REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse Fonctionnelle Et Equation différentielle

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

La compacitè dans quelque espace fonctionnel

Présenté par

***Benslimani Khadidja**

soutenue devant le Jury composé de

***Mr.LARABI Abderrahmane Reda**	**M.C.A**	**Président**
***Mr.OURDANI Abderrahmane**	**M.C.B**	**Examinateur**
***Mr.AISSANI Mouloud**	**M.C.B**	**Encadreur**

Promotion : 2019 \ 2020

Remerciement

On remercie tout d'abord DIEU tout puissant de nous avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce modeste travail. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur de mémoire, Mr Aissani Mouloud. Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.

Je remercie mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi.

Enfin, je remercie mes amis qui ont toujours été là pour moi. Leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

Je dédie ce travail à

Ma mère et mon père .

Khadidja Benslimani

Table des matières

Introduction

La propriété de Bolzano-Weierstrass et la propriété de Borel-Lebesgue constituent les idées fondamentales qui ont conduit a l'élaboration de la notion de compacité. Le lien entre ces idées est apparu pour la première fois a Fréchet qui a formule la première définition d'un ensemble compact. Cette notion s'est affinée en même temps que celle d'ensemble complet grâce a Hausdorff et Alexandroff . La notion d'espace compact, comme celle d'espace complet qui y est intimement lié, s'est dégagée peu à peu au fur et à mesure que les idées maitresses de l'analyse classique ; et notamment celle de limite ; ont été adaptées au domaine plus général de la topologie [Pier 1961].
Le premier chapitre a été consacré à des notions préliminaire qui nous aurons d'une utilité dans tous les autres chapitres.
Le deuxième chapitre sera consacré à la notion de compacité dans le cas abstrait et quelque conséquence de cette notion.
Le troisième chapitre sera consacré à la notion de compacité dans les espaces métriques ce qui facilita la notion et gardera le même cadre que les espaces topologiques.
Le quatrième chapitre à pour but d'exposer les deux théorème de $Riesz$ et de $Heine-Borel$.
Le cinquième chapitre est un chapitre d'application qui inclura le théorème de Ascoli Arzela.

Chapitre 1

Généralité

1.1 Espaces topologique

Définition 1.1. *Soient E un ensemble quelconque et $P(E)$ la famille de toutes les parties de E. Soit τ sous-famille de $P(E)$, on dit que τ définit une topologie sur E si elle satisfait les conditions suivantes :*

1. *$E \in \tau$ et $\emptyset \in \tau$*
2. *τ est stable par réunion (finie ou non), c'est à dire*
$$\forall (\Omega_i)_{i\in I} \subset \tau, \cup_{i\in I}\Omega_i \in \tau$$
avec I quelconque.
3. *τ est stable par intersection finie, c'est à dire*
$$\forall (\Omega_j)_{j\in J} \subset \tau; \cap_{j\in J}\Omega_j \in \tau$$
avec J finie.

le couple $(E;\tau)$ s'appelle espace topologique . Les éléments de τ sont dits ensembles ouverts de $(E;\tau)$.

Définition 1.2. *Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique (X,τ). On dit que A est fermé ou partie fermée de X si le complémentaire de A dans X est ouvert. Autrement dit, si $C_E A \in \tau$.*

Définition 1.3. *Soient (X,τ) un espace topologique et $\mathcal{B} \subset \tau$. On dit que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de X ou base de la topologie τ si tout ouvert non vide de X est réunion d'ouverts appartenant à $\mathcal{B}$.*

Tout espace topologique (X,τ) possède au moins une base d'ouverts, à savoir τ elle même. La notion de base d'ouverts n'est bien-sur intéressante que lorsque $\mathcal{B}$ est plus petit que τ. Comme on le verra, dans de nombreux cas, il est en effet possible de se limiter a des raisonnements sur les éléments d'une base au lieu de manipuler les ouverts de τ.

Exemple 1.1. *Si X est un espace discret, alors $\mathcal{B} = \{\{x\}; x \in X\}$ est une base d'ouverts de X.*

Définition 1.4. *Soient (X,τ) un espace topologique et $x \in X$. On dit qu'une partie V de X est un voisinage de x s'il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$. Plus généralement, soit A une partie de X, on appelle voisinage de A toute partie V de X telle qu'il existe un ouvert U de X vérifiant $A \subset U \subset V$.*

Exemple 1.2. *1. V est un voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset V$. Par exemple, $]x-\frac{1}{2}, x+1] \cup \{5\}$ est un voisinage de x*
2. Si $\overline{\mathbb{R}}$ est muni de la topologie usuelle, un sous-ensemble V de $\overline{\mathbb{R}}$ est un voisinage du point -∞ s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $[-\infty, \alpha[\subset V$. De même, un sous-ensemble W de $\overline{\mathbb{R}}$ est un voisinage du point $+\infty$ s il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $]\beta, +\infty] \subset W$.

1.2 Espace métrique

Définition 1.5. *Soit E un ensemble non vide. On appelle distance sur E, toute application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :*

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \forall x,y \in E$
2. $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in E$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x,y,z \in E$

Le couple (E,d) est appelé espace métrique.

