REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et applications

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

Quelques propriétés et applications des espaces de Lebesgue et de Morrey

Présenté par

***Amari Tarek**
***Hassani Imane**

Soutenu devant le jury composé de

***Halim Benali**	**MCB**	**Président**
***Sofrani Mohamed**	**MAA**	**Examinateur**
***Senouci Abdelkader**	**Pr**	**Encadreur**

Promotion : **2019 \ 2020**

Remerciement

On remercie tout d'abord DIEU Allah , tout puissant de nous avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce modeste travail.

En tout premier lieu, nous tenons à remercier chaleureusement et respectivement notre encadreur Pr. A.Senouci pour l'aide, les remarques, ses encouragement et précieux conseils.

Nos remerciement vont à l'endroit Mr.H.Benali et Mr.M.Sofrani d'avoir acceptés d'être notre jury et pour leur disponibilité, leur suggestions et recommandations.

Nous tenons à remercier tous les enseignants qui ont participé à notre formation tout au long universitaire.

Nous exprimons également nos sincères remerciements le chef département Mr.Larabi Abd el Rahman.

Enfin, nous ne voudrons pas non plus oublier toutes les personnes que nous pouvons rencontre au long de ces années universitaire.

★ ★ ★

Je dédie ce travail à

Ma mère Fatima et mon père Mohamed.

Mes frères : Chawki, Adel.

Mes Sœurs : sabrin, Hadjer, ouissame.

Mes chers neveaux : Ali ,Yacine.

Ma famille et mes amies .

Imane.

Ce travail est dédié à : Ma mère et mon père .ma sœur. Mes frères . Ma famille et mes amies. Tarek.

Imane Tarek

Table des matières

Notations générales

- (Ω, T, m) = un espace mesuré :
  - T une sigma-algèbre (tribu),
  - $m : T \longrightarrow [0, \infty]$ une mesure positive .
- $|\Omega|$ désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω .
- On note par e le sous ensemble de Ω de mesure nulle.
- On note par p.p pour dire presque partout.
- L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ est noté par $C(\mathbb{R}^n)$.
- On dit que $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ si f est continue sur $\mathbb{R}^n$, et à support compact.

INTRODUCTION

Dans ce mémoire on s'intéresse principalement aux espaces de **Lebesgue** et à ceux de **Morrey** qui revêtent une grande importante en analyse fonctionnelle et ses applications. Ces dernières décennies les espaces de **Morrey** connaissent un intense développement et ils sont appliqués dans différentes branches de mathématiques et on particulier aux E.D.P.

Au 1^{er} **chapitre** sont abordés les espaces de **Lebesgue** où sont données quelques propriétés sous forme d'inégalités classiques telles que celle de **Hölder, Minkowski,** de plus est considère la complétude et la dual de l'espace de **Lebesgue** L_p. Toutes Ces notions sont nécessaires aux chapitres suivants.

Dans le 2^{me} **chapitre** on considère les opérateurs de Hardy et ceux du type de Hardy. On montre qu'ils sont bornés dans différents espaces de Lebesgue$L_p(\mathbb{R}^+), L_p(\mathbb{R})$ et $L_p(\mathbb{R}^n)$. Ces derniers sont nécessaires aux définitions et aux propriétés des espaces de **Morrey**.

Le 3^{me}**chapitre** comprend les définitions et les propriétés de différents espaces de

Morrey. Ont été établies plusieurs inégalités intégrales relatives à leurs propriétés et en particulier a été prouvée leur complétude. Aussi sont donnés des exemples de fonctions qui appartenant aux différents espaces de **Morrey**.
Aussi on trouve à la fin de ce chapitre deux resultats concernant l'opérateur fractionnaire de Hardy H_α ; où il est borne dans les espaces locaux et globaux de Morrey.

A **la fin** on trouve une conclusion et une bibliographie.

Chapitre 1

Espaces classiques de Lebesgue

1.1 Quelques résultats d'intégration

1.1.1 Théorème fondamentaux

Théorème 1.1. ***(Convergence monotone)*** *Soient $k \in \mathbb{N}$, f_k des fonctions non négatives mesurables sur ensemble Ω mesurable, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, de plus $f_k(x) \leq f_{(k+1)}(x)$ p.p, et $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty}(f_k(x))$ alors :*

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k(x)dx = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx = \int_\Omega f(x)dx. \tag{1.1}$$

Preuve: Voir [8],[2]. □

Lemme 1.1. ***(Lemme de Fatou)*** *: Soient $k \in \mathbb{N}$, les fonctions f_k non-négatives et mesurables sur un ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et presque par tout sur Ω existe la limite finie ou infinie $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$. Alors $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty}\inf(f_k(x))$ est mesurable et de plus :*

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \lim_{k\to\infty}\inf\int_\Omega f_k(x)dx \leq \sup_{k\in N}\int_\Omega f_k(x)dx.$$

Preuve: Voir[8],[2]. □

Remarque 1.1. *Si*

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = +\infty \ \ sur \ \ \Omega, \ \ |\Omega| > 0.$$

On pose $\int_\Omega f(x)dx = \infty$.

Théorème 1.2. ***(Convergence dominée)*** *Soient $k \in \mathbb{N}$, f_k des fonctions mesurables sur ensemble Ω mesurable, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et p.p existe sur Ω la limite finie $f(x)$ telle que : $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, s'il existe une fonction G intégrable et non négative, telle que p.p sur Ω :*

$$|f_k(x)| \leq G(x). \tag{1.2}$$

Alors, $\forall k \in \mathbb{N}$ les fonctions f_k et la fonction $f(x)$ sont intégrable sur Ω et

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)dx = \int_\Omega f(x)dx. \tag{1.3}$$

Preuve: voir [8],[2]. □

Remarque 1.2. *La plus petite possible fonction G dans (1.3) est la fonction G définie comme suit :*

$$G(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|, \quad \forall x \in E.$$

Théorème 1.3. ***(Théorème de Fubini)*** *Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ ($E \subset \mathbb{R}^n$) et $F \subset \mathbb{R}^m$ (un ensemble mesurable) et la fonction $f(x,y)$ intégrable sur $E \times F$. Alors pour presque tous Les $x \in E$, $f(x,y)$ est intégrable sur F, pour presque tous les $y \in F$ $f(x,y)$ est intégrable sur E et*

$$\int_{E\times F} f(x,y)dxdy = \int_E \left(\int_F f(x,y)dy \right) dx = \int_F \left(\int_E f(x,y)dx \right) dy. \tag{1.4}$$

Preuve: Voir [8], [2]. □

Remarque 1.3. *Si f n'est pas intégrable sur $E \times F$, alors les intégrales itérées peuvent ne pas exister ou exister et être différentes.*

Preuve: Voir [1],[3]. □

Théorème 1.4. ***(Densité de $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L_p(\Omega)$)*** *Soient $n \geq 1$, $p \in [1;+\infty)$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ est dense dans $L_p(\Omega)$.*

Théorème 1.5. ***(Théorème de Luzin)*** *Pour qu'une fonction $f(x)$ définie sur un segment $[a,b]$ soit mesurable, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $\varphi(x)$ continue sur $[a,b]$ telle que :*

$$\left| \{x, f(x) \neq \varphi(x)\} \right| < \varepsilon.$$

Idée de la preuve. Voir [7] Ch. V théorème 9.On utilise la formule de l'intégration sur la boule B_r,
$\int_{B_r} g|x|dx = \sigma_n \int_0^r g(\rho)\rho^{n-1}d\rho$ si $g(\rho)\rho^{n-1}$ intégrable sur $(0,r)$ avec $\sigma_n = nv_n$, ou v_n est volume de boule unitaire.

1.2 Définitions et inégalités intégrales

1.2.1 Définitions les espaces L_p , $\mathcal{L}_p$

Définition 1.1. *Soient* (Ω, T, m) *un espace mesuré,* $0 < p < \infty$ *et* f *une fonction de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*, mesurable. On dit que* $f \in \mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\Omega, T, m)$ *si ;* $\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty$*. alors :*

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.5}$$

La fonction $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}_p(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\|f\|_p := \|f\|_{p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}},$$

est non négative et défini semi norme.
La fonction identiquement nulle n'est pas la seule á satisfaire $\|f\|_p = 0$,et donc $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme dans le sens habituel du terme et par conséquent c'est une semi-norme sur $\mathcal{L}_p(\Omega)$. C'est á dire :

$$\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0\ (p.p).$$

Donc du point de vue de l'intégrale on ne distingue pas deux fonctions égales presque partout.
Définissons donc la relation " $\sim$ " suivante sur $\mathcal{L}_p$: $f \sim g \Leftrightarrow f = g(p.p)$ La relation " $\sim$ " $(p.p)$ définie une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}_p$.
Si $f \in \mathcal{L}_p$ sa classe d'équivalence est notée temporairement par :

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}_p : f \sim g\} = \{g \in \mathcal{L}_p : f = g(p.p)\}.$$

Sur la droite réelle la fonction $f = 1_{\mathbb{Q}} \in [0]$ $(1_{\mathbb{Q}}(x) = 1\ sur\ Q, 0\ si\ non)$. Formellement ceci revie nt á considérer l'ensemble quotient ,$L_p(\Omega, T, m) := \mathcal{L}_p(\Omega, T, m)/\sim$.

1.2.2 L'espace de Lebesgue

Définition 1.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable avec $0 < p < \infty$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que $f \in L_p(\Omega)$ si :*

(1) *f est mesurable sur Ω .*

(2) $\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{1/p} < \infty.$

Exemple 1.1. *Soit :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in E_1, \\ -1 & si \quad x \in E/E_1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Avec $E_1 \subset E, E_1$ non mesurable, alors :

(1) *n'est pas vérifiée.*

(2) $\|f\|_{L_p(E)} = \left(\int_E dx\right)^{1/p} = |E|^{\frac{1}{p}} < \infty$, *donc $f \notin L_p(E)$.*

Définition 1.3. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, mesurable et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $|\Omega| > 0$,*
On dit que $f \in L_\infty(\Omega)$ si :

(1) *f est mesurable sur Ω .*

(2) $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup\limits_{x\in\Omega} vrai|f(x)| < \infty.$

Remarque 1.4. *On pose $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = 0$ pour $|\Omega| = 0$.*

Théorème 1.6. ***(Théorème de Riesz)*** *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable et f une fonction mesurable sur Ω, alors :*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_{L_\infty(\Omega)}. \tag{1.7}$$

Preuve: Voir [1], et [3]. □

Définition 1.4. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, $f : \Omega \to \mathbb{C}$.*

$$\sup_{x\in\Omega} vrai f(x) = \inf_{e\subset\Omega} \sup_{x\in\Omega/e} f(x). \tag{1.8}$$

$$\inf_{x\in\Omega} vrai f(x) = \sup_{e\subset\Omega} \inf_{x\in\Omega/e} f(x). \tag{1.9}$$

Définition 1.5. *Pour une fonction á valeurs reelles définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$,on pose :*

$$\Omega_a \equiv \Omega_a(f) = \{x \in \Omega : f(x) > a\}. \tag{1.10}$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $mes(\Omega) \neq 0$ $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ .Alors :

$$\sup_{x\in\Omega} vrai\Big(f(x)\Big) := inf\Big\{a \in \mathbb{R} : mes\Big(\Omega_a\Big) = 0\Big\}. \tag{1.11}$$

On commence par quelques propriétés du sup essentiel similaires á celles du sup ordinaire.

Lemme 1.2.

(1) *Si $f \in L_\infty$, alors $|f| \leq \|f\|_{L_\infty}$ $\quad p.p.$*

(2) $f = 0$ *p.p.* $\Longleftrightarrow \|f\|_\infty = 0.$

(3) *si f est continue sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, alors :*

$$\sup_{x\in\Omega} vrai f(x) = \sup f(x).$$

Corollaire 1.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mesurable, $mes(\Omega) < \infty$, une fonction f mesurable sur Ω, $1 < p < \infty$. Alors :*

$$\|f\|_{Lp(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L\infty(\Omega)}. \tag{1.12}$$

(Ideé de la preuve) : On applique (1) dans **Lemme** 1.2.

Proposition 1.1. *Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et p tel que $1 \leq p < +\infty$.*
Alors l'espace $L_p(\Omega)$ est séparable .

Remarque 1.5. *Les espaces du type L_∞ ne sont pas en général , séparables.*

1.2.3 Inégalités de Hölder

Lemme 1.3. ***(Inégalité de Young)*** *Soit $p, q \geq 1$, alors :*

$$\forall a, b \geq 0, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{1.13}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lemme 1.4. *Pour* $0 < p < 1$*, on a :*

$$\forall a, b \geq 0, \quad ab \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.14}$$

Corollaire 1.2. *Soit* $p, q, r \geq 1$ *tels que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$*, alors :*

$$\forall A, B \geq 0, \quad (AB)^r \leq \frac{r}{p} A^p + \frac{r}{q} B^q. \tag{1.15}$$

Preuve: Comme $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, alors $1 = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r}$, et on applique l'inégalité (1.11) avec $a = A^r$ et $b = B^r$ on trouve

$$(AB)^r = ab \leq \frac{a^{p/r}}{p/r} + \frac{b^{q/r}}{q/r} = \frac{r}{p} A^p + \frac{r}{q} B^q. \tag{1.16}$$

□

Lemme 1.5. *Soit* Ω *un ensemble mesurable, si les fonctions* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *et* $g : \Omega \to \mathbb{R}$*, sont mesurables sur* Ω*, et* g *est non négative, alors :*

$$\inf_{x \in \Omega} vraif(x) \int_\Omega g(x)dx \leq \int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \sup_{x \in \Omega} vraif(x) \int_\Omega g(x)dx. \tag{1.17}$$

Preuve: Soit $e \subset \Omega$ tel que $|e| = 0$, alors :

$$\int_\Omega fgdx = \int_{\Omega \backslash e} fgdx \leq \sup_{\Omega \backslash e} f(x) \int_\Omega gdx. \tag{1.18}$$

Alors :

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \sup_{\Omega / e} f(x) \int_\Omega g(x)dx, \tag{1.19}$$

d'où :

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \inf_{x \in e} \sup_{x \in \Omega \backslash e} f(x) \int_\Omega gdx = \sup_{x \in \Omega} \mathrm{vraif}(x) \int_\Omega gdx. \tag{1.20}$$

D'une manière analogue on prouve l'inégalité gauche de (1.17). □

Théorème 1.7. ***(Inégalité de Hölder)*** *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble mesurable, et* $0 < p \leq \infty$*,* $f \in L_p(\Omega)$ *et* $g \in L_q(\Omega)$ *avec* $1/p + 1/q = 1$*, alors :*

i) *Si* $1 \leq p \leq \infty$

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}. \tag{1.21}$$

ii) *Si* $0 < p < 1, \forall x \in \Omega, g(x) \neq 0$

$$\int_\Omega |fg|dx \geq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}. \tag{1.22}$$

Pour la preuve de (1.21) *et* (1.22) *on utilise línégalité de* ***Young*** (1.14) *et* (1.15).

