**R**épublique **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulair
**M**inistère de l'**E**nseignement **S**upérieur et de
la **R**echerche **S**cientifique
**U**niversité Ibn Khaldoun – Tiaret –

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département des MATHEMATIQUES

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

**DOMAINE** : Mathématiques et Informatique

**FILIERE** : Mathématiques

**SPECIALITE** : Analyse fonctionnelle et Applications

**Présenté par** :

ADDANE SOURIA

BAKHTI DJAMILA

BOULEGHMANE ZAHIA

**SUJET DU MEMOIRE** :

# *Résolution d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants avec la transformation de Fourier*

**S**outenu le 07/10/2020 Devant Le Jury Composé de :

| | | |
|---|---|---|
| **M** : L. GUEDDA | Pr. | Président |
| **Mlle** : O. ELONG | M.C.B | Encadreur |
| **M** : K. MAAZOUZ | M.C.B | Examinateur |

**Année Universitaire : 2019/2020**

# Remerciements


- *Nous en premier lieu remercions notre dieu **ALLAH** qui nous a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.*

- *Nous tenons à remercier tout d'abord notre promotrice **ELONG OUISSAM** pour nous avoir proposé le thème de ce mémoire et nous avoir dirigé tout le long de notre travail, ses critiques et ses conseils nous ont été précieux.*

- *Nous remercions également Monsieur **GUEDDA LAHCENE** qui a accepté de présider le jury.*

- *Nous remercions également Monsieur **MAAZOUZ KADA** de nous avoir fait l'honneur d'être membre de jury et d'avoir accepté d'examiner notre travail.*

- *Et enfin, nous adressons nos sincères remerciements à nos parents, nos frères et sœurs, nos amis et à tous qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.*

***MERCI.***

# Table des matières

# Notations générales

➢ $\mathbb{R}^n$ est l'espace euclidien de dimension n.

➢ $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$.

➢ Pour $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x'_{n-1})$; $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, \xi \rangle = x_1\xi_1 + \cdots x_n\xi_n$, le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

➢ $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, est la longueur de $\alpha$.

➢ $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

➢ $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial_{x_j}}$.

➢ $D_{x_j} = -i\partial_{x_j}$.

➢ $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$.

➢ $L^p(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ f$ est mesurable et $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}, 0 < p < \infty$.

➢ $L^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ f$ est mesurable et $\exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M$ p.p. $x \in \mathbb{R}^n\}$.

➢ $L^1_{loc}$=$\{f$ mesurable sur $\Omega$ telle que $f \in L^1(K)$ pour tout compact $K \subset \Omega$ $\}$, l'espace vectoriel des fonctions localement intégrables sur $\Omega$.

➢ $C^k(\mathbb{R}^n)$ : l'espace des fonctions $k$-fois continûmentûment différentiables, $k \geq 1$.

➢ $C^\infty(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{k\geq 0} C^\infty(\mathbb{R}^n)$ : l'espace des fonctions indéfiniment dérivables.

➢ $C^0(\Omega)$ : l'espace des fonctions continues sur $\Omega$.

➢ $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ : l'espace des fonctions à support compact.

➢ $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ : le dual topologique de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

➢ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$.

➢ $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ : la transformation de Fourier de la fonction $f$.

➢ $\overline{\mathcal{F}}(f) = \mathcal{F}^{-1}$ : l'inverse de la transformation de Fourier de $f$.

➢ La formule de Leibniz : $D^\alpha(fg) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha-\beta} g$.

# Introduction

Le sujet de ce mémoire est l'étude de la transformation de Fourier et certaines de ses applications. Cette transformation devenue fondamentale dans la science moderne.

Le mathématicien qui invente cette transformation est Jean Baptiste Joseph Fourier né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris.

La transformation de Fourier est une extension, pour les fonctions non périodiques. La transformation de Fourier associe à une fonction intégrable définie sur l'ensemble des nombres réels ou celui des nombres complexes, une fonction appelée transformée de Fourier dont la variable indépendante peut s'interpréter en physique comme la fréquence ou la pulsation. La transformation de Fourier s'exprime comme « somme infinie» des fonctions trigonométriques de toutes les fréquences. Une telle sommation se présente sous forme d'intégrale.

Sous des hypothèses assez générales, la transformation de Fourier permet d'exprimer une fonction comme superposition continue d'exponentielles complexes généralement ainsi l'expression en séries de Fourier d'une fonction périodique.

Dans cet esprit le mémoire est composé de quatre chapitres :

**-Premier chapitre :** Ce chapitre rassemble les définitions, les théorèmes et les espaces fonctionnels que nous utiliserons dans ce mémoire.

**-Deuxième chapitre :** Ce chapitre est consacré aux transformations de Fourier, nous y trouverons l'ensemble des définitions et des propriétés sur $L^1$ et $L^2$ et sur l'espace de Schwartz $(\mathcal{S})$ dans l'espace $\mathbb{R}$.

**-Troisième chapitre :** Dans ce chapitre nous parlons d'une manière générale et de leurs transformations d'une façon particulière dans l'espace $\mathbb{R}^n$.

**-Quatrième chapitre :** Nous avons complété l'étude théorique par une application qui contient des exemples pour bien comprendre ce travail.

# Chapitre 1

# Préliminaires

Dans ce chapitre on présente quelques définitions et théorèmes fondamentaux que nous utiliserons dans les chapitres 2 et 3.

## 1.1 Quelques espaces fonctionnels

### 1.1.1 L'espace $L^p$

Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

**Définition 1.1.1.** *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. On note par $L^p(\Omega)$ l'espace des classes d'équivalence de fonctions de puissance $p$-intégrables sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ :*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}\,;\, f \textit{ mesurable et } \|f\|_{L^p} < \infty\},$$

*avec*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

*L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_{L^p}$ est un espace de Banach.*

*Si $p = +\infty$, on a*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega}|f(x)|,$$

*Si $p = 1$, on a*

$$L^1(\Omega) = \left\{f : \int |f(t)|dt < \infty\right\}.$$

*Si $p = 2$, alors*

$$L^2(\Omega) = \left\{f : \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\right\}.$$

### 1.1.2 Les fonctions à décroissance rapide

**Définition 1.1.2.** *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite à décroissance rapide si pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a*

$$\lim_{|x|\to+\infty} |x^p f(x)| = 0.$$

*C'est le cas par exemple de $f(x) = e^{-|x|}$ car $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |x^p e^{-|x|}| = 0$, mais on montre contrairement à son nom, cette définition n'implique aucune monotonie pour $f$ même dans un voisinage de l'infini. ( prendre par exemple $f(x) = e^{-|x|}\sin x$). Une propriété utile sur l'intégrabilité des fonctions à décroissance rapide est la suivante :*

**Proposition 1.1.3.** *Si $f$ est une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ à décroissance rapide alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x^p f(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$.*

***Preuve***

*$f$ étant à décroissance rapide, $\exists M > 0$ tel que pour tout $|x| > M$ on ait : $|x^{p+2} f(x)| \leq \varepsilon$.*

*On choisit $\varepsilon = 1$, donc $|x^{p+2} f(x)| \leq 1$.*

*D'où*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |x^p f(x)|dx &\leq \int_{|x|\leq M} |x^p f(x)|dx + \int_{|x|>M} |x^p f(x)|dx \\ &\leq M^p \int_{|x|\leq M} |f(x)|dx + \int_{|x|>M} \frac{1}{x^2}dx < \infty. \\ &= I_1 + I_2\end{aligned}$$

$I_1 < \infty$ *car* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *et* $\int_{|x|>M} \frac{1}{x^2}dx < \infty$ ($\int_{|x|>M} \frac{1}{x^2}dx$ *c'est l'intégrale de Riemann).*
*D'où* $x^p f(x) \in L^1(\mathbb{R})$.

