République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique
Université Ibn Khaldoun – Tiaret –

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département des MATHEMATIQUES

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

DOMAINE : Mathématiques et Informatique

FILIERE : Mathématiques

SPECIALITE: Analyse Fonctionnelle et Équation Différentielle

Présenté par

ZAHZAH AHLEM SABAH

LOUAMI KADDA

LARBI SAKINA

SUJET DU MEMOIRE :

Sur quelques classes de problèmes aux limites associés à des équations différentielles fractionnaires

Soutenu le :20/10/ 2020 Devant Le Jury Composé de :

Mr : M. Ziane	Président
Mr : I. Zitouni	Encadreur
Mr : O. Zentar	Examinateur

Année Universitaire : 2019/2020

Remerciement

Je remercie tout d'abord «Allah»de m'avoir donné le courage d'entamer et de finir ce mémoire dans de bonnes conditions.

J'adresse mes vifs remerciements

À mon encadreur Mr.Zitouni Ismail qui par ses conseils, ses recommandations, sa patience m'a permis de réaliser ce mémoire

.

Je remercie Monsieur Ziane Mohamed , enseignant au département de mathématiques de l'université d'Ibn Khaldoune Tiaret qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire. Mes remerciements vont également à Monsieur Zentar Oualid enseignant au département de l'informatique de l'université d'Ibn Khaldoune Tiaret d'avoir acceptés de faire partie de ce jury. À tous les enseignants qui ont participé à la formation tout au long mon cycle Universitaire jusqu'aux jours d'aujourd'hui.

Enfin, je ne voudrai pas non plus oublier toutes les personnes que j'ai rencontre tout long de ces années universitaire et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'accomplissement de ce travail.

★★★

♡ Je dédie ce travail à ♡

À mes parents .Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler. Que dieu leur procure bonne santé et longue vie..

À mon très cher frère Abdelbassir, à ma très chére sœur Hanane

À mes aimables amis et collègues d'étude.

À mes trinômes Sakina et Kadda .

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible, je vous dis merci.

Zahzah Ahlem Sabah

♡ Je dédie ce travail à ♡

À mes chers parents, pour tout leurs sacrifices leur amours, leur amour, leur tendresse, long de mes études long de mes études an que je puisse réussir.

À tous ma famille pour leur soutient tout au long de mon parcours universitaire

À touts mes amies Hakim Gharabi, Mohamed Bessadet, Mekki Wedhah.

Merci d'être toujours la pour moi.

Louami Kadda

♡ Je dédie ce travail à ♡

A celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite,à ma mère. . .

A mon père,école de mon enfance,qui a été mon ombre durant toutes les année des études et qui a veille tout au long de ma vie à m'encourager, à me donner m'aide et à me protéger

Que dieu les gardes et les protège

A mes adorables sœurs FATIHA.SOUMIA.AIDA.ASMAA .MARWA

A mes neveux IYAD.YOUNES A toutes mes amies Et a toute la famille LARBI,HABACHI,ALEM

A tous ceux qui me sont chères

A tous ceux qui m'aiment

A tous ceux que j'aime

Larbi Sakina

Table des matières

Notations

Dans tous ce quis suit, nous avons utilisera les notation suivantes :
$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable sur Ω et $\int_\Omega |u(t)|^p dt < +\infty$ avec $1 \leq p < +\infty\}$
$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$
$C(\Omega)$ espace des fonctions continues dans Ω,
$\|u\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |u(t)|$,
$C^k(\Omega)$ espace des fonctions $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont k fois différentiables sur Ω, et leur dérivée a l'ordre k sont continues sur Ω,
$Supp(u)$ la fermeture dans $\mathbb{R}$ dans l'ensemble $\{t \in \Omega \ u(t) \neq 0\}$,
$C_c(\Omega) = \{u \in C(\Omega)$:Supp(u) compact $\}$,
$\mathbb{X}'$ le duale topologique de l'espace $\mathbb{X}$,
$C^\infty(\Omega)$ espace des fonctions $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont infiniment différentiable sur Ω,
$C_0^\infty(\Omega)$ sous ensemble de $C^\infty(\Omega)$ constitue de fonctions à support compacts dans Ω
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ croche de dualité entre $\mathbb{X}$ et son dual $\mathbb{X}'$
p.p. presque partout,
i.e. c'est-a-dire,

$I_{a^+}^{\alpha}$ intégrale fractionnelle au sens de Riemann-Liouville a gauche,
$I_{b^-}^{\alpha}$ intégrale fractionnelle au sens de Riemann-Liouville a droit,
$D_{a^+}^{\alpha}$ dérivée fractionnelle au sens de Riemann-Liouville a gauche,
$D_{b^-}^{\alpha}$ dérivée fractionnelle au sens de Riemann-Liouville a droite,
${}^{c}D_{a^+}^{\alpha}$ dérivée fractionnelle au sens de Caputo a gauche,
${}^{c}D_{b^-}^{\alpha}$ dérivée fractionnelle au sens de Caputo a droite,
I_{-}^{α} intégrale fractionnelle au sens de Riemann-Liouville à droite sur la droit réelle,
I_{+}^{α} intégrale fractionnelle au sens de Riemann-Liouville à gauche sur la droit réelle,
D_{+}^{α} dérivée fractionnelle au sens de Riemann-Liouville à droite sur la droit réelle,
D_{-}^{α} dérivée fractionnelle au sens de Riemann-Liouville à gauche sur la droit réelle,
$C.U \rightarrow$ converge uniformément.

Introduction

Les équations différentielle d'ordre fractionnaire sont révélées récemment des outils précieux dans la modélisation de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science et de l'ingénierie. En effet, nous pouvons trouver de nombreuses d'applications en , électrochimie, contrôle, média poreux, électromagnétiques,...ext. Pour les documents remarquables traitant de l'opérateur intégral et de l'opérateur différent de l'ordre fractionnaire arbitraire). Il ya eu un développement important dans les équations différentielles fractionnées au cours des dernières années. Certains résultats pour les inclusions différentielles fractionnaires peuvent être trouvées dans le livre par Plotnikov.très récemment, une théorie de base pour le problème de valeur initiale des équations différentielles fractionnelles impliquant l'opérateur différent de Riemann-Liouville a été discutée par Vatsala Certains résultats d'existence ont été données pour le problème

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0^+}^{\alpha}u(t) = f(t, u(t)),\ t \in (0,1),\ 1 < \alpha \leq 2 \\ u(0) + u'(0) = 0, u(1) + u'(1) = 0 \end{cases}$$

Dans cette mémoire nous présentons les résultats d'existence pour le problème précédent. Dans le chapitre 3, nous donnons deux résultats, un basé sur le théorème de point fixe Schauder, et un exemple pour démontre d'applications de nos principaux résultats. Ces résultats peuvent être considérés comme une contribution à ce domaine émergent.

Quelque outils de base
Critère de compacité sur les intervalles bornés et non bornés
Théorie du point fixe

1. Préliminaires

1.1 Quelque outils de base

Théorème 1.1.1 (convergence dominée de Lebesgue)[1, 2, 3]

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert et soit une suite $(u_n) \subset L^1(\Omega)$ telle que

1. $u_n(x) \longmapsto u(x)$ p.p dans Ω quand $n \longmapsto \infty$
2. il existe une fonction v $\in L^1(\Omega)$ telle que pour tout n
$\mid u_n(x) \mid \leq v(x)$ p.p dans Ω alors
u $\in L^1(\Omega)$ et $u_n \longmapsto u$ dans $L^1(\Omega)$ i.e $\int_\Omega |u_n - u|dx \longmapsto 0$

Proposition 1.1.2 (Inégalité de Young (1912))[4] si a et b sont des nombre réel positifs et p, q sont des nombres réels positifs tels que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Théorème 1.1.3 (Inégalité de Hôlder)[4] soit $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec $1 \leq p < \infty$ alors $uv \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}$$

Théorème 1.1.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)[4] Soit $u \in L^2(\Omega)$ et $v \in L^2(\Omega)$ Alors :

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

Proposition 1.1.5 (la règle intégrale de Leibniz)[5] si f est intégrable , alors

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(t,s)ds = \int_a^t \frac{d}{dt} f(t,s)ds + f(t,t)$$

D'une manière générale,on a

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,s)ds = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{d}{dt} f(t,s)ds + f(b(t),t)\frac{db(t)}{dt} - f(a(t),t)\frac{da(t)}{dt}$$

1.1.1 Espace de fonction absolument continues

Définition 1.1.1 On dit qu'une fonction f est Absolument Continue Sur $[a,b]$ et on note $f \in AC([a,b])$ si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que pur tout -Partition $((a_k,b_k))_k$ sont deux à deux disjoint de $[a,b]$,on a

$$\Sigma_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \Longrightarrow \Sigma_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

R si $f \in AC([a,b])]$,alors presque partout sur $[a,b]$, elle admet une dérivée intégrable sur cette intervalle et

$$\forall x \in [a,b] : f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

R L'espace $AC([a,b])$ muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_{L^1}$ est un espace de Banach

Définition 1.1.2 On note par $AC^n([a,b])$, la classe des fonction f continument dérivables jusqu'à l'ordre (n-1)sur $[a,b]$ avec $f^{n-1} \in AC([a,b])$ En particulier $AC^1([a,b]) = AC([a,b])$

Définition 1.1.3 On dit qu'une fonction f est absolument continue sur $[a, +\infty]$et on note $f \in AC([a; +\infty])$ si elle est absolument continue sur chaque compact de $[a, +\infty]$

1.2 Critère de compacité sur les intervalles bornés et non bornés

Définition 1.2.1 (l'équi-continué) On dit que l'ensemble $M \subset C([a, b], \mathbb{R})$ est équi-continue si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta, \forall t_1, t_2 \in [a, b] : |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \epsilon, \forall u \in \mathcal{M}$$

Théorème 1.2.1 (Ascoli-Arzéla)[6] soit $M \subset C([a, b], \mathbb{R})$. M est relativement compact si et seulement si

1. M est borné,
2. M est équi-continu

1.3 Théorie du point fixe

Définition 1.3.1 Soit T une application d'un espace de Banach X dans lui même. On dit que T est une contraction s'il existe un nombre $0 < k < 1$ tel que

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|, \forall x, y \in X$$

Théorème 1.3.1 (de Banach) [7, 8] Une contraction d'un espace de Banach X dans lui même a un unique point fixe dans X.

Définition 1.3.2 Soit X un espace de Banach. On dit que l'opérateur $T : X \longrightarrow X$ est compact si l'image de tout borné dans X est relativement compact dans X

Définition 1.3.3 Soit X un espace de Banach. On dit que l'opérateur $T : X \longrightarrow X$ est complètement continue s'il est compact et continu .

Théorème 1.3.2 (de Schauder)[9, 7]

Soit C sous-ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach X et soit $T : C \longrightarrow C$un opérateur complètement continu. Alors T admet au moins un point fixe dans C.

Définition 1.3.4 Soit X un espace de Banach et soit $S \subset X$ vérifiant $X \subset \bigcup_{x \in S} B(x, \epsilon)$. Alors l'ensemble S est appelé ϵ-réseau .

Définition 1.3.5 (totalement borné) Soit X un espace de Banach et soit $S \subset X$. On dit que S est totalement borné(prècompact)si pour tout $\epsilon >$ 0,il existe ϵ-réseau fini pour S.(i.e) $\exists x_i \in S, i = 1, ..., n$ tels que :$S \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$.

Proposition 1.3.3 (Fréchet)[10] Une partie S d'un espace de Banach X est relativement compact si et seulement si elle est totalement bornée.

Proposition 1.3.4 Une partie d'un espace de Banach est compact si et seulement si elle est prècompact et fermé.

2. Calcule fractionnaires

Proposition 2.0.1 (formule de Dirichlet)[11] Si l'une des deux intégrales suivantes est absolument convergente , alors on a

$$\int_a^b \Big[\int_a^x f(x,y)dy \Big] dx = \int_a^b \Big[\int_y^b f(x,y)dx \Big] dy \tag{II.1}$$

R Comme cas particulier de la formule (II.1), on obtient

$$\int_a^b (x-t)^\alpha \Big[\int_a^t (t-s)^\beta g(t,s)ds\Big]dt = \int_a^b \Big[\int_s^b (x-t)^\alpha (t-s)^\beta g(t,s)dt\Big]ds.$$

2.1 Fonctions élémentaires

On appelle quelques fonctions spéciales qui jouent un rôle important dans la calcule fractionnaire.

L'une des fonctions de base du calcule fractionnaire est la fonction gamma d'Euler.

Cette fonction est tout simplement la généralisation de la factorielle à tous les nombre réels.

Définition 2.1.1 La fonction gamma d'Euler est définie par l'intégrale convergente suivante dite d'Euler de seconde type

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt, \alpha > 0$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^-$, on a

$$\Gamma(\alpha) - \Gamma(-\alpha) = -\frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

Proposition 2.1.1 ([12, 11])
La fonction gamma $\Gamma(.)$ possède les propriétés fondamentales suivantes :

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
3. $\Gamma(0^+) = +\infty$
4. pour $\alpha > 0$:$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$
5. pour $\alpha < 0$:$\Gamma(1 - \alpha) = -\alpha\Gamma(-\alpha)$,
6. $\Gamma(n) = (n - 1)!$ *pour* $n \geq 1$
7. pour $\alpha > 0$: $\lim\limits_{a \to 0^+} \alpha\Gamma(\alpha) = 1$,
8. pour tout $\alpha > 0$, et $n \in \mathbb{N}$ on a : $\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n-1)}$
9. $\Gamma'(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\ln t \;\, dt, \forall\alpha > 0$

Définition 2.1.2 La fonction Bêta est définie par l'intégrale suivante dite d'Euler du premier type

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, \alpha, \beta > 0$$

Proposition 2.1.2 ([12, 11]) La fonction Bêta vérifier les propriétés suivantes :

1. pour α,$\beta > 0$ $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$
2. $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$ (symétrique)

3. $B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}dt = 2\int\limits_0^{\pi/2} (\sin t)^{2\alpha-1}(\cos t)^{2\beta-1}dt$
4. $(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta+1) = \beta B(\alpha,\beta)$.