Corollaire 1.3. *Soit* Ω *un ensemble mesurable, si les fonctions* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *et* $g : \Omega \to \mathbb{C}$*, sont mesurables sur* Ω *et* $f \in L_\infty(\Omega), g \in L_1(\Omega)$*, alors :*

$$\left| \int_\Omega f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \|g\|_{L_1(\Omega)}. \tag{1.23}$$

Preuve:

$$\left| \int_\Omega fg dx \right| \leq \int_\Omega |fg|dx \leq \sup_{x\in\Omega} vrai|f(x)| \int_\Omega |g|dx \leq \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \|g\|_{L_1(\Omega)}. \tag{1.24}$$

□

Corollaire 1.4. *Soit* $p > 0$, $p_1 \leq \infty$, $-\infty \leq p_2 \leq \infty$ *et* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$ *, alors :*

i) *Si* $p \leq p_1$

$$\|fg\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_{p_1}(\Omega)} \|g\|_{L_{p_2}(\Omega)}. \tag{1.25}$$

ii) *Si* $p > p_1, \forall x \in \Omega, g(x) \neq 0$

$$\|fg\|_{L_p(\Omega)} \geq \|f\|_{L_{p_1}(\Omega)} \|g\|_{Lp_2(\Omega)}. \tag{1.26}$$

Pour la preuve de (1.23) *et* (1.24) *on applique respectivement* (1.19) *et* (1.20)*, avec* $\frac{1}{p_1/p} + \frac{1}{p_2/p} = 1$.

Proposition 1.2. *Soit* $p_i \in]1, \infty[, i = 1, 2, \ldots, k$*, et* $1 < r < \infty$ *tel que :*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r} \ ,$$

(les p_i *sont dits* r *conjugués),* $f_i \in L_{p_i}(\Omega)$*, alors :*

$$f = \prod_{i=1}^{k} f_i \in L_r(\Omega),$$

et

$$\|f\|_{L_r(\Omega)} = \left\| \prod_{i=1}^{k} f_i \right\|_{L_r(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{L_{p_i}(\Omega)}.$$

Preuve: Par récurrence. □

Lemme 1.6. ***(Inégalités de Minkowski)*** *Soit $f_1, f_2 \in L_\infty(\Omega)$, alors on a l'inégalité suivante :*

$$\|f_1 + f_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)}. \tag{1.27}$$

Preuve: Soit e_1 et e_2 deux ensembles tels que $|e_1| = |e_2| = 0$, on pose $e = e_1 \cup e_2$ alors $\forall \varepsilon > 0$, on a :

$$\sup_{\Omega/e_i} |f_i| \leq \|f_i\|_{L_\infty(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2$$

et donc

$$\begin{aligned}\sup_{\Omega/e} |f_1 + f_2| \leq \sup_{\Omega/e} (|f_1| + |f_2|) &\leq \sup_{\Omega/e} |f_1| + \sup_{\Omega/e} |f_2| \\ &\leq \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \varepsilon\end{aligned}$$

$$\inf_e \sup_{\Omega/e} |f_1 + f_2| \leq \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \varepsilon,$$

on fait tendre ε vers 0, d'où :

$$\inf_{\Omega/e} |f_1 + f_2| \leq \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)}$$

$$\|f_1 + f_2\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f_2\|_{L_\infty(\Omega)}$$

□

Théorème 1.8. ***(Inégalité de Minkowski)*** *Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable, $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p(\Omega)$ et $g \in L_p(\Omega)$, alors :*

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.28}$$

Preuve: Voir [3]. □

Corollaire 1.5. *Soient $m \in \mathbb{N}$, et $f_k \in L_p(\Omega)$, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $1 \leq p \leq \infty$, alors :*

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} f_k \right\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_{L_p(\Omega)}, \tag{1.29}$$

Preuve: Par récurrence. □

Corollaire 1.6. *(Inégalité de Minkowski pour les sommes infinies)*
Soit $f_k \in L_p(\Omega)$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)} < \infty$,
alors :

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.30}$$

Preuve: On suppose que $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{Lp}(\Omega) < \infty$. A l'aide du critère de **Cauchy** pour les séries numériques et l'inégalité de **Minkowski** pour les sommes finies on montre que la somme $S_m = \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_{L_p(\Omega)}$ est une suite de Cauchy et puisque L_p est complet, on déduit que :

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)},$$

on passe à la limite quand $m \to \infty$ et en vertu de la continuité des semi-normes $\sum_{k=1}^{m} f_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, lorsque $m \to \infty$, on a :

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)}.$$

□

Théorème 1.9. *Soit* $0 < p < 1$, *et* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble mesurable, et* $f, g \in L_p(\Omega)$, *alors :*

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} \left(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{Lp(\Omega)} \right). \tag{1.31}$$

Preuve: On utilise l'inégalité triviale $\forall a, b > 0$

$$(a+b)^p \leq c\,(a^p + b^p), \tag{1.32}$$

si $p \geq 1, c = 2^{p-1}$,
et si $0 < p < 1$,
alors $c = 1$. On applique cette inégalité avec $a = |f|$ et $b = |g|$,
on obtient :

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f+g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p dx + \int_\Omega |g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.33}$$

on applique l'inégalité (1.30), avec $c = \max\left(1, 2^{\frac{1}{p}-1}\right) = 2^{\frac{1}{p}-1}$, et donc

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L_p(\Omega)} &\leq 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right),\\ &= 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

□

Lemme 1.7. *Soit $a_i > 0, i = 1, \ldots, m$, alors on a l'inégalité suivante :*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^p \leq c\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right), \tag{1.34}$$

avec $c = \max\left(1, m^{p-1}\right)$.

Preuve: Par récurrence à partir de l'inégalité (1.30). □

Corollaire 1.7. *Soit $0 < p < 1$, alors*

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} f_k\right\|_{L_p(\Omega)} \leq m^{\frac{1}{p}-1} \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.35}$$

Preuve: A partir du **Corollaire**1.2, et du **Lemme**1.1. □

1.2.4 Inégalité intégrale de Minkowski

Théorème 1.10. *Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ des ensembles mesurables, et f une fonction mesurable sur $E \times F$ alors pour $1 \leq p \leq \infty$ on a :*

$$\left\|\int_F f(.,y)dy\right\|_{L_p(E)} \leq \int_F \|f(.,y\|_{L_p(E)})dy.$$

Preuve: Voir [3] P : 316 - 317. □

Théorème 1.11. *Soient $E \subset \mathbb{R}^m$ et $F \subset \mathbb{R}^n$des ensembles , et f une fonction mesurable sur $E \times F$ alors pour $0 < q \leq p \leq \infty$ on a*

$$\left\|\|f(x,y)\|_{L_y^q(F)}\right\|_{L_x^p(E)} \leq \left\|\|f(x,y)\|_{L_x^p(E)}\right\|_{L_y^q(F)}. \tag{1.36}$$

Preuve:

$$\begin{aligned}
\left\| \|f(x,y)\|_{L^q_y(F)} \right\|_{L^p_x(E)} &= \left\| \left(\int_F |f(x,y)^q dy| \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p_x(E)} \\
&= \left\| \int_F |f(x,y)^q dy \right\|^{\frac{1}{q}}_{L_x^{\frac{p}{q}}(E)} \\
&\leq \left(\int_F \||f(x,y)|^q\|_{L_x^{\frac{p}{q}}(E)} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_F \|f(x,y)\|^q_{L^p_x(E)} dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left\| \|f(x,y)\|_{L^p_x(E)} \right\|_{L^q_y(F)}.
\end{aligned}$$

□

1.3 Propriétés des espaces de Lebesgue

1.3.1 Dual de L_p

Définition 1.6. *On dit que $l : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonctionnelle linéaire continue sur E si :*

(1) $l(\alpha f + \beta f g = \alpha l(f) + \beta l(g)$ *pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *et* $f, g \in E$.

(2) $|l(f)| \leq c\|f\|_E$ *tels que* $c \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.3. *l'application $l : L_p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par*

$$l(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx, \quad g \in L_q(\Omega), \tag{1.37}$$

est une fonctionnelle linéaire continue.
L'ensemble des fonctionnelles linéaires sur $L_p(\Omega)$est note par $(L_p(\Omega))^*$.

1) La linéarité est évident .

2) La continuité :

$$|l(f)| = \left| \int_\Omega f(x)g(x)dx \right| \leq \int_\Omega |f(x)||g(x)|dx,$$

par application de l'intégrale de **Hölder**, on obtient :

$$|l(f)| \leq \|f\|_{L_p(\Omega)}\|g\|_{L_q(\Omega)} \leq c\|f\|_{L_p(\Omega)}, \tag{1.38}$$

avec $c = \|g\|_{L_p(\Omega)}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Remarque 1.6. *L'espace dual $(L_p(\Omega))^*$est une espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ normé :*

$$\|l\| = \sup\Big\{|l(f)| : \|f\|_{L_p(\Omega)} \leq 1\Big\}. \tag{1.39}$$

1.3.2 Convergences dans L_p

Définition 1.7. *On dite qu'une suite de fonctions mesurable $f_n(x)$ converge on mesure vers une fonction $f(x)$ si pour tout $\sigma > 0$ on a :*

$$\lim_{n \mapsto \infty} |\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\}| = 0. \tag{1.40}$$

Théorème 1.12. *Si une suite de fonction mesurable $f_n(x)$ converge presque partout vers une fonction $f(x)$, elle converge vers la même fonction $f(x)$ en mesure .*

Preuve : voir [7] chapitre paragraphe 4 théorème 7.

Théorème 1.13. *Soit $f_n(x)$ une suite de fonction mesurable convergeant en mesure vers $f(x)$. Alors ,de cette suite on peut extraire une sous suite $f_{n_k}(x)$ convergent vers $f(x)$ presque partout.*

Preuve: voir [7] chapitre V paragraphe 4. □

Définition 1.8. *Soit $f_n(x)$ une suite de fonction de $L_p(\Omega)$ on dite que (f_n) converge faiblement vers f si :*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} l(f_n) = l(f) \text{ pour tout } l \in (L_p(\Omega))^* \tag{1.41}$$

Théorème 1.14. *Soit $f \in L_p(\Omega)$ telle que $l(f) = 0$ pour toute $l \in (L_p(\Omega))^*$ alors $f = 0$ p.p.*

Théorème 1.15. *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f_n(x)$ une suite des fonctions qui converge vers f dans $L_p(\Omega)$, alors :*

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} inf\|f_n\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.42}$$

Théorème 1.16. *Soit $1 \leq p \leq \infty$,le dual de $(L_p(\Omega))$ et $(L_q(\Omega))$avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$et $l(f) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$ pour une certaine $g \in (L_q(\Omega))$ unique et de plus :*

$$\|l\| = \|g\|_{L_q(\Omega)}. \tag{1.43}$$

Preuve: voir [8] chapitre V paragraphe 4. □

Définition 1.9. *On dite qu'une suite de fonctions $(f_n(x))$ de $L_p(\Omega)$ converge en moyenne vers $f(x) \in L^p$ avec $1 \leq p \leq \infty$ si l'égalité suivant est vérifie*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L_p(\Omega)} = 0. \tag{1.44}$$

Proposition 1.4. *Si une suite de fonctions $(f_n(x))$ de L_p , $1 \leq p \leq \infty$ converge d'ordre p en moyenne ,de vers $f(x)$, alors elle converge faiblement vers la même fonction $f(x)$.*

Preuve: (A l'aide l'inégalité de **Hölder**) on a :

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)||g(x)|dx \leq \|f_n - f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)}.$$

par passage à la limite on obtient :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)||g(x)|dx \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)},$$

et comme f_n converge en moyenne vers f , alors

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)||g(x)|dx = 0,$$

d'où

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))(g(x))dx = 0,$$

et donc f_n converge faiblement vers f.

□

Remarque 1.7. *Si $p = 1$ alors la convergence faible est vérifie $\forall g(x)$ mesurable et bornée ,et donc la* ***Proposition*** *1.4 est aussi vérifiée.*

1.3.3 Complétude

Théorème 1.17. ***(Riesz-Fischer,1910)***
Soient (Ω, T, m) *un espace mesuré et* $1 \leq p \leq +\infty$. *L'espace vectoriel normé* $(L_p; \|\cdot\|_p)$ *est complet .i.e. c'est un espace de Banach.*

Preuve:

1) **Cas** $p = \infty$:Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L_∞,donc pour $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m, n > N_\varepsilon$ on a :

$$\|f_m - f_n\|_{L_\infty} \leq \varepsilon. \quad (p.p)$$

D'oú

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_{L\infty}. \quad (p.p)$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{k}$ $\exists N_k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m, n \geq N_k$,

$$| f_m(x) - f_n(x) | \leq \frac{1}{k}. \quad (p.p). \tag{1.45}$$

Alors :

$$| f_m(x) - f_n(x) | \leq \frac{1}{k}, \quad \forall x \in \Omega / E_k, \ \forall m, n \geq N_k, \tag{1.46}$$

oú E_k est un ensemble de mesure nulle.On pose $E = \bigcup_k E_k$, donc $(f_n(x))_n$ est de **Cauchy** pour tout $x \in \Omega \setminus E$.

En passant á la limite dans (1.46) quand $m \mapsto \infty$, on obtient :

$$| f(x) - f_n(x) | \leq \frac{1}{k}, \quad \forall x \in \Omega / E_k, \ \forall n \geq N_k.$$

Donc : $\|f - f_n\|_{L_\infty} \leq \frac{1}{k}$, $\forall n \geq N_k$ et comme :$f = f_n + f - f_n \in L_\infty(\Omega)$.

D'oú : $\|f - f_n\|_{L_\infty} \longrightarrow 0$.

2) **Cas** $1 \leq p < \infty$:soit (f_n) une sous suite de **Cauchy** de L_p. Soit (f_{n_i}) une suite extraire telle que

$$\forall i, \ \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\| \leq \frac{1}{2^i}, \tag{1.47}$$

posons

$$g_k = \sum_{i=0}^{k} | f_{n_{i+1}} - f_{n_i} |, \quad et \quad g = \sum_{i=0}^{+\infty} | f_{n_{i+1}} - f_{n_i} | .$$

On a :

$$\begin{aligned}
\|g_k\|_{L_p} &= \left\| \sum_{i=0}^{k} | f_{n_{i+1}} - f_{n_i} | \right\|_{L_p} \\
&\leq \sum_{i=0}^{k} \| | f_{n_{i+1}} - f_{n_i} | \|_{L_p} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_{L_p} \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^i} \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow g_k \in L_p(X), \ \exists N_k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L_p(X)} &= \left\| \sum_{i=0}^{\infty} | f_{n_{i+1}} - f_{n_i} | \right\|_{L_p(X)} \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \| | f_{n_{i+1}} - f_{n_i} | \|_{L_p(X)} \leq 2.
\end{aligned}$$

Ce qui entraine $g \in L_p(X)$, et g est finie presque partout sur X.