Définition 1.6. *Soient (E,d) un espace métrique, $a \in E$ et $r > 0$, .*

1. *On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r noté par $B(a,r)$ l'ensemble :*

$$B(a,r) = \{x \in E/d(x,a) < r\}$$

2. *On appelle boule fermé de centre a et de rayon r noté par $B_f(a,r)$ l'ensemble :*

$$B(a,r) = \{x \in E/d(x,a) \leq r)\}$$

Exemple 1.3. *La valeur absolue $|.|$ est évidemment une distance sur $\mathbb{R}$, dont les boules ouvertes (resp. fermées) sont les intervalles ouverts (resp. fermés).*
2. Soit E un ensemble quelconque, l'application suivantes est une distance connue sous le nom "distance discrète"

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y \\ 1 & si \quad x \neq y \end{cases}$$

dont les boules sont où bien E où bien les singletons

Remarque 1.1. *Dans $\mathbb{R}$, on définit les ouverts à partir des intervalles ouverts dans les espaces métriques on définit les ouverts à partir des boules ouvertes,*

Définition 1.7. *Soit (E,d) un espace métrique, un sous-ensemble O de E est dit ouvert , s'il est vide, ou bien si pour tout $x \in O$, il existe une boule ouverte de centre x incluse dans O. En termes précis, O est un ouvert de E si :*

$$O = \emptyset \ \text{ ou bien } \forall x \in O, \ \exists r > 0, \ B(x,r) \subset O.$$

Remarque 1.2. *La définition précédente met en évidence le fait que la famille des boules ouvertes engendre les ouverts dans un espace métrique.*

Proposition 1.1. *Soit (E,d) un espace métrique, alors on a les propriétés suivantes :*

1. *la boule ouverts est un ouvert.*
2. *la boule fermée est un fermé .*
3. *toute ouvert est un réunion dénombrable des boules ouvertes.*

Définition 1.8. ***(Suite de Cauchy)***
Soit (E,d) un espace métrique, une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E est dite de Cauchy, si elle satisfait à la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / \forall p,q \in \mathbb{N} p > q \geq n_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$$

.

Définition 1.9. ***(Suite convergente)***
Soit (E,d) un espace métrique. On dit qu'une suite (x_n) de points de E converge vers un point $a \in E$ si $d(x_n,a)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Autrement dit,(x_n) converge vers x si et seulement si la propriété suivante a lieu :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \in \mathbb{N} \; d(x_n, a) < \varepsilon$$

La définition est donc formellement identique à celle de la convergence d'une suite de nombres réels : on remplace simplement $|x_n - a|$ par $d(x_n,a)$.

Définition 1.10. ***Valeurs d'adhérence d'une suite***
Soit (x_n) une suite d'un espace métrique (E,d).On dit que a est valeur d'adhérence de la suite (x_n) si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, d(x_n, a) < \varepsilon$$

.

Proposition 1.2. *Soit (x_n) une suite de (E,d) et $a \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes sont équivalentes :*

1. *a est une valeur d'adhérence de (x_n).*
2. *Il existe une suite extraite de (x_n) qui converge vers a.*
3. *a est point d'accumulation de $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.*

Définition 1.11. *Espace complet*
Soit (E,d) un espace métrique, On dit que E est complet si toute suite de Cauchy est convergente.

Exemple 1.4. $\mathbb{R}$ *est un espace complet par rapport à ça distance usuelle.*

Définition 1.12. ***(Applications continue)***
Soient E et F deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E \to F$ est continue en un point $a \in E$ si $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers x, autrement dit si la propriété suivante a lieu :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 d_E(x,a) \leq \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

On dit que l'application f est continue sur E si elle est continue en tout point de E.

Proposition 1.3. *Soient E, F deux espaces métriques, et soit $a \in E$*
Pour une application $f : E \to F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *f est continue en a*
2. *Pour toute suite $(x_n) \subseteq E$,si la suite x_n converge vers a alors la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.*

Définition 1.13. ***(Uniforme continuité)***

1. *On dit que f est uniformément continue sur E si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in E, d_E(x,y) < \delta \to d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*
2. *On dit que f est lipschitzienne de rapport $k \in \mathbb{R}$ si $\forall x, y \in E, d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x,y)$.*
   Toute application lipschitzienne est uniformément continue.
   Toute application uniformément continue est continue.
   Les réciproques sont fausses.

Chapitre 2

Espaces topologiques compacts

Dans toute la suite, I, J sont des ensembles d'indices quelconques.

2.1 La propriété de Borel-Lebesgue

Définition 2.1. *Soit (E, τ) un espace topologique.*
Une famille de parties $(O_i)_{i \in I}$ de E est appelée recouvrement de E si E est la réunion de cette famille, c'est-à-dire :
$E = \bigcup_{i \in I} O_i$

Définition 2.2. *Soit (E, τ) un espace topologique.*
-On dit que E est compact s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert de E contient un sous recouvrement fini.

Exemple 2.1. *L'exemple trivial d'un espace topologique compact, un ensemble fini muni de la topologie discrète.*
On peut également définir la compacité en utilisant les fermés sans rien perdre.