2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Proposition 2.2.1 [12, 13, 11] pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale d'ordre n est donnée par la formule suivante :

$$\int\limits_a^x dx_1 \int\limits_a^{x_1} dx_2 \int\limits_a^{x_2} dx_3 ... \int\limits_a^{x_{n-1}} f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

où $f \in L^1(a,b)$.

on peut généraliser, d'une manière naturelle, la formule précédente pour $n = \alpha$ qui est un nombre réel quelconque par la définition suivante .

Définition 2.2.1 L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de Riemann-Liouville

d'une fonction $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$I^{\alpha}_{a^+}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^t (t-s)^{\alpha-1}u(s)ds, t > a$$

et

$$I^{\alpha}_{b^-}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_t^b (s-t)^{\alpha-1}u(s)ds, t < b$$

pour vu que les parties intégrales existent (on prend par exemple $u \in L^1([a,b])o$, $u \in C([a,b],\mathbb{R})$) pour $\alpha = 0$, on pose
$I^0_{a^+} = Id$, l'opérateur identité,
$I^0_{b-} = Id$, l'opérateur identité.

R Si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, la définition (2.2.1) coïncide avec l'intégrale d'ordre n qui est donnée dans la proposition (2.2.1)

$$I_{a^+}^{n} u(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} u(s) ds, t \in [a,b], n \in \mathbb{N}$$

et

$$I_{b^-}^{n} u(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_t^b (s-t)^{n-1} u(s) ds, t \in [a,b], n \in \mathbb{N}$$

■ **Exemple 2.1** pour $t > a, \alpha > 0, \beta > -1$, on a

1. $I_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}$,
2. $I_{b^-}^{\alpha}(b-t)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(b-t)^{\alpha+\beta}$.

■

R Si $a = 0$, on écrit

$$I_{a^+}^{\alpha} u(t) = \begin{cases} [u * \varphi_\alpha](t) \;\; si \;\; t > 0 \\ 0 \;\; si \;\; t \leq 0 \end{cases}$$

avec $\varphi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et $u * \varphi_\alpha$ est le produit de convolution qui est définie par la formule suivante :

$$(u * \varphi_\alpha)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-y)\varphi_\alpha(y) dy$$

R De la linéarité de l'intégrale , on peut vérifier facilement que l'opérateur $I_{a^+}^{\alpha}$ est linéaire.
Le résultat suivant donne le caractère borné de l'opérateur intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de l'espace $L^p([0,T],\mathbb{R})$ vers l'espace $L^p([0,T],\mathbb{R})$ ou $1 \leq p < \infty$. Il convient de mentionner ici que des résultats similaires ont été présentés dans [13, 11].

Lemme 2.2.2 Soit $0 < \alpha < 1$ et $1 \leq p < \infty$. pour tout $u \in L^p([0,T],\mathbb{R})$, on a

$$\|I_{0^+}^{\alpha} u\|_{L^p([0,T])} \leq \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|u\|_{L^p([0,T])} \tag{I.2}$$

Preuve : Si $p = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\| I_{0^+}^{\alpha} u\|_{L^1([0,T])} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \left| \int_0^{\varepsilon} (\varepsilon-\tau)^{\alpha-1} u(\tau) d\tau \right| d\varepsilon \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \left[\int_0^{\varepsilon} (\varepsilon-\tau)^{\alpha-1} |u(\tau)| \, d\tau \right] d\varepsilon \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |u(\tau)| \left[\int_{\tau}^{T} (\varepsilon-\tau)^{\alpha-1} d\varepsilon \right] d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^T |u(\tau)|(T-\tau)^{\alpha} d\tau \\
&\leq \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|u\|_{L^1([o,T]).}
\end{aligned} \tag{I.3}$$

Maintenant supposons que $1 < p < \infty$ et $v \in L^q([0,T])$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ On a, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
\mid \int_0^T v(\varepsilon) \int_0^{\varepsilon} (\varepsilon-\tau)^{\alpha-1} u(\tau) d\tau d\varepsilon \mid &= \mid \int_0^T v(\varepsilon) \int_0^{\varepsilon} \tau^{\alpha-1} u(\varepsilon-\tau) d\tau d\varepsilon \mid \\
&\leq \int_0^T \mid v(\varepsilon) \mid \int_0^{\varepsilon} \tau^{\alpha-1} \mid u(\varepsilon-\tau) \mid d\tau d\varepsilon \\
&= \int_0^T \tau^{\alpha-1} d\tau \int_{\tau}^T \mid v(\varepsilon) \mid\mid u(\varepsilon-\tau) \mid d\varepsilon \\
&\leq \int_0^T \tau^{\alpha-1} d\tau (\int_{\tau}^T \mid v(\varepsilon) \mid^q d\varepsilon)^{\frac{1}{q}} (\int_{\tau}^T \mid u(\varepsilon-\tau) \mid^p \mid d\varepsilon)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{T^{\alpha}}{\alpha} \parallel u \parallel_{L^p([0,T])} \parallel v \parallel_{L^q([0,T])}
\end{aligned} \tag{I.4}$$

On considère la fonctionnelle $H_u : L^q([0,T], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$H_u(v) = \int_0^T [\int_0^{\varepsilon} (\varepsilon-\tau)^{\alpha-1} u(\tau) \mid d\tau] v(\varepsilon) d\varepsilon \tag{I.5}$$

D'après (I.4), il est évident que $H_u \in (L^q([0,T]), \mathbb{R})'$où $H_u \in (L^q([0,T]), \mathbb{R})'$ désigne le dual de l'espace $H_u \in (L^q([0,T]), \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. De plus, par (I.4),(2.2.3) et le théorème de représentation de Riesz, il existe $\omega \in L^p([0,T], \mathbb{R})$ tel que

$$\int_0^T \omega(\varepsilon) v(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^T [\int_0^{\varepsilon} (\varepsilon-\tau)^{\alpha-1} u(\tau) d\tau] v(\varepsilon) d\varepsilon \tag{I.6}$$

et

$$\|\omega\|_{L^p([0,T])} \leq \frac{T^\alpha}{\alpha}\|u\|_{L^p([0,T])} \tag{I.7}$$

pour tout $v \in (L^q([0,T],\mathbb{R})$, ainsi, on a par (I.6)

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\omega(\varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\varepsilon (\varepsilon-\tau)^{\alpha-1}u(\tau)d\tau = I_{0^+}^\alpha u(\varepsilon)$$

pour $\varepsilon \in [0,T]$ ce qui signifie que

$$\|I_{0^+}^\alpha u\|_{L^p([0,T])} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|\omega\|_{L^p([0,T])} \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|u\|_{L^p([0,T])} \tag{I.8}$$

et ceci d'après (I.7). En combinant (I.3) et (I.8) on obtient l'inégalité (I.2) La démonstration est achevée.

Proposition 2.2.3 ([11, 12]) Soit $\alpha > 0$, on a

1. $I_{a^+}^\alpha u(a) = 0$ pour $u \in C([a.b])$,
2. $I_{a^+}^\alpha : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$ est bien défini

Preuve :

1)Évident d'après la définition de l'intégrale fractionnaire.

2) Soit $u \in C([a,b])$ et soit $t_1, t_2 \in [a,b]$ tels que $t_1 \longrightarrow t_2$. On suppose par exemple que $t_2 < t_1$, alors

$$\begin{aligned}
|I_{a^+}^\alpha u(t_1) - I_{a^+}^\alpha u(t_2)| &\leq \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}u(s)ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}u(s)ds\right| \\
&= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_a^{t_2}(t_1-s)^{\alpha-1}u(s)ds + \int_{t_2}^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}u(s)ds \right.\\
&\qquad \left. - \int_a^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}u(s)ds\right] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_2}((t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1})\|u\|_\infty \\
&\qquad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\int_{t_1}^{t_2}(t_1-s)^{\alpha-1}ds)\|u\|_\infty \\
&\leq \frac{\|u\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(t_1-a)^\alpha - (t_2-a)^\alpha\right]
\end{aligned}$$

Donc $\left|I^{\alpha}_{a^+}u(t_1) - I^{\alpha}_{a^+}u(t_2)\right| \to 0 \quad$ quand $t_1 \longrightarrow t_2$

D'où le résultat .

Proposition 2.2.4 ([12, 11]) L'opérateur $I^{\alpha}_{a^+}AC([a,b]) \to AC([a,b])$ est bien défini

Preuve : Soit $u \in AC([a,b])$.

Étape 1 :$I^{\alpha}_{a^+}u(t)$ est dérivable presque partout puisque

$$I^{\alpha}_{a^+}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}u(s)ds$$

alors

$$\frac{d}{dt}I^{\alpha}_{a^+}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}u(s)ds.$$

Comme $f \in AC([a,b])$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I^{\alpha}_{a^+}u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left[u(a) + \int_a^s u'(\tau)d\tau\right]ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}u(a)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\left[\int_a^s u'(\tau)d\tau\right]ds
\end{aligned}$$

Et d'après la formule de Dirichlet

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I^{\alpha}_{a^+}u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}u(a)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t u'(\tau)ds\left[\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}ds\right]d\tau \\
&= \frac{u(a)}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dt}\frac{(t-a)^{\alpha}}{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t u'(t)[\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}ds]d\tau \\
&= \frac{u(a)}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t u'(t)[\int_\tau^t (\alpha-1)(t-s)^{\alpha-1}ds]d\tau \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}u'(\tau)(t-\tau)^{\alpha-2}d\tau \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u(a) + I^{\alpha}_{a^+}u'(t)
\end{aligned}$$

Et on conclut en utilisant la proposition (2.0.1)

Étape 2 : $D(I^{\alpha}_{a^+}u)$ est intégrable .

on a d'après le résultat précédent

$$\frac{d}{dt}I^{\alpha}_{a^+}u(t) = \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u(a) + I^{\alpha}_{a^+}u'(t).$$

On pose

$v(t) = u'(t)$et $h(t) = \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}u(a)$; les fonctions v et h sont intégrables sur $[a, b]$ et puisque

$$\frac{d}{dt}I^{\alpha}_{a^+}u(t) = v(t) + h(t),$$

alors $D(I^{\alpha}_{a^+}u)$ est intégrable.

Théorème 2.2.5 (propriété du semi-groupe)[12] Soit $\alpha, \beta \geq 0$ et $u \in L^1([a.b])$, alors :

$I^{\alpha}_{a^+}(I^{\beta}_{a^+}u) = I^{\alpha+\beta}_{a^+}u$

2. $I^{\alpha}_{b^-}(I^{\beta}_{b^-}u) = I^{\alpha+\beta}_{b^-}u$

Preuve : on a

$$I^{\alpha}_{a^+}I^{\beta}_{a^+}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(\int_a^t (s-\tau)^{\beta-1}u(\tau)d\tau)ds$$

En vue de la proposition (2.0.1), les intégrales existent, et par la formule de Dirichlet, on obtient

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a^+}(I^{\beta}_{a^+}u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}u(\tau)dsd\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t u(\tau)(\int_\tau^t (t-s)^{\alpha-1}(s-\tau)^{\beta-1}ds)d\tau \end{aligned}$$

La substitution $s = \tau + \mu(t-\tau)$ nous donne

$$I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau) \left(\int_0^1 [(t-\tau)(1-\mu)]^{\alpha-1} \left[\mu(t-\tau)^{\beta-1}(t-\tau)\right] d\mu \right) d\tau$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\beta+\alpha-1} \left(\int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1} \mu^{\beta-1} d\mu \right) d\tau$$

D'après la proposition(2.1.2), on a

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 (1-\mu)^{\alpha-1} \mu^{\beta-1} d\mu = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

Ainsi, on a

$$I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 f(\tau)(t-\tau)^{\alpha+\beta-1} d\tau = I_{a^+}^{\alpha+\beta} u$$

presque partout sur [a,b]
D'après la proposition (2.2.3), si $u \in C([a,b])$ alors $I_{a^+}^{\alpha} u \in C([a,b])$, par conséquence $I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} \in C([a,b])$ et $I_{a^+}^{\alpha+\beta} u \in C([a,b])$. Puisque ces deux fonctions continues coïncident presque partout, il doivent coïncider partout, de la même manière, on montre que $I_{b^-}^{\alpha} - I_{b^-}^{\beta} u(t) = I_{b^-}^{\alpha+\beta} u(t)$

Proposition 2.2.6 ([11]) Si $0 < \alpha < 1, 1 < p < \frac{1}{\alpha}$ alors les opérateurs d'intégrations fractionnaires $I_{a^+}^{\alpha}$ et $I_{b^-}^{\alpha}$ sont bornés de L^p dans L^q avec $q = \frac{p}{1-\alpha p}$

Proposition 2.2.7 (Intégration par parties)[12, 11] soit $u \in L^p([a,b]), v \in L^q([a,b])$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$, alors on a

$$\int_a^b \left(I_{a^+}^{\alpha} u(t)\right) v(t) dt = \int_a^b \left(I_{b^-}^{\alpha} v(t)\right) u(t) dt. \tag{2.1}$$

Preuve :
Étape 1 : les deux intégrales précédentes sont convergentes.