La série : $\sum_{i=0}^{\infty} | f_{n_{i+1}}(X) - f_{n_i}(X) |$ est convergente (p.p) sur X donc :

$f_{n_0} + \sum_{i=0}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(X) - f_{n_i}(X))$ est absolument convergente pour presque tout $x \in X$.Désignons par $f(x)$ sa somme

on a :

$$f(x) = f_{n_0}(x) + \sum_{i=0}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)), \quad (p.p) \ sur \ X,$$

alors :

$$f(x) = \lim_{k \mapsto \infty} (f_{n_0}(x) + \sum_{i=0}^{k} (f_{n_{i+1}}(X) - f_{n_i}(X))) = \lim_{k \mapsto \infty} f_{n_{k+1}}(x) \quad (p.p) \ sur \ X.$$

D'où : la suite $(f_{n_k})_k \geq 1$ converge p.p. vers $f(x)$.

Il suffit montrons que $f_n \mapsto f$ dans $L_p(X)$.

$$\begin{aligned}\int_X \mid f - f_n \mid^p dx &= \int_X \underline{\lim}_{k\mapsto\infty} \mid f_{n_k} - f_n \mid^p dx \\ &\leq \underline{\lim}_{k\mapsto\infty} \int_X \mid f_{n_k} - f_n \mid^p dx \Rightarrow \|f - f_n\|^p_{L_p(X)} \\ &\leq \underline{\lim}_{k\mapsto\infty} \|f_{n_k} - f_n\|^p_{L_p(X)} \\ &< \lim_{k\mapsto\infty} \frac{1}{2^k} = 0.\end{aligned}$$

Car la suite (f_n) étant de Cauchy Çeci assure que $f_n \mapsto f$ dans $L_p(X)$

$$\|f\|_{L_p(X)} = \|f_n + f - f_n\|_{L_p(X)} \leq \|f_n\|_{L_p(X)} + \|f - f_n\|_{L_p(X)} < \infty \Rightarrow f \in L_p(X).$$

□

1.4 Inégalités multiplicatives

Soient $U \in \mathbb{R}^n$, U un ensemble mesurable, $0 < p_1 < p < p_2 < \infty$. Alors

$$\|f\|_{L_p(U)} \leq \|f\|^{1-\theta}_{L_{p_1}(U)} \|f\|^{\theta}_{L_{p_2}(U)}, \tag{1.48}$$

et

$$\|f\|_{L_p(U)} \leq \left[\frac{p(p_2 - p_1)}{(p - p_1)(p_2 - p)}\right]^{\frac{1}{p}} \|f\|^{1-\theta}_{L_{p_1}(U)} \|f\|^{\theta}_{L_{p_2}(U)}, \tag{1.49}$$

où $\theta \in (0,1)$ est définie par l'égalité $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_1} + \dfrac{\theta}{p_2}$.

Preuve: *1)* Soit $p_2 < \infty$, comme $\frac{p_1}{\alpha p} = 1 + \frac{p_1}{p2}, \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) > 1$ on applique l'inégalité de **Holder** les exposants $\frac{p_1}{\alpha p}$ et $\frac{p_2}{\alpha p}$ et on obtient :

$$\int_E |f|^p dx \leq \int_E |f|^{\alpha p} \times |f|^{(1-\alpha)p} dx = \left(\int_E |f|^{p_1}\right)^{\frac{\alpha p}{p_1}} \times \left(\int_E |f|^{p_2} dx\right)^{\frac{(1-\alpha)p}{p_2}},$$

et élevant a la puissance $(\frac{1}{p})$ on a :

$$\|f\|_{L_p(E)} \leq \|f\|^{1-\alpha}_{L_{p_1}(E)} \times \|f\|^{\alpha}_{L_{p_2}(E)}.$$

2) Soit $p_2 = \infty$. Alors d'aprés (1.48) on a $\theta = 1 - \frac{p_1}{p}$ et

$$\begin{aligned}
\int_U |f|^p \, dx &= \int_U |f|^{\theta p} |f|^{(1-\theta)p} \, dx \\
&\leq \left(\int_U |f|^{\theta p} \, dx \right) \left(\int_U |f|^{p_2} \, dx \right)^{\frac{1}{p_2}(1-\theta)p} \\
&= \left\| |f|^{\theta p} \right\|_{L_1(U)} \left\| |f|^{(1-\theta)p} \right\|_{L_\infty(U)} \\
&= \|f\|_{L_{p_1}(U)}^{\theta p} \|f\|_{L_\infty(U)}^{(1-\theta)p},
\end{aligned}$$

d'où

$$\|f\|_{L_p(U)} \leq \|f\|_{L_{p_1}(U)}^{\theta} \|f\|_{L_\infty(U)}^{(1-\theta)}.$$

$\square$

Chapitre 2

Opérateurs de Hardy et du type Hardy dans les espaces de Lebesgue

2.1 Cas unidimensionnel

2.1.1 Opérateur de Hardy sur Les espaces $L_p(0,\infty)$

Définition 2.1. *Soient* $1 < p < \infty$, $f \in \mathrm{L}_1^{\mathrm{loc}}(0,\infty)$ *on définit les opérateurs de* ***Hardy***

$$\begin{gathered} H_1 : L_p(0,\infty) \to L_p(0,\infty) \\ f \mapsto (H_1 f), (H_1 f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)dy. \\ H_2 : L_p(0,\infty) \to L_p(0,\infty) \\ f \mapsto H_2 f, (H_2 f)(x) = \frac{1}{x}\int_x^\infty f(y)dy. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Théorème 2.1. *Soient* $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, f *une fonction mesurable non négative sur l'intervalle* $(0,\infty)$, *alors*

$$\| H_1 f \|_{\mathrm{L}_p(0,\infty)} \leq p' \| f \|_{\mathrm{L}_p(0,\infty)}, \tag{2.2}$$

$$\| H_2 f \|_{\mathrm{L}_p(0,\infty)} \leq p' \| f \|_{\mathrm{L}_p(0,\infty)}, \tag{2.3}$$

et $\|H_1\|_{L_p} = p' = \frac{p}{p-1}$. *et* $\|H_2\|_{L_p} = p' = \frac{p}{p-1}$.
Ce qui signifie que la constante $C_p = \frac{p}{p-1}$ *est optimale i.e la plus petite possible.*

Preuve: voire [6] , [5]. □

2.1.2 Opérateur sur $L_p(\mathbb{R})$

Les résultats du **Théorème**2.1 s'étendent à l'espace $L_p(\mathbb{R})$.

Théorème 2.2. *Soient* $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, f *une fonction mesurable non négative sur* $\mathbb{R}$, *Alors :*

$$\| (H_1 f)(x) \|_{L_p(\mathbb{R})} \leq p' \| f(x) \|_{L_p(\mathbb{R})},$$
$$\|(H_2 f)(x)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq p' \|f(x)\|_{L_p(\mathbb{R})}.$$

On a $\|H_1\| \leq p' = \frac{p}{p-1}$. *et* $\|H_2\| \leq p' = \frac{p}{p-1}$.

Preuve: Est similaire á celle des **Théorème**2.1. □

2.1.3 Opérateur sur les espaces $L_p((0,\infty), x^\alpha)$

Théorème 2.3. *Soient* $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \frac{1}{p'}, x^\alpha \in L_p$ *;* f *une fonction mesurable non négative sur l'intervalle* $(0,\infty)$ *, on a :*

1. *si* $\alpha < \frac{1}{p'}$

$$\| x^\alpha (H_1 f)(x) \|_{L_p((0,\infty),x^\alpha)} \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha \right)^{-1} \| x^\alpha f(x) \|_{L_p((0,\infty),x^\alpha)} .$$

2. *si* $\alpha > \frac{1}{p'}$

$$\|x^\alpha (H_2 f)(x)\|_{L_p((0,\infty),x^\alpha)} \leq \left(\alpha - \frac{1}{p'} \right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L_p((0,\infty),x^\alpha)}.$$

On a $\|H_1\| \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1}$. *et* $\|H_2\| \leq \left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1}$.
Si $\frac{-1}{p} < \alpha < \frac{1}{p'}$ *la constante* $\left(\frac{1}{p'} - \alpha \right)^{-1}$ *est optimale (la plus petite possible).*

Preuve: 1. Si $\alpha < \frac{1}{p'}$ on pose

$$J = \left\| x^\alpha (H_1 f)(x) \right\|_{L_p(0,\infty)}$$
$$= \left\| \int_0^x x^{\alpha - 1} f(y) dy \right\|_{L_p(0,\infty)}$$

Par le changement de variable $z = \dfrac{y}{x}$ on obtient $dy = xdz$, $y = 0 \to z = 0$, $y = x \longrightarrow z = 1$,

$$\begin{aligned} J &= \left\| \int_0^1 x^\alpha f(xz) dz \right\|_{L_p(0,\infty)} \\ &\leq \int_0^1 \| x^\alpha f(xz) \|_{L_p((0,\infty),x^\alpha)} dz, \end{aligned}$$

on pose $t = xz$ on a $dt = zdx$ et donc $dx = \dfrac{dt}{z}$,

$$\begin{aligned} \| x^\alpha f(xz) \|_{L_x^p((0,\infty),x^\alpha)} &= \left(\int_0^\infty x^{p\alpha} \mid f(xz) \mid^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= z^{-\alpha-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty t^{p\alpha} \mid f(t) \mid^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= z^{-\alpha-\frac{1}{p}} \| t^\alpha f(t) \|_{L_p(0,\infty)}. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} J &\leq \int_0^1 z^{-\alpha-\frac{1}{p}} \| t^\alpha f(t) \|_{L_p(0,\infty)} dz \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{p} - \alpha \right)^{-1} \| t^\alpha f(t) \| l_{L_p(0,\infty)}. \end{aligned}$$

Finalement on a

$$\left\| x^\alpha (H_1 f)(x) \right\|_{L_p(0,\infty)} \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha \right)^{-1} \| t^\alpha f(t) \|_{L_p(0,\infty)}.$$

2. Si $\alpha > \frac{1}{p'}$, on pose

$$\begin{aligned} I &= \| x^\alpha (H_2 f)(x) \|_{L_p(0,\infty)} \\ &= \left\| \int_x^\infty x^{\alpha-1} f(y) dy \right\|_{L_p(0,\infty)}, \end{aligned}$$

on pose $z = \frac{y}{x}$ alors $dy = xdz$.

$$\begin{aligned} I &= \left\| \int_1^\infty x^\alpha f(xz) dz \right\|_{L_p(0,\infty)} \\ &\leq \int_1^\infty \| x^\alpha f(xz) \|_{L_{p,x}(0,\infty)} dz, \end{aligned}$$

on pose $t = xz$ alors $dt = zdx$ et donc $dx = \frac{dt}{z}$

$$\begin{aligned}
\|x^{\alpha} f(xz)\|_{L_{p,x}(0,\infty)} &= \left(\int_0^{\infty} x^{p\alpha} \mid f(xz) \mid^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= z^{-\alpha-\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\infty} t^{p\alpha} \mid f(t) \mid^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= z^{-\alpha-\frac{1}{p}} \|t^{\alpha} f(t)\|_{L_p(0,\infty)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
I &\leq \int_1^{\infty} z^{-\alpha-\frac{1}{p}} \|t^{\alpha} f(t)\|_{L_p(0,\infty)} dz \\
&\leq \left(-1 + \frac{1}{p} + \alpha\right)^{-1} \|t^{\alpha} f(t)\|_{L_p(0,\infty)} \\
&\leq \left(\frac{1}{p'} + \alpha\right)^{-1} \|t^{\alpha} f(t)\|_{L_p(0,\infty)}.
\end{aligned}$$

□

2.2 Cas multidimensionnel

Soient $x \in \mathbb{R}^n, r =\mid x \mid> 0, B_r = \left\{y \in \mathbb{R}^n; \mid y \mid< r\right\}, 1 \leq p < \infty, f$ une fonction mesurable non négative sur B_r. Considérons les deux opérateurs suivants : $H_n : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$, définis par :

$$(H_n f)(x) := \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(y)dy.$$

$\widetilde{H}_n : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$, défini par :

$$(\widetilde{H}_n f)(x) := \frac{1}{|B_r|} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} f(y)dy.$$

Théorème 2.4. *: Soient $1 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$, α un nombre réel et $f(r,\xi) \in L_p(S^{n-1})$ (S^{n-1} : désigne la sphére unité dans $\mathbb{R}^n$), alors*

1. *Si* $\alpha < \frac{n}{p'}$

$$\|\mid x \mid^{\alpha} (H_n f)(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{1}{p'} - \frac{\alpha}{n}\right)^{-1} \|\mid x \mid^{\alpha} f(x)\|_{L_P(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.4}$$

2. *Si* $\alpha > \frac{n}{p'}$

$$\||\, x\,|^{\alpha}\, (\widetilde{H}_n f)(x)\,\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \||\, x\,|^{\alpha}\, f(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.5}$$