### 1.1.3 Espace de Schwartz

**Définition 1.1.4.** *On désigne l'espace* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *ou tout simplement* $\mathcal{S}$, *l'espace vectoriel des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *qui vérifient les deux propriétés suivantes :*

*(i)* $f$ *est indéfiniment dérivable .*

*(ii)* $f$ *ainsi que toutes ses dérivées sont à décroissance rapide :*

$$\lim_{|x|\to\infty} |x^p f^{(k)}(x)| = 0, \qquad \forall p, k \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

**Lemme 1.1.5.** *La condition* (1.1) *pour les fonctions indéfiniment dérivables sur* $\mathbb{R}$ *est équivalente à la condition suivante :*

$$\forall p \geq 0, k \geq 0, \exists \text{ une constante } C_{p,k} \text{ telle que :}$$
$$\sup_{-\infty<x<\infty} |x^p f^{(k)}(x)| = C_{p,k} < \infty.$$

**Proposition 1.1.6.** *L'espace* $\mathcal{S}$ *possède les propriétés suivantes :*

*(i)* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *est stable pour la multiplication par un polynôme.*

*(ii)* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *est stable pour la dérivation (i.e* $f \in \mathcal{S} \Rightarrow f' \in \mathcal{S}$*).*

*(iii)* $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$*.*

***Preuve***

*(i) Soient* $f \in \mathcal{S}$ *et un polynôme* $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *alors* $P(x)f \in C^\infty$*.*

$$\begin{aligned} x^p \left(P(x)f(x)\right)^{(k)} &= x^p \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i f(x)\right)^{(k)} \\ &= x^p \sum_{i=0}^{n} a_i \left(x^i f(x)\right)^{(k)} \end{aligned}$$

*En utilisant la formule de Leibniz*

$$\begin{aligned} x^p \left(P(x)f(x)\right)^{(k)} &= x^p \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j \leq k} j!\, x^{i-j} f^{(k-j)} \tbinom{k}{j} \\ &= \sum_{i=0}^{n} j!\, a_i \tbinom{k}{j}\, x^{p-i-j} f^{(k-j)}(x) \\ \lim_{|x| \to \infty} |x^p \left(P(x)f(x)\right)^{(k)}| &= \lim_{|x| \to \infty} \sum_{i=0}^{n} |j!\, a_i \tbinom{k}{j}\, x^{p-i-j} f^{(k-j)}(x)| \\ &= 0. \end{aligned}$$

*(ii) Par hypothèse*

*1)* $f \in \mathcal{S}$ *donc* $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f' \in C^\infty(\mathbb{R})$*.*

*2)* $\lim_{|x| \to \infty} |x^p f^{(k)}(x)| = 0$, $\forall k = 0, 1, \cdots$ *en particulier pour* $k_1 = k + 1$*, on aura*

$$\lim_{|x| \to \infty} |x^p (f')^{(k)}(x)| = \lim_{|x| \to \infty} |x^p f^{(k+1)}(x)| = \lim_{|x| \to \infty} |x^p f^{(k_1)}(x)| = 0,$$

*d'où le résultat.*

*(iii) Pour montrer cette propriété, on utilise le lemme précédent :*

$$|x^p f^{(k)}(x)| < C_{p,k}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned}
|x^p f^{(k)}(x)| &= \frac{x^p f^{(k)}(x)}{1+x^2}[1+x^2]. \\
&= \frac{|x^p f^{(k)}(x) + x^{p+2} f^{(k)}(x)|}{1+x^2} \\
&\leq \frac{|x^p f^{(k)}(x)|}{1+x^2} + \frac{|x^{p+2} f^{(k)}|}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

*D'où*

$$|x^p f^{(k)}(x)| \leq \frac{C_{p,k} + C_{p+2,k}}{1+x^2}.$$

*En intégrant* $|x^p f^{(k)}(x)| \leq \frac{C_{p,k}+C_{p+2,k}}{1+x^2}$*, on obtient :*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |x^p f^{(k)}(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_{p,k} + C_{p+2,k}}{1+x^2} dx \\
&= (C_{p,k} + C_{p+2,k}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \pi < \infty.
\end{aligned}$$

*Alors* $f \in L^1(\mathbb{R})$.

## 1.2 Quelques théorèmes fondamentaux

**Théorème 1.2.1.** ***Théorème de Fubini*** *[5]*
*Soit* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction mesurable et* $E \times F$ *un ensemble mesurable de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

*(i) Si* $f$ *est positive sur* $E \times F$ *on a :*
$\int_{E\times F} f(x,y)dxdy = \int_E(\int_F f(x,y)dy)dx = \int_F(\int_E f(x,y)dx)dy. \qquad (*)$

*Ces trois intégrales valent éventuellement $+\infty$.*

*(ii) Si $f$ est intégrable sur $E \times F$, la fonction $x \to f(x,y)$ respectivement $y \to f(x,y)$ est intégrable pour presque par tout $y$ (respectivement $x$) et $(*)$ est vérifiée.*

*(iii) $f$ est intégrable sur $E \times F$ si et seulement si*

$$\int_E dx \int_F |f(x,y)|dy$$

*ou*

$$\int_F dy \int_E |f(x,y)|dx$$

*est fini .*

**Théorème 1.2.2.** ***Théorème de la dérivabilité sous le signe somme*** *[5] Soit f une application : $f : I \times T \to \mathbb{C}$ avec $I \subset \mathbb{R}$. On pose :*

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t)dt,$$

*et on fait les hypothèses suivantes :*

- *Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable.*
- *$t \in T$, $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur I.p.p.*
- *Il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in I$, $t$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$. p.p. Alors, $F$ est dérivable sur $I$ et :*

$$F'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

**Théorème 1.2.3.** ***Théorème de la Convergence Dominée de Lebesgue*** *[5] Soit $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables qui converge p.p vers f. S'il existe une fonction $g$ mesurable telle que :*

- $|f_n(x)| \leq g(x)$ *pour tout* $n$ *p.p. et tout* $x$.
- $\int_X g\,dx < \infty$. *Alors, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| dx = 0,$$

*et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n dx = \int_X f dx.$$

# Chapitre 2

# Transformation de Fourier sur $\mathbb{R}$

Nous abordons dans ce chapitre la transformation de Fourier et ses propriétés pour les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ puis de $S(\mathbb{R})$ et enfin par prolongement à $L^2(\mathbb{R})$.

## 2.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

### 2.1.1 La transformée et la transfomée inverse de Fourier

**Définition 2.1.1.** *A toute fonction $f$ de $L^1(\mathbb{R})$, on associe sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$, notée aussi $\hat{f}$, définie par :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\, \mathcal{F}(f)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt. \tag{2.1}$$

**Remarque 2.1.2.** *Certains auteurs définissent la transformée de Fourier en remplaçant le coefficient $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ par 1 ou par $\frac{1}{2\pi}$.*

Il est possible d'inverser la transformée de Fourier c'est-à-dire de trouver $f$ en connaissant $\hat{f}$, alors la formule d'inversion aurait la forme :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda. \tag{2.2}$$

**Exemple 2.1.3.** *Cherchons la transformation de Fourier de la fonction suivante :*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si\ |x| \leq 1, \\ 0, & si\ |x| > 1. \end{cases}$$

*Tout d'abord, on observe que $f$ est régulière par morceaux et que :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-1}^{1} dx = 2 < \infty.$$

*On a par définition :*

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\lambda t} dt. \end{aligned}$$

*En intégrant :*

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -\frac{e^{-i\lambda t}}{i\lambda} \right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{\lambda\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\lambda} - e^{-i\lambda}}{2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\lambda}{\lambda}. \end{aligned}$$

**Exemple 2.1.4.** *Soit $f(x) = e^{-|x|}$. Déterminons la transformée de Fourier de $f$.*

*On a $f \in C^1$ sauf en 0, en effet $f$ est continue en 0 et*

$$f^{'}(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & si\ x > 0 \\ e^{x}, & si\ x < 0. \end{cases}$$

