t \varphi_a^k(t,y)\ g\ (y)\ h\ (y)\ dy$$
$$-J_a^{a,k}[h\ (t)\ f\ (t)] \int_a^t \varphi_a^k(t,y)\ g\ (y)\ dy - J_a^{\alpha,k}[g\ (t)] \int_a^t \varphi_\alpha^k(t,y)\ h\ (y)\ f\ (y)\ dy$$

$$= 2J_a^{\alpha,k}[g\ (t)\ h\ (t)]\ J_a^{\alpha,k}[f\ (t)] - 2J_a^{\alpha,k}[h\ (t)\ f\ (t)]\ J_a^{\alpha,k}[g\ (t)]$$

Cela implique que

$$J_a^{\alpha,k}[gh\ (t)]\ J_\alpha^{\alpha,k}[f\ (t)] \geq J_\alpha^{\alpha,k}[hf\ (t)] J_\alpha^{\alpha,k}[g\ (t)] \tag{3.19}$$

La preuve du théorème est complète.

Corollaire 3.2.1

Si $f\ (x) = 1,\ k = 0$, on obtient le Théorème 3.1.1.

Corollaire 3.2.2

Si $f\ (x) = 1, \alpha = 1, k = 0$, on obtient le Inégalité de Tchebyshev.

Théorème 3.2.4 [6]

Soient $f, h\ etg$ trois fonctions continues positives sur $[a, b]$. Alors l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & J_a^{\alpha,k}[h\ (t)\ f\ (t)]\ J_a^{\beta,k}[g\ (t)] - J_a^{\alpha,k}[g\ (t)]\ J_a^{\beta,k}[h\ (t)\ f(t)] \\ \leq & J_a^{\alpha,k}[g\ (t)\ h\ (t)]\ J_a^{\beta,k}[f\ (t)] + J_a^{\alpha,k}[f\ (t)]\ J_a^{\beta,k}[g\ (t)\ h\ (t)] \end{aligned} \tag{3.20}$$

est valide pour tout $a < t \leq b,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ k \geq 0$.

Preuve

En multiplier les deux côtés de $(3,16)$ par $\varphi_{\beta}^{k}(t,y)$, $y \in (a,t)$, $a < t \leq b$, alors en intégrant l'inégalité qui en résulte, par rapport à y sur (a,t), nous obtenons

$$0 \leq \int_{a}^{t} \int_{a}^{t} \varphi_{\beta}^{k}(t,y)\ \phi\ (x,y)\ dxdy \tag{3.21}$$

$$= \int_{a}^{k} \int_{a}^{k} \varphi_{\beta}^{k}(t,y)\ \varphi_{\alpha}^{k}(t,x)\ (f\ (y)\ g\ (x)\ h\ (x) + g\ (y)\ h\ (y)\ f\ (x)$$
$$- g\ (y)\ h\ (x)\ f\ (x) - h\ (y)\ f\ (y)\ g\ (x))\ dxdy$$
$$= J_{a}^{\alpha,k}[g\ (t)\ h\ (t)] \int_{a}^{t} \varphi_{\beta}^{k}(t,y)\ f\ (y)\ dy + J_{a}^{\alpha,k}[f\ (t)] \int_{a}^{t} \varphi_{\beta}^{k}(t,y)\ g\ (y)\ h\ (y)\ dy$$
$$- J_{a}^{\alpha,k}[h\ (t)\ f\ (t)] \int_{a}^{t} \varphi_{\beta}^{k}(t,y)\ g\ (y)\ dy - J_{a}^{\alpha,k}[g\ (t)] \int_{a}^{t} \varphi_{\beta}^{k}(t,y)\ h\ (y)\ f\ (y)\ dy$$
$$= J_{a}^{\alpha,k}[g\ (t)\ h\ (t)]\ J_{a}^{\beta,k}[f\ (t)] + J_{a}^{\alpha,k}[f\ (t)]\ J_{a}^{\beta,k}[g\ (t)\ h\ (t)]$$
$$- J_{a}^{\alpha,k}[h\ (t)\ f\ (t)]\ J_{a}^{\beta,k}[g\ (t)] - J_{a}^{\alpha,k}[g\ (t)]\ J_{a}^{\beta,k}[h\ (t)\ f\ (t)].$$

Implique que

$$\begin{aligned} & J_{a}^{\alpha,k}[gh\ (t)]\ J_{a}^{\beta,k}[f\ (t)] + J_{a}^{\alpha,k}[f\ (t)]\ J_{a}^{\beta,k}[gh\ (t)] \\ & \geq J_{a}^{\alpha,k}[hf\ (t)]\ J_{a}^{\beta,k}[g\ (t)] - J_{a}^{\alpha,k}[g\ (t)]\ J_{a}^{\beta,k}[hf\ (t)]. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Théorème 3.2.4 est prouvé.