Preuve: On démontre l'ingalité (2.4) . On introduit les coordonnées sphériques (coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n(\rho,\xi)$ où $\rho = |\, y\,|, \xi = \frac{y}{|y|} \in S^{n-1}$ (S^{n-1} désigne la sphére unité dans $\mathbb{R}^n$) et on pose

$$\bar{f}(\rho) = \int_{S^{n-1}} f(\rho,\xi)d\xi.$$

Alors

$$\begin{aligned}(H_n f)(x) &= \frac{1}{v_n r^n}\int_0^r \rho^{n-1}d\rho \int_{S^{n-1}} f(\rho,\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{v_n r^n}\int_0^r \rho^{n-1}\bar{f}(\rho)d\rho.\end{aligned}$$

où $v_n = \pi^{\frac{n}{2}}(\Gamma(\frac{n}{2}+1))^{-1}$ est le volume de la boule unité et Γ est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(\delta) = \int_0^{\infty} t^{\delta-1}\exp(-t)dt.$$

et par suite ,

$$\begin{aligned}\||\, x\,|^{\alpha}\, (H_n f)(x)\,\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{r^{\alpha-n}}{v_n}\int_0^r \rho^{n-1}\bar{f}(\rho)d\rho\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (nv_n)\int_0^{\infty} r^{n-1}\left|\frac{r^{\alpha-n}}{v_n}\int_0^r \rho^{n-1}\bar{f}(\rho)d\rho\right|^p dr)^{\frac{1}{p}} \\ &= (nv_n)\int_0^{\infty} r^{n-1+p(\alpha-n+1)}v_n^{-p}\left|\frac{1}{r}\int_0^r \rho^{n-1}\bar{f}(\rho)d\rho\right|^p dr)^{\frac{1}{p}} \\ &= n^{\frac{1}{p}}v_n^{\frac{1}{p}-1}\left(\int_0^{\infty}\left|r^{\alpha-n+1+\frac{n-1}{p}}(H_n(\rho^{n-1}\bar{f}))(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\left\|\,|\, x\,|^{\alpha}\, (\widetilde{H}_n f)(x)\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} &= n^{\frac{1}{p}}v_n^{\frac{1}{p}-1}\left(\int_0^{\infty}\left|r^{\alpha-n+1+\frac{n-1}{p}}(H_n(\rho^{n-1}\bar{f}))(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= n^{\frac{1}{p}}v_n^{\frac{-1}{p'}}\left(\int_0^{\infty}\left|r^{\alpha-\frac{n-1}{p'}}(H_n(\rho^{n-1}\bar{f}))(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= n^{\frac{1}{p}}v_n^{\frac{-1}{p'}}\left(\int_0^{\infty}\left|r^{\alpha_1}(H_n(\rho^{n-1}\bar{f}))(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= n^{\frac{1}{p}}v_n^{\frac{-1}{p'}}\left\|r^{\alpha_1}(H_n(\rho^{n-1}\bar{f}))(r)\right\|_{L_p(0,\infty)}.\end{aligned}$$

où $\alpha_1 = \alpha - \frac{n-1}{p}$.
D'aprés (2.2) du **Théorème**2.1, on obtient

$$\| r^{\alpha_1}(H_n(\rho^{n-1}\bar{f}))(r) \|_{L_p(0,\infty)} \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha_1\right)^{-1} \| r^{\alpha_1}\rho^{n-1}\bar{f}(r) \|_{L_p(0,\infty)},$$

comme $\alpha_1 = \alpha - \frac{n-1}{p'} < \frac{1}{p'}$.
Ona

$$\begin{aligned}
\Big\| \mid x \mid^{\alpha} (H_n f)(x) \Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} &\leq n^{\frac{1}{p}} v_n^{\frac{-1}{p'}} \left(\frac{1}{p'} - \alpha_1\right)^{-1} \Big\| r^{\alpha_1}\rho^{n-1}\bar{f}(r) \Big\|_{L_p(0,\infty)} \\
&\leq n^{\frac{1}{p}} v_n^{\frac{-1}{p'}} \left(\frac{1}{p'} - \alpha_1\right)^{-1} \Big\| r^{\alpha_1+n-1}\bar{f}(r) \Big\|_{L_p(0,\infty)} \\
&= n^{\frac{1}{p}} v_n^{\frac{-1}{p'}} \left(\frac{n}{p'} - \alpha_1\right)^{-1} \left(\int_0^{\infty} r^{\alpha p+n-1} \mid \bar{f}(r) \mid^p dr \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité de **Hölder** , on a

$$\begin{aligned}
|\bar{f}(r)| = \left| \int_{S^{n-1}} f(r,\xi) d\xi \right| &\leq \int_{S^{n-1}} |f(r,\xi)| d\xi \\
&\leq \left(\int_{S^{n-1}} \mid f(r,\xi) \mid d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(mesS^{n-1} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= (nv_n)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{S^{n-1}} \mid f(r,\xi) \mid d\xi \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

En revenant aux coordonnées cartisienns , on obtient

$$\begin{aligned}
\Big\| |x|^{\alpha}(H_n f))(x) \Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} &\leq n^{\frac{1}{p}} v_n^{\frac{-1}{p'}} \left(\frac{n}{p'} - \alpha\right)^{-1} \left((nv_n)^{\frac{p}{p'}} \int_0^{\infty} r^{\alpha p+n-1} \int_{S^{n-1}} \mid f(r,\xi) \mid^p d\xi dr \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= n \left(\frac{n}{p'} - \alpha\right)^{-1} \left(\int_0^{\infty} \int_{S^{n-1}} r^{n-1}(r^{\alpha} \mid f(r,\xi) \mid)^p d\xi dr \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{p'} - \frac{\alpha}{n}\right)^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mid r^{n-1} f(x) \mid^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{p'} - \frac{\alpha}{n}\right)^{-1} \| | x |^{\alpha} f(x) \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} .
\end{aligned}$$

D'où

$$\| | x |^{\alpha} (H_n f)(x) \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{1}{p'} - \frac{\alpha}{n}\right)^{-1} \| | x |^{\alpha} f(x) \|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

De maniére analogue on démontre l'ingalité (2.5).

Constante optimale : Soit $A > 0$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|B_{|x|}|}\int_{B_{|x|}} f(y)dy\right)^p |x|^\alpha\, dx \leq A\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)\,|x|^\alpha\, dx, h$$

montrons que forcément $A \geq \left(\frac{np}{n(p-1)-\alpha}\right)^p$.Si $f \neq 0$ on a

$$A \geq \frac{\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|B_{|x|}|}\int_{B_{|x|}} f(y)dy\right)^p |x|^\alpha\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x)\,|x|^\alpha\, dx} = \frac{N}{D}$$

Etant donné que $\alpha + n(p-1) > 0$ choisissons $-\frac{\alpha+n(p-1)}{n} > \varepsilon > 0$ et considérons dans l'inégalité précedente la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in B_1, \\ |x|^{-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}} & si \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus B_1. \end{cases}$$

Notons que $-\frac{\alpha}{p} - n\frac{1+\varepsilon}{p} + n > 0$ et que $\alpha + n > 0$ puis passons aux coordonnée sphériques :

$$\begin{aligned}
N &= \int_{B_1}\left(\frac{1}{v_n|x|^n}\int_{B_{|x|}} 1dy\right)^p |x|^\alpha\, dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_1}\left(\frac{1}{v_n|x|^n}\int_{B_{|x|}} |y|^{-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}}\, dy\right)^p |x|^\alpha\, dx \\
&= \int_0^1\int_{S_{n-1}}\left(\frac{1}{v_n r^n}\int_0^r\int_0^1\int_{S_{n-1}} 1\rho^{n-1}d\xi d\rho\right)^p r^\alpha r^{n-1}d\chi dr \\
&\quad + \int_1^\infty\int_{S_{n-1}}\left(\frac{1}{v_n r^n}\int_0^r\int_{S_{n-1}} \rho^{-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}}\, d\rho\right)^p r^\alpha r^{n-1}d\chi dr \\
&= \int_0^1\int_{S_{n-1}}\left(\frac{nv_n}{v_n r^n}\times\int_0^r \rho^{n-1}d\rho\right)^p \rho r^{\alpha-n-1}d\chi dr \\
&\quad + \int_1^\infty\int_{S_{n-1}}\left(\frac{nv_n}{v_n r^n}\times\int_0^r \rho^{-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}+n-1}d\rho\right)^p d\chi dr.
\end{aligned}$$

d'ou

$$\begin{aligned}
N &= \int_0^1\int_{S_{n-1}}\left(\frac{n}{r^n}\times\frac{r^n}{n}\right)^p r^{\alpha+n-1}d\chi dr + \int_1^\infty\int_{S_{n-1}}\left(\frac{n}{r^n}\times\frac{r^{-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}+n}}{-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}+n}\right)^p r^{\alpha+n-1}d\chi dr \\
&= nv_n\int_0^1 r^{\alpha+n-1}dr + nv_n\left(\frac{n}{-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}+n}\right)^p\int_1^\infty r^{\alpha-n-n\varepsilon}r^{\alpha+n-1}dr \\
&= nv_n\frac{1}{\alpha+n} + \frac{v_n}{\varepsilon}\left(\frac{n}{-\frac{\alpha}{p}-n\frac{1+\varepsilon}{p}+n}\right)^p.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$
\begin{aligned}
D &= \int_{B_1} |\, x\,|^{\alpha}\, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1} |\, x\,|^{-\alpha-n-n\varepsilon} |\, x\,|^{\alpha}\, dx \\
&= \int_0^1 \int_{S_{n-1}} r^{\alpha} r^{n-1} \\
&= \int_0^1 \int_{S_{n-1}} r^{\alpha} r^{n-1} d\chi dr + \int_1^{\infty} \int_{S_{n-1}} r^{-n-n\varepsilon} r^{n-1} d\chi dr \\
&= \frac{n v_n}{\alpha+n} + \frac{v_n}{\varepsilon},
\end{aligned}
$$

d'oú

$$
\begin{aligned}
A &\geq \frac{n v_n \frac{1}{\alpha+n} + \frac{v_n}{\varepsilon}\left(\frac{n}{-\frac{\alpha}{p} - n\frac{1+\varepsilon}{p} + n}\right)^p}{\varepsilon \frac{n v_n}{\alpha+n} + \frac{v_n}{\varepsilon}} \\
&= \frac{\varepsilon n v_n \frac{1}{\alpha+n} + \frac{v_n}{\varepsilon}\left(\frac{n}{-\frac{\alpha}{p} - n\frac{1+\varepsilon}{p} + n}\right)^p}{\varepsilon^2 \frac{n v_n}{\alpha+n} + v_n}
\end{aligned}
$$

en faisant $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$
A \geq \left(\frac{n}{-\frac{\alpha}{p} - \frac{n}{p} + n}\right)^p = \left(\frac{np}{n(p-1)-\alpha}\right)^p,
$$

ce qui implique que $\left(\frac{np}{n(p-1)-\alpha}\right)^p$ est optimale, i.e la plus petite possible et

$$
\|\, H_n \,\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \frac{np}{n(p-1)-\alpha}.
$$

□

2.2.1 Opérateur du type Hardy $p \geq 1$

Définition 2.2. *On appelle fonction de poids toute fonction mesurable positive.*

Dans ce qui suit on cite un résultat concernant les inégalités avec poids que plusieurs auteurs ont étudié.

$$
H_{u,v} : L_p((0,\infty), v(x)) \longrightarrow L_q((0,\infty), u(x)),
$$

$$
f \longmapsto (H_u f)
$$

$$\Big(H_u f\Big)(x) = u(x)\int_0^x f(t)dt.$$

Dans [4] on trouve la preuve du théoréme suivant.

Théorème 2.5. *: **(Inégalités avec poids)(1960-1990)**. Soient f une fonction mesurable positive sur $(0,\infty)$ u v deux fonction poids $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, et $C > 0$ Alors*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x f(t)dt\right)^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^\infty f^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.6}$$

si est seulement si

$$\sup_{x>0}\left(\int_x^\infty u(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{2.7}$$

où $p' = \frac{p}{p-1}$

*En observent que si $v(x) = u(x) = x^\alpha$ avec $\alpha < p-1$ on obtient (2.2) l'inégalité classique de **Hardy** .*

Chapitre 3

Espaces de Morrey

3.1 Définitions et propriétés des espaces de Morrey

3.1.1 Fonction de distribution

Définition 3.1. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, E ensemble mesurable, tel que $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$, une fonction mesurable. La fonction λ_f est dite une fonction de distribution de f,*
Si : $\forall\ \sigma \in [0, \infty)$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\lambda_f(\sigma) = mes\{x \in E : |f(x)| > \sigma\}. \tag{3.1}$$

Remarque 3.1. *de la définition on peut déduire :*

(1) $\lambda_f(\sigma) = \lambda_{|f|}(\sigma)$.

(2) *Si $f \sim g$ Alors :* $\quad \lambda_f(\sigma) = \lambda_g(\sigma) \quad$ *sur* $\quad [0, \infty)$.

(3) *Si p.p sur E* $\quad |f| > |g| \quad$ *Alors :* $\qquad \lambda_f(\sigma) \geq \lambda_g(\sigma), \quad \forall \sigma \in [0, \infty)$.

Preuve:

(1) $\lambda_f(\sigma) = \lambda_{|f|}(\sigma)$ évidente.

(2) Soient $E = (0, \infty)$, $\sigma \in [0, \infty[$ et $g \sim f$,

$g \sim f \Leftrightarrow (g \neq f$ sur $E_1 \subset E$ Tels que : $mes\{E_1\} = 0)$
et $\qquad (g = f$ sur $E/E_1 = E_2)$,

tel que $E = E_1 \cup E_2$.

$$\begin{aligned}
\lambda_g(\sigma) &= mes\{x \in E : |g(x)| > \sigma\} \\
&= mes\{x \in E_1 : |g(x)| > \sigma\} + mes\{x \in E_2 : |g(x)| > \sigma\} \\
&= mes\{x \in E_2 : |g(x)| > \sigma\} \\
&= mes\{x \in E_2 : |f(x)| > \sigma\} \\
&= mes\{x \in E_1 : |f(x)| > \sigma\} + mes\{x \in E_2 : |f(x)| > \sigma\} \\
&= mes\{x \in E : |f(x)| > \sigma\} \\
&= \lambda_f(\sigma).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\lambda_f(\sigma) = \lambda_g(\sigma).$$

(3) On pose :

$$\begin{aligned}
\lambda_f(\sigma) &= mes\{x \in E : |f(x)| > \sigma\} = mes\{E_1\}, \\
\lambda_g(\sigma) &= mes\{x \in E : |g(x)| > \sigma\} = mes\{E_2\}.
\end{aligned}$$

Donc

$$|g(x)| > \sigma \Rightarrow |f(x)| > \sigma.$$

Alors si

$$\begin{aligned}
\{x \in E_2 \Rightarrow x \in E_1\} \Rightarrow E_2 \subset E_1 & \\
&\Rightarrow mes\,\{E_2\} \leq mes\,\{E_1\} \\
&\Rightarrow \lambda_g(\sigma) \leq \lambda_f(\sigma).
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.1. *Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, E ensemble mesurable, f est une fonction mesurable sur E, alors si :*

i) $1 < p < \infty$ *on a :*

$$\|f\|_{L_{P(E)}} = \left(p \int_0^\infty \sigma^{p-1} \lambda_f(\sigma) d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} = \left(-\int_0^\infty \sigma^p d\lambda_f(\sigma)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2}$$

ii) *si : $p = \infty$ on a :*

$$\|f\|_{L_\infty} = \inf\{\sigma : \lambda_f(\sigma) = 0\}. \tag{3.3}$$

iii) *si : $p = 1$ on a :*

$$\|f\|_{L_{1(E)}} = \|\lambda_f(\sigma)\|_{L_{1(E)}}. \tag{3.4}$$

Preuve: (***i***) pour $1 < p < \infty$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \sigma^{p-1}\lambda_f(\sigma)\,d\sigma &= \int_0^\infty \frac{\sigma^p}{\sigma}\lambda_f(\sigma)\,d\sigma \\
&= \int_0^\infty \frac{\sigma^p}{\sigma}\left(\int_{\{x:|f|>\sigma\}} d\mu\right)d\sigma \\
&= \int_0^\infty \frac{\sigma^p}{\sigma}\left(\int_E 1_{\{x:|f|>\sigma\}}\,d\mu\right)d\sigma,
\end{aligned}$$

d'aprés le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\sigma^p}{\sigma}\int_{\mathbb{E}} 1_{\{x:|f|>\sigma\}}\,d\mu d\sigma &= \int_{\mathbb{E}}\left(\int_0^{|f(x)|}\frac{\sigma^p}{\sigma}\,d\sigma\right)d\mu \\
&= \int_E \frac{1}{p}|f(x)|^p\,dx \\
&= \frac{1}{p}\int_E |f(x)|^p\,dx \\
&= \frac{1}{p}\|f\|_{L_p}^p.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\|f\|_{L_p}^p &= \int_0^\infty \sigma^p\lambda_f(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} \\
\|f\|_{L_p}^p &= p\int_0^\infty \sigma^p\lambda_f(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} \\
\|f\|_{L_p} &= \left(p\int_0^\infty \sigma^p\lambda_f(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