*qui est continue par morceaux , on a également*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx \\ &= 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x} dx \\ &= 2 < \infty \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

*On peut donc calculer $\hat{f}$, donnée par :*

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-i\lambda)} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-t(1+i\lambda)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[ \frac{e^{t(1-i\lambda)}}{1-i\lambda} \right]_{-\infty}^{0} - \left[ \frac{e^{-t(1+i\lambda)}}{(1+i\lambda)} \right]_{0}^{+\infty} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\lambda^2}. \end{aligned}$$

*En effet, comme $\lambda \in \mathbb{R}$ ; $\lim\limits_{t\to+\infty} \left|e^{-(1+i\lambda)t}\right| = \lim\limits_{t\to+\infty} |e^{-t}| = 0$ , et pour $\lim\limits_{t\to-\infty} \left|e^{(1-i\lambda)t}\right| = \lim\limits_{t\to-\infty} e^{t} = 0$ .*

### 2.1.2 Propriétés de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

(i) $\forall f \in L^1$, $\hat{f}$ est bornée, continue, tend vers 0 quand $\lambda \to \pm\infty$ on écrit $\hat{f} \in C^0$ .

**Preuve**

La fonction $\lambda \to e^{-i\lambda t} f(t)$ est continue, et de module majorée par $|f|$ ; donc par application du théorème de Lebesgue de continuité d'une l'intégrale paramétrée, $\hat{f}(\lambda)$ est continue. De plus, $|\hat{f}(\lambda)| \leq \|f\|_1$ donc $\hat{f}$ est bornée.

La convergence vers 0 quand $\lambda \to \pm\infty$ est une conséquence du théorème de Riemann-Lebesgue.

(ii) **Formule de Plancherel :** si $f, g \in L^1$ alors $f.\hat{g}$ et $\hat{f}.g \in L^1$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).\hat{g}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t).g(t)dt.$$

**Preuve**

$\hat{g}$ est bornée donc $f.\hat{g} \in L^1$, même chose pour $\hat{f}.g$.

$$\begin{aligned}\int f(t).\hat{g}(t)dt &= \int f(t) \left( \int e^{-its} g(s)ds \right) dt \\ &= \int g(x) \left( \int e^{-iux} f(u)du \right) dx.\end{aligned}$$

On vertu du théorème de Fubini appliqué à $e^{-iux} f(u)g(x)$, on obtient

$$\int f(t).\hat{g}(t)dt = \int \hat{f}(x).g(x)dx.$$

(iii) $\mathcal{F}(f(-t))(\lambda) = \mathcal{F}(f)(-\lambda)$.

**Preuve**

$$\begin{aligned}\int e^{-i\lambda x} f(-x)dx &= -\int_{+\infty}^{-\infty} e^{i\lambda x} f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(-\lambda)x} f(x)dx \\ &= \hat{f}(-\lambda).\end{aligned}$$

### 2.1.3 Transformation de Fourier et convolution

**Définition 2.1.5.** *Soient $f_1$ et $f_2$ deux fonctions intégrables sur toute la droite numérique. La fonction :*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\varepsilon) f_2(x-\varepsilon) d\varepsilon$$

*s'appelle convolution de $f_1$ et $f_2$.*

La fonction $f$ est définie pour presque tous les $x$ est intégrable. En effet, l'intégrale double

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\varepsilon) f_2(x-\varepsilon) d\varepsilon dx$$

existe, car l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(\varepsilon) f_2(\eta)| \, d\varepsilon d\eta.$$

existe. Par conséquent l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\varepsilon) f_2(x-\varepsilon) d\varepsilon.$$

existe aussi. La fonction $f$ est notée $f_1 * f_2$. Cherchons la transformée de Fourier de la convolution de deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. En appliquant le théorème de Fubini et en posant $(x-\varepsilon=\eta)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\varepsilon)f_2(x-\varepsilon)d\varepsilon\right)e^{-i\lambda x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\varepsilon)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-\varepsilon)e^{-i\lambda x}dx\right)d\varepsilon \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\varepsilon)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\eta)e^{-i\lambda\eta}e^{-i\lambda\varepsilon}d\eta\right)d\varepsilon \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\eta)e^{-i\lambda\eta}d\eta.\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\varepsilon)e^{-i\lambda\varepsilon}d\varepsilon.
\end{aligned}$$

C-à-d.

$$\mathcal{F}\left[f_1 * f_2\right] = \mathcal{F}\left[f_1\right].\mathcal{F}\left[f_2\right].$$

### 2.1.4 Règles de calcul sur la transformée de Fourier

L'une des propriétés remarquables de la transformation de Fourier est d'échanger la dérivation en la multiplication par un monôme.

**Proposition 2.1.6.** ***(Transformation de Fourier et dérivation)***

*(i) si $x^k f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}), k=0,\cdots,n, \hat{f}$ est $n$ fois dérivable et on a pour $k=1,\cdots,n$ :*

$$(\hat{f})^{(k)}(\lambda) = \widehat{(-ix)^k f}(\lambda). \tag{2.3}$$

*(ii) Si $f \in C^n(\mathbb{R})\bigcap L^1(\mathbb{R})$ et si toutes les dérivées $f^{(k)}$, $k=1,\cdots n$, sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors pour $k=1,\cdots,n$ :*

$$\widehat{f^{(k)}}(\lambda) = (i\lambda)^k \hat{f}(\lambda). \tag{2.4}$$

*(iii) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est à support compact alors $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.*

***Preuve***

*(i)* *La fonction* $h : \lambda \mapsto e^{-i\lambda x} f(x)$ *est indéfiniment dérivable. On a* $h^{(k)}(\lambda) = (-ix)^k e^{-i\lambda x} f(x)$ *et* $\left|h^{(k)}(\lambda)\right| \leq \left|x^k f(x)\right|$. *On peut donc appliquer le théorème 1.2.2 pour* $k = 1, \cdots n$, *on obtient :*

$$\begin{aligned}\hat{f}^{(k)}(\lambda) &= \int e^{-i\lambda x}(-ix)^k f(x)dx \\ &= \widehat{(-ix)^k f}(\lambda).\end{aligned}$$

*(ii)* *Montrons ce point pour* $n = 1$, *la formule pour* $n \geq 2$ *s'obtient en itérant le résultat. Comme* $f' \in L^1(\mathbb{R})$ *on peut calculer* $\hat{f'}$ *par la formule*

$$\hat{f'}(\lambda) = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} e^{-i\lambda x} f'(x)dx.$$

*Intégrons par parties :*

$$\int_{-a}^{a} e^{-i\lambda x} f'(x)dx = \left[e^{-i\lambda x} f(x)\right]_{-a}^{+a} + \int_{-a}^{a} (i\lambda)e^{-i\lambda x} f(x)dx. \qquad (2.5)$$

*Supposons pour l'instant que* $f(\pm a)$ *ait une limite quand* $a \to +\infty$ .
*Comme* $f$ *est intégrable cette limite est nécessairement nulle.*
*Quand* $a \to +\infty$ (2.5) *donne :*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} f'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} (i\lambda)e^{-i\lambda x} f(x)dx$$

*qui est la formule* (2.4) *pour* $k = 1$.
*Montrons maintenant que* $\lim_{a \to +\infty} f(a)$ *existe. On a :*

$$f(a) = f(0) + \int_0^a f'(t)dt.$$

*( formule issue du théorème de dérivation de Lebesgue).*

*Comme* $f' \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_0^a f'(t)dt$ *existe et donc* $\lim\limits_{a\to+\infty} f(a)$ *existe. De la même façon* $\lim\limits_{a\to+\infty} f(-a)$ *existe .*

*(iii) Si* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *est à support compact ,*

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx\right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x^k f(x)\right| dx\\ &\leq \int_{-a}^{+a} \left|x^k\right| |f(x)|\, dx\\ &\leq |a|^k \int_{-a}^{+a} |f(x)|\, dx.\end{aligned}$$

*Alors* $x^k f(x)$ *est intégrable et donc d'après (i)* $\hat{f}' \in C^\infty(\mathbb{R})$.