En effet, d'après l'inégalité de **Hölder**

$$\left|\int_a^b (I_{b^-}^{\alpha} v(t))u(t)dt\right| \leq \|u\|_{L^p}\|I_{b^-}^{\alpha} v\|_{L^{p'}}$$

avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$
Mais la question qui se pose est :a-t'on $\|I_{b^-}^{\alpha} v\|_{L^{p'}} < +\infty$
D'après (2.2.6), alors

$$v \in L^q([a,b]) \Longrightarrow I_{b^-}^{\alpha} v \in L^{\frac{q}{1-\alpha q}}([a,b]) \Longrightarrow \|I_{b^-}^{\alpha} v\|_{L^{\frac{q}{1-\alpha q}}} < +\infty$$

Or on sait que si $p_1 > p_2 \geq 1$ soit que si $p_1 > p_2 > 1$, alors
$L^{p_1} \subset L^{p_2}$ et $\|u\|_{L^{p_2}} \leq c\|u\|_{L^{p_1}}, \forall u \in L^{p_1}$ pour un certain $\varepsilon > 0$
par conséquent ,$\|I_{b^-}^{\alpha} v\|_{L^{p'}} \leq \|I_{b^-}^{\alpha} v\|_{L^{\frac{q}{1-\alpha q}}}$ car $\frac{q}{1-\alpha q} > p' \Leftrightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q} < 1+\alpha$.
Étape 2 : Montrons l'égalité (2.1) On a

$$\int_a^b (I_{a^+}^{\alpha} u(t))v(t)dt = \int_a^b \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}u(s)ds\right]v(t)dt$$

On utilise la formule de **Dirichlet**, donc on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}u(s)ds\right]v(t)dt &= \int_a^b \frac{1}{\Gamma(\alpha)}u(s)\left[\int_s^b (t-s)^{\alpha-1}v(t)dt\right]ds\\ &= \int_a^b u(s)\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_s^b (t-s)^{\alpha-1}v(t)dt\right]ds\\ &= \int_a^b u(s)\left[I_{b^-}^{\alpha} v(s)\right]ds\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Théorème 2.2.8 Soit $\alpha > 0$. Supposons que $(u_n)_{n\geq 1}$ une de fonction continue uniformément convergente sur [a,b], alors

$$(\lim_{n\longmapsto+\infty} I_{a^+}^{\alpha} u_n)(t) = (I_{a^+}^{\alpha} \lim_{n\longmapsto+\infty} u_n)$$

En particulier la suite de fonction $(I_{a^+}^{\alpha} u_n)_{n\geq 1}$ est uniformément convergente.

Preuve : On note la limite de la suite $(u_n)_{n>0}$ par u. Il est bien connu que u est continue On trouve alors

$$\begin{aligned}
|I_{a^+}^{\alpha}u_n(t) - I_{a^+}^{\alpha}u(t)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t [u_n(s)-u(s)](t-s)^{\alpha-1}ds\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t |u_n(s)-u(s)|(t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|u_n-u\|_\infty \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|u_n-u\|_\infty (t-a)^{\alpha} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|u_n-u\|_\infty (b-a)^{\alpha}
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$|I_{a^+}^{\alpha}u_n - I_{a^+}^{\alpha}u|_\infty \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\|u_n-u\|_\infty (b-a)^{\alpha}$$

qui converge vers zéro lorsque $n \to +\infty$ uniformément pour tout $t \in [a,b]$.

2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville quand $0 < \alpha < 1$

Définition 2.3.1 Les dérivées fractionnaire à gauche et à droite d'ordre $0 < \alpha < 1$ de la fonction $u : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ sont par

$$\begin{aligned}
D_{a_+}^{\alpha}u(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t (t-s)^{-\alpha}u(s)ds \\
&= \frac{d}{dt}I_{a^+}^{1-\alpha}u(t), \quad t \in [a,b]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{b_-}^{\alpha}u(t) &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_t^b (s-t)^{-\alpha}u(s)ds \\
&= -\frac{d}{dt}I_{b^-}^{1-\alpha}u(t), \quad t \in [a,b]
\end{aligned}$$

R Il y'a différence fondamentale entre les dérivées d'ordre entier et les dérivées d'ordre fractionnaire : les premiers sont opérateurs locaux par contre ces dernier ne me sont pas . le sens u de lo mot local ici est comme suite : pour calculer $D^n u(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$, il suffit de savoir u dans un voisinage asser petit de t.cela découle de la représentation classique de $D^n u(t)$ comme une limite d'un quotient des différences .tout fois, pour calculer $D^\alpha_{a_+} u(t)$ pour $\alpha \notin \mathbb{N}$, la définition nous devons connaitre u tout au long de l'intérval $[a, t]$

Lemme 2.3.1 [11, 12] soit $u \in AC([a, b])$ et $0 < \alpha < 1$. Alors $D^\alpha_{a^+} u$ existe presque partout sur $[a, b]$. De plus $D^\alpha_{a^+} u \in L^p([a, b])$ pour $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ et

$$D^\alpha_{a_+} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f(a)}{(t-a)^\alpha} + \int_a^t u'(s)(t-s)^{-\alpha} ds \right) \tag{2.2}$$

Preuve :

Étape 1 : si $u \in AC([a, b])$, alors $D^\alpha_{a^+} u$ existe presque partout. En effet :d'après (2.2.4), si $e \in AC([a, b])$ alors $I^{1-\alpha}_{a^+} u \in AC([a, b)]$, et donc $DI^{1-\alpha}_{a^+} u = D^\alpha_{a^+} u$ a existe presque partout .

Étape 2 : si $u \in AC([a, b])$, alors l'égalité (2.2) est vérifiée. On a

$$\begin{aligned}
D^\alpha_{a^+} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} u(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \left[u(a) + \int_a^s u'(\tau) d\tau \right] (t-s)^{-\alpha} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left[f(a). \int_a^t \frac{dt}{(t-s)^\alpha} + \int_a^t \int_a^s u'(\tau)(t-s)^{-\alpha} d\tau ds \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{u(a)}{(t-a)^\alpha} + \frac{d}{dt} \int_a^t \int_a^s u'(\tau)(t-s)^{-\alpha} d\tau ds \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{u(a)}{(t-a)^\alpha} + \frac{d}{dt} \int_a^t u'(s) \frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} d\tau \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{u(a)}{(t-a)^\alpha} + \int_a^t u'(s)(t-s)^{-\alpha} ds \right)
\end{aligned}$$

et ceci, en utilisant la formule de **Dirichlet**.

Étape 3 :$D^{\alpha}_{a^+}u \in L^p([a,b],\mathbb{R})$ pour $1 \leq p \leq \frac{1}{a}$

On a

$$\int_a^b |D^{\alpha}_{a^+}f(t)|^p dt = \int_a^b \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^t f'(s)(t-s)^{-\alpha}ds\right]^p dt,$$

et puisque

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b\left[\int_a^t f'(s)(t-s)^{-\alpha}ds\right]^p dt &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b\left[\int_a^b f'(s)(t-s)^{-\alpha}ds\right]^p dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b (b-a)^{-\alpha p}\left[\int_a^b ds\right]^p dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b (b-a)^{-\alpha p+1}\|f'\|^p_{L^1}dt \\ &= \frac{(b-a)^{-\alpha p+1}}{\Gamma(1-\alpha)}\|f'\|^p_{L^1} < \infty\end{aligned}$$

De plus $\int_a^b \frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}}dt < \infty$ nous donne.

$$\| D^{\alpha}_{a^+}f \|^p_{L^P} \leq \int_a^b \frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}}dt + \frac{(b-a)^{-\alpha p+1}}{\Gamma(1-\alpha)} \| f' \|^p_{L^1} < \infty$$

D'où le résultat.

Notation : pour $\beta < 0$, on introduit la notation suivante.

$$D^{\beta}_{a^+} = I^{-\beta}_{a^+}$$

2.4 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville dans le cas général

Définition 2.4.1 la dérivée fractionnaire aux sens de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction f est définie par

$$\begin{aligned}D^{\alpha}_{a^+}f(t) &= D^n I^{n-\alpha}_{a^+}f(t) \\ &= \frac{d^n}{dt^n}I^{n-\alpha}_{a^+}f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)ds,\ t > a\end{aligned}$$

Ici $n = [\alpha] + 1$

On a une autre définition de la dérivée fractionnaire à droite au sens de Riemann-Liouville $D^{\alpha}_{b^-}f(t)$ qui est donnée par la formule suivante

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{b^-}f(t) &= (-1)^n D^n I^{n-\alpha}_{b^-} f(t) \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} I^{n-\alpha}_{b^-} f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f(s)ds \quad t < b \end{aligned}$$

R Pour $\alpha = n$, on a.
1- $D^{\alpha}_{a^+} f = D^n f$
2- $D^{\alpha}_{b^-} f = (-1)^n D^n f$

R L'opérateur $D^{\alpha}_{a^+}$ est linéaire.
L'exemple suivant nous donne comment calculer de la dérivée fractionnaire d'un monôme.

■ **Exemple 2.2** 1. Pour α et $\beta > -1$

$$D^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-a}$$

2. pour $t > a, \alpha - 1 > 0$, on a

$$D^{\alpha-1}_{a^+}(t-a)^{\alpha-1} = \Gamma(\alpha)$$

3. si C est une constante , alors

$$D^{\alpha}_{a^+}C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

4. pour $t > 0, \alpha > 0$, on a

$$D^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\alpha-1} = 0$$

Proposition 2.4.1 [11, 12] Soit $f \in L^1([a,b])$, alors on a .

$$D^{\alpha}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+} f = f$$

Preuve : Puisque $f \in L^1([a,b])$ alors d'après (2.0.1), $I^{\alpha}_{a^+} f \in L^1([a,b])$. On a donc

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+} f(t) &= D^{n}_{a^+} I^{n-\alpha}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+} f(t) \\ &= D^{n}_{a^+} I^{n-\alpha+\alpha}_{a^+} f(t) \\ &= D^{n}_{a^+} I^{n}_{a^+} f(t) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

■

Lemme 2.4.2 [12, 13] L'équation différentielle

$$D^{\alpha}_{a^+} u(t) = 0$$

admet comme unique solution

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j (t-a)^{\alpha-j},$$

où $c_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, ..., n$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+} u(t) = 0 &\Leftrightarrow D^{n} I^{n-\alpha}_{a^+} u(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow I^{n-\alpha}_{a^-} u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (t-a)^j \\ &\Rightarrow D^{n-\alpha}_{a^+} I^{n-\alpha}_{a^+} u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j D^{n-\alpha}_{a^+} (t-a)^j \\ &\Rightarrow u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} (t-a)^{j-n+\alpha} \\ &\Rightarrow u(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\Gamma(j)}{\Gamma(j-n+\alpha)} (t-a)^{j-n+\alpha-1} \\ &\Rightarrow u(t) = \sum_{j=1}^{n} c'_j (t-a)^{j-n+\alpha-1} \\ &\Rightarrow u(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j (t-a)^{\alpha-j} \end{aligned}$$

Inversement, on a

$$\begin{aligned} u(t)=\sum_{j=1}^{n}c_j(t-a)^{\alpha-j} &\Rightarrow D^{\alpha}_{a^+}u(t)=D^{\alpha}_{a^+}\sum_{j=1}^{n}c_j(t-a)^{\alpha-j}\\ &\Rightarrow D^{\alpha}_{a^+}u(t)=\sum_{j=1}^{n}c_jD^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\alpha-j}\\ &\Rightarrow D^{\alpha}_{a^+}u(t)=\sum_{j=1}^{n}c_j.0=0 \end{aligned}$$

Proposition 2.4.3 [12, 13] si $D^{\alpha}_{a^+}u(t)\in L^1([a,b])$, alors

$$I^{\alpha}_{a^+}D^{\alpha}_{a^+}u(t)=u(t)+\sum_{j=1}^{n}c_j(t-a)^{\alpha-j}$$

où $c_j\in\mathbb{R}, j=1,2,...,n$

Preuve : On a d'après le lemme précédent que

$$D^{\alpha}_{a^+}u(t)=0\Leftrightarrow u(t)+\sum_{j=1}^{n}c_j(t-a)^{\alpha-j} \tag{2.3}$$

puisque

$$I^{\alpha}_{a^+}D^{\alpha}_{a^+}u(t)=u(t)+\sum_{j=1}^{n}c_j(t-a)^{\alpha-j}$$

est équivalente à

$$I^{\alpha}_{a^+}D^{\alpha}_{a^+}u(t)-u(t)=\sum_{j=1}^{n}c_j(t-a)^{\alpha-j}$$

on pose

$$y(t)=I^{\alpha}_{a^+}D^{\alpha}_{a^+}u(t)-u(t)$$

Alors d'après la relation (2.3), on obtient

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}y(t)=0 &\Longleftrightarrow D^{\alpha}_{a^+}(I^{\alpha}_{a^+}D^{\alpha}_{a^+}u(t)-u(t))=0\\ &\Longleftrightarrow D^{\alpha}_{a^+}I^{\alpha}_{a^+}D^{\alpha}_{a^+}u(t)-D^{\alpha}_{a^+}u(t)=0\\ &\Longleftrightarrow D^{\alpha}_{a^+}u(t)-D^{\alpha}_{a^+}u(t)=0 \end{aligned}$$

Théorème 2.4.4 [11, 14] Supposons que $D_{a^+}^{\alpha} f, D_{a^+}^{\alpha} g$ existent alors

$$\int_a^b \left(D_{a^+}^{\alpha} f(t)\right) g(t) dt = \int_a^b f(t) \left(D_{b^-}^{\alpha} g(t)\right) dt$$

Preuve : on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left(D_{a^+}^{\alpha} f(t)\right) g(t)dt &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b \frac{d}{dt}\left[\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s)ds\right] g(t)dt \\
&= \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} g(t) \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s)ds\right]_{t=a}^{t=b} \\
&- \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b \left[\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s)ds\right] g'(t)dt \\
&= \frac{g(b)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b (b-s)^{-\alpha} f(s)ds \\
&- \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b \left[\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s)ds\right] g'(t)dt \\
&= \frac{g(b)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b (b-s)^{-\alpha} f(s)ds \\
&- \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b \left[\int_s^b (t-s)^{-\alpha} g'(t)dt\right] f(s)ds \\
&= \frac{g(b)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b (b-s)^{-\alpha} f(s)ds \\
&+ \int_a^b \left[-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_s^b (t-s)^{\alpha} g'(t)dt\right] f(s)ds \\
&= \frac{g(b)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b (b-s)^{-\alpha} f(s)ds \\
&+ \int_a^b \left[-D_{b^-}^{\alpha} g'(s)\right] f(s)ds \\
&= \frac{g(b)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b (b-s)^{-\alpha} f(s)ds \\
&+ \int_a^b \left({}^{c}D_{b^-}^{\alpha} g(s)\right) f(s)ds \\
&= \frac{g(b)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b (b-s)^{-\alpha} f(s)ds \\
&+ \int_a^b \left[D_{b^-}^{\alpha} g(s) - \frac{g(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-s)^{-\alpha}\right] f(s)ds \\
&= \frac{g(b)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b (b-s)^{-\alpha} f(s)ds \\
&+ \int_a^b \left[D_{b^-}^{\alpha} g(s)\right] f(s)ds - \frac{g(b)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b (b-s)^{-\alpha} f(s)ds \\
&= \int_a^b \left(D_{b^-}^{\alpha} g(s) g(s)\right) f(s)ds.
\end{aligned}$$

Théorème 2.4.5 soit $\alpha > 0$. Supposons que $(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions continues uniformément convergente sur $[a,b]$ et que $D^{\alpha}_{a+}U_n$ existe pour tout n. De plus, supposons $(D^{\alpha}_{a+}U_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[a,+\epsilon,b]$, pour tout $\epsilon > 0$ alors, pour tout $t \in [a,b]$

$$(\lim_{n\to+\infty} D^{\alpha}_{a+}U_n(t) = (D^{\alpha}_{a+} \lim_{n\to+\infty}))$$

Preuve : La démonstration est basée sur la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire ainsi que le **Théorème**(2.2.8)

2.5 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.5.1 La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens **Caputo** d'une fonction $f \in AC([a,b],\mathbb{R})$ est définie par

$$\begin{aligned} {}^cD^{\alpha}_{a+}f(t) &= I^{n-\alpha}_{a+}D^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^n(s)ds \quad t > a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^cD^{\alpha}_{b-}f(t) &= (-1)^n I^{n-\alpha}_{a+}D^n f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds \quad t < b \end{aligned}$$

R L'opérateur ${}^cD^{\alpha}_{a+}$ est linéaire.