Théorème 2.1. *Soit (E, τ) un espace topologique séparé . On dit que E est un espace compact si et seulement si toute famille de fermes non vide, qui est stables par intersection finie possède une intersection non vide*

Preuve: La preuve de ce théorème est la contreposé du passage au complémentaire dans la définition (2.2). □

Théorème 2.2. *Soient (E,τ) un espace topologique séparé,$F \subset E$ un sous ensemble de E, on a les propriété suivantes :*

1. *Si E est un compact et si F est fermé alors F est compact.*
2. *Si F est un compact alors F est fermé.*

Preuve: 1. On a évidement F est séparé, montrons que F vérifie l'hypothèse du **(Théorème 2.1)**. Soit $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés non vides de F, stable par intersection finie, comme chaque A_i, est intersection de F avec un fermé de E donc A_i est lui-même un fermé dans E, et par compacité de E la famille (A_i) doit avoir une intersection non vide. Ce qui prouve la compacité de F.
2. Soit A un ensemble compact d'un espace séparé E
Montrons que F est fermé. Nous allons montrer que $C_E F$ est un voisinage de chacun de ses points.
Soit $x \in C_E F$. E étant séparé, on peut alors trouver, pour chaque point $y \in F$, deux voisinages ouverts $V_x(y)$ et W_y de x et y respectivement tels que $W_y \cap V_x(y) = \emptyset$. La famille $(W_y)_{y\in F}$ constitue un recouvrement ouverts pour le compact F. On peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $(W_{y_i})_{i=1,..,p}$. On a $F \subset \bigcup_{i=1}^{p} W_{y_i}$. Posons

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{p} W_{y_i} \text{ et } \Omega' = \bigcap_{i=1}^{p} V_x(y_i)$$

Il vient que Ω' est un ouvert qui ne rencontrant aucun des ensembles W_{y_i}. Par conséquent, Ω' ne rencontre pas F. Il vient d'établir que

$$x \in \Omega' \subset C_E F$$

Donc

$$C_E F \in V(x)$$

. C'est le résultat recherché.

□

Théorème 2.3. *Dans un espace topologique E séparé, la famille des sous-ensembles compacts est stable par réunion finie et intersection quelconque.*

Preuve: 1. Soit $(A_i)_{i=1,...,p}$ une famille finie de parties compactes de E Posons $A = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$, A est séparé. De plus si la famille $(\Omega_j)j \in J$ est un recouvrement ouvert de A, elle l'est aussi pour chacun des ensembles A_i. Donc $\forall i \in \{1,...,p\} \exists J_i \in J/A_i \subset \bigcup_{j\in J_i} \Omega_j$ avec J_i fini. D'où $A \subset \bigcup_i^p = 1(\bigcup_{j\in J_i} \Omega_j)$ ce qui achève la démonstration de la première partie du théorème.

2. Soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de compacts de E posons $K = \bigcap_{i\in I} K_i$, on a $K \subset K_i$, pour un certain $i \in I$, comme K est fermé et K_i est compact alors K est compact.

□

2.2 Compacité et continuité

Théorème 2.4. *Soient (E,τ) , (F,τ') deux espaces topologiques séparés, $f : E \to F$ une application continue, alors $f(K)$ est un compact de $F, \forall K$ compact de E .*

Preuve: Soient K un compact de E, $\cup_{i\in I} O'_i$ une famille d'ouverts recouvrant $f(K)$, Alors $\cup_{i\in I} f^{-1}(O'_i)$ est fini un recouvrement d'ouverts de K, comme K est compact, donc $\exists J \subset I$ fini tel que $K \subset \cup_{i\in J} f^{-1}(O'_i)$, ce qui entraine $f(K) \subset \cup_{i\in I} O'_i$. Ainsi $f(K)$ est compact dans F. □

Corollaire 2.1. *Toute fonction continue sur un espace compact à valeur dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes supérieure et inférieure.*

Preuve: Soient (E,τ) un espace topologique compact, $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue, alors $f(E)$ est un compact de $\mathbb{R}$. Comme les compact de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés alors $f(E)$ est bornée. La fonction f est donc bornée et on peut définir $sup_{x\in X} f(x)$ et $inf_{x\in X} f(x)$ (propriété de $\mathbb{R}$) .Autrement dit les bornes supérieure et inférieure sont atteintes. Ce sont des maximum et minimum . □

Remarque 2.1. *Il est bien sur faux de dire que l'image réciproque d'un compact par une application continue est un compact.*
En effet, l'image réciproque de $[0,1]$ par la projection sur l'axe des abscisses dans $\mathbb{R}^2$ est

$[0,1] \times \mathbb{R}$ *qui n'est pas compact.*

Chapitre 3

Espaces métriques compacts

3.1 Propriété de Bolzano-Weierstrass

Puisque un espace métrique est un espace topologique alors la définition de la compacité reste valable, en revanche la structure métriques nous permettras de caractériser la compacité avec des suites.

Théorème 3.1. *Soit (E, d) un espace métrique, les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *E est compact*
2. *Propriété de $Bolzano-weierstrass$: Toute partie infinie de E admet un point d'accumulation dans E*
3. *De toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, on peut extraire une sous-suite qui converge dans E*

Remarque 3.1. *Notons qu'on peut exprimer la propriété 2 d'une autre manière en disant que toute suite de E admet une valeur d'adhérence dans E*
Cela correspond aux deux possibilités :

a) *L'ensemble $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est fini et dans le cas il y a nécessairement une valeur qui est prise une infinité de fois.*

b) *L'ensemble $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est infini et on est sous l'hypothèse 2.*
Nous aurons besoin d'un résultat intermédiaire pour les espaces métriques qui est souvent utile.