(ii) Pour $p = \infty$ on a par défintion :

$$\|f\|_{L_\infty} = \inf\{\sigma \geq 0,\ mes\{x \in E : |f(x)| > \sigma\} = 0\},$$

et d'aprés la définition de $\lambda_f(\sigma)$,

$$\|f\|_{L_\infty} \quad = \quad \inf\{\sigma : \lambda_f(\sigma) = 0\}.$$

(iii) On remplace dans (3.2) $p=1$ on obtient :

$$\|f\|_{L_{1(E)}} = \int_0^{\infty} \lambda_f(\sigma)d\sigma = \|\lambda_f(\sigma)\|_{L_{1(E)}}.$$

□

3.1.2 Fonctions de réarrangement

Définition 3.2. *Soient $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ f une fonction mesurable, on appelle réarrangement de f dans un ordre décroissant, la fonction f^* définie par :*

$$f^*(\sigma) = \inf\Big\{s \in [0,\infty) \quad : \lambda_f(s) \leq \sigma\Big\}, \quad \forall \sigma \in [0,\infty). \tag{3.5}$$

Remarque 3.2. *De la définition on peut déduire :*

1) $|f|^* = f^*$.

2) Si : $\quad g \sim f \quad sur \quad [0,\infty) \quad$ alors $\quad g^* = f^*$.

3) Si $\lambda_f(\sigma)$ est positive, non nulle, continue et strictement décroissante alors :

$$f^*(\sigma) = \lambda_f^{-1}(\sigma). \tag{3.6}$$

Preuve:

1) $|f|^* = f^*$ évidente.

2) Soients $(g \sim f)$ sur $[0,\infty)$ et $\sigma \in [0,\infty)$ donc $\exists\ E_1 \subset E$ tq : $g \neq f$ sur E_1 et $\text{mes}\{E_1\} = 0$ on a :

$$g^*(\sigma) = \inf\Big\{s \in [0,\infty) : \lambda_g(s) \leq \sigma\Big\}, \tag{3.7}$$

car $(g \sim f \Longrightarrow \lambda_g = \lambda_f)$, alors :

$$\begin{aligned} g^*(\sigma) &= inf\Big\{s \in [0,\infty) : \lambda_f(s) \leq \sigma\Big\} \\ &= f^*(\sigma). \end{aligned} \tag{3.8}$$

3) Montrons que : $f^*(\sigma) = \lambda_f^{-1}(\sigma)$,

soit $\sigma \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f^*(\sigma) = inf\left\{s \in [0,\infty) : \quad \lambda_f(s) \le \sigma\right\} &= inf\left\{s \in [0,\infty), \quad s \ge \lambda_f^{-1}(\sigma)\right\} \\ &= inf[\lambda_f^{-1}(\sigma), \infty), \\ &= \lambda_f^{-1}(\sigma). \end{aligned}$$

Alors :

$$f^*(\sigma) = \lambda_f^{-1}(\sigma).$$

Quelques propriétés de la fonction $f^\star$:

1) $f^\star \ge 0$, décroissante et continue à droite.

2) sur $[0,\infty)$

$$\lambda_{f^\star}(\sigma) = \lambda_f(\sigma). \tag{3.9}$$

3)

$$\sigma = f^\star(t) \Leftrightarrow t = \lambda_f(\sigma). \tag{3.10}$$

□

Théorème 3.2. *Soient $0 < p \le \infty$, $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, f est une fonction mesurable sur E alors :*

$$\|f\|_{L_p(E)} = \|f^*\|_{L_p(0,\infty)} = \|f^*\|_{L_p(0,mes\{E\})}. \tag{3.11}$$

3.1.3 Espaces de Marcinkiewicz (Espaces faibles)

Définition 3.3. *Soient $0 < p \le \infty$, U un ensemble mesurable $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Pour $0 < p < \infty$, on dit que $f \in L_p^\star$* [1] *(espace de **Marcinkiewicz** ou espace faible) si :*

1) *f est mesurable sur U.*

2) $\|f\|^{(1)}_{L_p^\star} = \sup\limits_{\sigma \in [0,\infty)} \sigma(\lambda_f(\sigma))^{\frac{1}{p}} < \infty.$

Dans le cas $p = \infty$, on a : $L_\infty^\star = L_\infty$.

1. L'espace de **Marcinkiewicz** (espace faible) $L_p^\star$ est également désigné par WL_p.

Définition 3.4. *Soit* $\|\cdot\|$ *une application de* X *dans* $\mathbb{R}$ *où* X *un espace vectoriel. On dit que* $\|\cdot\|$ *est une quasi-norme* $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$*, si :*

(i) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta$*,* θ *élément nul de l'espaces de* X.

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$*,* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\forall x \in X$.

(iii) *il existe* $k \geq 1$ *tel que* $\|x+y\| \leq k(\|x\| + \|y\|)$*, pour tout* x *et* y *de* X.

Proposition 3.1. *Pour* $0 < p < \infty$*,* $L_p^{\star}$ *est un espace quasi-normé.*

Définition 3.5. *Soient* $0 < p \leq \infty$*,* $E \in \mathbb{R}^n$*,* E *mesurable on dit que* $f \in L_{p(U)}^{\star}$*, si* f *est mesurable et*

$$\|f\|_{L_p^{\star}(U)}^{(2)} = \sup_{t \in [0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^{\star}(t) = \sup_{t \in [0, mesa)} t^{\frac{1}{p}} f^{\star}(t). \tag{3.12}$$

Lemme 3.1. *Les **définitions** 3.3 et 3.5 sont équivalentes et*

$$\|f\|_{L_p^{\star}(U)}^{(1)} = \|f\|_{L_p^{\star}(U)}^{(2)}. \tag{3.13}$$

Quelques exemples Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq \infty$. Alors,

1)

$$|x|^{\alpha} \in L_p(B(0,r)) \Longleftrightarrow \alpha > -\frac{n}{p},$$

et

$$|x|^{\alpha} \in L_p({}^{c}B(0,r)) \Longleftrightarrow \alpha < -\frac{n}{p},$$

2)

$$|x|^{\alpha} \in WL_p(B(0,r)) \Longleftrightarrow \alpha \geq -\frac{n}{p},$$

et

$$|x|^{\alpha} \in WL_p({}^{c}B(0,r)) \Longleftrightarrow \alpha \leq -\frac{n}{p},$$

3)

$$|x|^{\alpha} \in L_p(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \alpha = -\frac{n}{p},$$

et

$$|x|^{\alpha} \bar{\in} L_p(\mathbb{R}^n), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

3.1.4 Espaces de Lorentz

Définition 3.6. *Pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit l'espace de Lorentz, noté L_{pr}, par :*

1) *si $1 \leq r < \infty$*

$$\|f\|_{L_{pr}(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^\star(t))^r \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} < \infty. \tag{3.14}$$

2) *si $r = \infty$*

$$\|f\|_{L_{p\infty}(U)} = \|f\|^{(2)}_{L_p^\star(U)} = \sup_{t \geq 0}(t^{\frac{1}{p}} f^\star(t)) < \infty. \tag{3.15}$$

Proposition 3.2. *Soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors*

1) $\|f\|_{L_{pp}(0,\infty)} = \|f\|_{L_p(0,\infty)}$,

2) $\|f\|_{L_{p\infty}(U)} = \|f\|^{(2)}_{L_p^\star(U)} = \|f\|^{(1)}_{L_p^\star(U)}$.

Preuve: **1)** Si $r = p$, alors

$$\|f\|_{L_{pp}(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty (f^\star)^p(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|f^\star\|_{L_p(0,\infty)}.$$

D'après le **Théorème**3.1 et **l'égalité**3.9 on obtient :

$$\|f^\star\|_{L_p(0,\infty)} = \left(p\int_0^\infty \sigma^p \lambda_f^\star(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}},$$

alors

$$\left(p\int_0^\infty \sigma^p \lambda_f^\star(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(p\int_0^\infty \sigma^p \lambda_f(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_p(0,\infty)},$$

d'où

$$\|f\|_{L_{pp}(0,\infty)} = \|f\|_{L_p(0,\infty)}.$$

2) Si $r = \infty$, voir la preuve de le **Lemme** précédente (3.13).

□

Remarque 3.3. *En général, les espaces de **Lorentz** sont des espaces qausi-normés mais dans le cas où $p > 1$, il est possible de remplacer la qausi-norme par une norme et donc les L_{pr} deviennent des espaces de **Banach**.*

3.2 Fonction maximale (Opérateur de Hardy-Littlewood)

Définition 3.7. *Soit f une fonction localement intégrable définie sur $\mathbb{R}^n$, Mf est dite fonction maximale si :*

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy. \tag{3.16}$$

Lemme 3.2. *soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^n, \forall \alpha > 0$*
$E_\alpha = \{\alpha x : |g(x)| > \alpha\}$ et g intégrable,alors :

$$\lambda(\alpha) \leq \frac{A}{\alpha}, \tag{3.17}$$

tels que : ($A = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy$ et $\lambda(\alpha)$ désigne la mesure de E_α, appelée distribution de fonction g).

Preuve:

$$\begin{aligned} A = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy \geq \int_{E_\alpha} |g(y)|dy \geq \int_{E_\alpha} \alpha dy \\ \geq \alpha \int_{E_\alpha} dy = \alpha\lambda(\alpha). \end{aligned}$$

□

Lemme 3.3. *Soit $g \in L_p(\Omega), 1 \leq p < \infty$,alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^p dy = -\int_0^\infty \alpha^p d\lambda(\alpha). \tag{3.18}$$

Où $\lambda(\alpha)$ désigne la mesure de E_α comme définie dans le lemme (3.2), et
si $g \in L_\infty(\Omega)$, alors :

$$||g||_{L_\infty(\Omega)} = \inf\{\alpha, \lambda(\alpha) = 0\}. \tag{3.19}$$

Lemme 3.4. *Soit E un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ qui est recouvert par une famille de boule (B_j), alors on peut extraire une sous suite $B_1, B_2, ..., B_k$,*
$(B_k \bigcap B_l = \varnothing$ si $k \neq l$)(finie ou infinie) telle que :

$$\sum_k |B_k| \geq C|E|. \tag{3.20}$$

où C est une constante positive qui dépend seulement de la dimension n,
par exemple : $C = 5^{-n}$.

Théorème 3.3. *[5] soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, alors :*

a) *Si $f \in L_P(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, la fonction Mf est p.p finie .*

b) *Si $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, pour chaque $\alpha > 0$, alors :*

$$|\{x : (Mf)(x) > \alpha\}| \leq \frac{C_1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx, \tag{3.21}$$

où $C_1 = cste$ qui dépend de n .

c) *Si $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ et $(Mf) \in L_p(\mathbb{R}^n)$ alors :*

$$\|Mf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{3.22}$$

où C_p dépendent de p.

Preuve:

b) Montrons que si $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\forall \alpha \geq 0$

$$|\{x : (Mf)(x) > \alpha\}| \leq \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy,$$
$$E_\alpha = \{x : (Mf) > \alpha\}.$$

Soit $x \in E_\alpha$, il existe une boule B_x de sorte que :

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy > \alpha \tag{3.23}$$

c'est à dire que

$$\int_{B(x,r)} |f(y)| dy > \alpha |B_x|$$

$(B_x)_x \in E_\alpha$ forment un recouvrement de E_α, alors d'après le **Lemme**3.4 on peut extraire une sous suite $B_1, B_2, ..., B_k$, telle que :

$$\sum_k |B_k| \geq C|E_\alpha|,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} |f(y)| dy &\geq \int_{\bigcup B_k} |f(y)| dy \\
&= \sum_k \int_{B_k} |f(y)| dy \\
&\geq \sum_k \alpha |B_k| \\
&\geq \alpha C |E_\alpha|,
\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy \geq \alpha C|E_\alpha|$$

d'où

$$\begin{aligned}
|E_\alpha| &\leq \frac{1}{\alpha C}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy \\
&= \frac{C_1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy.
\end{aligned}$$

c) Nous montrons maintenant simultanément **(a)** et **(c)** :

Soit $f_1(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ alors :

(i) $|f(x)| \leq |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2}$.

(ii) $Mf(x) \leq (Mf_1)(x) + \frac{\alpha}{2}$.

Conclusions

$$A = \{x\,:\,(Mf)(x) > \alpha\} \subset \left\{x : (Mf_1)(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}.$$

En effet, si $x \in A$, : alors

$$(Mf)(x) > \alpha$$

et donc

$$(Mf_1)(x) + \frac{\alpha}{2} > \alpha,$$

d'où

$$(Mf_1)(x) > \frac{\alpha}{2}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\lambda(\alpha) &= |\{x : (Mf)(x) > \alpha\}| \\
&\leq \left|\left\{x : (Mf_1)(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right| \\
&\leq \frac{C}{\alpha/2}\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(y)|dy.
\end{aligned}$$

D'après le **Lemme**3.3 on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf)^p dx = -\int_0^\infty \alpha^p d\lambda(\alpha),$$

d'où

$$\|Mf\|^p_{L^p}(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} (Mf)^p dx = -\int_0^\infty \alpha^p d\lambda(\alpha).$$

Après intégration par parties on obtient :

$$
\begin{aligned}
\|Mf\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= -[\alpha^p \lambda(\alpha)]_0^\infty + \int_0^\infty p\alpha^{p-1}\lambda(\alpha)d(\alpha) \\
&= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda(\alpha)d(\alpha)\ (car\ si\ \alpha \to \infty\ alors\ \lambda(\alpha) \to 0) \\
&\leq p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\frac{2C}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(y)|dy\, d(\alpha) \\
&= 2Cp\int_0^\infty \alpha^{p-2}\int_{|f|>\frac{\alpha}{2}} |f(y)|dy\, d(\alpha) \\
&\leq 2Cp\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\int_0^{2|f(y)|} \alpha^{p-2}d(\alpha)\, dy \\
&= \frac{2^pCp}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \\
&= \frac{2^pCp}{p-1}\|f\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
$$

Donc

$$\|Mf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

où

$$C_p = \left(\frac{2^pCp}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

3.3 Espace de Morrey

Définition 3.8. *Les espaces de* ***Morrey*** M_p^λ*, ont été introduits par* ***C.B.Morrey*** *en* ***1938****, sont définis comme suit. Soient* $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, $0 < p \leq \infty$, $f \in M_p^\lambda$ *si* $f \in L_p^{loc}$ *et*

$$\|f\|_{M_p^\lambda} \equiv \|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\lambda}\|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty. \tag{3.24}$$

Autrement dit $f \in M_p^\lambda$ *si* $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ *et il existe* $c > 0$ *(en fonction de* f *)*
telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *et* $r > 0$

$$\|f\|_{L_p(B(x,r))} \leq cr^\lambda.$$

La valeur minimale de c *de cette égalitié est* $\|f\|_{M_p^\lambda}$.