R ([11, 12]) Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors

1. ${}^cD^{\alpha}_{a+}f = f^n$, et
2. ${}^cD^{\alpha}_{b-}f = (-1)^n f^{(n)}$.

En particulier ; si $\alpha = 0$, on a ${}^cD^0_{a+}f =^c D^0_{b-}f = f$

Proposition 2.5.1 [12, 13] Supposons que $f \in AC^n([a,b])$, alors

$$^{c}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = D^{\alpha}_{a^+}\left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(t-a)^k}{k!}\right)$$

pour $n-1 < \alpha < n$

La quantité

$$P_{n-1}[f,a](t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{den}(t-a)^k$$

est appelée le polynôme de **Taylor** d'ordre n centré au point a

Preuve : On a

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}[f(t) - P_{n-1}[f,a](t)] &= D^n I^{n-\alpha}_{a^+}(f(t) - P_{n-1}[f,a](t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1})(f(s) - P_{n-1}[f,a](s))ds \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par parties, on trouve que

$$\begin{aligned} J &= \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}(f(s) - P_{n-1}[f,a](s))ds \\ &= \int_a^s \frac{(t-s)^{(n-\alpha)}}{n-\alpha}(Df(s) - DP_{n-1}[f,a](s))ds \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I^{n-\alpha}_{a^+}[f(x) - P_{n-1}[f,a](x)] &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{(n-\alpha)}(Df(t) - DP_{n-1}[f,a](t)))dt \\ &= \frac{1}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha}[Df(t) - DP_{n-1}[f,a](t)]dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha}[Df(t) - DP_{n-1}[f,a](t)]dt \\ &= I^{n-\alpha+1}_{a^+}D(f(x) - P_{n-1}[f,a](x)) \end{aligned}$$

on refait l'opération n fois,on obtient

$$\begin{aligned} I^{n-\alpha}_{a^+}(f(x) - P_{n-1}[f,a](x)) &= I^{n-\alpha+n}_{a^+}D^n(f(x) - P_{n-1}[f,a](x)) \\ &= I^n_{a^+}I^{n-\alpha}_{a^+}D^n(f(x) - P_{n-1}[f,a](x)) \\ &= I^n_{a^+}I^{n-\alpha}_{a^+}D^n f(x) - I^n_{a^+}I^{n-\alpha}_{a^+}D^n P_{n-1}[f,a](x) \\ &= I^n_{a^+}I^{n-\alpha}_{a^+}D^n f(x) \end{aligned}$$

car $D^n P_{n-1}[f,a](x) = 0$. çeçi implique que

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a^+}(f(x) - P_{n-1}[f,a](x)) &= D^n I^{n-\alpha}_{a^+} f(x) \\ &= D^n I^n_{a^+} I^{n-\alpha}_{a^+} D^n f(x) \\ &= I^{n-\alpha}_{a^+} D^n f(x) \\ &=^c D^{\alpha}_{a^+} f(x) \end{aligned}$$

Corollaire 2.5.2 [11, 12, 13] Supposons que $D^{\alpha}_{a^+} f$ et $D^{\alpha}_{a^+} f$ existent. Alors

$${}^c D^{\alpha}_{a^+} f(x) = D^{\alpha}_{a^+} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}, \quad t \in [a,b]$$

$${}^c D^{\alpha}_{b^-} f(t) = D^{\alpha}_{b^-} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(b-t)^{k-\alpha}, \quad t \in [a,b]$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$, on a

$${}^c D^{\alpha}_{a^+} f(t) = D^{\alpha}_{a^+} f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}, \quad t \in [a,b]$$

$${}^c D^{\alpha}_{b^-} f(t) = D^{\alpha}_{b^-} f(t) - \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-t)^{1-\alpha}, \quad t \in [a,b]$$

Preuve : D'après la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned} {}^c D^{\alpha}_{a^+} f(x) &= D^{\alpha}_{a^+} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{k!} D^{\alpha}[(x-a)^k] \\ &= D^{\alpha}_{a^+} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha} \end{aligned}$$

Lemme 2.5.3 [12, 13] Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$ Alors

$${}^c D^{\alpha}_{a^+} I^{\alpha}_{a^+} f = f$$

Preuve : Puisque

$$({}^c D^{\alpha}_{a^+} f)(x) = D^{\alpha}_{a^+} f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)}(x-a)^{j-\alpha}$$

alors, en remplaçant f par $I_{a^+}^{\alpha}f$, on trouve :

$$({}^{c}D_{a^+}^{\alpha}I_{a^+}^{\alpha}f)(x) = D_{a^+}^{\alpha}I_{a^+}^{\alpha}f(x) - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}(I_{a^+}^{\alpha}f)^{(j)}(a) = D_{a^+}^{\alpha}I_{a^+}^{\alpha}f(x) = f(x)$$

car $(I_{a^+}^{\alpha}f)^{(j)}(a) = 0$; d'où le résultat.

Corollaire 2.5.4 [11, 12] Sous les hypothèses du corolaire (2.5.2) ; on à

$${}^{c}D_{a^+}^{\alpha}f = D_{a^+}^{\alpha}f$$

si et seulement si

$$f^{(k)}(a) = 0$$

pour $k = 0, 1..., n-1$

Preuve : immédiatement

■ **Exemple 2.3** soit $f(x) = (x-a)^{\beta}$ pour certain $\beta \geq 0$ alors

$${}^{c}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \beta \in \{0, 1, 2..., n-1\} \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}, & si \quad \beta \in \mathbb{N} \; et \; \beta \geq n, \; ou \; \beta \notin \mathbb{N} \; et \; \beta \geq n \end{cases}$$

■

R on a

$${}^{c}D_{a^+}^{\alpha}C = 0$$

où C est une constante.

Lemme 2.5.5 [11, 13] L'équation différentielle

$${}^{c}D_{a^+}^{\alpha}u(t) = 0$$

admet une unique solution

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (t-a)^j$$

avec $c_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Preuve : Puisqu'on à

$$^{c}D^{\alpha}_{a^+}u(t) = I^{n-\alpha}_{a^+}D^n u(t)$$

alors

$$\begin{aligned} ^{c}D^{\alpha}_{a^+}u(t) = 0 &\Rightarrow I^{n-\alpha}_{a^+}D^n u(t) = 0 \\ &\Rightarrow D^{n-\alpha}(I^{n-\alpha}_{a^+}D^n)u(t) = D^{n-\alpha}(0) \\ &\Rightarrow D^n u(t) = 0 \\ &\Rightarrow u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j(t-a)^j \end{aligned}$$

Inversement,si

$$u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j(t-a)^j$$

alors

$$\begin{aligned} ^{c}D^{\alpha}_{a^+}u(t) &=^{c} D^{\alpha}_{a^+}(\sum_{j=0}^{n-1} c_j(t-a)^j) \\ &= I^{n-\alpha}D^n(\sum_{j=0}^{n-1} c_j(t-a)^j) \\ &= I^{n-\alpha}\sum_{j=0}^{n-1} c_j D^n(t-a)^j \\ &= I^{n-\alpha}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lemme 2.5.6 [11, 12] Si $u \in AC^n([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$I^{\alpha}_{a^+}\,^{c}D^{\alpha}_{a^+}u(t) = u(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^j$$

et

$$I^{\alpha}_{b^-}\,^{c}D^{\alpha}_{b^-}u(t) = u(t) - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{(j)}\frac{u^{(j)}(b)}{j!}(b-t)^j$$

En particulier, si $0 \leq \alpha \leq 1$ et $u \in AC([a,b],\mathbb{R})$ alors

$$I^{\alpha}_{a^+}({}^cD^{\alpha}_{a^+}u(t)) = u(t) - u(a)$$

et

$$I^{\alpha}_{b^-}({}^cD^{\alpha}_{b^-}u(t)) = u(t) - u(b)$$

Preuve : On a d'après le lemme précédent que

$$[{}^cD^{\alpha}_{a^+}u(t) = o] \Leftrightarrow [u(t) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j(t-a)^j] \tag{2.4}$$

puisque

$$I^{\alpha}_{a^+}{}^cD^{\alpha}_{a^+}u(t) = u(t) + \sum_{j=0}^{n-1} c_j(t-a)^j$$

alors, en posant

$$y(t) = I^{\alpha}_{a^+}{}^cD^{\alpha}_{a^+}u(t) - u(t)$$

on obtient, d'après la relation (2.4)

$$\begin{aligned} {}^cD^{\alpha}_{a^+}y(t) = 0 &\Leftrightarrow^c D^{\alpha}_{a^+}(I^{\alpha}_{a^+}{}^cD^{\alpha}_{a^+}u(t) - u(t)) = 0 \\ &\Leftrightarrow^c D^{\alpha}_{a^+}I^{\alpha}_{a^+}{}^cD^{\alpha}_{a^+}u(t) -^c D^{\alpha}_{a^+}u(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow^c D^{\alpha}_{a^+}u(t) -^c D^{\alpha}_{a^+}u(t) = 0 \end{aligned}$$

Théorème 2.5.7 [14, 11] Supposons que ${}^cD^{\alpha}_{a^+}f, {}^cD^{\alpha}_{b^-}g$ existent, alors

$$\int_a^b ({}^cD^{\alpha}_{a^+}f(t))g(t)dt = \int_a^b f(t)({}^cD^{\alpha}_{b^-}g(t))dt + g(b)I^{1-\alpha}_{a^+}f(b) - f(a)I^{1-\alpha}_{b^-}g(a)$$

Preuve : D'après (2.2.2) et (2.4.4) on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b ({}^cD^\alpha_{a^+}f(t))g(t)dt &= \int_a^b [D^\alpha_{a^+}f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}]g(t)dt \\
&= \int_a^b (D^\alpha_{a^+}f(t))g(t)dt - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b (t-a)^{-\alpha}g(t)dt \\
&= \int_a^b (D^\alpha_{a^+}f(t))g(t)dt - f(a)I^{1-\alpha}_{b^-}g(a) \\
&= \int_a^b (D^\alpha_{b^-}g(t))f(t)dt - f(a)I^{1-\alpha}_{b^-}g(a) \\
&= \int_a^b [{}^cD^\alpha_{b^-}g(t) + \frac{g(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-t)^{-\alpha}]f(t) - f(a)I^{1-\alpha}_{b^-}g(a) \\
&= \int_a^b ({}^cD^\alpha_{b^-}g(t))f(t)dt + \frac{g(b)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b (b-t)^{-\alpha}f(t)dt - f(a)I^{1-\alpha}_{b^-}g(a) \\
&= \int_a^b ({}^cD^\alpha_{b^-}g(t))f(t)dt + g(b)I^{1-\alpha}_{a^+}f(b) - f(a)I^{1-\alpha}_{b^-}g(a)
\end{aligned}$$

3. Existence de solutions pour un problème

D'après X.Su et S.Zhang [15]

Résumé
On étudie ici l'existence, l'unicité et la dépendance continues des solutions pour un problème aux limite non linéaire associés à une équation différentielle fractionnaire .