Lemme 3.1. ***Lemme de Maille***

Soient (E,d) un espace métrique qui vérifie 3 et si $\cup_{i\in I} O_i$ est un recouvrement d'ouverts de E ,alors il existe une constante $\rho > 0$ tel que pour tout$x \in E$ la boule $B(x,\rho)$ est incluse dans un des O_i :

$$\forall x \in E, \exists i_x \in I, B(x,\rho) \subset O_{i_x}$$

Preuve: $1 \Rightarrow 2$ Il suffit de démontrer qu'une partie dénombrable de E admet un point d'accumulation dans E. En numérotant ses éléments cela revient à considérer une suite de $E, (x_n) \in \mathbb{N}$,telle que$x_n \neq x_m$ si $n \neq m$. La suite d'ensemble données par $X_n = \{x_k, k \geq n\}$ vérifie $X_{(n+1)} \subset X_n$ et en prenant l'adhérence dans E,$\overline{X_{n+1}} \subset \overline{X_n}$, Ainsi $(\overline{X_n}^E)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides du compact E .L'intersection $\cup_{i\in\mathbb{N}} \overline{X_n}^E$ est non vide et on note x un de ses éléments. Ce point x appartient à E et est un point d'accumulation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Pour tout voisinage V on peut trouver un terme x_n de la suite différent de x qui appartient à V . Si x est un terme de la suite ,$x = x_{n_1}$ l'appartenance de x à $\overline{X_{n_1+1}}^E$ dit qu'il existe $x_n \in \overline{X_{n_1+1}} \cap V$ tandis que x $\notin X_{n_1+1}$. Si x n'est pas un terme de la suite on peut prendre $n_1 = 0$

$2 \Rightarrow 3$ Compte tenu de la Remarque précédente ,la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $l \in E$.Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut trouver $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $d(l, x_{n_k}) < \frac{1}{k+1}$.La sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge alors vers l puisque $\{B(l, \frac{1}{k+1}), k \in \mathbb{N}\}$ forme une base de voisinages de l.

$3 \Rightarrow 1$ Si $\cup_{i\in I} O_i$ est un recouvrement d'ouverts de E . D'après le Lemme de Maille , on peut trouver $\rho > 0$ tel que

$$\forall x \in A, \exists i_x \in I, B(x,\rho) \subset O_{i_x}$$

On construit la suite $(x_n)_{n\in M\subset N}$ par récurrence :

$-x_0 \in E$

$-Si \cup_{k=1}^{n} B(x_k,\rho)$ ne recouvre pas E ,on prend x_{n+1} dans $E \setminus \cup_{k=1}^{n} B(x_k,\rho)$

Dans le contraire, on s'arrête et $M = \{0,...,n\}$

L'ensemble d'indices M est nécessairement fini. En effet dans le cas contraire on a construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $d(x_n; x_m) \geq \rho$ pour $m \neq n$. En extrayant une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

convergeant vers $l \in E$ on obtient pour k assez grand

$$\rho \geq d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) + d(x_{n_{k+1}}, l) + d(x_{n_k}, l) \geq \frac{\rho}{3} + \frac{\rho}{3} + \frac{\rho}{3} = \frac{3\rho}{3}$$

ce qui est impossible pour $\rho > 0$

Donc l'ensemble M est fini et on a $A \subset \cup_{j \in M} B(x_j, \rho) O_{i_{xj}}$ □

3.2 Application propres

Le fait que l'image réciproque d'un compact soit un compact est une propriété que l'on rencontre et qui est parfois bien utile. On introduit cette propriété par la définition suivante :

Définition 3.1. *Une application f continue d'un espace métrique E dans un espace métrique F vérifiant*

$$\begin{cases} \text{pour toute suite } \{x_n\} \text{ d'éléments } x_n \in E \text{ telle que} \\ f(x_n) \text{ converge vers } y \text{ dans } F, \text{ on peut extraire une} \\ \text{sous-suite } \left\{x_{n_k}\right\} \text{ convergeant vers un élément } x \in E \end{cases}$$

est appelée application propre.

On démontre le théorème suivant

Théorème 3.2. *Soient E et F deux espaces métriques. Alors f est une application propre de E dans F si et seulement si*

les images réciproques $f^{-1}(K)$ de compacts $K \subset F$ sont compacts dans E

Preuve: a) Soient K un compact de F et $\{x_n\}$ une suite d'éléments $x_n \in f^{-1}(K)$. Alors $\{f(x_n)\}$ étant une suite d'éléments $f(x_n)$ du compact K, on peut extraire une sous-suite

$f\left(x_{n_k}\right)$ convergeant vers $y \in K$. D'après (4.40), on peut extraire de x_{n_k} une sous-suite d'éléments $x_{n_k} \in f^{-1}(K)$ convergeant vers $x_\star \in E$. Donc $f\left(x_{n_k}\right)$ converge vers $f(x_\star)$ car f est continue et vers $y \in K$. Donc $y = f(x_\star)$, ce qui implique que $x_\star \in f^{-1}(K)$ Par conséquent $f^{-1}(K)$ est compact. b) Inversement, supposons que l'image réciproque de tout compact est compacte et considérons une suite $f(x_n)$ convergeant vers y. L'ensemble $K := \overline{\{f(x_n)\}}$ est compact et par conséquent, $x_n \in f^{-1}(K)$ appartient à un compact. Une sous-suite converge donc vers un élément $x \in E$. □

3.3 Ensembles Pré-compacts

Définition 3.2. *Soit (E, d) un espace métrique, on dit que E est un espace précompact s'il satisfait la condition suivante :*
pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de E, constitué de parties dont les diamètres sont inférieurs à ε c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists (A_i)_{i\in I} \subset E \ tel \ que \ E = \bigcup_{i\in I}(A_i) \ et \ diam(A_i) < \varepsilon \ \forall i \in I$$

avec I fini.