Proposition 3.3.

1) *Si* $\lambda = 0$, *alors*

$$M_p^0 = L_p. \tag{3.25}$$

2) *Si* $\lambda = \frac{n}{p}$, *alors*

$$M_p^{\frac{n}{p}} = L\infty. \tag{3.26}$$

3) *Si* $p = \infty$,*alors* (3.26) *coïncide* (3.25).

Preuve: soit $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$

1) si $\lambda = 0$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{M_p^0(B(x,r))} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^o \|f\|_{L_p(B(x,r))} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} \\
&= \|f\|_{Lp_{(\mathbb{R}^n)}}.
\end{aligned}$$

2) On suppose que $0 < p < \infty$, alors nous avons $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$

$$\begin{aligned}
r^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} &\leq r^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_\infty} |B(x,r)|^{\frac{1}{p}} \\
&= v_n^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_\infty}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \leq v_n^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_\infty}.$$

Par conséquent

$$\|f\|_{M_p^\lambda} \leq v_n^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_\infty}. \qquad (*)$$

Maintenant soit $f \in M_p^\lambda$. Par le théorème de **Lebesgue** sur la différentiation des intégrales ,pour toute $f \in L_p^{loc}$et pour presque tous les $x \in \mathbb{R}^{\ltimes}$ on a

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\|f\|_{L_p(B(x,r))}}{|B(x,r)|^{\frac{1}{p}}} = \left(\lim_{r\to 0^+} \frac{\int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy}{|B(x,r)|} \right)^{\frac{1}{p}} = |f(x)|. \tag{3.27}$$

Nous obtenons que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \lim_{r\to 0^+} \frac{\|f\|_{L_p(B(x,r))}}{|B(x,r)|^{\frac{1}{p}}}\\ &\leq v_n^{\frac{-1}{P}} \sup_{r>0} r^{\frac{-n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))}\\ &\leq v_n^{\frac{-1}{P}} \|f\|_{M_p^{\frac{n}{p}}},\end{aligned}$$

d'où $f \in L_\infty$, et

$$\|f\|_\infty \leq v_n^{\frac{-1}{P}} \|f\|_{M_p^{\frac{n}{p}}}, \qquad (**)$$

donc, d'après $(*)$ et $(**)$ on a

$$M_p^{\frac{n}{p}} = L\infty,$$

et

$$\|f\|_{M_p^{\frac{n}{p}}} = v_n^{\frac{1}{P}} \|f\|_{L_\infty}.$$

Donc $M^{\frac{n}{p}} = L\infty$, est valable si $0 < p \leq \infty$ et $o \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$.

3) Le **cas** $p = \infty$:l'inigalité pour λ est vérifié seulement si $\lambda = 0$ et $M_\infty^0 = L\infty$.

□

Remarque 3.4. *Si $\lambda > \frac{n}{p}$ ou $\lambda < 0$ alors $M_p^\lambda = \ominus$, où $\ominus \equiv \ominus(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble de toutes les fonctions équivalentes à 0 sur $\mathbb{R}^n$.*

Proposition 3.4.

(i) *Pour $0 < p < 1$ l'espace de Morrey M_p^λ est un espace quasi-normé .*

(ii) *Pour $1 \leq p \leq \infty$ l'espace de Morrey M_p^λ est un espace normé.*

Preuve:

1) Pour $0 < p < 1$ on sait que l'espace de **Lebesgue** L_p est un espace quasi- normé c'est-à-dire, pour $f, g \in L_p(B(x,r))$

$$\|f+g\|_{L_p(B(x,r))} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} \left(\|f\|_{L_p(B(x,r))} + \|g\|_{L_p(B(x,r))}\right),$$

en multipliant les deux termes par $r^{-\lambda}$, puis en passant au sup par rapport ou $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on obtient

$$\|f+g\|_{M_p^\lambda} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\|f\|_{M_p^\lambda} + \|g\|_{M_p^\lambda}\right). \tag{3.28}$$

2) Pour $1 \leq p < \infty$ de la même manière on montre que l'espace de **Morrey** M_p^λ est un espace normé.

□

Proposition 3.5.

(1) *Pour $0 < p < 1$ l'espace da* ***Morrey*** *M_p^λ est un quasi-**Banach** .*

(2) *Pour $1 \leq p < \infty$ l'espace de* ***Morrey*** *M_p^λ est un espace de **Banach**.*

Preuve: Soit $f_k \in M_p^\lambda$ une suite de cauchy, $k \in \mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{k,m\to\infty} \|f_k - f_m\|_{M_p^\lambda} = 0.$$

Alors pour $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k, m \in \mathbb{N}$, $k, m \geq k_0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$

$$r^{-\lambda}\|f_k - f_m\|_{L_p(B(x,r))} \leq \|f_k - f_m\|_{M_p^\lambda} < \varepsilon. \tag{3.29}$$

Donc pour $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{k,m\to\infty} \|f_k - f_m\|_{L_p(B(x,r))} = 0$,
et comme l'espace L_p^{loc} est complet, alors il existe une fonction $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L_p(B(x,r))} = 0,$$

par passage á la limite $m \to \infty$ dans (3.29) on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$

$$r^{-\lambda}\|f_k - f\|_{L_p(B(x,r))} < \varepsilon$$

$$et \qquad \|f_k - f\|_{M_p^\lambda} < \varepsilon,$$

d'où

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{M_p^\lambda} = 0.$$

Donc l'espace de **Morrey** M_p^λ est complét pour $0 < p < \infty$. □

Exemple 3.1. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < \lambda < \infty$, alors*

$$|x|^{\alpha} \in M_p^{\lambda} \Longleftrightarrow \alpha = \lambda - \frac{n}{p}, \qquad (*)$$

et

$$\left\| |x|^{\lambda - \frac{n}{p}} \right\|_{M_p^{\lambda}} = \left(\frac{\sigma_n}{\lambda p} \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (a)$$

$$\begin{aligned}
\left\| |y|^{\lambda - \frac{n}{p}} \right\|_{M_p^{\lambda}} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} r^{-\lambda} \left\| |y|^{\lambda - \frac{n}{p}} \right\|_{L_p(B(x,r))} \\
&= \sup_{r>0} r^{-\lambda} \left\| |y|^{\lambda - \frac{n}{p}} \right\|_{L_p(B(0,r))} = \sup_{r>0} r^{-\lambda} \left(\int_{B(0,r)} |y|^{\lambda p - n} dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{r>0} r^{-\lambda} \left(\sigma_n \int_0^r p^{\lambda p - 1} dp \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{\sigma_n}{\lambda p} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.
\end{aligned}$$

Donc

$$|x|^{\alpha} \in M_p^{\lambda} \Longleftrightarrow \alpha = \lambda - \frac{n}{p}.$$

Oú $\sigma_n = n v_n$ est la surface de la sphère unitaire dans $\mathbb{R}^{\ltimes}$.

Exemple 3.2.

1) $|x|^{\alpha} \chi_{B(0,1)}(x) \in M_p^{\lambda} \Longleftrightarrow \alpha \geq \lambda - \frac{n}{p}$. $\qquad (**)$

2) $|x|^{\alpha} \chi_{\complement_{B(0,1)}}(x) \in M_p^{\lambda} \Longleftrightarrow \alpha \leq \lambda - \frac{n}{p}$. $\qquad (***)$
   Oú $\complement_{B(0,1)}$ désigne le complémentaire de $B(0,1)$.

1)

$$\left\| |y^{\alpha}| \chi_{B(0,1)} \right\|_{M_p^{\lambda}} = \sup_{r>0, x\in\mathbb{R}^n} r^{-\lambda} \left\| |y^{\alpha}| \chi_{B(0,1)} \right\|_{L_{pB(x,r)}}$$
$$= \sup_{r>0} r^{-\lambda} \left\| |y^{\alpha}| \chi_{B(0,1)} \right\|_{L_{p(B(o,r))}}$$
$$= \sup_{r>0} r^{-\lambda} \left(\int_{B(0,r)} |y^{\alpha p}| dy \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \sup_{r>0} r^{-\lambda} \left(\sigma_n \int_0^r \rho^{\alpha p} \rho^{n-1} d\rho \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= (\sigma_n)^{\frac{1}{p}} \sup_{0<r<1} r^{\alpha + \frac{n}{p} - \lambda} < \infty.$$
$$\Longleftrightarrow \alpha + \frac{n}{p} - \lambda \geq 0, \quad ou \quad \alpha \geq \lambda - \frac{n}{p}.$$

2) De manière analogue ,on prouve (***).

Exemple 3.3.

$$\|f\|_{M_p^{\lambda}} = max \left\{ \sup_{x\in\mathbb{R}^n, 0<r<1} r^{-\lambda} \|f\|_{L_{p(B(x,r))}}, \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>1} r^{-\lambda} \|f\|_{L_{p(B(x,r))}} \right\}$$
$$\leq max \left\{ \sup_{0<r<1} r^{-\lambda} \left(\int_{B(x,r)} \left(\inf_{e} \sup_{B(x,r)/e} |f| \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \left(\sup_{r>1} r^{-\lambda} \right) \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\}$$
$$= max \left\{ \sup_{0<r<1} r^{-\lambda} \left(\int_{B(x,r)} dx \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{\infty(B(x,r))}}, \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>1} r^{-\lambda} \|f\|_{L_{p(B(x,r))}} \right\}$$
$$\leq max \left\{ \sup_{0<r<1} r^{-\lambda} (r^n v_n)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{\infty(B(x,r))}}, \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>1} r^{-\lambda} \|f\|_{L_{p(B(x,r))}} \right\}$$
$$\leq max \left\{ v_n^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{0<r<1} r^{\frac{n}{p} - \lambda} \right) \|f\|_{L_{\infty}(\mathbb{R}^n)}, \left(\sup_{r>1} r^{-\lambda} \right) \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\}$$
$$= max \left\{ v_n^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{\infty}}, \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\}.$$

Alors on peut conclure que

$$\|f\|_{M_p^{\lambda}} \leq max \left\{ v_n^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{\infty}}, \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \right\},$$

d'oú

$$L_{\infty} \cap L_p \subset M_p^{\lambda}.$$

Si $f \in L_p$, alors $f \in M_p^\lambda$ si et seulement si

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n, 0<r<1} r^{-\lambda}\|f\|_{L_{p(B(x,r))}} < \infty.$$

On a dans l'exemple 3.1 que $|x|^{\lambda-\frac{n}{p}} \in M_p^\lambda$, mais on montre facilement que $|x|^{\lambda-\frac{n}{p}} \notin L_p$.
,d'une manière générale $M_p^\lambda \not\subset L_p$,
Soit $p < 0 < \infty$. Contrairement au cas des espaces de Lebesgue $L_p = M_p^0$, pour $0 < \lambda < \frac{n}{p}$ le sous ensemble $L_\infty^{loc} \cap M_p^\lambda$ n'est pas dense dans M_p^λ.

En particulier,la fonction $|x|^{\lambda-\frac{n}{p}}$ ne pas être approximée par les fonctions de L_∞^{loc} avec une précision arbitraire. De plus la soustraction de f de toute fonction $g \in L_\infty^{loc}$ ne peut diminuer la norme de ces fonctions dans M_p^λ c'est-à-dire pour toute fonction $g \in L_\infty^{loc}$, on a :

$$\left\||y|^{\lambda-\frac{n}{p}} - g(y)\right\|_{M_p^\lambda} \geq \left\||y|^{\lambda-\frac{n}{p}}\right\|_{M_p^\lambda}. \tag{3.30}$$

Soit d'abord $1 \leq p < \infty$. Alors on applique l'inégalité triangulaire inverse (a) et pour tout $r > 0$

$$\begin{aligned} r^{-\lambda}\left\||y|^{\lambda-\frac{n}{p}} - g(y)\right\|_{L_p(B(0,r))} &\geq \left\||y|^{\lambda-\frac{n}{p}}\right\|_{L_p(B(0,r))} - r^{-\lambda}\|g\|_{L_p(B(0,r))} \\ &\geq \left(\frac{\sigma_n}{\lambda p}\right)^{\frac{1}{p}} - v_n^{\frac{1}{p}} r^{\frac{n}{p}-\lambda}\|g\|_{L_\infty(B(0,r))}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Alors $\frac{n}{p} - \lambda > 0$ il s'ensuit que $\lim_{r\to 0^+} r^{\frac{n}{p}-\lambda}\|g\|_{L_\infty(B(0,r))} = 0$, donc

$$\begin{aligned} \left\||y|^{\lambda-\frac{n}{p}} - g(y)\right\|_{M_p^\lambda} &\geq \left\||y|^{\lambda-\frac{n}{p}} - g(y)\right\|_{L_p(B(0,r))} \\ &= \left(\frac{\sigma_n}{\lambda p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left\||y|^{\lambda-\frac{n}{p}}\right\|_{M_p^\lambda}. \end{aligned}$$

Si $0 < p < 1$,alors l'inégalité inverse implique que pour tout $\gamma > 1$ et pour tout $f, g \in L_p(B(x,r))$ appliquée a l'inégalité

$$\|f+g\|_{L_p(B(x,r))} \leq \gamma\|f\|_{L_p(B(x,r))} + C_p(\gamma)\|g\|_{L_p(B(x,r))},$$

vérifie $\gamma > 1$ et $c_p(\gamma) = \left(1-\gamma^{p'}\right)^{\frac{1}{p}}$,

$$\|f-g\|_{L_p(B(x,r))} \geq \frac{1}{\gamma}\Big(\|f\|_{L_p(B(x,r))} - C_p(\gamma)\|g\|_{L_p(B(x,r))}\Big), \tag{3.32}$$

pour tout $g \in L_{\infty}^{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$r^{-\lambda} \left\| |y|^{\lambda - \frac{n}{p}} - g(y) \right\|_{L_p(B(x,r))} \geq \left\| |y|^{\lambda - n} \right\|_{L_p(B(0,r))} - \frac{C(\gamma)}{\gamma} \|g\|_{L_p(B(0,r))}.$$