3.1 Introduction

Les équations différentielle fractionnaires ont acquis une importance considérable au cours des trois dernières décennies,en raison principalement de leurs diverses applications dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie. L'analyse des équations différentielles fractionnaires a été réalisée par divers auteurs.En ce qui concerne la recherche de solution et aussi de nombreuses applications pour les équations différentielles fractionnaires ,nous nous référons à Kilbas, Srivastava et Trujillo [16] et les références qui s'y trouvent. Les problèmes aux limites associés aux équations différentielles fractionnaires ont été discutés dans ([17, 18, 19, 20],). Bai et Lu [18] ont utilisé des théorèmes de point fixe sur un cône pour obtenir l'existence et la multiplicité de solutions positives pour un problème de type de Dirichlet de l'équation différentielle non linéaire fractionnaire

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t) + f(t,u(t)) = 0, \ t \in (0,1), \ 1 < \alpha \leq 2 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ est continue et D_{0+}^{α}est la dérivée fractionnaires au sens de Riemmen-Liouville. Cependant, comme il a été mentionné dans [19], la dérivée fractionnaire au ses de Riemmen-Liouville n'est pas adaptée à des valeurs aux limites qui sont non nulles. Ainsi Zhang [19] a étudie l'existence et la multiplicité de solution positive du problème

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t) = f(t,u(t)), \ t \in (0,1), \ 1 < \alpha \leq 2 \\ u(0) + u'(0) = 0, u(1) + u'(1) = 0 \end{cases}$$

avec la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ${}^{c}D_{0+}^{\alpha}$et un fonction positive continue $f : [0,1] \times [0,\infty) \to [0,\infty)$. L'existence de solutions de l'équation différentielle non linéaire fractionnaire

$$\begin{cases} {}^{c}D_{0+}^{\alpha}u(t) = g(t,u(t)), \ t \in (0,1), \ 1 < \alpha \leq 2 \\ u(0) = \alpha \neq 0, u(1) = \beta \neq 0 \end{cases}$$

a été discuté en utilisant la méthode de l transformée de Laplace dans [7] ,où $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée. En utilisant le théorème de point fixe de Schauder, Su [20] a montré un résultat d'existence pour le problème

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t) = f(t,v(t),D^{\mu}v(t)), \ t \in (0,1), \\ D_{0+}^{\beta}v(t) = f(t,u(t),D^{v}u(t)), \ t \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

où $1 < \alpha, \beta < 2, \mu, v > 0, \alpha - v \geq 1, \beta - \mu \geq 1, f, g : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données. Motivés par les résultats précédents,les auteurs présentent dans ce travail un problème aux limites associé à une équation différentielle fractionnaire impliquant ses conditions aux limite plus générales et un terme non linéaire dépendant de la dérivée fractionnaire de la fonction inconnue

$$\begin{cases} {}^cD_{0+}^{\alpha}u(t) = f(t, u(t), {}^c D_{0+}^{\beta}u(t)) \quad t \in [0,1], \\ a_1u(0) - a_2u'(0) = A, b_1u(1) + b_2u'(1) = B \end{cases} \tag{3.1}$$

où $1 < \alpha \leq 2, 0 < \beta \leq 1, a_i, b_j \geq 0, i = 1, 2, l = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 > 0etf :$ $[0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. Ils ont imposé une condition de croissance sur la fonction f pour montrer un résultat d'existence pour (3.1). Quand f est lipschitzienne par rapport aux deuxième et troisième variables, l'unicité de la solution et la dépendance de la solution à l'ordre α de l'opérateur différentiel, des valeurs limites A et B, et du terme non linéaire f sont également abordés.

3.2 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette section, nous avons d'abord imposer une condition de croissance sur f ce qui nous permet d'établir un résultat d'existence de la solution, et puis d'utiliser la condition de Lipschitz sur f pour montrer un théorème d'unicité pour le problème (3.1). L'approche ici est basée sur les théorèmes de point fixe de Schauder et de Banach. Soit $C([0, 1])$ l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur [0,1]. On définit l'espace

$$X = \{u \in C([0, 1], \mathbb{R}) \text{ avec } {}^cD_{0+}^{\beta}u \in C([0, 1], \mathbb{R})\}$$

muni de la norme

$$\|u\| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)| + \max_{t\in[0,1]} |{}^cD_{0+}^{\beta}u(t)|.$$

On peut facilement vérifier-que $(X, \|.\|)$ est un espace de Banach (voir [20], lemme 3.2) Maintenant, on présente la fonction de Green pour le problème aux limites associé à l'équation différentielle fractionnaire .

Lemme 3.2.1 Soit $1 < \alpha \leq 2$. Supposons que $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. Alors la solution unique de

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}_{0^+}u(t) = g(t,u(t)), \quad t \in (0,1), \ 1 < \alpha \leq 2 \\ a_1u(0) - a_2u'(1) = 0, \quad b_1u(1) + b_2u'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

est

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)g(s)ds$$

avec

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[(t-s)^{\alpha-1} - \frac{a_2b_1}{l}(1-s)^{\alpha-1} - \frac{a_1b_1}{l}(1-s)^{\alpha-1}t\right] \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left[-\frac{a_2b_2}{l}(1-s)^{\alpha-2} - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} - \frac{a_1b_2}{l}(1-s)^{\alpha-2}t\right] \ , \quad s \leq t \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}[-\frac{a_2b_1}{l}(1-s)^{\alpha-1} - \frac{a_1b_1}{l}(1-s)^{\alpha-1}t] \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left[-\frac{a_2b_2}{l}(1-s)^{\alpha-2} - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} - \frac{a_1b_2}{l}(1-s)^{\alpha-2}t\right] \ , \quad t \leq s \end{cases}$$

ici $l = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1$

Preuve :

On a d'après le lemme (2.5.6)

$$I^{\alpha}_{a^+}{}^cD^{\alpha}_{0^+}u(t) = I^{\alpha}_{a^+}g(t) \Leftrightarrow u(t) + \sum_{j=0}^{n-1} c_jt^j = I^{\alpha}_{a^+}g(t)$$

Donc

$$\begin{aligned} u(t) + c_0 + c_1t &= I^{\alpha}_{a^+}g(t) \\ &\Leftrightarrow u(t) = -c_0 - c_1t - I^{\alpha}_{a^+}g(t) \\ &\Leftrightarrow u(t) = -c_0 - c_1t - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds, \end{aligned}$$

et on utilisant les conditions aux limites, on obtient

$$c_0 = \frac{a_2}{l}[\frac{b_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}g(s)ds + \frac{b_2}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}g(s)ds]$$

et

$$c_1 = \frac{a_1}{l}[\frac{b_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}g(s)ds + \frac{b_2}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}g(s)ds]$$

par conséquant, on a

$$\begin{aligned} u(t) = & -\frac{a_2}{l}[\frac{b_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}g(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}g(s)ds] \\ & -\frac{a_1}{l}[\frac{b_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}g(s)ds + [\frac{b_2}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}g(s)ds] \\ & +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}g(s)ds, \end{aligned}$$

de la même manière, on peut obtenir la solution du problème aux limites avec conditions non homogènes suivantes

Lemme 3.2.2 La solution unique de

$$\begin{cases} {}^cD_{0+}^{\alpha}u(t) = 0, \ t \in (0,1), \\ a_1u(0) - a_2u'(0) = A, \ b_1u(1) + b_2u'(1) = B \end{cases} \tag{3.3}$$

est

$$u(t) = \frac{(b_1+b_2)A + a_2B}{l} + \frac{a_1B - b_1A}{l}t$$

Dans ce qui suit, on pose

$$\varphi(t) = \frac{(b_1+b_2)A + a_2B}{l} + \frac{a_1B - b_1A}{l}t$$

Lemme 3.2.3 Le problème (3.1)est équivalent à l'équation intégrale non linéaire

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),{}^cD_{0+}^{\beta}u(s))ds + \varphi(t) \tag{3.4}$$

Preuve : Soit u une solution générale du problème (3.1). Alors $u = w + \varphi$ où w est la solution du problème (3.2) en remplaçant $g(t)$ par $f(t,u(t),{}^cD_{0+}^{\beta}u(t))$ et φ est la solution du problème (3.3), Ici

$$w(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),{}^cD_{0+}^{\beta}u(s))ds$$

En effet puisque Ici

$${}^cD_{0+}^{\beta}w(t) = f(t,u(t),{}^cD_{0+}^{\beta}u(t))$$

Alors, d'après le lemme (2.5.6), on obtient

$$u(t) = -c_0 - c_1 t + I_{0^+}^{\alpha} f(t, u(t), ^c D_{0^+}^{\beta} u(t))$$

En effet :

$$\begin{aligned}
&^c D_{0^+}^{\beta} w(t) = f(t, u(t), ^c D_{0^+}^{\beta} u(t)) \\
&\Rightarrow I_{0^+}^{\alpha}, ^c D_{0^+}^{\alpha} w(t) = I_{0^+}^{\alpha} f(t, u(t), ^c D_{0^+}^{\beta} u(t)) \\
&\Rightarrow w(t) + c_0 + c_1 t = I_{0^+}^{\alpha} f(t, u(t), ^c D_{0^+}^{\beta} u(t)) \\
&\Rightarrow w(t) = -c_0 - c_1 t + I_{0^+}^{\alpha} f(t, u(t), ^c D_{0^+}^{\beta} u(t))
\end{aligned}$$

En utilisant les conditions aux limites homogènes, on trouve :

$$\begin{aligned}
w(t) = &-\frac{a_2}{l}(b_1 I_{0^+}^{\alpha} f(1, u(1), ^c D_{0^+}^{\beta} u(1)) + b_2 I_{0^+}^{\alpha-1} f(1, u(1), , ^c D_{0^+}^{\beta} u(1)) \\
&- \frac{a_1}{l} t [b_1 I_{0^+}^{\alpha} f(1, u(1), ^c D_{0^+}^{\beta} u(1)) + b_2 I_{0^+}^{\alpha-1} f(1, u(1), , ^c D_{0^+}^{\beta} u(1))] \\
&+ I_{0^+}^{\alpha} f(1, u(1), ^c D_{0^+}^{\beta} u(1))
\end{aligned}$$

qu'on peut la mettre sous la forme

$$w(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, u(s), ^c D_{0^+}^{\beta} u(s)) ds$$

La solution du problème (3.1) est sous la forme

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, u(s), ^c D_{0^+}^{\beta} u(s)) ds + \varphi(t)$$

Inversement, Soit u la solution de l'équation intégrale(3.4). On dénote le coté droit de l'équation (3.4) par

$$\begin{aligned}
v(t) = &I_{0^+}^{\alpha} f(t, u(t), ^c D_{0^+}^{\beta} u(t)) + \frac{-a_2 b_1 - a_1 b_1 t}{l} I_{0^+}^{\alpha} f(1, u(1), ^c D_{0^+}^{\beta} u(1)) \\
&+ \frac{-a_2 b_2 - a_1 b_2 t}{l} I_{0^+}^{\alpha-1} f(1, u(1), ^c D_{0^+}^{\beta} u(1)) + \frac{(b_1 + b_2)A + a_2 B}{l} \\
&+ \frac{(a_1 + B) + b_1 A}{l} t
\end{aligned}$$

En utilisant la remarque (2.4)(2.5)(2.5), les lemmes (2.5.5)(2.5.3)(2.5.3),le théorème (2.2.2) et la proposition (2.5.1), on obtient

$$\begin{aligned}
v'(t) &= DI^{\alpha}_{0^+}f(t,u(t),^c D^{\beta}_{0^+}u(t)) - \frac{a_1b_1}{l}I^{\alpha}_{0^+}f(1,u(1),^c D^{\beta}_{0^+}u(1)) \\
&- \frac{a_1b_2}{l}I^{\alpha-1}_{0^+}f(1,w(1),^c D^{\beta}_{0^+}u(1)) + \frac{(a_1B - b_1A)}{l} \\
&= I^{\alpha-1}_{0^+}f(t,u(t),^c D^{\beta}_{0^+}u(t)) - \frac{(a_1b_1)}{l}I^{\alpha}_{0^+}f(1,u(1),^c D^{\beta}_{0^+}u(1)) \\
&- \frac{a_1b_2}{l}I^{\alpha}_{0^+}f(1,w(1),^c D^{\beta}_{0^+}u(1)) + \frac{a_1B - b_1A}{l}
\end{aligned}$$

Et d'après la proposition (2.5.1) , On trouve après un calcul que

$$\begin{aligned}
{}^cD^{\alpha}_{0^+}v(t) &= D^{\alpha}_{0^+}[v(t) - v(0) - v'(0)t] \\
&= D^{\alpha}_{0^+}I^{\alpha}_{0^+}f(t,u(t),^c D^{\beta}_{0^+}u(t)) \\
&= f(t,w(t),^c D^{\beta}_{0^+}u(t))
\end{aligned}$$

c'est à dire

$${}^cD^{\alpha}_{0^+}u(t) = f(t,u(t),^c D^{\beta}_{0^+}u(t)).$$

On peut vérifier facilement que les conditions aux limites

$$a_1v(0) - a_2v'(0) = Ab_1v(1) - b_2v'(1) = B$$

Sont satisfaites. Par conséquent, u est une solution du problème (3.1). Le lemme (3.3) indique que la solution du problème (3.1) coinside avec le point fixe de l'opérateur T définit par

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),^c D^{\beta}_{0^+}u(s))ds + \varphi(t) \tag{3.5}$$

Avant dénoncer les résultats principaux de cette section, on aura besoin de ces deux lemmes

Lemme 3.2.4 Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\int_0^1 |G(t,s)|ds \leq \frac{2l + a_2b_2}{l\Gamma(\alpha)}$$

Preuve : En remplaçant l'expression de la fonction de Green et en utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |G(t,s)|ds \leq{}& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \frac{a_2b_1}{l}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}ds\right.\\
&+\frac{a_1b_1t}{l}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}ds + \frac{a_2b_2}{l}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}ds\\
&+\frac{a_1b_2t}{l}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(t^\alpha + \frac{a_2b_1+a_1b_1t}{l}) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{a_2b_2+a_1b_2t}{l}\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(1+\frac{a_2b_1+a_1b_1}{l}+\frac{a_2b_2+a_1b_2}{l}\right)\\
&= \frac{2l+a_2b_2}{l\Gamma(\alpha)}.
\end{aligned}
$$

43

Lemme 3.2.5 Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\int_0^1 \Big|\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\Big|ds \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}$$

Preuve : En remplaçant l'expression de la dérivée de la fonction de Green et en utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|ds \leq{}& \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (t-s)^{\alpha-2}ds + \frac{a_1b_1}{l\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}ds\\
&+\frac{a_1b_2}{l\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}ds\\
&= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{a_1b_1}{l\Gamma(\alpha+1)} + \frac{a_1b_2}{l\Gamma(\alpha)}\\
&\leq +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(1+\frac{a_1b_1}{l}+\frac{a_1b_2}{l})\\
&\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}
$$

On donne maintenant un premier résultat d'existence.