Remarque 3.2. *Naturellement, on peut; dans cette définition, remplacer le terme "partie" par "boule". Ses boules peuvent être ouvertes, fermées*

Cette définition peut être énoncée sous la forme équivalente suivante :

Définition 3.3. *Un espace métrique (E, d) est précompact si, pour $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $F = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset E$, tel que $E = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$*
F est appelée un ε-réseau.

Proposition 3.1. *Dans un espace métrique, tout ensemble précompact est nécessairement borné.*

Remarque 3.3. *La réciproque est généralement fausse .On peut le constater en considérant un ensemble infini E muni de la distance discrète*

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} 0, & si \ x = y. \\ 1, & si \ x \neq y. \end{cases} \tag{3.1}$$

Si l'on suppose que ε soit précompact, E serait alors recouvert par une famille finie $(\Omega_i^n)_{i=1,2,..,p}$ telle que $\sigma(\Omega_i) < \varepsilon$ $i = 1, 2, ..., p$ cela entraine que la famille $(\Omega_i^n)_{i=1,2,..,p}$ est constituée de singletons $\Omega_i = \{a_i\}$ et que $E = \cup_{i=1}^{p}\{a_i\}$ Il s'en suit que E est fini, ce qui contredit les hypothèses.

Exemple 3.1. *Soit $(E, \|.\|)$ un e.v.n sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension fini. Les parties précompactes E sont les parties bornées.*

Proposition 3.2. *Une partie A d'un espace métrique (E, d) est précompacte si est seulement si $\overline{A}$ est précompacte.*

Preuve: Il est claire que si $\overline{A}$ est précompacte , alors A également puisque $A \subset \overline{A}$. Pour la réciproque, il suffit d'observer que si $A \subset \bigcup_1^m K_i$, alors $\overline{A} \subset \bigcup_1^m \overline{K_i}$, et qu'on a $diam(\overline{K_i}) = diam(K_i)$. □

Théorème 3.3. *Soit (E, d) un espace métrique .*

1. *Si (E, d) est compact alors il est précompact.*
2. *Si (E, d) est précompact, alors il est compact si et seulement si (E, d) est complet.*

Preuve:

1. Si (E, d) est un espace métrique compact et si $\varepsilon > 0$ est donné, alors la famille $(B(x, \varepsilon))_{x \in E}$ est un recouvrement ouvert de E .Le résultat découle donc de la propriété de $Borel - Lebesgue$
2. Soit E un espace métrique compact .Si (x_n) est une suite de Cauchy de E, elle a au moins une valeur d'adhérence dans E, donc elle est convergente

   Inversement, si (x_n) est une suite dans E précompact, on va montrer qu'on peut en extraire une suite de Cauchy Si E est complet, cette sous-suite de Cauchy sera convergente, ce qui prouvera la compacité de E.

   Puisque E est précompact, il existe un recouvrement fini de E par des parties $(A_i^1)_{1 \le i \le m_1}$ de diamètre inférieur à 2^{-1}. Et puisque

   $$\mathbb{N} = \bigcup_{1 \le i \le m_1} \{n \in \mathbb{N} : x_n \in A_i^1\}$$

   il existe un $j \le m_1$ tel que $H_1 = \{n : x_n \in A_j^1\}$ soit infini . Alors, pour tout n et tout p dans H_1 ,on a $d(x_n, x_p) \le 2^{-1}$

   De même , puisque E est précompact , il existe un recouvrement fini de E par des parties $(A_i^2)_{1 \le i \le m_2}$ de diamètre inférieur à 2^{-2}.Et puisque

   $$H_1 = \bigcup_{1 \le pi \le m_1} \{n \in H_1 : x_n \in A_i^2\}$$

il existe un $j \leq m_2$ tel que

$$H_2 = \{n \in H_1 : x_n \in A_j^2\}$$

soit infini .Et pour n et p dans H_2 on a $d(x_n, x_p) \leq 2^{-k}$ Alors, on obtient une partie infinie H de $\mathbb{N}$ qui est presque incluse dans chacune sont deux à deux à distance inférieure à 2^{-k},c'est-à-dire que la suite $(x_n)_{n\in H}$ est une suite de Cauchy extraite de la suite (x_n).

□

3.4 Ensemble localement compacts

Définition 3.4. *On dit qu'un espace topologique séparé (E, τ) est localement compact si chacun de ces points admet un voisinage compact c'est-à-dire :*
E est localement compact si et seulement si $\forall x \in E$,$\exists v \in \mathcal{V}(x)$ avec v compact.

Remarque 3.4. *:*

1. *Un espace topologique compact E est localement compact car E est un voisinage compact de chacun de ses points.*
2. *$\mathbb{R}$ est localement compact car pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intervalle$[x-1; x+1]$ est un voisinage compact .*
   plus générale : $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont localement compact(car les boules fermées sont compacts).