Par conséquent ,comme dans le cas ci-dessus ,nous obtenons cela pour quel que soit $\gamma > 1$

$$\left\| |y|^{\lambda - \frac{n}{p}} - g(y) \right\|_{M_p^\lambda} \geq \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\sigma_n}{\lambda p} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Un argument similaire montre que pour $0 < \lambda < \frac{n}{p}$ le sous ensemble $L_p \cap M_p^\lambda$ et aussi n'est pas dense dans M_p^λ,(en particulier le sous ensemble de toutes les fonctions $f \in M_p^\lambda$ avec support compact n' pas dense dans M_p^λ, en particulier la fonction $|x|^{\lambda - \frac{n}{p}}$ ne peut pas être approchée par une fonction dans L_p avec une précision arbitraire ,de plus la soustraction de $|x|^{\lambda - \frac{n}{p}}$ de toute fonction $g \in L_p$ ne peut diminuer la norme de cette fonction en M_p^λ c-à-d pour $g \in L_p$ si $1 \leq p < \infty$

$$\left\| |y|^{\lambda - \frac{n}{p}} - g(y) \right\|_{L_p(B(0,r))} = \left(\frac{\sigma_n}{\lambda p} \right)^{\frac{1}{p}} - r^{-\lambda} \|g\|_{L_p},$$

donc

$$\begin{aligned} \left\| |y|^{\lambda - \frac{n}{p}} - g(y) \right\|_{M_p^\lambda} &\geq \lim_{r \to \infty} \left\| |y|^{\lambda - \frac{n}{p}} - g(y) \right\|_{L_p(B(0,r))} \\ &= \left(\frac{\sigma_n}{\lambda p} \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| |y|^{\lambda - \frac{n}{p}} \right\|_{M_p^\lambda}. \end{aligned}$$

La propriété de l'invariance de la translation est valable aussi dans l'espace M_p^λ. En effet soit $h \in \mathbb{R}^n, 0 < \lambda < \frac{n}{p}$,alors

$$\begin{aligned} \|f(y+h)\|_{M_p^\lambda} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{r>0} r^{-\lambda} \|f(y+h)\|_{L_p(B(x,r))} \text{ par le changement de variable } z = x+h, \text{ on obtient} \\ &= \sup_{X \in \mathbb{R}^n} \sup_{r>0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B(y,r))} = \|f\|_{M_p^\lambda}. \end{aligned}$$

On dite une autre propriété de espace M_p^λ :

$\forall \lambda, \mu$ tels que $0 \leq \lambda, \ \ \mu \leq \frac{n}{p}, \ \ \mu \neq \lambda$, alors

$$M_p^\mu \not\subset M_p^\lambda.$$

Donc l'espace ne possède pas la propriété de monotonie par rapport à λ.

- On désigne par W l'espace faible de Lebesgue.
- On désigne par WM_p^λ l'espace faible de Morrey.

1) $f \in WM_p^\lambda$ si $f \in WL_p^{loc}$ et $\|f\|_{WM_p^\lambda} \equiv \|f\|_{WM_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} r^{-\lambda}\|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty.$

2) $f \in WLM_p^\lambda \equiv \|f\|_{WLM_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup\limits_{r>0} r^{-\lambda}\|f\|_{WL_pB(0,r)} < \infty.$

Ici $0 < p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$ pour WM_p^λ, $\lambda > 0$, pour WLM_p^λ oú W(weak) est l'espace faible ou espaces de Marcinkevich.

3.3.1 L'espace local de Morrey

Par fois dans les problèmes relatifs à la théorie d'interpolation ,il est utile de considérer les espaces dits espaces locaux de Morrey .

Définition 3.9. *Soient* $0 < p \leq \infty$, $\lambda > 0$, *on dit que* $f \in LM_p^\lambda(x)$, *si* $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ *tel que*

$$\sup_{r>0} r^{-\lambda}\|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty,$$

pour x fixé , $x \in \mathbb{R}^n$, *dans le cas le comportement de l'expression* $\|f\|_{L_p(B(x,r))}$ *pour petit* $r > 0$ *est important seulement au voisinage de ce point.*

Proposition 3.6.

1) pour $\lambda = 0$, *alors* $LM_p^0 = L_p$.

2) pour $\lambda < 0$ *alors* $LM_p^\lambda = \emptyset$.

3) pour $0 < p \leq \infty, \lambda > 0$ *, la quasi -norme* $\|f\|_{LM_p^\lambda}$ *est équivalente à la quasi norme*

$$\|f\|_{B_p^\lambda} = \sup_{\lambda\in Z} 2^{-K\lambda}\|f\chi_k\|_{LP}.$$

3.3.2 L'espace local de type Morrey

Définition 3.10. *Soit* $0 \leq r$, $\theta < 1$, *et soit* w *une fonction Lebesgue mesurable non-négative sur* $(0,\infty)$ *pas équivalente à* 0. *Nous désignons par* $LM_{p\theta,\omega(.)}$ *les espaces locaux de type Morrey, les espaces de toutes les fonctions Lebesgue mesurables dans* $\mathbb{R}^n$ *avec une quasi norme finie,*

$$\|f\|_{LM_{p\theta,w(.)}} \equiv \|f\|_{M_{p\theta,w(.)}(\mathbb{R}^n)} = \|w(r)\|f\|_{L_p(B(o,r))}\|_{L_{\theta(0,\infty)}}.$$

Définition 3.11. *Soit $\theta \leq \infty$, on désigne par Ω_θ l'ensemble de toutes les fonctions w non négatives, mesurables sur $(0,\infty)$, et non équivalentes à 0, et telles que pour certains $t>0$*

$$\|w(r)\|_{L_\theta(t,\infty)} < \infty.$$

Théorème 3.4. *pour $p \leq \theta$,*

$$\begin{aligned}
\|f\|_{LM_{p,\theta}} = \left(\int_0^\infty \left(\frac{\|f\|_{L_p(B(0,r))}}{r^\lambda}\right)^\theta \frac{dr}{r}\right)^{\frac{1}{\theta}} &= \left\| \|r^{-\lambda-\frac{1}{\theta}}|f(y)|\chi_{B(0,r)}(y)\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} \right\|_{L_\theta(0,\infty)} \\
&\leq \left\| \|r^{-\lambda-\frac{1}{\theta}}|f(y)|\chi_{B(0,\infty)}(y)\|_{L_{\theta(0,\infty)}} \right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} \\
&= \left\| |f(y)| \|r^{-\lambda-\frac{1}{\theta}}\|_{L_\theta(y,\infty)} \right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} \\
&= (\lambda\theta)^{-\frac{1}{\theta}} \left\| f(y)|y|^{-\lambda} \right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}},
\end{aligned}$$

de même ,pour $\theta \leq p$ alors,

$$\|f\|_{LM_{p,\theta}} \geq (\lambda\theta)^{-\frac{1}{\theta}} \left\| f(y)|y|^{-\lambda} \right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}}.$$

En particulier, pour $p=\theta$

$$\|f\|_{LM_{p,\theta}} = (\lambda\theta)^{-\frac{1}{\theta}} \left\| f(y)|y|^{-\lambda} \right\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}}. \tag{3.33}$$

Proposition 3.7. *Soit $0<p,\theta \leq \infty$ et soit w une fonction mesurable non négative sur $(0,\infty)$, qui n'est pas équivalente à 0, alors l'espace $LM_{p\theta,w(\cdot)}$ est non trivial si et seulement si $w \in \Omega_\theta$, et si $w \in \Omega_\theta$ $f \in L_{p(\mathbb{R}^n)}$ et $f=0$ dans $B(0,t)$, pour certains $t>r$,alors*

$$\|f\|_{LM_{p,\theta,w(.)}} = \left\| w(r)\|f\|_{L_{p(B(0,r))}} \right\|_{L_{\theta(t,\infty)}} \leq \|f\|_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} \|w(r)\|_{L_\theta(t,\infty)} < \infty. \tag{3.34}$$

Preuve: Voir [4]. □

Proposition 3.8.

(1) *Si $1 \leq p$,$\theta \leq \infty$, alors l'espace $LM_{p\theta,w(.)}$ est un espace normé.*

(2) *Si $0<p<1$, $\theta \leq \infty$, alors l'espace $LM_{p\theta,w(.)}$ est un espace quasi-normé.*

Proposition 3.9. *Soit $0<p<\infty$, $0<\theta \leq \infty$ et soit w une fonction* ***Lebesgue*** *mesurable non-négative sur $(0,\infty)$.*

(i) *Si* $1 \leq p$ *alors l'espace local de type-**Morrey*** $LM_{p\theta,w(\cdot)}$ *est un espace de **Banach**.*

(ii) *Si* $0 < p < 1$ *alors l'espace local de type-**Morrey*** $LM_{p,\theta,w(\cdot)}$ *est un espace quasi- **Banach**.*

Preuve: Il faut noter que pour tout $0 < p$,$\theta \leq \infty$ et $f, g \in L_p(B(x,r))$,$x \in \mathbb{R}^n, r > 0$,

$$\begin{aligned}
&\left\| w(r) \|f + g\|_{L_{p(B(x,r))}} \right\|_{L_{\theta(0,\infty)}} \\
&\leq 2^{(\frac{1}{p}-1)_+} \left(\left\| w(r)\|f\|_{L_{p(B(x,r))}} + w(r)\|g\|_{L_{p(B(x,r))}} \right\|_{L_{\theta(0,\infty)}} \right) \\
&\leq 2^{(\frac{1}{p}-1)_+} 2^{(\frac{1}{\theta}-1)_+} \left(\left\| w(r)\|f\|_{L_{p(B(x,r))}} \right\|_{L_{\theta(0,\infty)}} + \left\| w(r)\|g\|_{L_{p(B(x,r))}} \right\|_{L_{\theta(0,\infty)}} \right),
\end{aligned}$$

oú

$\left(\frac{1}{p} - 1\right)+ = 0$ si $p \geq 1$ et $\left(\frac{1}{p} - 1\right)+ = \frac{1}{p} - 1$ si $0 < p < 1$.

$\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)+ = 0$ si $\theta \geq 1$ et $\left(\frac{1}{\theta} - 1\right)+ = \frac{1}{\theta} - 1$ si $0 < \theta < 1$.

Donc pour tout $f, g \in LM_{p\theta,w(\cdot)}$,$0 < p < 1, 0 < \theta < 1$, on a :

$$\|f + g\|_{LM_{p\theta,w(\cdot)}} \leq 2^{(\frac{1}{p}-1)_+ + (\frac{1}{\theta}-1)_+} \left(\|f\|_{LM_{p\theta,w(\cdot)}} + \|g\|_{LM_{p\theta,w(\cdot)}} \right). \tag{b}$$

Pour $1 \leq p$,$\theta \leq \infty$,et $f, g \in L_{pB(x,r)}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\| w(r)\|f + g\|_{L_{p(B(x,r))}} \right\|_{L_{\theta(0,\infty)}} &\leq \left\| w(r)\|f\|_{L_{p(B(x,r))}} + w(r)\|g\|_{L_{p(B(x,r))}} \right\|_{L_{\theta(0,\infty)}} \\
&\leq \left\| w(r)\|f\|_{L_{p(B(x,r))}} \right\|_{L_{\theta(0,\infty)}} + \left\| w(r)\|g\|_{L_{p(B(x,r))}} \right\|_{L_{\theta(0,\infty)}}.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $f, g \in LM_{p,\theta,w(\cdot)}$,

$$\|f + g\|_{LM_{p\theta,w(\cdot)}} \leq \|f\|_{LM_{p\theta,w(\cdot)}} + \|g\|_{LM_{p\theta,w(\cdot)}}. \tag{c}$$

On conclue que $LM_{p,\theta,w(\cdot)}$ est un espace normé si $p, \theta \geq 1$ et quasi normé si $0 < p < 1$, $0 < \theta < 1$.

Pour la complétude voir la preuve dans [4]. □

3.3.3 L'espace global de type-Morrey

Définition 3.12. *Soit* $0 < p < \infty, 0 < \theta \leq \infty$ *et soit* w *une fonction **Lebesgue** mesurable non-négative sur* $(0, \infty)$ *non équivalente à* 0*, l'espace global de type-**Morrey*** $GM_{p\theta,w(\cdot)}$ *est défini* *comme suit : pour toute fonction* $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ *avec une quasi norme,*

$$\|f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \|f(x+\cdot)\|_{LM_{p\theta,w(\cdot)}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \Big\| w(r)\|f\|_{L_{p(B(x,r))}} \Big\|_{L_{\theta(0,\infty)}} < \infty.$$

Définition 3.13. *soit* $0 < p,\ \theta \leq \infty$*, on désigne par* $\Omega_{p,\theta}$ *l'ensemble de toutes les fonctions* w *non négatives, mesurables sur* $(0,\infty)$*, et non équivalentes à 0, et telles que pour tout* $t > 0$

$$\|w(r)r^{\frac{n}{p}}\|_{L_{\theta}(0,t)} < \infty.$$

Lemme 3.5. *Soit* $0 < p\ ,\theta \leq \infty$*, et* w *est une fonction non négative **Lebesgue** mesurable sur* $(0,\infty)$*, qui n' est pas équivalente à 0, alors*

$$GM_{p\theta,w(\cdot)} \subset L_p^{loc}(\mathbb{R}^n).$$

De plus, pour tous $r > 0$*, quelque soit* $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $\forall f \in GM_{p\theta,w(\cdot)}$*,*

$$\|f\|_{L_{p(B(x,r))}} \leq \|f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}},$$

Preuve: Comme w n'est pas équivalente à 0, alors il existe $\rho > 0$ tel que $\|w\|_{L_{\theta}(\rho,\infty)} > 0$, donc pour $\forall f \in GM_{\rho\theta,w(\cdot)}$ et pour $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{GM_{p,\theta,w(\cdot)}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \Big\| w(r)\|f\|_{L_p(B(x,r))} \Big\|_{L_{\theta}(0,\infty)} \\
&\geq \Big\| w(r)\|f\|_{L_{\rho}B(x,r))} \Big\|_{L_{\theta}(\rho,\infty)} \\
&\geq \|f\|_{L_{\rho}(B(x,\rho))}\|w\|_{L_{\theta}(\rho,\infty)}.
\end{aligned}$$

D'où pour quelque soit $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|f\|_{L_p(B(x,\rho))} \leq \|w\|^{-1}_{L_{\theta}(\rho,\infty)}\|f\|_{GM_{\rho,\theta,w(\cdot)}}.$$

□

Proposition 3.10.