Théorème 3.2.6 Supposons que

$$\lim_{(|x|+|y|)\to\infty} \frac{\max_{t\in[0,1]}|f(t,x,y)|}{|x|+|y|} < K \tag{H_1}$$

avec

$$K =: \frac{l\Gamma(\alpha)}{4l + a_2 b_2}$$

Alors le problème (3.1) admet au moins une solution .

Preuve : La démonstration de ce théorème est basé sur le théorème de point fixe de Schauder pour cela, on pose

$$h(x,y) = max_{t\in[0,1]}|f(t(x,y))|$$

et on choisit

$$\epsilon = 1/2\left(K - \lim_{(|x|+|y|)\to\infty}\frac{h(x,y)}{(|x|+|y|)}\right)$$

il résulte de la condition (H_1) qu'il existe une constante $d_1 > 0$ tel que

$$h(x,y) \le (K-\epsilon)(|x|+|y|) \quad pour \quad |x|+|y| \ge d_1$$

Soit $M = max(h(x,y) : |x|+|y| \le d_1)$ et on choisit $d_2 > d_1$ telque $M/d_2 \le K - \epsilon$.

On obtient donc $h(x,y) \le (K-\epsilon)d_2$. pour $|x|+|y| \le d_2$. Par conséquant, $h(x,y) \le (K-\epsilon)c, (|x|+|y|) \le c$ pour tout $c < d_2|x|+|y| \ge d_1$

Soit $k_1 = \max_{t\in[0,1]}|\varphi(t)|, \quad k_2 = \max_{t\in[0,1]}|\varphi'(t)|, \quad k = (\max k_1, k_2/\Gamma(2-\beta)), \quad d_3 = 2Kk/\varepsilon \quad et \quad max\{d_2, d_3\}$ On définit l'ensemble

$$\mathcal{W} = \{u \in X; \| u \| \le d\}$$

Alors $\mathcal{W}$ est un ensemble convexe, fermé et borné de $\mathcal{X}$. De plus, pour tout $u \in \mathcal{W}$,

$$h\left(u(t), {}^c D^{\beta}_{0+}u(t)\right) \le (K-\varepsilon)d$$

Étape 1 : $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ est bien défini En effet, puisque T est défini par l'équation intégrale (3.5), alors $\mathcal{T}$vérifie le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} {}^c D^{\alpha}_{0+}(Tu)(t) = f(t, u(t), {}^c D^{\beta}_{0+}u(t)) \quad, t \in (0,1) \\ a_1(Tu)(0) - a_2(Tu)'(0) = A, \quad b_1(Tu)(1) + b_2(Tu)' = B \end{cases} \tag{3.6}$$

où $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \beta \leq 1$, $a_ib_i \geq 0 \quad i = 1,2, \quad l = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 > 0$, $f : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. Donc, on a

$$\begin{aligned} Tu(t) &= I^{\alpha}_{0^+} f(t, u(t), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(t)) \\ &+ \frac{-a_2b_1 - a_1b_1t}{l} I^{\alpha}_{0^+} f(1, u(1), {}^C D^{\beta}_{0^+} u(1)) \\ &+ \frac{-a_2b_2 - a_1b_2t}{l} I^{\alpha-1}_{0^+} f\left(1, u(1), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(1) + \varphi(t)\right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (Tu)'(t) = I^{\alpha-1}_{0^+} f(t, u(t), {}^C D^{\beta}_{0^+} u(t)) - \frac{a_1b_2}{l} I^{\alpha}_{0^+} f(1, u(1), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(1)) \\ - \frac{a_1b_2}{l} I^{\alpha-1}_{0^+} f(1, u(1), {}^C D^{\beta}_{0^+} u(1)) + \frac{a_1B - b_1A}{l} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}^c D^{\beta}_{0^+}(Tu)(t) &= I^{1-\beta}_{0^+}(Tu)'(t) \\ &= I^{\alpha-\beta}_{0^+} f(t, u(t), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(t)) - \frac{a_1b_1}{l} I^{\alpha-\beta+1}_{0^+} f(1, u(1), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(1)) \\ &- \frac{a_1b_2}{l} I^{\alpha-\beta}_{0^+} F f(1, u(1), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(1)) + I^{1-\beta}_{0^+} \frac{a_1B - b_1A}{l} \end{aligned}$$

alors de la continuité de la fonction f, on peut montrer, en utilisant le théorème de convergence dominé de Lebesgue, que $Tu, {}^c D^{\beta}_{0^+}(Tu) \in \mathcal{C}([0,1])$
Étape 2 : L'opérateur T envoi $\mathcal{W}$ dans lui-même,i.e., $T(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}$, en effet : pour tout $u \in \mathcal{W}$, on a

$$\begin{aligned} |Tu(t)| &\leq |\varphi(t)| + \int_0^1 |G(t,s) h(u(s), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(s))| ds \\ &\leq k_1 + d(K - \varepsilon) \int_0^1 |G(t,s)| ds \\ &\leq k_1 + d(K - \varepsilon) \frac{2l + a_2b_2}{l\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

De même, pour $0 < \beta < 1$, on a

$$\begin{aligned}
|{}^cD^{\beta}_{0^+}(Tu)(t))| = I^{1-\beta}_{0^+}(Tu)'(t) &= \Big|\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}(Tu)'(s)ds\Big| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}\left(|\varphi'(s)| + \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial s}(s,\tau)h(u(\tau)),{}^c D^{\beta}_{0^+}u(\tau)|d\tau\right) \\
&\leq \frac{K_2}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}ds + d(K-\varepsilon)\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}\left(\int_0^a |\frac{\partial G}{\partial s}(s,\tau)|d\tau\right) \\
&\leq \frac{k_2}{\Gamma(2-\beta)} + d(K-\varepsilon)\frac{2}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}$$

et pour $\beta = 1$

$$\begin{aligned}
|(Tu)'(t)| &= \Big|\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s,u(s),{}^c D^{\beta}_{0^+}u(s))ds + \varphi'(t)\Big| \\
&\leq |\varphi'(t) + \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)h(u(s),{}^c D^{\beta}_{0^+}u(s))|ds \\
&\leq k_2 + d(K-\varepsilon)\int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|ds \\
&\leq k_2 + d(K-\varepsilon)\frac{2}{\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\| Tu \| &\leq 2k + d(K-\varepsilon)\frac{(2l + a_2b_2)\Gamma(2-\beta) + 2l}{l\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\beta)} \\
&\leq d\frac{\varepsilon}{K} + d(K-\varepsilon)\frac{1}{K} = d
\end{aligned}$$

par conséquent, $T : \mathcal{W} \to \mathcal{W}$

Étape 3 : T est un opérateur continu En effet : pour u_n, n=0,1,2...et $u \in \mathcal{W}$

tels que $\lim_{n\to\infty} \parallel u_n - u \parallel = 0$, on a

$$\begin{aligned}
|Tu_n(t) - Tu(t)| &= \Big| \int_0^1 G(t,s) \Big(f(s, u_n(s), {}^C D^{\beta}_{0^+} u_n(s)) - f(s, u(s), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(s)) \Big) ds \Big| \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} \Big| f(t, u_n(t), {}^c D^{\beta}_{0^+} u_n(t)) - f(t, u(t), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(t)) \Big| \int_0^1 |G(t,s)| ds \\
&\leq \frac{2l + a_2 b_2}{l\Gamma(\alpha)} \max_{t\in[0,1]} |f(t, u_n(t), {}^c D^{\beta}_{0^+} u_n(t)) - f(t, u(t), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(t))|
\end{aligned}$$

et pour $0 < \beta < 1$, on a

$$\begin{aligned}
|{}^c D^{\beta}_{0^+}(Tu_n)(t) - {}^c D^{\beta}_{0^+}(Tu)(t)| &= \Big| \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} (Tu_n)'(s) - (Tu)'(s) \Big| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} \Big(\int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial s}(s,\tau)(f(\tau, u_n(\tau), {}^c D^{\beta}_{0^+} u_n(\tau)) \\
&- f(\tau, u(\tau), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(\tau))| d\tau) ds \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} |f(t, u_n(t), {}^c D^{\beta}_{0^+} u_n(t)) - f(t, u(t), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(t)| \\
&\times \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} (\int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial s}(s,\tau)| d\tau) ds \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} |f(t, u_n(t), {}^c D^{\beta}_{0^+} u_n(t) - f(t, u(t), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(t)| \\
&\times \frac{2}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} ds \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)} \max_{t\in[0,1]} |f(t, u_n(t), {}^c D^{\beta}_{0^+} u_n(t) - f(t, u(t), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(t
\end{aligned}$$

et pour $\beta = 1$, on a

$$\begin{aligned}
|(Tu_n)'(t) - (Tu)'(t)| &= \Big| \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \Big(f(s, u_n(s), {}^c D^{\beta}_{0^+} u_n(s) - f(s, u(s), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(s))) \Big) ds \Big| \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} \Big| f(t, u_n(t), {}^c D^{\beta}_{0^+} u_n(t)) - f(t, u(t), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(t))| \int_0^1 \Big| \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)| ds \\
&\leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \max_{t\in[0,1]} |f(t, u_n(t), {}^c D^{\beta}_{0^+} u_n(t)) - f(t, u(t), {}^c D^{\beta}_{0^+} u(t))|
\end{aligned}$$

Alors en vue de la continuité uniforme de la fonction f sur $[0,1] \times [-d,d] \times [-d,d]$, on obtient que T est continue.

Étape 4 : L'opérateur T est compact En effet ,soit $t, \tau \in [0,1]$ tels que $t < \tau$ et soit $N = \max_{t\in[0,1], u\in\mathcal{W}} |f(t, u(t),^c D_{0^+}^{\beta} u(t)| + 1$. Alors on a

$$\begin{aligned}
|Tu(t) - Tu(\tau)| &= |\int_0^1 (G(t,s) - G(\tau,s))f(s,u(s),^c D_{0^+}^{\beta}u(s))ds + \varphi(t) - \varphi(\tau)| \\
&\leq N(\int_0^t |G(t,s) - G(\tau,s)|ds + \int_t^\tau |G(t,s) - G(\tau,s)|ds \\
&+ \int_\tau^1 |G(t,s) - G(\tau,s)|ds) + |\varphi(t) - \varphi(t)| \\
&\leq N[\int_0^t \frac{(\tau-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + (\tau - t)(\frac{a_1b_1}{l}\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\
&+ \frac{a_1b_2}{l}\frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}))ds \\
&+ \int_t^\tau (\frac{(\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + (\tau-t)(\frac{a_1b_1}{l}\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{a_1b_2}{l}\frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}))ds \\
&+ \int_\tau^1 (\tau-t)(\frac{a_1b_1}{l}\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{a_1b_2}{l}\frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}ds] + |\varphi(t) - \varphi(\tau)| \\
&= N[\int_0^\tau \frac{(\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds + (t)(\frac{a_1b_1}{l}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds \\
&+ \frac{a_1b_2}{l}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}ds)] + (\tau-t)\frac{|a_1B - b_1A|}{l} \\
&= N[\frac{\tau^\alpha - t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + (\tau-t)(\frac{a_1b_1}{l\Gamma(\alpha+1)} + \frac{a_1b_2}{l\Gamma(\alpha)})] + (\tau-t)\frac{|a_1B - b_1A|}{l}
\end{aligned}$$

et pour $0 < \beta < 1$ on a

$$^cD^{\beta}_{0^+}(Tu)(t) - ^cD^{\beta}_{0^+}(Tu)(\tau)|$$

.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} |\int_0^t (t-s)^{-\beta} (\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial s}(s,\theta) f(\theta, u(\theta), ^cD^{\beta}_{0^+}u(\theta)) d\theta + \varphi'(s) d\theta| \\
&+ \varphi'(s)) ds - \int_0^{\tau} (\tau - s)^{-\beta} (\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial s}(s,\theta) f(\theta, u(\theta), ^CD^{\beta}_{0^+}u(\theta)) d\theta + \varphi'(s)) ds| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} |\int_0^t (t-s)^{-\beta} (\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial s}(s,\theta) f(\theta, u(\theta), ^cD^{\beta}_{0^+}u(\theta)) d\theta) ds| \\
&- \int_0^t (\tau - s)^{-\beta} (\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial s}(s,\theta) f(\theta, u(\theta), ^CD^{\beta}_{0^+}u(\theta)) d\theta) ds| \\
&- \int_0^t (\tau - s)^{-\beta} (\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial s}(s,\theta) f(\theta, u(\theta), \partial G_{\partial s}(s,\theta) f(\theta, u(\theta), ^cD^{\beta}_{0^+}u(\theta)) d\theta) ds| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} |\int_0^t (\tau - s)^{-\beta} (\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial s}(s,\theta) f(\theta, u(\theta), ^CD^{\beta}_{0^+}u(\theta)) d\theta) ds \\
&- \int_0^{\tau} (\tau - s)^{-\beta} (\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial s}(s,\theta) f(\theta, u(\theta), ^cD^{\beta}_{0^+}u(\theta)) d\theta) ds| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} |\int_0^t (t-s)^{-\beta} \varphi'(s) ds \\
&- \int_0^t (\tau - s)^{-\beta} \varphi'(s) ds| + \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} |\int_0^t (\tau - s)^{-\beta} \varphi'(s) ds - \int_0^{\tau} (\tau - s)^{-\beta} \varphi'(s) ds| \\
&\leq \frac{2N}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)} \int_0^t ((t-s)^{-\beta} - (\tau - s)^{-\beta}) ds + \frac{2N}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha)} \int_t^{\tau} (\tau - s)^{-\beta} ds \\
&+ \frac{|a_1 B - b_1 A|}{l\Gamma(1-\beta)} \int_0^t ((t-s)^{-\beta} - (\tau - s)^{-\beta}) ds + \frac{|a_1 B - b_1 A|}{l\Gamma(1-\beta)} \int_t^{\tau} (\tau - s)^{-\beta} ds \\
&\leq (\frac{2N}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)} + \frac{|a_1 B - b_1 A|}{l\Gamma(2-\beta)})(\tau^{1-\beta} - t^{1-\beta} + 2(\tau - t)^{1-\beta})
\end{aligned}$$

et pour $\beta = 1$, on a

$$\begin{aligned}
|(Tu)'(t) - (Tu)'(\tau)| &= |\int_0^1 G'_t(t,s) f(s, u(s), ^c D^{\beta}_{0^+}u(s)) ds + \varphi'(t) \\
&- \int_0^1 G'_{\tau}(\tau,s) f(s, u(s), ^c D^{\beta}_{0^+}u(s)) ds - \varphi'(\tau)| \\
&\leq \frac{N}{\Gamma(\alpha-1)} \left(\int_0^t ((t-s)^{\alpha-2} - (\tau - s)^{\alpha-2}) ds + \int_t^{\tau} (\tau - s)^{\alpha-2} ds \right) \\
&\leq \frac{N}{\Gamma(\alpha)} (\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1} + 2(\tau - t)^{\alpha-1})
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le fait que les fonctions $\tau^{\alpha} - t^{\alpha}$,$\tau^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}$ et $\tau^{1-\beta} - t^{1-\beta}$ sont uniformément continues sur l'intervalle[0,1], on conclut que $T(\mathcal{W})$ est un ensemble équi-continu. Évidemment,il est uniformément borné puisque $T(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}$. par conséquent,par le théorème d'ascoli-Arzéla, T est compact. Le théorème du point fixe de Schauder affirme l'existence d'une solution dans $\mathcal{W}$ pour le problème(3.1) le corollaire suivant est évident