Proposition 3.3. *Les espaces localement compacts ont les propriétés suivantes :*

1. *Une partie fermée d'un espace topologique localement compact E est localement compacte.*
2. *Un produit fini d'espaces localement compact est localement compact.*
3. *L'intersection fini des sous-espaces localement compact dans un espace séparé est localement compact.*

On fait les remarques suivantes :

Remarque 3.5. 1. *La réunion de deux partie localement compact n'est pas en général localement compact.*

2. *Une intersection quelconque de parties localement compacts n'est pas toujours localement compact.*
3. *Un produit quelconque d'espaces localement compacts n'est pas en général localement compacts.*

Théorème 3.4. *Soit E un espace vectoriel normé, E est localement compact si, et seulement si, E est de dimension finie.*

Preuve: Supposons que l'espace E est de dimension finie, il est isomorphe à un espace $\mathbb{R}^n$, qui est localement compact puisque les voisinages $\Pi_{i=1}^n = [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]$ sont compacts. Rappelant que un isomorphisme est une application f bijective entre deux espace métrique (E,d) et (F,δ) qui vérifie la condition : $\delta(f(x), f(y)) = d(x,y), \forall x, y \in E$

Inversement, supposons que l'espace vectoriel normé E soit localement compact. Par suite, il existe une boule compacte $B(0,\varepsilon)$ de centre 0 et de rayon ε. On peut donc la recouvrir par un nombre fini de boules $\mathring{B}(x_i, \frac{\varepsilon}{2})(1 \leq i \leq n)$. Considérons alors le sous-espace F de dimension finie. En effet, supposons que F soit différent de E. Soit $x_0 \in E$. Soit complet et par suite, fermé. Donc :

$$d(x_0, F) = inf_{y\in F} \left\|x_0 - y\right\| = \alpha > 0$$

et il existe $y_0 \in F$ tel que :

$$\alpha = d(x_0, F) \leq \left\|x_0 - y\right\| \leq d(x_0, F) + \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{2}$$

Considérons le point $z_0 = \varepsilon \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$. Ce point appartient à la boule $B(0,\varepsilon)$ puisque $\|z_0\| = \varepsilon$ et par suite, à une des boules $B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Donc

$$\|z_0 - x_i\| = \left\|\varepsilon \frac{x_0 - y_0}{\left\|x_0 - y_0\right\|} - x_i\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par suite, le point :

$$y = x_0 - \frac{\left\|x_0 - y_0\right\|}{\varepsilon}(z_0 - x_i) = y_0 + \frac{\left\|x_0 - y_0\right\|}{\varepsilon} x_i$$

appartient à F (car y_0 et x_i appartiennent à F). On en déduit alors que :

$$\alpha_l eq \left\|x_0 - y\right\| = \left\|x_0 - y_0\right\| \frac{z_0 - x_i}{\varepsilon} \leq \frac{1}{2}\frac{3\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{4}$$

ce qui est impossible. □

Chapitre 4

Compacité en dimension finie

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la notion de compacité dans des espaces de dimension finie. On caractérises les espaces de dimension finie en utilisant la compacité de la boule unité fermée. En fin on caractérise les ensembles compacts, ceci fait du théorème de $Heine - Borel$.

Théorème 4.1 (**Théorème de Riesz**). *Soit E un espace vectoriel normé réel. Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *E est de dimension fini.*
2. *toute partie bornée de E est relativement compact.*
3. *la boule unité fermée de E est compacte.*

Preuve: $1 \Longrightarrow 2$ est un corollaire du théorème de $Borel-Lebesgue$: tout fermé borné dans $\mathbb{R}^n$ est compact. Or si E est de dimension n, il s'identifie à $\mathbb{R}^n$.

Les assertions 2, et 3 sont clairement équivalentes.

Démontrons $3 \Longrightarrow 1$ par contra-posée, à partir du lemme pour $r = \frac{1}{2}$ et du fait que tout compact est dénombrablement compact, c'est-à-dire que toute suite y possède au moins une valeur d'adhérence. Supposons donc E de dimension infinie et construisons dans sa sphère unité une suite sans valeur d'adhérence. On choisit d'abord un vecteur unitaire arbitraire u_0 et on applique le lemme à la droite F_0 qu'il engendre (elle est de dimension finie donc fermée dans E) : il existe un vecteur unitaire u_1 tel que $d(u_1, F_0) \geq \frac{1}{2}$. Puis on applique le lemme au plan F_1 engendré par (u_0, u_1) : il existe un vecteur unitaire u_2 tel que $d(u_2, F_1) \geq \frac{1}{2}$, etc. On obtient ainsi dans la boule unité fermée une suite $(U_n)n \in \mathbb{N}$ qui vérifie par construction :

$$\|u_n - u_m\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad m \neq n \|u_n - u_m\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad m \neq n$$

donc qui ne possède aucune sous-suite convergente, ce qui prouve que cette boule n'est pas compacte. □

4.1 Théorème de Heine – Borel

Théorème 4.2. *Pour tout sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$, A est compact si, et seulement si, A est fermé et borné.*