Corollaire 3.2.3

Si $\alpha = \beta$, nous obtenons le théorème 3.2.3.

Remarque 3.2.2

Maintenant, nous proposerons une nouvelle généralisation des inégalités intégrales en utilisant une famille de n fonctions positives définies sur $[a,b]$

Théorème 3.2.5 [6]

Soient f , h et g_i, $i = 1, ..., n$ des fonctions positives et continues sur $[a, b]$, Alors, l'inégalité fractionnaire suivante

$$\begin{aligned} & J_a^{\alpha,k} \left[\prod_{i=1}^{n} g_i\ (t)\right] J_a^{\alpha,k} \left[h\ (t)\ f\ (t) \prod_{i\neq q}^{n} g_i\ (t)\right] \\ & \leq J_a^{\alpha,k} \left[f\ (t) \prod_{i\neq q}^{n} g_i\ (t)\right] J_a^{\alpha,k} \left[h\ (t) \prod_{i=1}^{n} g_i\ (t)\right] \end{aligned} \tag{3.23}$$

est valide pour tout1 $a < t \leq b$, $\alpha > 0$, $k \geq 0$

Preuve

Supposons que f , h et g_i, $i = 1, ..., n$ sont des fonctions continues positives sur $[a, b]$, alors

$$h\ (x)\ \frac{f\ (y)}{g_q\ (y)} + h\ (y)\ \frac{f\ (x)}{g_q\ (x)} \geq h\ (x)\ \frac{f\ (x)}{g_q\ (x)} + h\ (y)\ \frac{f\ (y)}{g_q\ (y)} \tag{3.24}$$

pour tout $q \in \{1, ..., n\}$ fixe et pour tout $x, y \in [a, t]$, $a < t \leq b$.
Désignons

$$\begin{aligned} & \phi_q(x,y) := \\ & \varphi_\alpha^k\ (t,x) \left(f\ (y) \prod_{i\neq q}^{n} g_i\ (y)\ h(x) \prod_{i=1}^{n} g_i\ (x) + h\ (y) \prod_{i=1}^{n} g_i\ (y)\ f\ (x) \prod_{i\neq q}^{n} g_i\ (x) \right. \\ & \left. - \prod_{i=1}^{n} g_i\ (y)\ h\ (x)\ f\ (x) \prod_{i\neq q}^{n} g_i\ (x) - h\ (y)\ f\ (y) \prod_{i\neq q}^{n} g_i\ (y) \prod_{i=1}^{n} g_i\ (x) \right), \end{aligned} \tag{3.25}$$

pour tout $x, y \in [a, t]$, $a < t \leq b$ et pour tout $q \in \{1, ..., n\}$,
nous avons

$$\phi_q(x,y) \geq 0. \tag{3.26}$$

En intégrant (3.26) par rapport à x sur (a,t), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
0 \leq \int_a^t \phi_q(x,y)\,dx \\
&= f\ (y) \prod_{i \neq q}^{n} g_i\ (y)\ J_a^{\alpha,k} \left[h\ (t) \prod_{i=1}^{n}\ g_i\ (t) \right] \\
&+ h\ (y) \prod_{i=1}^{n} g_i\ (y)\ J_a^{\alpha,k} \left[f\ (t) \prod_{i \neq q}^{n} g_i\ (t) \right] \\
&- \prod_{i=1}^{n} g_i\ (y)\ J_a^{\alpha,k} \left[h\ (t)\ f\ (t) \prod_{i \neq q}^{n} g_i\ (t) \right] \\
&- h\ (y)\ f\ (y) \prod_{i \neq q}^{n} g_i\ (y)\ J_a^{\alpha,k} \left[\prod_{i=1}^{n} g_i\ (t) \right]
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Ensuite, en multipliant les deux côtés de (3.27) par $\varphi_\alpha^k(t,y),\ \ y \in (a,t)$, intégrant l'inégalité résultante par rapport à y de a à t,