**Proposition 2.1.7.** *Si* $f$ *appartient à* $C^2(\mathbb{R})$ *et si* $f, f', f''$ *sont dans* $L^1(\mathbb{R})$, *alors* $\hat{f}$ *est intégrable .*

**Preuve :**

En vertu de (2.4), on a $\widehat{f^{(2)}}(\lambda) = \lambda^2 \hat{f}(\lambda)$. D'autre part, $\lim\limits_{|\lambda|\to+\infty} \left|\hat{f}^{(2)}(\lambda)\right| = 0$, donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $|\lambda| \geq M$, $|\lambda|^2 \left|\hat{f}(\lambda)\right| \leq \varepsilon$. on choisit $\varepsilon = 1$. D'où $|\hat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{\lambda^2}$.

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\lambda)|d\lambda = \int_{-\infty}^{-M} |\hat{f}(\lambda)|d\lambda + \int_{-M}^{0} |\hat{f}(\lambda)|d\lambda + \int_{0}^{M} |\hat{f}(\lambda)|d\lambda + \int_{M}^{+\infty} |\hat{f}(\lambda)|d\lambda.$$

Les intégrales $\int_{-M}^0 |\hat{f}(\lambda)|d\lambda$ et $\int_0^M |\hat{f}(\lambda)|d\lambda$ existent et sont finies car $\hat{f}(\lambda)$ est continue sur les compacts $[-M; 0]$ et $[0; M]$. On considère l'intégrale $\int_M^{+\infty} |\hat{f}(\lambda)|d\lambda$.

$$\int_M^{+\infty} |\hat{f}(\lambda)|d\lambda \leq \int_M^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2} = \left[-\frac{1}{\lambda}\right]_M^{+\infty} = \frac{1}{M}.$$

De même
$$\int_{-\infty}^{-M} |\hat{f}(\lambda)| d\lambda \leq \frac{1}{M}.$$

On conclut que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\lambda)| d\lambda < \infty.$$

**Notation.** La translatée $\mathcal{T}_a f$ de $f$ est la fonction définie par

$$\mathcal{T}_a f(x) = f(x-a).$$

**Proposition 2.1.8.** *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$.

*(i)* $\widehat{\mathcal{T}_a f(\lambda)} = e^{-i\lambda a} \hat{f}(\lambda)$.

*(ii)* $\mathcal{T}_a \hat{f}(\lambda) = \widehat{e^{iax} f(x)}$.

***Preuve***

*(i)*
$$\widehat{\mathcal{T}_a f(\lambda)} = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} f(x-a) dx.$$

*On fait un changement de variables* $t = x - a$, *on aura :*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} f(x-a) dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda(a+t)} f(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda a} e^{-i\lambda t} f(t) dt \\
&= e^{-i\lambda a} \hat{f}(\lambda)
\end{aligned}$$

*(ii)*

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\hat{f}(\lambda) = \hat{f}(\lambda - a) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\lambda-a)x} f(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda x} e^{iax} f(x)dx \\ &= \widehat{e^{iax}f(x)}.\end{aligned}$$

## 2.2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Puisque après le passage d'une fonction $f$ à sa transformée de Fourier $\hat{f}$, les propriétés de dérivabilité et de décroissance à l'infini de la fonction changent de rôles, il est facile d'indiquer des classes naturelles de fonctions que la transformation de Fourier applique dans elle-mêmes. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur la droite numérique dont chacune admet un système de constantes $C_{pq}$ (dépendant de la fonction $f$ et des nombres $p, q$) telles que

$$|x^p f^{(q)}(x)| < C_{pq}. \tag{2.6}$$

Montrons que si $f \in \mathcal{S}$, on a de même $g = \mathcal{F}[f] \in \mathcal{S}$ de l'inégalité (2.6) il résulte tout d'abord que chacune des fonction $x^p f^{(q)}(x)$ est absolument intégrable. En effet, comme l'inégalité (2,6) est vérifiée pour tous les $p, q$, on a

$$|x^p f^{(q)}(x)| \leq \frac{C_{p+2,q}}{x^2}.$$

c-à-d. la fonction $x^{p-2} f^{(q)}(x)$ décroit au moins aussi vite que $\frac{1}{x^2}$. Ceci implique, à son tour, que la fonction $\mathcal{F}[f]$ admet des dérivées de tous les ordres. Enfin la sommabilité de $f^{(q)}(x)$, $q = 1, 2, \cdots$ il résulte que $g = \mathcal{F}[f]$ décroit à l'infini plus vite que $\frac{1}{|\lambda|^q}$. Considérons maintenant les fonctions

$$(i\lambda)^q g^{(q)}(\lambda) = (-i)^q \mathcal{F}\left[(x^p f(x))^{(q)}\right].$$

Chacune d'elles est majorée par une constante $D_{pq}$, comme transformée de Fourier d'une fonction intégrable. Donc, si $f \in \mathcal{S}$ on a également $g = \mathcal{F}[f] \in \mathcal{S}$. Réciproquement, soit $g \in \mathcal{S}$; alors, d'après ce qu'on vient de démontrer, la fonction

$$f^*(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} dx$$

appartient à $\mathcal{S}$. Posons $f(x) = \frac{1}{2\pi} f^*(-x)$. Il est clair que $f \in \mathcal{S}$. D'autre part, selon la formule d'inversion, on a

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) e^{i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx,$$

c-à-d. $g$ est la transformée de Fourier de la fonction $f \in \mathcal{S}$. Ainsi, la transformation de Fourier applique la classe $\mathcal{S}$ sur elle-même. Il est clair que cette application est biunivoque.

## 2.3 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

### 2.3.1 Théorème de Plancherel

Pour plus d'analogie avec la transformation de Fourier, nous allons considérer la série de Fourier sous forme complexe, c-à-d. nous prendrons sur le segment $[-\pi, \pi]$ le système orthogonal complet des fonctions $e^{inx}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ et à chaque fonction $f$ sommable sur $[-\pi, \pi]$ nous ferons correspondre la suite de ses coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Si la fonction $f$ est non seulement sommable, mais aussi à carré sommable, ses coefficients de Fourier vérifient la condition

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < \infty.$$

Autrement dit, le passage d'une fonction dont le carré est sommable à l'ensemble de ses coefficients de Fourier est une application de l'espace euclidien $L^2$ sur l'espace euclidien $L^2$, de plus cette application est linéaire et vérifie la relation de Parceval :

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx,$$

(c-à-d. ce passage ne diffère que par un facteur numérique d'une application conservant la norme). Considérons maintenant la transformation de Fourier pour les fonctions définies sur toute la droite numérique et voyons, s'il est possible ou non de traiter cette transformation comme un opérateur linéaire dans $L^2(\mathbb{R})$. La difficulté principale réside ici dans le fait qu'une fonction à carré sommable sur la droite numérique peut ne pas appartenir à $L^1(\mathbb{R})$, c-à-d. que pour une telle fonction la transformée de Fourier au sens de la définition peut ne pas exister. Néanmoins, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ on peut définir la transformée de Fourier en un sens quelque peu différent. On obtient alors le théorème suivant qui peut être considéré comme l'analogue de la relation de Parseval.

### 2.3.2 Théorème (Plancherel, 1910)

Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ l'intégrale

$$g_N(\lambda) = \int_{-N}^{N} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

est, quel que soit $N \in \mathbb{N}$, une fonction de $\lambda \in L^2(\mathbb{R})$. Lorsque $N \to \infty$, la fonction $g_N$ converge pour la métrique de l'espace $L^2$ vers une fonction limite $g$ et on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{2.7}$$

Cette fonction $g$ s'appelle transformée de Fourier de la fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$. Si aussi $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction correspondante $g$ coïncide avec la transformée de Fourier de $f$ au sens habituel.