Preuve: (1) Supposons que A est fermé et borné : Soit $(f_n) \subset A$ une suite convergente vers f. Donc tout sous suite de $(f_n)_{n\geq 1}$ est convergente vers f.Comme A est compact, cela implique que f est dans A. Et ainsi, nous voyons que toutes les suites convergentes dans A doivent converger vers un élément de A ce qui signifie précisément que A est fermé.De même, si A est non borné, il aurait des suites $(f_n)_{n\geq 1} \subset A$ de norme monotone croissante et on bornée.Comme la suite définie par $(\|f_n\|)_{n\geq 1}$ est monotone croissante et non bornée, elle ne peut pas avoir de sous suites convergentes. Nous rappelons, toutefois, que la condition nécessaire pour la convergence d'une suite de fonctions est que sa norme converge .Comme la suite $\|f_n\|)_{n\geq 1}$ n'a pas de sous suite convergentes , cela implique que $(f_n)_{n\geq 1}$ n'a pas de sous suites convergentes. Et donc, nous avons montré qu'un ensemble non borné ne peut pas être compact.

(2) Supposons que A est fermé et borné :

Montrons que A est compact : Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite dans A. Puisque A est borné, toute suite dans A doit aussi être bornée. Par la propriété de *Bolzano – Weierstrass*, cela implique qu'il ya une suite convergente de $(f_n)_{n\geq 1}$ et bien sur cette suite est aussi dans A .Supposons que cette sous suite a un point limite f. Comme la sous-suite est dans A, et A est fermé, son point limite doit aussi être dans A.Et donc nous avons trouvé, pour toute suite dans A, une sous-suite convergente avec point limite dans A. Et donc A est compact. □

Chapitre 5

Compacité en dimension infinie

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la compacité dans un espace fonctionnelle qui est $\mathcal{C}[K,E]$ où K est un espace topologique et E est un espace métrique .La notion d'équicontinuité est essentielle pour caractériser les sous-ensembles compacts.

5.1 Équicontinuité

Dans cette sections,E et F sont des espaces métriques, dont les distances sont toutes les deux notées d. On note $\mathcal{C}(E,F)$ l'ensemble des applications continues $f : E \to F$ .Si $F = \mathbb{K}$, on écrit $\mathcal{C}(E,\mathbb{K})$

Définition 5.1. *On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(E,F)$ est **équicontinue** en un point $x \in E$ si la propriété suivante est vérifiée :*

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta = \delta(x,\varepsilon) > 0. \forall y \in E, d(x,y) \leq \delta \Rightarrow \forall f \in \mathcal{F} d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est équicontinue si elle est équicontinue en tout point $x \in E$ En d'autres termes, une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(E,F)$ est équicontinue si toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ sont continues et si, pour tout $x \in E$, on peut, étant donné $\varepsilon > 0$ prendre le même (δ de continuité) an point x pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{F}$ Le préfixe "équi" indique une uniformité par rapport aux fonctions $f \in \mathcal{F}$. On dira qu'une suite $(f_n) \subset C(E,F)$ est équicontinue si l'ensemble $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue.

Exemple 5.1. *Par définition, une famille F formée d'une seule fonction continue f est équicontinue. Plus généralement, toute partie finie de* $\mathrm{C}(\mathrm{E}_1\mathrm{F})$ *est équicontinue*

Exemple 5.2. *Si toutes les fonctions de* $\mathcal{F}$ *sont C-lipschitziennes, pour une même constante C, alors* $\mathcal{F}$ *est équicontinue. Plus généralement, il suffit que tout point* $x \in E$ *possède un voisinage ouvert* V_x *tel que toutes les fonctions de* $\mathcal{F}$ *soient* C_x*-lipschitziennes sur* V_x*, pour une même constante* C_x *dépendant uniquement de x*

Proposition 5.1. *la boule unité de* $\mathcal{C}[0,1]$ *n'est pas équicontinue*

Preuve: Rappelons que la boule unité contient la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par $f_n(x) = x^n$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$, et supposons qu'il existe un tel $\delta_1 > 0$, tel que la condition d'équicontinuité soit satisfaite. Définissions $\delta = min\{\delta_1, 1\}$. Comme il est tout au plus δ_1, il doit aussi fonctionner. Considérons maintenant $x = 1, y = 1 - \frac{\delta}{2}$. Il est clair que :

$$|x - y| = |1 - 1 + \frac{\delta}{2}| = |\frac{\delta}{2}|$$

Nous supposons que notre ensemble est équicontinu, cela implique que :

$$\forall f \in B(0,1), |f(1) - f(1 - \frac{\delta}{2})| < \frac{1}{2}$$

Toutefois, on sait que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est dans la boule unité, et quelle converge vers 0 pour tout $x \in [0,1[$ et a 1 pour $x = 1$.