Corollaire 3.2.7 On suppose qu'il existe deux fonctions positives $a, b \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ telles que

$$|f(t,x,y)| \leq a(t)|x|^p + b(t)|y|^{\theta}, \quad 0 < p, \theta < 1$$

Alors,il existe au moins une solution pour le problème, aux limites (3.1)

Preuve : En effet, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{(|x|+|y|)\to+\infty} \frac{\max_{t\in[0,1]} |f(t,x,y)|}{|x|+|y|} &\leq \lim_{(|x|+|y|)\to+\infty} \frac{a(t)|x|^p + b(t)|y|^{\theta}}{|x|+|y|} \\
&\leq \max\{\| a \|_{\infty}, \| b \|_{\infty}\} \lim_{(|x|+|y|)\to+\infty} \frac{|x|^p + |y|^{\theta}}{|x|+|y|} \\
&= 0 < K
\end{aligned}$$

■ **Exemple 3.1** On considère le problème

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{3}{2}}_{0^+}u(t) = (t-\frac{1}{2})^3(u(t) + {}^c D^{\frac{1}{2}}_{0_+}u(t)), & 0 < t < 1 \\ u(0) = A, u'(1) = B \end{cases}$$

En utilisant le fait que $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, un calcul simple montre que $K = \frac{l\Gamma(\alpha)}{4l+a_2b_2} = \frac{\sqrt{\pi}}{8}$ puisque $|f(t,x,y) = |t-\frac{1}{2}|^3|x+y| \leq \frac{|x|+|y|}{8}$

$$\lim_{(|x|+|y|)\to+\infty} \frac{\frac{|x|+|y|}{8}}{|x|+|y|} = \frac{1}{8} < K = \frac{\sqrt{\pi}}{8}$$

le théorème (2.2.5) assure l'existence d'une solution pour ce problème ■

Théorème 3.2.8 Supposons que la fonction f satisfait la condition

$$|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)| \leq L(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$$

pour tout : $t \in [0,1], x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ avec une constante L vérifiant

$0 < L < K$. Alors le problème aux limites (3.1) admet une solution unique $u \in \mathcal{X}$

Preuve : On a déja vu dans la section précédente que la continuité de f entraine que $Tu, {}^c D^{\beta}_{0^+}(Tu) \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$;(i.e) $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ est bien défini. Pour appliquer le théorème du point fixe de Banach on a besoin de vérifier que T est une contraction En effet,pour tout $u, v \in \mathcal{X}$, on a

$$\begin{aligned}
|Tu(t) - Tv(t)| &= \Big| \int_0^1 G(t,s)(f(s), u(s), {}^c D^{\beta}_{0^+}u(s)) - f(s, v(s), {}^c D^{\beta}_{0^+}v(s)))ds \Big| \\
&\leq L \parallel u - v \parallel \int_0^1 |G(t,s)|ds \\
&\leq \frac{(2l + a_2 b_2 L)}{l\Gamma(\alpha)} \parallel u - v \parallel
\end{aligned}$$

et pour $0 < \beta < 1$, on a

$$\begin{aligned}
|{}^c D^{\beta}_{0^+}Tu(t) - {}^c D^{\beta}_{0^+}Tv(t)| &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta}((Tu)'(s) - (Tv)'(s))ds| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta}(\int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial s}(s,\tau)(f(\tau, u(\tau), {}^c D^{\beta}_{0^+}u(\tau)) \\
&- f(\tau, v(\tau), {}^c D^{\beta}_{0^+}v(\tau)))d\tau)ds \\
&\leq L \parallel u - v \parallel \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta}(\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial s}(s,\tau)d\tau)ds \\
&\leq \frac{2L}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)} \parallel u - v \parallel
\end{aligned}$$

et pour $\beta = 1$, on a

$$\begin{aligned}
|(Tu)'(t) - (Tv)'(t)| &= | \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)(f(s), u(s), {}^c D^{\beta}_{0^+}u(s)) - f(s, v(s), {}^c D^{\beta}_{0^+})))ds| \\
&\leq L \parallel u - v \parallel \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|ds \\
&\leq \frac{2L}{\Gamma(\alpha)} \parallel u - v \parallel
\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\parallel Tu - Tv \parallel \leq L(\frac{4l + a_2 b_2}{l\Gamma(\alpha)}) \parallel u - v \parallel \leq \frac{L}{K} \parallel u - v \parallel$$

Donc, le théorème du point fixe de Banach nous assure l'existence d'un unique point fixe qui est l'unique solution du problème (3.1)

3.3 Dépendance des solutions aux paramètres

la présente section est consacrée à l'étude de la dépendance de la solution aux paramètres α, A B et f pour le problème (3.1), à condition que la fonction $f(t,x,y)$ est lipschitzienne par rapport à x et y

Théorème 3.3.1 Supposons que les conditions du théorème (3.2.8) sont satisfaite. Soit u_1, u_2 les solutions, respectivement, du problème (3.1), et

$$\begin{cases} {}^C D_{0^+}^{\alpha-\varepsilon} u(t) = f(t, u(t), {}^c D_{0^+}^{\beta} u(t)), \quad t \in (0,1) \\ a_1 u(0) - a_2 u'(0) = A, \quad b_1 u(1) + b_2 u'(1) = B \end{cases}$$

où $1 < \alpha - \varepsilon \leq 2$ Alors $\| u_1 - u_2 \| = o(\varepsilon)$

Preuve : soit $G_1(t,s) = G(t,s)$ et

$$G_2(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)}[(t-s)^{\alpha-\varepsilon-1} - \frac{a_2 b_1}{l}(1-s)^{\alpha-\varepsilon-1} - \frac{a_1 b_1}{l}(1-s)^{\alpha-\varepsilon-1} t] \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha-\varepsilon-1)}[-\frac{a_2 b_2}{l}(1-s)^{\alpha-\varepsilon-2} - \frac{a_1 b_2}{l}(1-s)^{\alpha-\varepsilon-2} t], \quad sis \leq t \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)}[-\frac{a_2 b_1}{l}(1-s)^{\alpha-\varepsilon-1} - \frac{a_1 b_1}{l}(1-s)^{\alpha-\varepsilon-1} t] \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha-\varepsilon-1)}[-\frac{a_2 b_2}{l}(1-s)^{\alpha-\varepsilon-2} - \frac{a_1 b_2}{l}(1-s)^{\alpha-\varepsilon-2} t], \quad si\ t \leq s, \end{cases}$$

la fonction de Green associée au problème (3.3.1) Alors

$$u_1(t) = \int_0^1 G_1(t,s) f\left((s, u_1(s), {}^c D_{0^+}^{\beta} u_1(s)\right)) ds + \varphi(t)$$

et

$$u_2(t) = \int_0^1 G_2(t,s) f\left(s, u_2(s), {}^c D_{0^+}^{\beta} u_2(s)\right) ds + \varphi(t)$$

Tout d'abord, on montre que

$$\int_0^1 |G_1(t,s) - G_2(t,s)| ds = o(\varepsilon), \int_0^1 |\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G_2}{\partial t}(t,s)| ds = o(\varepsilon) \quad (3.7)$$

Observant que

$$\begin{aligned}\int_0^1 |G_1(t,s)-G_2(t,s)|ds \leq& \int_0^t |\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\alpha-\varepsilon-1}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)}|ds \\ &+ (\frac{a_2b_1}{l}+\frac{a_1b_1t}{l})\int_0^1 |\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(1-s)^{\alpha-\varepsilon-1}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)}|ds \\ &+ (\frac{a_2b_2}{l}+\frac{a_1b_1t}{l})\int_0^1 |\frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - \frac{(1-s)^{\alpha-\varepsilon-2}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon-1)}|ds\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^1 |\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)-\frac{\partial G_2}{\partial t}(t,s)|ds \leq& \int_0^t |\frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - \frac{(t-s)^{\alpha-\varepsilon-2}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon-1)}|ds \\ &+ \frac{a_1b_1}{l}\int_0^1 |\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(1-s)^{\alpha-\varepsilon-1}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)}|ds \\ &+ \frac{a_1b_2}{l}\int_0^1 |\frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} - \frac{(1-s)^{\alpha-\epsilon-2}}{\Gamma(\alpha-\epsilon-1)}|ds\end{aligned}$$

on va estimer les intégrales précédentes En effet, on a

$$\begin{aligned}\int_0^t |\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\alpha-\varepsilon-1}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)}|ds \leq& \int_0^t |\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\alpha-\varepsilon-1}}{\Gamma(\alpha)}|ds \\ &+ \int_0^t |\frac{(t-s)^{\alpha-\varepsilon-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(t-s)^{\alpha-\varepsilon-1}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)}|ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |x^{\alpha-1}-x^{\alpha-\varepsilon-1}|dx \\ &+ |\frac{1}{\Gamma(\alpha)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)}|\int_0^t (t-s)^{\alpha-\varepsilon-1}ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\frac{1}{\alpha-\varepsilon}-\frac{1}{\alpha}) + |\frac{1}{\Gamma(\alpha)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)}|\frac{1}{\alpha-\varepsilon} \\ &= \varepsilon(\frac{1}{\alpha(\alpha-\varepsilon)\Gamma(\alpha)} + \frac{|\Gamma'(\alpha-\varepsilon+\theta\varepsilon)|}{(\alpha-\varepsilon)\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-\varepsilon)}) \\ &= \varepsilon M_1,\end{aligned}$$

pour certain θ_1 avec $0<\theta_1<1$ et par de simples calculs, on trouve aussi

$$\begin{aligned}(\frac{a_2b_1}{l}+\frac{a_1b_1t}{l})\int_0^1 \Big|\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \frac{(1-s)^{\alpha-\varepsilon-1}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)}\Big|ds \leq& \varepsilon(\frac{a_2b_1}{l}+\frac{a_1b_1t}{l})\frac{|\Gamma'(\alpha-\varepsilon+1+\theta\varepsilon)|}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha-\varepsilon+1)} \\ &= \varepsilon M_2,\end{aligned}$$

pour certain θ_2 avec $0 < \theta_2 < 1$ et

$$(\frac{a_2b_2}{l}+\frac{a_1b_2t}{l})\int_0^1\Big|\frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}-\frac{(1-s)^{\alpha-\varepsilon-2}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon-1)}\Big|ds \leq \varepsilon(\frac{a_2b_2}{l}+\frac{a_1b_2t}{l})\frac{\Gamma'(\alpha-\varepsilon+\theta\varepsilon)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-\varepsilon)}$$
$$= \varepsilon M_3,$$

pour certain θ_3 avec $0 < \theta_3 < 1$ Donc, on a

$$\int_0^1 |G_1(t,s)-G_2(t,s)|ds \leq \varepsilon(M_1+M_2+M_3)$$

De même, on a

$$\int_0^t |\frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}-\frac{(t-s)^{\alpha-\varepsilon-2}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon-1)}|ds \leq \varepsilon(\frac{1}{(\alpha-\varepsilon-1)\Gamma(\alpha)}+\frac{|\Gamma'(\alpha-\varepsilon-1+\theta\varepsilon)|}{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\alpha-\varepsilon)}) = \varepsilon M_1'$$

pour certain θ_1' avec $0 < \theta_1' < 1$ et

$$\frac{a_1b_1}{l}\int_0^1 |\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(1-s)^{\alpha-\varepsilon-1}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon)}|ds \leq \varepsilon(\frac{a_1b_1}{l}\frac{|\Gamma'(\alpha-\varepsilon+1+\theta\varepsilon)|}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha-\varepsilon+1)}) = \varepsilon M_2'$$

pour certain θ_2' avec $0 < \theta_2' < 1$ et

$$\frac{a_1b_2}{l}\int_0^1 |\frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}-\frac{(1-s)^{\alpha-\varepsilon-2}}{\Gamma(\alpha-\varepsilon-1)}|ds \leq \varepsilon(\frac{a_1b_2}{l}\frac{|\Gamma'(\alpha-\varepsilon+\theta\varepsilon)|}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha\alpha-\varepsilon)}) = \varepsilon M_3'$$

pour certain θ_3' avec $0 < \theta_3' < 1$ Donc, on a

$$\int_0^1 |\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)-\frac{\partial G_2}{\partial t}(t,s)|ds \leq \varepsilon(M_1'+M_2'+M_3')$$