**Preuve**

(a) Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{S}$. Désignons par $g_1, g_2$ respectivement leurs transformées de Fourier, Alors

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[g_1(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda\right] \overline{f_2(x)}dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ g_1(\lambda) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f_{2(x)} e^{-i\lambda x} dx} \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda)\overline{g_2(\lambda)} d\lambda,\end{aligned}$$

où l'interversion des intégrations est justifiée, car la fonction

$$g_1(\lambda)\overline{f_2(x)}e^{i\lambda x}$$

est absolument intégrable sur le plan $(x, \lambda)$. En faisant dans l'égalité obtenue $f_1 = f_2 = f$ et $g_1 = g_2 = g$, on en déduit que la formule (2.7) est vraie pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$.

(b) Soit à présent $f$ une fonction quelconque de $L^2(\mathbb{R})$, nulle en dehors d'un intervalle $(-a, a)$. Elle est alors intégrable sur $(-a, a)$ (c-à-d. appartient à $L^1(-a, a)$) et donc, sur toute la droite numérique. On en déduit l'existence de sa transformée de Fourier

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

Soit maintenant $\{f_n\}$ une suite de fonctions de $\mathcal{S}$, nulles en dehors de $(-a, a)$, convergeant pour la norme de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ vers $f$. Puisque $f$ et toutes les $f_n$ sont différentes de zéro seulement sur un intervalle fini, la suite $\{f_n\}$ converge vers $f$ aussi pour la norme de l'espace $L^1(\mathbb{R})$. C'est pourquoi la suite $\{g_n\}$ converge vers $g$ uniformément sur toute la droite numérique. En outre, $\{g_n\}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$. En effet, $g_n - g_m \in \mathcal{S}$ ; donc en vertu de ce qu'on a déjà démontré,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_n(\lambda) - g_m(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx,$$

d'où l'on conclut que $\{g_n\}$ est une suite de Cauchy. Ceci implique que cette suite est convergente dans $L^2$ et qu'elle a pour limite la même fonction $g$, vers laquelle elle converge uniformément, par conséquent, dans l'égalité

$$\|f_n\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|g_n\|^2$$

on peut passer à la limite pour $n \to \infty$. Ainsi donc, l'égalité (2.7) est vraie pour toute fonction $f \in L^2$, nulle en dehors d'un certain intervalle.

(c) Soit, enfin, $f$ une fonction arbitraire de $L^2$, posons

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } |x| \leq N, \\ 0, & \text{si } |x| > N. \end{cases}$$

On a $\|f - f_N\| \to 0$ pour $N \to \infty$. La fonction $f_N \in L^1(\mathbb{R})$, ce qui implique l'existence de sa transformée de Fourier. Celle-ci est égale à

$$g_N(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-N}^{N} f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

Comme d'après la partie (b) de nos raisonnements

$$\|f_N - f_M\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|g_N - g_M\|^2.$$

Les fonctions $g_N$ convergent dans $L^2(\mathbb{R})$ vers une limite que nous désignerons par $g$. Donc, dans l'égalité

$$\|f_N\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|g_N\|^2,$$

on peut passer à la limite pour $N \to \infty$ et on obtient alors la relation (2.7) pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$.
La première partie du Théorème de Plancherel est démontrée.
Si maintenant la fonction $f$ appartient à $L^2(\mathbb{R})$ et $L^1(\mathbb{R})$ à la fois, sa transformée de Fourier.

$$\widetilde{g}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

existe au sens habituel. Dans ce cas les fonctions $f_N$ convergent vers $f$ dans $L^1(\mathbb{R})$, et donc, leurs transformée de Fourier $g_N$ convergent vers

$g$ uniformément or d'autre part, nous avons démontré que les fonctions $g_N$ convergent pour la métrique de $L^2(\mathbb{R})$ vers une fonction que nous l'avons désigné par $g$ on en déduit que $\widetilde{g}$ coïncide avec $g$.

# Chapitre 3

# La transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$

## 3.1 Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$

**Définition 3.1.1.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier de $f$, que l'on note $\hat{f}$ où $\mathcal{F}(f)$, est la fonction sur $\mathbb{R}^n$ définie par,*

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\lambda} f(x)dx,\ \lambda \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

*où $x \cdot \lambda = x_1\lambda_1 + \cdots + x_n\lambda_n$ (le produit scalaire euclidien de $x$ et $\lambda$).*

### 3.1.1 Propriétés fondamentales de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$

**Théorème 3.1.2.** *a) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors,*

*(i) son image de Fourier $\hat{f}$ est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.*

*(ii) $\hat{f}(\xi)$ tend vers 0 quand $|\xi|$ tend vers $\infty$ (théorème de Riemann-*

*Lebesgue ).*

b) *La transformation de Fourier échange la dérivation et la multiplication monomiale, la différentiabilité et la décroissance à l'infini ; plus précisément*

(i) *si* $M^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *et* $|\alpha| \leq k$, *alors* $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ *; de plus, on a*

$$D^\alpha(\hat{f}) = \widehat{(-iM)^\alpha f}.$$

(ii) *si* $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, *avec* $D^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *pour tout* $\beta \in \mathbb{N}^n$ *et* $|\beta| \leq k$, *alors* $M^\beta \hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *; de plus, on a*

$$(iM)^\beta \hat{f} = \widehat{D^\beta f}.$$

**Preuve**

a) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(i) La fonction $\xi \mapsto f(x)e^{-i\xi x}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$; d'autre part $f(x)e^{-i\xi x}$ est dominée par $f(x)$ D'après le théorème de Lebesgue sur la continuité des fonctions définies par des intégrales, $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. En outre,

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx,$$

ce qui montre que $\hat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}^n$ et que

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

(ii) Le théorème de Riemann-Lebesgue sera démontré dans la page 35 (après la démonstration de b).

b) Montrons la propriété d'échange.

(i) Il suffit de montrer que si la fonction $x \mapsto x_1 f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, alors $\hat{f}$ est dérivable (par rapport à $\xi_1$) et

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} -ix_1 f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Pour cela, nous notons que la fonction $\xi \mapsto -ix_1 e^{-ix\xi} f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ ; d'autre part $-ix_1 e^{-ix\xi} f(x)$ est dominée par $|x_1 f(x)|$ ; nous pouvons donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe d'intégration.

(ii) Il suffit de montrer que si $\frac{\partial f}{\partial x_1} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$, alors

$$i\xi_1 \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Pour cela, écrivons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) e^{-ix\xi} - i\xi_1 f(x) e^{-ix\xi}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_1}\left[f(x)e^{-ix\xi}\right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[f(x)e^{-ix\xi}\right]_{x_1=-\infty}^{x_1=+\infty} dx_2 \cdots dx_n.\end{aligned}$$

Pour achever la démonstration, il suffit de prouver que si $f$ et $f'$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ alors $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$. En effet, l'appartenance de $f'$ à $L^1(\mathbb{R})$ montre que $\lim\limits_{a \to \pm\infty} \int_0^a f'(s)ds$ existe ; l'appartenance de $f'$ à $C(\mathbb{R})$ montre que

$$f(a) - f(0) = \int_0^a f'(s)ds.$$

Par conséquent, $f(\pm\infty)$ existe ; comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a forcément

$f(\pm\infty) = 0.$

a)(ii) Il reste à démontrer le théorème de Riemann-Lebesgue. Supposons d'abord que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Par la seconde propriété d'échange, on a

$$\widehat{\partial_i f(\xi)} = i\xi_i \hat{f}(\xi), \qquad i = 1, \cdots, n.$$

Par suite, pour $\xi_i \neq 0$, on a

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{|\xi_i|} |\widehat{\partial_i f(\xi)}| \leq \frac{1}{|\xi_i|} \|\widehat{\partial_i f}\|_\infty.$$