$$\begin{aligned}
0 \leq & \int_a^t \int_a^t \varphi_a^k\ (t,y)\ \phi_q\ (x,y)\ dxdy \\
& = J_a^{\alpha,k} \left[f\ (t) \prod_{i \neq q}^{n} g_i\ (t) \right]\ J_a^{\alpha,k} \left[h\ (t) \prod_{i=1}^{n} g_i\ (t) \right] \\
& + J_a^{\alpha,k} \left[h\ (t) \prod_{i=1}^{n} g_i\ (t) \right]\ J_a^{\alpha,k} \left[f\ (t) \prod_{i \neq q}^{n}\ g_i\ (t) \right] \\
& - J_a^{\alpha,k} \left[\prod_{i=1}^{n} g_i\ (t) \right] J_a^{\alpha,k} \left[h\ (t)\ f\ (t) \prod_{i \neq q}^{n} g_i\ (t) \right] \\
& - J_a^{\alpha,k} \left[h\ (t)\ f\ (t) \prod_{i \neq q}^{n} g_i\ (t) \right]\ J_a^{\alpha,k} \left[\prod_{i=1}^{n} g_i\ (t) \right]
\end{aligned} \tag{3.28}$$

et par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
0 \leq & 2J_a^{\alpha,k} \left[f\ (t) \prod_{i \neq q}^{n} g_i\ (t) \right]\ J_a^{a,k} \left[h\ (t) \prod_{i=1}^{n} g_i\ (t) \right] \\
& - 2J_a^{\alpha,k} \left[\prod_{i=1}^{n} g_i\ (t) \right] J_a^{\alpha,k} \left[h\ (t)\ f\ (t) \prod_{i \neq q}^{n} g_i\ (t) \right]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

La preuve est terminée.

Corollaire 3.2.4

Si $q = 1$ on obtient l'inégalité (3.13)

Remarque 3.2.3

Pour généralisé le théorème 3.2.5, en utilisant deux paramètres fractionnaires α, β.

Théorème 3.2.6 [6]

Soient f, h *et* $g_i,\ i = 1, ..., n$ sont des fonctions continues positives sur $[a, b]$, Alors, pour tout $q \in \{1, ..., n\}$ et pour tout $a < t \leq b,\ \ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \ k \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} & J_a^{a,k}\left[\prod_{i=1}^{n} g_i\ (t)\right]\ J_a^{\beta,k}\left[h\ (t)\ f\ (t) \prod_{i\neq q}^{n} g_i\ (t)\right] \\ & + J_a^{\beta,k}\left[\prod_{i=1}^{n} g_i\ (t)\right]\ J_a^{\alpha,k}\left[h\ (t)\ f\ (t) \prod_{i\neq q}^{n} g_i\ (t)\right] \\ & \leq J_a^{a,k}\left[f\ (t) \prod_{i\neq q}^{n} g_i\ (t)\right]\ J_a^{\beta,k}\left[h\ (t) \prod_{i=1}^{n} g_i\ (t)\right] \\ & + J_a^{s,k}\left[f\ (t) \prod_{i\neq q}^{n} g_i\ (t)\right]\ J_a^{\beta,k}\left[h\ (t) \prod_{i=1}^{n} g_i\ (t)\right] \end{aligned} \tag{3.30}$$

Preuve

En multipliant l'inégalité $(3, 27)$ par $\varphi_\beta^k(t, y),\ \ y \in (a, t)$, et en intégrant par rapport à y de a à t, on obtient