(1) *Si* $1 \leq p, \theta \leq \infty$*, alors l'espace* $GM_{p\theta,w(\cdot)}$ *est un espace normé.*

(2) *Si* $0 < p < 1,\ \ \theta \leq \infty$*, alors l'espace* $GM_{p,\theta,w(\cdot)}$ *est un espace quasi normé.*

Proposition 3.11. *soit $0 < p < \infty$, $0 < \theta \le \infty$ et soit w une fonction* ***Lebesgue*** *mesurable non-négative sur* $(0,\infty)$.

(i) *Si $1 \le p$ alors l'espace global de type-**Morrey** $GM_{p\theta,w(\cdot)}$ est un espace de **Banach**.*

(ii) *Si $0 < p < 1$ alors l'espace global de type-**Morrey** $GM_{p\theta,w(\cdot)}$ est un quasi **Banach**.*

Preuve: Supposons que $f_k \in GM_{p\theta,w(\cdot)}$, $k \in \mathbb{N}$ et $w \in \Omega_{p,\theta}$ et

$$\lim_{k,m\to\infty} \|f_k - f_m\|_{GM_{p\theta,w(.)}} = 0.$$

Alors pour quelque $\varepsilon > 0$ il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k,m \in \mathbb{N}$, $k,m > k_0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\left\| w(r)\|f_k - f_m\|_{L_p(B(x,r))} \right\|_{L_\theta(0,\infty)} < \varepsilon,$$

d'où

$$\left\| w(r)\|f_k - f_m\|_{L_p(B(x,r))} \right\|_{L_{\theta(\rho,R)}} < \varepsilon, \tag{3.35}$$

pour tout $0 < \rho < R < \infty$.

Alors la condition $w \in \Omega_{p\theta}$ implique que $0 < \|w\|_{L_{\theta(\rho,R)}} < \infty$ pour tous $0 < a < R < \infty$, si $a < \infty$ et pour tous $0 < \rho < R < \infty$ si $a = +\infty$ définie par

$$a = \inf\{t > 0 : w \text{ est equivalente à } 0 \text{ sur } (t,\infty)\}.$$

Donc

$$\varepsilon > \left\| w(r)\|f_k - f_m\|_{L_{p(B(x,r))}} \right\|_{L_{\theta(\rho,R)}} \ge \|f_k - f_m\|_{L_{p(B(x,p))}} \|w\|_{L_{\theta(\rho,R)}},$$

qui implique que

$$\lim_{k,m\to\infty} \|f_k - f_m\|_{L_{p(B(x,p))}} = 0,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $0 < p < \infty$ en vertu de la complétude de l'espace L_p, on a :

il existe $f \in L_p^{loc}$ tel que $f_k \to f$ en L_p^{loc} comme $k \to \infty$,

Cela implique en particulier, qu 'étant donné

$x \in R^n$,et $0 < R < \infty$ la suite $\|f_K\|_{Lp(B(x,R))}$ est bornée : pour quelque $M = M(x,R) > 0$, $\|f_K\|_{Lp(B(x,R))} \le M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc pour tout $\rho < r < R$

$$\begin{aligned} \|f_k - f_m\|_{L_{p(B(x,r))}} &\le 2^{(\frac{1}{p}-1)} \left(\|f_k\|_{L_{p(B(x,R))}} + \|f_m\|_{L_{p(B(x,R))}} \right) \\ &\le 2^{\frac{1}{p}} M, \end{aligned}$$

et

$$\left\| w(r) 2^{\frac{1}{p}} M \right\|_{L\theta(\rho,\infty)} < \infty.$$

Par passage à la limite dans (3.35) comme $m \to \infty$ et en appliquant le théorème de la **convergence dominée**, on obtient que

$$\left\| w(r) \|f_k - f\|_{L_{p(B(x,r))}} \right\|_{L_{\theta(\rho,R)}} \leq \varepsilon,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $0 < \rho < R < \infty$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$

$$\|f_k - f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{0<p\mathbb{R}<\infty} \left\| w(r) \|f_k - f\|_{L_{p(B(x,r))}} \right\|_{L_{\theta(\rho,R)}} \leq \varepsilon,$$

ce qui implique que $f \in GM_{p,\theta,w(\cdot)}$ et $f_k \to f$ dans $GM_{p\theta,w(\cdot)}$.

Donc l'espace $GM_{p\theta,w(\cdot)}$ est complet . □

3.3.4 Conditions de coïncidence et de non trivialité

Lemme 3.6. *Soit $0 < p$, $\theta \leq \infty$ et $w_1, w_2 \in \Omega_\theta$. Alors*

$$LM_{p\theta,w_1(\cdot)} \hookrightarrow LM_{p\theta,w_2(\cdot)} \Longleftrightarrow \|w_2\|_{L_{\theta(t,\infty)}} \lesssim \|w_1\|_{L_{\theta(t,\infty)}},$$

quelque soit $t \in (0, \infty)$ et

$$LM_{p\theta,w_1(\cdot)} = LM_{p\theta,w_2(\cdot)} \Longleftrightarrow \|w_1\|_{L_{\theta(t,\infty)}} \approx \|w_2\|_{L_{\theta(t,\infty)}},$$

quelque soit $t \in (0, \infty)$.

On a la même proposition si $w_1, w_2 \in \Omega_{p\theta}$et l'espace $LM_{p\theta,w_1(\cdot)}$ et l'espace $LM_{p\theta,w_2(\cdot)}$ sont remplacés respectivement par les l'espaces $GM_{p\theta,w_1(\cdot)}$, $GM_{p\theta,w_2(\cdot)}$.

Pour le preuve voir [4].

Remarque 3.5. *Pour une fonctions mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction v non négative et mesurable sur Ω. Soit $L_{p,v(\cdot)}$ pondéré de toutes les fonctions f mesurables sur Ω pour les quelles*

$$\|f\|_{L_{p,v(\cdot)}(\Omega)} = \|vf\|_{L_p(\Omega)} < \infty.$$

De plus , soit

$$\|f\|_{L_{p,v(\cdot)}} \equiv \|f\|_{L_{p,v(\cdot)}}(\mathbb{R}^n),$$

et

$$\|f\|_{L_{p,v(\cdot)}} \equiv \|f\|_{L_{p,v(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

Rappelons que $L_{p,v_1} \hookrightarrow L_{p,v_2(\cdot)}$ *si seulement si ,pour certains* $C > 0, v_2(x) \leq C v_1(x)$ *pour la plupart des* $x \in \mathbb{R}^n$. *Dans le cas d'espace de* ***Morrey*** *-type locaux la condition*
$\|w_2\|_{L_{\theta(t,\infty)}} \lesssim \|w_1\|_{L_{\theta(t,\infty)}}$ *quelque soit* x *sur* $(0,\infty)$ *car la définition de ces espaces contient la fonction* $\|f\|_{L_{(B(o,r))}}$ *qui n'est pas décroissante.*

Remarque 3.6. *On peut facilement dire que* $r^{-\lambda-\frac{1}{\theta}} \in \Omega_\theta$ *si et seulement si* $\lambda > 0$ *pour* $\theta < \infty$ *et* $\lambda \geq 0$ *pour* $\theta = \infty$; $r^{-\lambda-\frac{1}{\theta}} \in \Omega_{p\theta}$ *si seulement si* $0 < \lambda < \frac{n}{p}$ *pour* $\theta < \infty$ *et* $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$ *pour* $\theta = \infty$.

Cela implique que l'espace $LM^\lambda_{p\theta}$ *n'est pas trivial si seulement si*

$$\lambda > 0 \ \ si \ \ 0 < \theta < \infty; \qquad \lambda > 0 \ \ si \ \ \theta = \infty, \tag{3.36}$$

et l'espace $GM^\lambda_{p\theta}$ *n'est pas trivial si et seulement si*

$$0 < \lambda < \frac{n}{p} \ \ si \ \ 0 < \theta < \infty; \qquad 0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p} \ \ si \ \ \theta = \infty. \tag{3.37}$$

Exemple 3.4. *Soit* $0 < P$, $\theta \leq \infty$. *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et la condition* (3.36) *est satisfaite,alors*

$$|x|^\alpha \in LM^\lambda_{p\theta} \Longleftrightarrow \theta = \infty \ \ et \ \ \alpha = \lambda - \frac{n}{p}, \tag{3.38}$$

$$|x|^\alpha \chi_{B(0,1)}(x) \in LM^\lambda_{p\theta} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha > \lambda - \frac{n}{p} & si \quad \theta < \infty, \\ \alpha \geq \lambda - \frac{n}{p} & si \quad \theta = \infty, \end{cases} \tag{3.39}$$

et

$$|x|^\alpha \chi_{\complement B(0,1)}(x) \in LM^\lambda_{p\theta} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha < \lambda - \frac{n}{p} & si \quad \theta < \infty, \\ \alpha \leq \lambda - \frac{n}{p} & si \quad \theta = \infty. \end{cases} \tag{3.40}$$

Si la condition (3.37) *est satisfaite, les énoncés* (3.38) -(3.40) *sont également valables avec* $LM^\lambda_{p\theta}$ *remplacé par* $GM^\lambda_{p\theta}$.

3.4 L'opérateur H_α et les espaces LM et GM

On donne quelques résultats sans preuve concernant l'opérateur H_α .

Définition 3.14. *Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, soit $B(x,r)$ la boule ouverte centrée en x de rayon r et $|B(x,r)|$ sa mesure de* **Lebesgue**. *Nous considérons , pour $-\infty < \alpha < +\infty$ l'opérateur de* **Hardy** *$H_\alpha \equiv H_{\alpha,n}$ défini comme suit $f \in \mathbb{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ par*

$$(H_\alpha f)(x) = \frac{1}{|B(0,|x|)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(o,|x|)} f(y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Lemme 3.7. *Soit $1 \leq p_1 \leq \infty$, $0 < p_2$, $\theta_1, \theta_2 \leq \infty$, $w_1 \in \Omega_{\theta_1}$, et $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$. On suppose que les conditions (4.3), et (4.5) dans [9] sont satisfaites.*
Si $LM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}$ est continuellement injecté dans$LM_{p_2\theta_2,v_2(\cdot)}$ brièvement

$$LM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)} \hookrightarrow LM_{p_2\theta_2,v_2(\cdot)} \tag{3.41}$$

où

$$v_n(r) = w_2(r) r^{\alpha - n(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2})}. \tag{3.42}$$

Alors l'opérateur H_α est borné de $LM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}$ à $LM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}$.
De plus, si la fonction $w_2(r) r^{\frac{n}{p_2}}$ est croissante, alors l'opérateur H_α est borné de $LM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}$ vers $GM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}$ avec $w_2 \in \Omega_{p_2\theta_2}$, donc aussi de $GM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}$ vers $GM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}$. (Dans le dernier cas, il est également supposé que $w_1 \in \Omega_{p_1\theta_1}$).

Théorème 3.5. *Soit $1 \leq p_1 < \infty$, $0 < p_2$, $\theta_1, \theta_2 \leq \infty$.*
Alors

1) *pour $w_1 \in \Omega_{\theta_1}$ et $w_2 \in \Omega_{\theta_2}$ et la condition (5.13) (voir [9]) pour $\varepsilon = 0$ et pour tout $\gamma > 1$ si $p_1 = 1$, et pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\gamma > 1$ si $p_1 > 1$ est nécessaire pour que l'opérateur H_α de $LM_{p_1\theta_2,w(\cdot)}$ vers $LM_{p_1\theta_2,w(\cdot)}$ soit borné.*

2) *pour $w_1 \in \Omega_{p_1\theta_1}$ et $w_2 \in \Omega_{p_2\theta_2}$ la condition : pour $\varepsilon = 0$ et pour tout $\gamma > 1$ si $p_1 = 1$, et pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\gamma > 1$ si $p_1 > 1$*

$$\left\| \frac{t^{\alpha - \frac{n}{p_1}} \left\| w_2(r) r^{\frac{n}{p}} \right\|_{L_{\theta_2(0,\Upsilon t)}} + t^{\varepsilon} \|v(r) r^{-\varepsilon}\|_{L_{\theta_2(\Upsilon t,\infty)}}}{t^{-\frac{n}{p_1}} \left\| w_1(r) r^{\frac{n}{p_1}} \right\|_{L_{\theta_1(0,t)}} + \|w_1(r)\|_{L_{\theta_1(t,\infty)}}} \right\|_{L_{\infty(0,\infty)}} < \infty, \tag{3.43}$$

est nécessaire pour que l'opérateur H_α de $GM_{p_1\theta_2,w(\cdot)}$ vers $GM_{p_1\theta_2,w(\cdot)}$ soit borné.

CONCLUSION

Ce travail est considère comme une introduction aux espaces de **Morrey** qui sont importants en tant que notions théoriques et en tant qu' applications dans différents domaines de mathématiques. Récemment plusieurs travaux concernant ces espaces sont apparus où il est établi et prouvé que les opérateurs du types **Hardy, de Riesz** et d'autres sont bornés dans ces espaces. Il serait interessant par exemple d'appliquer ces récents résultats aux **E.D.P.**

Bibliographie

[1] Adams. R. A , Sobolev spaces. Academic Press, Inc, Boston, 1978.

[2] Brezis.H, Analyse fonctionnelle théorie et applications. Édition Masson, 1983.

[3] Burenkov.V.I, Functional spaces main integral inequalities. Masson, 1989.

[4] .Burenkov. V.I. A.Gogatishvili,V.S.Guliyev ;R.Mustaev,Boundedness of the fractional maximal in local Morrey-type space .Complex Analysis and Elliptic Equation,55,no.8-10(2010),739 - 758.

[5] Hardy,G.H.,Littlewood ,J.E.,Pólya,G, :Inequalities,2nd edn.Cambridge University Press ,Cambridge(1967).

[6] Kufner.A .L.Maligranda,and L.E. Persson,The Hardy inequality-About its history and some related resultas, research report ,Lulea University of Technology ,Lulea,2006.

[7] Kolmogorov.A, Fomine.S, Élément de la thórie des fonctions et d'analyse fonctionnelle. 2^{me} édition. Édition Mir. Moscou, 1973.

[8] Lieb.E, Loss.M, Analyses. Americain Mathematical Society volume 14. 2000, Primary 28-1, 42-01, 46- 49-01.

[9] V.I.Burenkov, P.Jain, T.v.Tararykova, On boundeness of the Hardy operator in Morrey-type spaces. ,Eurasian Math. J, 2011, Volume 2, Number 1, 52-80.