Or, d'après l'assertion $a(i)$, $\|\widehat{\partial_i f}\|_\infty \leq \|\partial_i f\|_1$. D'autre part, quand $|\xi|$ vers $\infty$, l'un au moins des $|\xi_i|$ tend vers $\infty$. Donc $\hat{f}(\xi)$ tend vers 0. Le cas générale se fait en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. Soit donc $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ; on peut trouver une suite $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tendant vers $f$, pour la topologie de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Comme

$$\|\hat{f} - \hat{f}_j\|_\infty \leq \|f - f_j\|_1,$$

La suite, $(f_j), j \in \mathbb{N}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^n$ vers $f$. Or chaque $\hat{f}_j$ appartient à $C_0(\mathbb{R}^n)$ et comme $C_0(\mathbb{R}^n)$ est fermé pour la topologie de la convergence uniforme, on en déduit que $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

## 3.2 La transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

### 3.2.1 L'espace de Schwartz

**Définition 3.2.1.** *L'espace $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est constitué des fonctions f appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,\ \exists\ C_{\alpha,\beta} > 0,\ |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq C_{\alpha,\beta},\ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

*Toutes les dérivées d'un élément de $\mathcal{S}$ tendent vers zéro à l'infini «plus vite» que tout polynôme.*

**Exemple 3.2.2.**

- $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
- *La fonction $f(x) = e^{-|x|^2}, x \in \mathbb{R}^n$,appartient à $\mathcal{S}$.*
- *Plus généralement, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Rez > 0$, la fonction sur $\mathbb{R}^n$, $f(x) = e^{-z|x|^2}$ appartient à $\mathcal{S}$.*

**Remarque 3.2.3.** *On peut remplacer* (3.2) *par $|x|^k |\partial^\beta f(x)| \leq\ C_{k,\beta}$, pour tous $k \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{N}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ ou $\lim\limits_{|x|\to+\infty} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = 0$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.*

**Proposition 3.2.4.** *Voici quelques propriétés élémentaires :*

*(1.1) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, les applications $f \mapsto x^\alpha f$ et $f \mapsto \partial^\alpha f$ sont continues de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.*

*(1.2) Le produit de deux éléments de $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{S}$.*

*(1.3) $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

*(1.4) Pour tout $1 \leq p \leq +\infty, \mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.*

### 3.2.2 Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

**Définition 3.2.5.** *Pour $f \in \mathcal{S}$, la transformée de Fourier de $f$, que l'on note $\hat{f}$ où $\mathcal{F}f$, est la fonction sur $\mathbb{R}^n$ définie par,*

$$\hat{f}(\lambda) = \mathcal{F}f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\lambda} f(x)dx, \lambda \in \mathbb{R}^n, \tag{3.3}$$

*où $x \cdot \lambda = x_1\lambda_1 + \cdots + x_n\lambda_n$. Cette définition a bien un sens puisque d'après la propriété (1.4) de la proposition 3.2.4, $e^{-ix\lambda} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

**Remarque 3.2.6.** *On peut trouver chez certains auteurs une autre définition de $\hat{f}$ dans laquelle $x \cdot \lambda$ et $dx$ sont remplacés par $2\pi(x \cdot \lambda)$ et $(2\pi)^n dx$.*

**Exemple 3.2.7.** *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $Rez > 0$, soit $f(x) = e^{-z|x|^2}$, on a*

$$\hat{f}(\lambda) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}}\right)^n e^{-\frac{|\lambda|^2}{4z}}. \tag{3.4}$$

***Preuve***

1. *On commence par le cas $n = 1, z = \theta > 0$, on a*

$$\frac{d\hat{f}}{d\lambda}(\lambda) = \int -ixe^{-ix\lambda}e^{-\theta x^2}dx$$

*donc en intégrant par partie,*

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{f}}{d\lambda}(\lambda) = \frac{i}{2\theta}\int e^{-ix\lambda}\frac{d}{dx}e^{-\theta x^2}dx &= -\frac{i}{2\theta}\int(-i\lambda)e^{-ix\lambda}f(x)dx \\ &= -\frac{\lambda}{2\theta}\int e^{-ix\lambda}e^{-\theta x^2}dx \\ &= -\frac{\lambda}{2z}\hat{f}(\lambda),\end{aligned}$$

*de sorte que $\hat{f}$ est solution de $\frac{d\hat{f}}{d\lambda} = -\frac{\lambda}{2\theta}\hat{f}$, avec $\hat{f}(0) = \int e^{-\theta x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\theta}}$*

*dont l'unique solution est* $\hat{f}(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}} e^{\frac{-\lambda^2}{4z}}$ *d'où le résultat dans ce cas.*

2. *Cas* $n \geq 1$ *et* $z = \theta > 0$*, on peut écrire, en utilisant le théorème de Fubini*

$$\int e^{-ix\lambda} e^{-\theta|x|^2} dx = \left( \int e^{-ix_1\lambda_1} e^{-\theta x_1^2} dx_1 \right) \cdots \left( \int e^{-ix_n\lambda_n} e^{-\theta x_n^2} dx_n \right)$$

*de sorte que* $\hat{f}(\lambda) = \left( \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\theta}} \right) e^{\frac{-|\lambda|^2}{4\theta}}$

3. *Enfin, pour* $n \geq 1$ *et* $z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C}, Rez > 0\}$ *considérons à* $\lambda$ *fixé la fonction*

$$\varphi(z) = \int e^{-ix\lambda} e^{-z|x|^2} dx.$$

$\varphi$ *est une fonction holomorphe sur* $\Omega$*. En effet*

– $z \mapsto e^{-ix\lambda} e^{-z|x|^2}$ *est holomorphe pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$

– *Si* $K \subset \Omega$ *est compact, il existe* $\varepsilon > 0$ *tel* $Rez > \varepsilon$ *pour tout* $z \in K$ *et*

$$|e^{-ix\lambda} e^{-z|x|^2}| \leq e^{-\varepsilon|x|^2} \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

*Or on sait que pour* $z = \theta \in ]0, +\infty[$,

$$\varphi(z) = \left( \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{z}} \right)^n e^{\frac{-|\lambda|^2}{4z}} \tag{3.5}$$

*comme le membre de droite est également holomorphe dans* $\Omega$*, cette égalité reste vraie pour tout* $z$ *dans* $\Omega$.

**Théorème 3.2.8.** *La transformation de Fourier* $\mathcal{F}$ *est une application linéaire bicontinue de* $\mathcal{S}$ *sur* $\mathcal{S}$*. Si on pose* $v \in \mathcal{S}$,

$$\overline{\mathcal{F}} v(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\lambda} v(\lambda) d\lambda. \tag{3.6}$$

*alors* $\overline{\mathcal{F}}$ *envoie* $\mathcal{S}$ *dans* $\mathcal{S}$ *et on a* $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} =$ *identité de* $\mathcal{S}$*, i.e.* $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.

**Preuve**

(a) On montre d'abord que $\mathcal{F}f \in C^\infty$, si $f \in \mathcal{S}$. En effet,

($\star$) pour $x$ fixé la fonction $\lambda \mapsto e^{-ix\lambda}f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

($\star\star$) $\forall \beta \in \mathbb{N}^n, |\partial_\lambda^\beta(e^{-ix\lambda}f(x))| = |(-ix)^\beta e^{-ix\lambda}f(x)| = |x^\beta f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Donc $\mathcal{F}f \in C^\infty$ et

$$\partial_\lambda^\beta \mathcal{F}f(\lambda) = \int e^{-ix\lambda}(-ix)^\beta f(x)dx. \tag{3.7}$$

On montre ensuite, par intégrations par parties successives, que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$,

$$\begin{aligned}\lambda^\alpha \partial_\lambda^\beta \mathcal{F}f(\lambda) &= \int \left[(-D_x)^\alpha e^{ix\lambda}\right]\left((-ix)^\beta f(x)\right)dx \\ &= \int e^{-ix\lambda} D_x^\alpha \left((-ix)^\beta f(x)\right)dx.\end{aligned}$$

On déduit que,

$$|\lambda \partial_\lambda^\beta \mathcal{F}f(\lambda)| \leq \int |D_x^\alpha \left(x^\beta f(x)\right)|dx < +\infty,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^n,$$

ce qui montre $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et que l'application $f \mapsto \mathcal{F}f$ est continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ d'après la formule de Leibniz.