$$0 \leq \int_a^t \int_a^t \varphi_\beta^k(t, y)\ \phi_q\ (x, y)\ dxdy \tag{3.31}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^t \int_a^t \varphi_\beta^k\ (t,y)\ f\ (y) \prod_{i\neq q}^n g_i\ (y) \varphi_\alpha^k\ (t,x)\ h\ (x) \prod_{i=1}^n g_i\ (x)\ dxdy \\
&+ \int_a^t \int_a^t \varphi_\beta^k\ (t,y)\ h\ (y) \prod_{i=1}^n g_i\ (y)\ \varphi_{a,\theta}^k\ (t,x)\ f\ (x) \prod_{i\neq q}^n g_i\ (x)\ dxdy \\
&- \int_a^t \int_a^t \varphi_\beta^k\ (t,y) \prod_{i=1}^n g_i\ (y)\ \varphi_\alpha^k\ (t,x)\ h\ (x)\ f\ (x) \prod_{i\neq q}^n g_i\ (x)\ dxdy \\
&- \int_a^t \int_a^t \varphi_\beta^k\ (t,y)\ h\ (y)\ f\ (y) \prod_{i\neq q}^n g_i\ (y)\ \varphi_\alpha^k\ (t,x) \prod_{i=1}^n g_i\ (x) dxdy.
\end{aligned}
$$

Implique que

$$
\begin{aligned}
0 \leq\ & J_a^{a,k} \left[f\ (t) \prod_{i\neq q}^n g_i\ (t) \right] J_a^{\beta,k} \left[h\ (t) \prod_{i=1}^n g_i\ (t) \right] \\
&+ J_a^{\beta,k} \left[f\ (t) \prod_{i\neq q}^n g_i\ (t) \right] J_a^{a,k} \left[h\ (t) \prod_{i=1}^n g_i\ (t) \right] \\
&- J_a^{\alpha,k} \left[\prod_{i=1}^n g_i\ (t) \right] J_a^{\beta,k} \left[h\ (t)\ f\ (t) \prod_{i\neq q}^n g_i\ (t) \right] \\
&- J_a^{\beta,k} \left[\prod_{i=1}^n g_i\ (t) \right] J_a^{\alpha,k} \left[h\ (t)\ f\ (t) \prod_{i\neq q}^n g_i\ (t) \right].
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

La preuve de théorème et complète.

Corollaire 3.2.5

Si $\alpha = \beta$, nous obtenons l'inégalité (3.23).

Conclusion

Notre but principal dans ce mémoire est l'opérateur d'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville généralisé est utilise pour générer de nouvelles inégalités intégrales fractionnaires, en utilisant l'opérateur fractionnaire de R.L généralisé, nous générons aussi quelques nouvelles classes d'inégalités intégrales fractionnaires en utilisant une famille de "n" fonctions positives $(n \geq 1)$.

Bibliographie

[1] S. Belarbi et Z. Dahmani, On some new fractional integral inequalities, J. Inequal. Pure Appl. Math. 10(3) (2009) pp 1-12.

[2] Z. Dahmani, New inequalities in fractional integrals, International Journal of Nonlinear Sciences. 9(4) (2010) pp 493-497.

[3] Z. Dahmani et N. Bedjaoui, New generalized integral inequalities, J. Advan. Res. Appl. Math. 3(4) (2011) pp 5866.

[4] Z. Dahmani, New classes of integral inequalities of fractional order, Le Matematiche. (2014) pp 227235.

[5] R. Goreno et F. Mainardi, Fractional calculus : integral and differentiable equations of fractional order, Springer, Verlag, Wien, (1997).

[6] M. Houas,M.Bezziou on Some fractional integral inequalities Involving Generalized Riemann-Liouville Fractional Integral Operator, Med.J.Model.Simul. O6(2016) 059-066.

[7] M. Houas, Some integral inequalities involving Saigo fractional integral operators. Accepeted.

[8] M. Houas, Some weighted integral inequalities for Hadamard fractional integral Operators. Accepeted.

[9] U. Katugampola, New approach to a generalized fractional integral, Appl. Math. Comput. 218(3) (2011) pp 860865.

[10] W. Liu, Q. A. Ngo et V. N. Huy, Several interesting integral inequalities, Journal of Math. Inequal. 3(2) (2009) pp 201212.

[11] S. G. Samko, A. A Kilbas, and O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives, Theory and Application, Gordan and Breach Science, New York, 1993.

[12] A. A Kilbas,H.M.Srivastava and J.J.Trujillo, Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam,(2006).

[13] Erdelyi A, Magnus W, Oberhetting F and Tricomi F, Higher Transcendental functions,Vol.III,Krieger Pub,Melbourne,Florida,(1981).

[14] M. Z. Sarikaya et H. Yaldiz, Note on the Ostrowski type inequalities for fractional integrals. Vietnam. J. Math. 41(4), (2013) pp 2-6 .