Donc$|f(1) - f(1 - \frac{\delta}{2})|$ peut être rendue arbitrairement proche de 1 pour tout $\delta > 0$ fixé. Et donc la boule unité n'est pas équicontinue, Nous sommes maintenant prêts à démontrer le résultat principal de ce chapitre, le théorème d'Arzéla-Ascoli. □

5.2 Théorème d'Arzéla-Ascoli

Théorème 5.1. *Théorème d'Arzéla-Ascoli Soient E un espace métrique compact, F un espace métrique complet.* $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}_\infty(E,F)$ *un sous-ensemble d'application continue de E dans F. Pour que* $\mathcal{H}$ *soit un sous-ensemble compact de l'espace* $\mathcal{C}_\infty(E,F)$*, il faut et il suffit que* $\mathcal{H}$ *soit fermé, équicontinu et que, pour tout* $x \in E$*, les ensembles* $\mathcal{H}(x) = \{f(x)\}_{f\in\mathcal{H}}$ *soient relativement compacts dans F*

Preuve: a) Supposons que $\mathcal{H}$ soit compact. Il est fermé. D'autre part, si $x \in E$, l'application $\delta(x) : f \in \mathcal{C}_\infty(E,F) \Rightarrow f(x) \in F$ est continue puisque

$$d(\delta(x)(f), \delta(x)(g)) := d(f(x), g(x)) \leq d_\infty(f,g)$$

Donc $\mathcal{H}(x) = \delta(x)(\mathcal{H})$ étant l'image par $\delta(x)$ du compact $\mathcal{H}$ est un sous-ensemble compact de F. Enfin, montons que $\mathcal{H}$ est équicontinu. Puisque $\mathcal{H}$ est compact, il existe une suite finie d'application $f_i \in \mathcal{H}(i = 1, ..., n)$ tel que

$$\sup_{f \in \mathcal{H}} \min_{i=1,..,n} d_\infty(f, f_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Puisque les f_i sont continue, il existe $\eta := \eta(\varepsilon, x)$ tel que

$$\max_{1 \leq i \leq n} d(f_i(x), f_i(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ dés que } d(x,y) \leq \eta = \eta(\varepsilon, x)$$

Par suite, si $f \in \mathcal{H}$ et si f_i est tel que

$$d_\infty(f, f_i) = \sup_{y \in E} d(f(x), f_i(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

on en déduit que si $d(x,y) \leq \eta := \eta(\varepsilon, x, \mathcal{H})$,

$$\begin{cases} d(f(x), f(y)) \leq d\left(f(x), f_i(x)\right) + d\left(f_i(x), f_i(y)\right) + d\left(f_i(y), f(y)\right) \\ \leq 2d_\infty\left(f, f_i\right) + d\left(f_i(x), f_i(y)\right) \leq \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{cases}$$

Donc $\mathcal{H}$ est equicontinu.

b) *Inversement*, montrons que $\mathcal{H}$ est compact, en montrant que cet ensemble est complet et que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite finie $f_1, .., f_i, .., f_n$ de fonctions $f_i \in \mathcal{H}$ telle que pour tout $f \in \mathcal{H}$,il existe f_i vérifiant

$$d_\infty(f, f_i) = \sup x \in E \; d(f(x), f_i(x)) \leq \varepsilon$$

Puisque $\mathcal{H}$ est un ensemble équicontinu, on peut associer à tout $x \in E$ un nombre $\eta(x) := \eta(\varepsilon, x, \mathcal{H})$ tel que

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ dés que } y \in B(x, \eta(x)) \text{ pour tout } f \in \mathcal{C}$$

Puisque E est compact, on peut recouvrir E par un *nombre fini* de boules ouvertes $\mathring{B}(x_j, \eta(x_j))(1 \leq j \leq p)$. Associons à tout $f \in \mathcal{C}_\infty(E,F)$ la suite $(f(x_1),..,f(x_j),..,f(x_p))$ de F^p et considérons le sous-ensemble

$$\mathcal{H}(x_i,..,x_j,..,x_p)$$

de F^p formé de ces suites lorsque f parcourt $\mathcal{H}$.

Puisque $\mathcal{H}(x_j)$ est la jième projection de $\mathcal{H}(x_i,..,x_j,..,x_p)$ sur F et puisqu'elle est relativement compacte par hypothèse, le sous-ensemble $\mathcal{H}(x_i,..,x_j,..,x_p)$ est un sous-ensemble relativement compact de F^p. Il peut donc être recouvert par une suite finie de boules de rayon $\frac{\varepsilon}{3}$: il existe une suite $f_1,..,f_i,..,f_n$ de$n$ éléments f_i de $\mathcal{H}$ telle que pour tout $f \in \mathcal{H}$, il existe f_i vérifiant

$$\max_{1 \leq j \leq p} d(f(x_i), f_i(x_j)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Par suite, si x est un élément arbitraire de E, il appartient à une boule $\mathring{B}(x_j, \eta(x_j))$ et donc,

$$\begin{cases} d\left(f(x), f_i(x)\right) \\ \leq d\Big(f(x), f\left(x_j\right)\Big) + d\Big(f\left(x_j\right), f_i\left(x_j\right)\Big) + d\Big(f_i\left(x_j\right), f_i(x)\Big) \leq \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{cases}$$

ce qui implique que $d_\infty(f, f_i) \leq$ E. Pour établir que $\mathcal{C}_\infty(E,F)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{U}(E,F)$, nous avons démontré que toute limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue. Nous allons considérer des notions de convergence plus faibles.

□

Bibliographie

[1] Claude Wagschal, Topologie et analyse fonctionnelle, Hermann, coll. « Méthodes », 1995

[2] N. Bourbaki, Éléments de mathématique, livre III : Topologie générale [détail des éditions], Paris, Hermann, 1971

[3] Claude Wagschal, Topologie et analyse fonctionnelle, Hermann, coll. « Méthodes », 1995

[4] R. P. Agarwal, M. Meehan et D. O'Regan, Théorie et applications du point fixe,

[5] : Brezis H.Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris, 1992.