(b) On montre maintenant que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\lambda}\hat{f}(\lambda)d\lambda.$$

or

$$\int e^{ix\lambda}\hat{f}(\lambda)d\lambda = \int e^{ix\lambda}\left(\int e^{-iy\lambda}f(y)dy\right)d\lambda.$$

Mais la fonction $g : (y, \lambda) \mapsto e^{ix\lambda}e^{ix\lambda}f(y)$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_\lambda^n)$, puisque $(g(y, \lambda)) = |f(y)|$ et on ne peut pas intervertir l'ordre des intégrations. Cependant, par le théorème de convergence dominée,

$$\int e^{ix\lambda}\hat{f}(\lambda)d\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int e^{ix\lambda}e^{-\varepsilon|\lambda|^2}\hat{f}(\lambda)d\lambda,$$

et

$$\int e^{ix\lambda}e^{-\varepsilon|\lambda|^2}\left(\int e^{-iy\lambda}f(y)dy\right)d\lambda = \int\left(\int e^{i(x-y)\lambda}e^{-\varepsilon|\lambda|^2}d\lambda\right)f(y)dy.$$

Donc d'après (3.4)

$$\int e^{ix\lambda}\hat{f}(\lambda)d\lambda = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^n\int e^{-|x-y|^2/4\varepsilon}f(y)dy.$$

On effectue enfin le changement de variable $z = (x-y)/2\sqrt{\varepsilon})$ et on obtient

$$\begin{aligned}\int e^{ix\lambda}\hat{f}(\lambda)d\lambda &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(2\sqrt{\pi})^n\int e^{-|z|^2}f(x-2\sqrt{\varepsilon}z)dz\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\pi^{\frac{n}{2}}2^n\int e^{-|z|^2}f(x-2\sqrt{\varepsilon}z)dz.\end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée donne alors

$$\int e^{ix\lambda}\hat{f}(\lambda)d\lambda = \pi^{\frac{n}{2}}2^n f(x)\int e^{-|z|^2}dz = (2\pi)^n f(x)$$

d'où

$$\int e^{ix\lambda}\hat{f}(\lambda)d\lambda = (2\pi)^n f(x).$$

**Corollaire 3.2.9.** *Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a*

$$\|\phi\|_{L^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\|\hat{\phi}\|_{L^2}.$$

### 3.2.3 Propriétés de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

On rassemble dans la proposition qui suit quelques propriétés de la transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

**Proposition 3.2.10.** *soit $\phi$ et $\psi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a*

*(i)* $\int \hat{\phi}(\xi)\psi(\xi)d\xi = \int \phi(x)\hat{\psi}(x)dx$,

*(ii)* $\int \phi(x)\overline{\psi}(x)dx = (2\pi)^{-n}\int \hat{\phi}(\xi)\overline{\hat{\psi}(\xi)}d\xi$.

*(iii)* $\phi * \psi \in S(\mathbb{R}^n)$ *et* $\mathcal{F}(\phi * \psi) = \widehat{\phi * \psi} = \hat{\phi}\hat{\psi}$. ***(la convolution)***

*(iv)* $\widehat{\phi \cdot \psi} = (2\pi)^{-n}\hat{\phi} * \hat{\psi}$,

*(v)* $\widehat{D_j\phi} = \xi_j\hat{\phi}$. *où* $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$.

*(vi)* $\widehat{x_j\phi} = -D_j\hat{\phi} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi_j}$

**Preuve**

(i) On a par théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\int \hat{\phi}(\xi)\psi(\xi)d\xi &= \int \left(\int e^{-ix\xi}\phi(x)dx\right)\psi(\xi)d\xi\\ &= \int \left(\int e^{-ix\xi}\psi(\xi)d\xi\right)\psi(x)dx\\ &= \int \phi(x)\hat{\psi}(x)dx.\end{aligned}$$

(ii) Il suffit d'appliquer (i) à $\phi$ et $\omega = (2\pi)^{-n}\overline{\hat{\psi}}$.

On a $\int \hat{\phi}(\xi)\omega(\xi)d\xi = \int \phi(x)\hat{\omega}(x)dx$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}(x) &= (2\pi)^{-n}\int e^{-ix\xi}\overline{\hat{\psi}}(\xi)d\xi \\
&= \overline{(2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\hat{\psi}(\xi)d\xi} \\
&= \overline{\overline{\mathcal{F}}\hat{\psi}(\xi)} \\
&= \overline{\psi}(x).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

(iii) Tout d'abord, $\phi * \psi$ est bien définie par $\int \phi(x-y)\psi(y)dy$ car $\phi, \psi \in L^1$, donc l'intégrale converge absolument. Ensuite, pour $y$ fixé, la fonction $y \mapsto \phi(x-y)\psi(y)$ est intégrable pour tout $x$, et dominée par $\sup|(\partial^\beta\phi)||\psi(y)| \in L^1$, on a

$$\begin{aligned}
x^\alpha\partial^\beta(\phi * \psi)(x) &= \int x^\alpha\partial_x^\beta\phi(x-y)\psi(y)dy \\
&= \int (x-y+y)^\alpha\partial_x^\beta\phi(x-y)\psi(y)dy \\
&= \sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\int (x-y)^\gamma y^{\alpha-\gamma}\partial_x^\beta\phi(x-y)\psi(y)dy \\
&= \sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\int (x-y)^\gamma(\partial^\beta\phi)(x-y)y^{\alpha-\gamma}\psi(y)dy \\
&= \sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}(y^\gamma\partial^\beta\phi) * (y^{\alpha-\gamma}\psi)(x).
\end{aligned}$$

Donc $\phi * \psi \in S(\mathbb{R}^n)$.

On a enfin par Fubini,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\phi * \psi)(\xi) &= \int e^{-ix\xi}\phi * \psi(x)dx \\
&= \int e^{-ix\xi}\left(\int \phi(x-y)\psi(y)dy\right)dx \\
&= \int \psi(y)\left(\int e^{-ix\xi}\varphi(x-y)\psi(y)dx\right)dy \\
&= \int \psi(y)\left(\int e^{-i(y+z)\cdot\xi}\phi(z)dz\right)dy \\
&= \int e^{-iy\cdot\xi}\psi(y)dy \int e^{-iz\cdot\xi}\phi(z)dz \\
&= \hat{\phi}(\xi)\hat{\psi}(\xi).
\end{aligned}$$

(iv) Soit $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et $u = \overline{\mathcal{F}}(\phi), v = \overline{\mathcal{F}}(\psi)$. On a

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi\psi}(\xi) &= \mathcal{F}(\hat{u}\hat{v})(\xi) = \mathcal{F}(\mathcal{F}((u * v))(\xi) = (2\pi)^n u \check{*} v \\
&= (2\pi)^n \int u(-\xi-\eta)v(\eta)d\eta = (2\pi)^n \int \check{u}(\xi+\eta)v(\eta)d\eta \\
&= (2\pi)^{-n} \int \hat{\phi}(\xi+\eta)\check{\hat{\psi}}(\eta)d\eta = (2\pi)^{-n} \int \hat{\phi}(\xi-\eta)\hat{\psi}(\eta)d\eta \\
&= (2\pi)^{-n}\hat{\phi} * \hat{\psi}.
\end{aligned}$$