De plus,

$$\begin{aligned}
|u_1(t)-u_2(t)| &= \Big|\int_0^1 G_1(t,s)f(t,u_1(s),^c D^{\beta}_{0^+}u_1(s))ds \\
&\quad -\int_0^1 G_2(t,s)f(t,u_2(s),^c D^{\beta}_{0^+}u_2(s))ds\Big| \\
&\leq \int_0^1 G_1(t,s)(f(t,u_1(s),^c D^{\beta}_{0^+}u_1(s))ds - G_1(t,s)f(t,u_2(s),^c D^{\beta}_{0^+}u_2(s)))ds| \\
&\quad +\int_0^1 |G_1(t,s)f(t,u_2(s),^c D^{\beta}_{0^+}u_2(s)) - G_2(t,s)f(t,u_2(s),^c D^{\beta}_{0^+}u_2(s))| \\
&\leq L \parallel u_1-u_2 \parallel \int_0^1 |G_1(t,s)|ds + | \parallel f \parallel | \int_0^1 |G_1(t,s)-G_2(t,s)|ds \\
&\leq \frac{(2l+a_2b_2)L}{l\Gamma(\alpha)} \parallel u_1-u_2 \parallel +| \parallel f \parallel | \int_0^1 |G_1(t,s)-G_2(t,s)|ds
\end{aligned}$$

où

$$| \parallel f \parallel | = \sup_{0\leq\varepsilon\leq\alpha-1} \{ \max_{t\in[0,1]} |f(t, u_2(t), ^c D^{\beta}_{0^+} u_2(t))| \}$$

pour $0 < \beta < 1$, on a

$$\begin{aligned}
|^c D^{\beta}_{0^+} u_1(t) -^c D^{\beta}_{0^+} u_2(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} \left(\int_0^1 |\frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau) f(\tau, u_1(\tau), ^c D^{\beta}_{0^+} u_1(\tau)) \right.\\
&- \frac{\partial G_2}{\partial s}(s,\tau) f(\tau, u_2(\tau), ^c D^{\beta}_{0^+} u_2(\tau))| d\tau ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} (\int_0^1 |\frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau) f(\tau, u_1(\tau), ^c D^{\beta}_{0^+} u_1(\tau)) \\
&- \frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau) f(\tau, u_2(\tau), ^c D^{\beta}_{0^+} u_2(\tau))| d\tau \\
&+ \int_0^1 |\frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau) f(\tau, u_2(\tau), ^c D^{\beta}_{0^+} u_2(\tau)) \\
&- \frac{\partial G_2}{\partial s}(s,\tau) f(\tau, u_2(\tau), ^c D^{\beta}_{0^+} u_2(\tau))| d\tau) ds \\
&\leq L \parallel u_1 - u_2 \parallel \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} (\int_0^1 |\frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau)| d\tau) ds \\
&+ | \parallel f \parallel | \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} (\int_0^1 |\frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau) - \frac{\partial G_2}{\partial s}(s,\tau)| d\tau) ds \\
&\leq \frac{2L}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)} \parallel u_1 - u_2 \parallel \\
&+ | \parallel f \parallel \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} (\int_0^1 |\frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau) - \frac{\partial G_2}{\partial s}(s,\tau)| \tau) ds
\end{aligned}$$

et pour $\beta = 1$, on a

$$\begin{aligned}
|u_1'(t) - u_2'(t)| &\leq L \parallel u_1 - u_2 \parallel \int_0^1 |\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)| ds + | \parallel f \parallel | \int_0^1 |\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G_2}{\partial t}(t,s)| ds \\
&\leq \frac{2L}{\Gamma(\alpha)} \parallel u_1 - u_2 \parallel + | \parallel f \parallel | \int_0^1 |\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G_2}{\partial t}(t,s)| ds
\end{aligned}$$

il en résulte que pour $0 < \beta < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\parallel u_1 - u_2 \parallel &\leq \frac{1}{1 - L/K} [| \parallel f \parallel | \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} (\int_0^1 |\frac{\partial G_1}{\partial s}(s,\tau) - \frac{\partial G_2}{\partial s}(s,\tau)| d\tau) ds \\
&+ | \parallel f \parallel | \int_0^1 |G_1(t,s) - G_2(t,s)| ds]
\end{aligned}$$

et pour $\beta = 1$, on a

$$\| u_1 - u_2 \| \leq \frac{1}{1 - L/K} ((|\| f \| | \int_0^1 |\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s) - \frac{\partial G_2}{\partial t}(t,s)|ds$$
$$+ |\| f \| | \int_0^1 |G_1(t,s) - G_2(t,s)|ds \quad 43$$

par conséquent,conformément a (3.7), on obtient

$$\| u_1 - u_2 \| = o(\varepsilon)$$

ce qui termine la démonstration

Théorème 3.3.2 supposons que les conditions du théorème (3.2.8) sont satisfaite. Soit u_1,u_2 les solutions, respectivement ,des problèmes

$$\begin{cases} {}^cD_{0+}^{\alpha}u(t) = f(t, u(t), \quad {}^cD_{0+}^{\beta}u(t)), t \in (0,1) \\ a_1u(0) - a_2u'(0) = A, \quad {}_{b_1}u(1) + b_2u'(1) = B \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} {}^cD_{0+}^{\alpha}u(t) = f(t, u(t), \quad {}_cD_{0+}^{\beta}u(t), t \in (0,1) \\ a_1u(0) - a_2u'(0) = A + \varepsilon_1, \quad b_1u(1) + b_2u'(1) = \beta + \varepsilon_2 \end{cases}$$

Alors

$$\| u_1 - u_2 \| = o(max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\})$$

Preuve : soit

$$\varphi_1(t) = \frac{(b_1 + b_2)A + a_2B}{l} + \frac{a_1B - b_1A}{l}t$$

$$\varphi_2(t) = \frac{(b_1 + b_2)(A + \varepsilon_1) + a_2(B + \varepsilon_2)}{l} + \frac{a_1(B + \varepsilon_2) - b_1(A + \varepsilon_1)}{l}t$$

Alors

$$u_1(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s, u_1(s), {}^cD_{0+}^{\beta}u_1(s))ds + \varphi_1(t)$$

et

$$u_2(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s, u_2(s), {}^cD_{0+}^{\beta}u_2(s))ds + \varphi_2(t)$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}|u_1(t)-u_2(t)| &\leq L \parallel u_1-u_2 \parallel \int_0^1 |G(t,s)|ds + |\varphi_1(t)-\varphi_2(t)| \\ &\leq \frac{L(2L+a_2b_2)}{l\Gamma(\alpha)} \parallel u_1-u_2 \parallel + \frac{(b_1+b_2)\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2}{l} + \frac{|a_1\varepsilon_2-b_1\varepsilon_1|}{l}\end{aligned}$$

et pour $0<\beta<1$, on a

$$\begin{aligned}|{}^cD^\beta_{0^+}u_1(t) -{}^C D^\beta_{0^+}u_2(t)| &\leq L \parallel u_1-u_2 \parallel \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}(\int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial s}(s,\tau)|d\tau)ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t (t-s)^{-\beta}|\varphi_1'(t)-\varphi_2'(t)|ds \\ &\leq \frac{2L}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)} \parallel u_1-u_2 \parallel + \frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\frac{|a_1\varepsilon_2-b_1\varepsilon_1|}{l}\end{aligned}$$

et pour $\beta=1$, on a

$$\begin{aligned}|u_1'(t)-u_2'(t)| &\leq L \parallel u_1-u_2 \parallel \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|ds + |\varphi_1'(t)-\varphi_2'(t)| \\ &\leq \frac{2L}{\Gamma(\alpha)} \parallel u_1-u_2 \parallel + \frac{|a_1\varepsilon_2-b_1\varepsilon_1|}{l}\end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}\parallel u_1-u_2 \parallel &\leq \frac{1}{1-L/K}(\frac{(b_1+b_2)\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2}{l} + \frac{|a_1\varepsilon_2-b_1\varepsilon_1|}{l} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\frac{|a_1\varepsilon_2-b_1\varepsilon_1|}{l}) \\ &\leq \frac{max\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}{1-L/K}(\frac{b_1+b_2+a_2}{l} + \frac{a_1+b_1}{l} + \frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\frac{a_1+b_1}{l})\end{aligned}$$

par conséquent, la conclusion du théorème (3.2.8) s'ensuit

Théorème 3.3.3 Supposons que les conditions du théorème sont satisfaite. Soit u_1,u_2 des solutions, respectivement, des problèmes :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha_{0^+}u(t) = f(t,u(t),\ \ {}^cD^\beta_{0^+}u(t)), t\in(0,1) \\ a_1u(0)-a_2u'(0)=A, \quad b_1u(1)+b_2u'(1)=B \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}_{0^+}u(t) = f(t, u(t), {}^cD^{\beta}_{0^+}u(t)) + \varepsilon \quad , t \in (0,1) \\ a_1u(0) - a_2u'(0) = A, \quad b_1u(1) + b_2u'(1) = B \end{cases}$$

Alors

$$\| u_1 - u_2 \| = o(\varepsilon)$$

Preuve : Notons que

$$u_1(t) = \int_0^1 G(t,s) f(t, u_1(s), {}^cD^{\beta}_{0^+}u_1(s))ds + \varphi(t)$$

et

$$u_2(t) = \int_0^1 G(t,s)(f(t, u_2(s), {}^CD^{\beta}_{0^+}U_2(s)) + \varepsilon)ds + \varphi(t)$$

Donc,

$$\begin{aligned} |u_1(t) - u_2(t)| &\leq L \| u_1 - u_2 \| \int_0^1 |G(t,s)|ds + \varepsilon G(t,s)|ds \\ &\leq \frac{L(2L + a_2b_2)}{l\Gamma(\alpha)} \| u_1 - u_2 \| + \frac{\varepsilon(2l + a_2b_2)}{l\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

et pour $0 < \beta < 1$, on a :

$$\begin{aligned} |{}^cD^{\beta}_{0^+}u_1(t) - {}^cD^{\beta}_{0^+}u_2(t)| &\leq L \| u_1 - u_2 \| \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} (\int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial s}(s,\tau)|d\tau)ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} (\int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial s}(s,\tau)|d\tau)ds \\ &\leq \frac{2L}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)} \| u_1 - u_2 \| + \frac{2\varepsilon}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

et pour $\beta = 1$, on a

$$\begin{aligned} |u_1'(t) - u_2'(t)| &\leq \| u_1 - u_2 \| \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}|ds + \varepsilon \int_0^1 |\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)|ds \\ &\leq \frac{2L}{\Gamma(\alpha)} \| u_1 - u_2 \| + \frac{2\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

Alors,

$$\| u_1 - u_2 \| \leq \frac{\varepsilon}{1 - L/K} \left(\frac{2l + a_2b_2}{l\Gamma(\alpha)} + \frac{2}{\Gamma(2-\beta)\Gamma(\alpha)} \right)$$

et on obtient le résultat désire.

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites associé à une équation différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire au sens de Caputo . Ces résultats ont été obtenus par d'applications de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le principe de contraction de Banach et le théorème de point fixe de Schauder .

Bibliographie

[1] A.CARPINTERI AND F.MAINARDI ; Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statical mechanics ,in fractals and fractional calculus in continuum mechanics, Springer ,New York(1997)

[2] K.B.OLDHAM AND J.SPAINIER.The fractional calculus, Academics Pres ,New York (1979)

[3] H.MRIVASTAVA A.A KILIBAS AND J.JTRUJILLO.Theory and applications of fractional differential equations,Elsevier science ; Amstredam(2006)

[4] K.S.MILLER AND B.ROSS .An introduction to the fractional calulus and differntial equations ;John Wiley ,New York (1993)

[5] I.PODLUBNY .Fractional differential equations, Academics-press ,San Diego (1999)

[6] X.SU AND S.ZHANG.Solutions to boundary value problems for nonlinear differntial equations of fractional order .Electronic journal of differential equations 26,1-15.(2009)

[7] F.JIAO AND Y.ZHOU .Existence of olution for a class for fractional boundary value problems via critical point theory.Computers and mathematics with application 62,1181-1199(2011)

[8] S.W.WHEATCRAFT D.A .BENSON AND M.M.MEERCHAERT .Apllicationsof a fractional advection equation.water Resour 36,1403-1412(2000)

[9] J.P.ROOP AND G.J.Frx.Least squars finite-element solution of a fractional order two-point boundary value problem.Comput .Math .Appl.48,1017-1033.(2004)

[10] S.W/WHEATCRAFT D.A BENSON AND M.M.MEERSCHAERT.The fractional -order govering equation of levy motion .Water resour.36,1413-1423(2000)

[11] J.GENET.Mesure et intégration,théorie élémentaire (cours et exercices résolus).Li-brairie Vuibert,Paris(1976)

[12] R.A.ADAMS.Sobolev spaces ;.Pure and applied mathematics ;London(1975).

[13] H.BREZIS.Analyse fonctionnelle,théorie et applications ;.Masson,Paris(1983)

[14] K.YOSIDA .Foundation of modern analysic ;Springer verlag ,New York (1980)

[15] O.I.MARICHEV A.A.KILIBAS AND S.G.SAMKO.Fractional diffirential equation ;Academie press ; San Diego(1993)

[16] I.PODLUBNY.Fractional difrential equations ; Academie press ; San Diego(1999)

[17] R.COMPBELL.Le intégrales eulériennes et leurs applications ; Dunod,Paris(1996)

[18] H.M.SRIVASTAVA A.A.KILIBAS AND J.J TRUJILLO.Theory and applications of fractional differential equations ;Elsevier science ,Amsterdam(2006)

[19] K.DIETHELM.The analysis of fractional differential equation ; Springer Heidelberg Dordrecht,New York(2010)

[20] A.MALINOWSKA AND F.M ?TORREThe eneralized natural boundary conditions of fractional variational problems in terms of the Caputo derivative.Computers and mathematics with applications 59(9),3110-3116.(2010).