(v) Par intégration par partie on peut écrire,

$$\widehat{D_j\phi}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)dx = -\frac{1}{i}\int \frac{\partial}{\partial x_j}(e^{-ix\cdot\xi})\phi(x)dx = \xi_j\hat{\phi}(\xi).$$

(vi) Par le théorème de dérivation de Lebesgue,

$$\begin{aligned}
(\widehat{x_j\phi})(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi}x_j\phi(x)dx = \int -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi_j}(e^{-ix\cdot\xi})\phi(x)dx \\
&= -\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\int e^{-ix\cdot\xi}\phi(x)dx = -D_j\hat{\phi}(\xi).
\end{aligned}$$

## 3.3 Transformation de Fourier sur l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$

**Théorème 3.3.1.** ***Riesz-Plancherel***

*(i)* *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ (resp. la transformation de Fourier inverse $\overline{\mathcal{F}}$) est prolongeable en un opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Désignant encore par $\mathcal{F}$ (resp. $\overline{\mathcal{F}}$) ce prolongement, on a $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

*(ii)* *Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathcal{F}f$ est la limite, pour la topologie de $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, de la suite $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$g_k(\xi) = \int_{B_k} f(x)e^{-ix\xi}dx,$$

*où $(B_k)$ est une suite d'ensembles mesurables relativement compacts tendant vers $\mathbb{R}^n$.*

**Preuve**

(i) On a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. On applique le principe du prolongement par continuité uniforme, en utilisant la complétude de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Les formules $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$ sont vraies sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, car elles le sont sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, qui est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Soit $1_k$ la fonction indicatrice de $B_k$. Posons $f_k = 1_k f$. Comme $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$, l'image de Fourier $\hat{f}_k$ de $f_k$ est égale à $g_k$. Or $f_k$ tend vers $f$ et $|f_k|$ est inférieur à $|f|$. Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue montre alors que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $f$ pour la topologie de $L^2(\mathbb{R}^n)$. L'isométrie de $\mathcal{F}$, de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ montre que $(\hat{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $\hat{f}$, pour la topologie de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

# Chapitre 4

# Application

## 4.1 Application de la transformation de Fourier à la résolution d'EDP

### 4.1.1 Équation de Laplace

Considérons l'équation de Laplace à deux variables sur le demi-plan supérieur $y > 0$. Alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad -\infty < x < +\infty, y > 0.$$

Soit les conditions au bord

$$u(x, 0) = f(x), \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Soit la fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ en prenant la transformée de Fourier à la variable $x$

$$\begin{aligned} (i\xi)^2\hat{u}(\xi,y) + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\xi,y) &= 0, \qquad -\infty < x < +\infty, y > 0 \\ \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2}(\xi,y) - \xi^2\hat{u}(\xi,y) &= 0 \end{aligned}$$

qui a des solutions

$$\hat{u}(\xi,y) = A(\xi)e^{\xi y} + B(\xi)e^{-\xi y}.$$

Nous devons deux conditions pour déterminer les fonctions $A(\xi), B(\xi)$ en addition à $u(x,0) = f(x), -\infty < x < +\infty$.

Soit $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = g(x)$, $-\infty < x < +\infty$ pour $g \in L^1(\mathbb{R})$ nous trouverons $g$ de telle sorte que la solution $u(x,y)$ pour $y > 0$ de telle sorte que $u(x,y) \to 0$ quand $y \to 0$.

Prenant la transformation de Fourier

$$\hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi), \qquad \frac{\partial \hat{u}}{\partial y}(\xi,0) = \hat{g}(\xi),$$

où

$$A(\xi) + B(\xi) = \hat{f}(\xi), \qquad \xi A(\xi) - \xi B(\xi) = \hat{g}(\xi)$$

La résolution de

$$A(\xi) = \frac{1}{2}(\hat{f}(\xi) + \frac{\hat{g}(\xi)}{\xi}), \qquad B(\xi) = \frac{1}{2}(\hat{f}(\xi) - \frac{\hat{g}(\xi)}{\xi}).$$

et

$$\hat{u}(\xi,y) = \frac{1}{2}(\hat{f}(\xi) + \frac{\hat{g}(\xi)}{\xi})e^{\xi y} + \frac{1}{2}(\hat{f}(\xi) - \frac{\hat{g}(\xi)}{\xi})e^{-\xi y}$$

pour $\xi > 0$, $\hat{u}(\xi,y) \to 0$ pour $y \to 0$ si et seulement si $\hat{f}(\xi) + \frac{\hat{g}(\xi)}{\xi} = 0$, et pour $\xi < 0$, $\hat{u}(\xi,y) \to 0$, quand $y \to 0$ si et seulement si $\hat{f}(\xi) + \frac{\hat{g}(\xi)}{\xi} = 0$.

Donc

$$\hat{g}(\xi) = \begin{cases} -\xi\hat{f}(\xi) & \text{si } \xi > 0, \\ \xi\hat{f}(\xi) & \text{si } \xi < 0. \end{cases}$$
$$= -|\xi|\hat{f}(\xi).$$

$$\hat{u}(\xi, y) = \begin{cases} \hat{f}(\xi)e^{-\xi y} & \text{si } \xi > 0, \\ \hat{f}(\xi)e^{\xi y} & \text{si } \xi < 0. \end{cases}$$
$$= \hat{f}(\xi)e^{-\xi|y|}.$$

Depuis $e^{-\xi|y|} = \left(\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}\right)$ par le théorème de convolution .

### 4.1.2 Exemple dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Soit le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - i\Delta u = 0, & \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n), \\ u_0 = g. \end{cases}$$

Si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la solution $u$ donnée par $u_t = \overline{\mathcal{F}}(e^{-it|\xi|^2}\hat{g})$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$. Elle est donnée par la formule,

$$u(t, x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix.\xi - it|\xi|^2}\hat{g}(\xi)d\xi.$$

**Preuve**

Si $g \in \mathcal{S}$, la formule $u_t$ montre que $u_t \in \mathcal{S}$ et que $u_t(x)$ et égal au second membre de $u(t, x)$. Il est alors facile de voir que la fonction $(t, x) \mapsto u_t(x)$ est

$C^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Notons-la $u(t,x)$. On a,

$$\begin{aligned} x^\alpha D^\beta u(t,x) &= (2\pi)^n \int D_\xi^\alpha e^{ix.\xi} e^{-it|\xi|^2} \xi^\beta \hat{g}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^n \int e^{ix.\xi} (-D_\xi)^\alpha \left[ e^{-it|\xi|^2} \xi^\beta \hat{g}(\xi) \right] d\xi \\ &= \int e^{ix.\xi} P_{\alpha\beta}(t,\xi) e^{-it|\xi|^2} \hat{g}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

où $P_{\alpha\beta}$ est un polynôme en $(t.\xi)$. Il résulte du théorème de la convergence dominée que si $t_n \to t_0$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha D_x^\beta (u(t_n,x)_- u(t_0,x))| \to 0$. On montre de manière tout à fait analogue que pour $k \in \mathbb{N}$, $\partial_t^k u$ appartient à $C^0(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$.

# Bibliographie


[1] Y. Caumel, *Cours d'analyse fonctionnelle et complexe*, Deuxième édition, Cépaduès, 2003-2009.

[2] B. Dacorogna, Ch. Tanteri, *Analyse avancée pour ingénieurs*, Première édition corrigée. Petropoli, 2002.

[3] S. Fomine A. Kolmogorov, *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle,* Éditions Mir. Moscou, Deuxième édition, Décembre 1973.

[4] Vo-khac Khoan, *Distributions Analyse de Fourier, Operateurs aux dérivées partielles*, Librairie Vuibert, 1972.

[5] M. Maumy, J. Vauthier, *Calcul différentiel et intégral,* édition marketing S.A., 1998.

[6] C. Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles, Cours et problèmes résolus.* Dunod, Paris, 2002.