République Algérienne Démocratique et Populaire4

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université IBN KHALDOUN-Tiaret

Faculté des Mathématiques et Informatiques

Département des Mathématiques

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquée

Option : Analyse fonctionnelle et équations différentielles

Présenté par :

Boukhad Mustapha

Morsli Tarek

Doudai Abdelhakim

Intitulé :

L'oscillation des équations différentielles

Soutenu le 12/10/2020

Devant le jury composé de :

Président	Mr : LARABI Abderrahmane	M.C.A	U.Ibn Khaldoun-Tiaret
Encadrant	Mme : LADRANI Fatima Zohra	M.C.A	ENS-Oran
Examinateur	Mr : OUARDANI Abderrahmane	M.C.A	U.Ibn Khaldoun-Tiaret

Année Universitaire : 2019 – 2020

Dédicaces

...je dédie ce travail :

À

Mes très chers parents : Boukhad Mokhtar et *Chehbi Djouher pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes ètudes.*

Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours. Puisse Dieu, le Très Haut, vous accorder santé, bonheur et longue vie .

À

Mes petites soeurs Fatima zohra, Asmaa pour leurs encouragements, leur amour et leur soutien moral

Je leur souhaite le meilleur dans leur vie.

À Mon très chèr oncle Boukhad Abdelkader, mon frère Mohamed et tous la famille BOUKHAD pour leurs encouragement permanents, et leur soutien moral.

À

Ma grand-père Chehbi Menad.

M. Boukhad

Dédicaces

...je dédie ce travail :

À

Mon père Athman et Ma mère Om lkhier pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.

À

mon oncle Mansour, Dieu ait son âme

À

mon oncle Mokhtar, Dieu ait son âme

T. Morsli

Dédicaces

...je dédie ce travail :

À

Mes très chers parents Abdelkader et Kheira que dieu les garde et les protège

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous.

Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien étre. Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation.

À

Mes frères Ahmed, Mansour

mes soeurs : Maymouna, Dalila, Noura, Hanane et Bouchra

À

petite fille de mon frère Maria, Sirine, Hadjer

À

tous la promotion Master 02 *Maths de* 2019/2020

A. Doudai

Remerciements

Je remercie tout d'abord ALLAH pour m'avoir donné la capacité de savoir et réussir afin de réaliser ce travail

A mon encadreur Mme : LADRANI Fatima Zohra
J'ai eu l'honneur d'être parmi vos étudiants de bénéficier de votre riche enseignement. Vos qualités pédagogiques et humaines sont pour moi un modéle. Votre gentillesse, et votre disponibilité permanente ont toujours suscité mon admiration. Veuillez bien recevoir mes remerciements pour le grand honneur que vous m'avez fait d'accepter l'encadrement de cetravail.

Aux membres du jury

Messieurs les membres du jury, vous nous faites un grand honneur en accéptant de juger ce travail. Je dois un remerciement á toute l'équipe d'enseignement pour leurs qualités scientiq́ues et pédagogiques. Je tiens à remercier chaleureusement, mes parents et tous ceux qui, de prés ou de loin, m'ont apporté leurs sollicitudes pour accomplir ce travail.

M. Boukhad, T. Morsli, A. Doudai

Table des matières

Introduction générale

Lors de l'étude des phénomènes dans la nature, les solutions de plusieurs problèmes de la Physique, de la Chimie et de la Biologie ou d'autres sciences, sont rarement exprimables sous forme d'une relation directe entre les grandeurs décrivant l'un ou l'autre processus évolutif.

Cependant, dans la plupart des cas, on peut parvenir à établir une relation entre les grandeurs (fonctions) et les vitesses de leur changement c'est-à-dire on peut parvenir à trouver des équations dans lesquelles des fonctions inconnues entrent sous le signe de dérivée. Ces équations sont dites équations différentielles.

Depuis Isaac Newton, les equations differentielles jouent un role essentiel pour la modelisation de systèmes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques ou économiques et une part prépond érante des phénomènes modélisés par les mathématiques le sont par des équations différentielles. Lorsque ces équations ne font intervenir que des fonctions d'une variable, et souvent cette variable sera le temps, on parle d'équations differentielles ordinaires.

Ce mémoire présente l'oscillation des équations différentielles ordinaires et pour la théorie de l'oscillation, la difficulté principale des études désormais classiques consiste en ce qu'il n'existait aucune méthode générale pour traiter ces problèmes ; chaque fois il a fallu mettre en jeu un artifice spécial pour pouvoir aboutir à la solution. A cause de ces difficultés on a concentré l'attention plutôt sur les équations différentielles linéaires où l'on est arrivé à un algorithme suffisamment simple et général, ce qui a permis d'établir les contacts avec la physique moyennant parfois quelques idéalisations. Parmi celles-là, la mieux connue est peut-étre la méthode de l'oscillations ce qui, comme le nom l'indique, donne des résultats satisfaisants quand les oscillations sont petites, d'où résultent quelques simplifications bien connues.

Ce mémoire est répartit en qauatre chapitre.

Dans **le premier chapitre** nous allons introduire des rappels sur quelques notions fondamentales qui vont nous servir dans l'élaboration de cet mémoire, Aussi la définition de titre de cet mémoire.

Le **deuxieme chapitre** est parles sur Oscillation pour une équation différentielle semi linéaire du seconde ordre.

Dans le **troisieme chapitre** nous présentons le comportement asymptotique de toute solution de l'équation différentielle non-linéaires d'ordre trois.

Finalement dans le **demier chapitre** on parlons sur l' Oscillation pour une équation différentielle de retard de second ordre et nous étudions l'oscillation de toute solution de l'équation différentielle de retard de second ordre .

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Définition de l'oscillation

Définition 1.1.1. *On dit qu'une fonction* $x : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, *est éventuellement positive sur* $[a, +\infty)\,, s'ilexistet_0 \in [a, +\infty)$ *tel que*

$$x\,(t) > 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [t_0, +\infty), a \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.1.2. *On dit qu'une fonction* $x : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *est éventuellement négative sur* $[a, +\infty)\,, s'ilexistet_0 \in [a, +\infty)$ *tel que*

$$x\,(t) < 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [t_0, +\infty)\,, a \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.1.1. *Soit* $x : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction,* x *est éventuellement positive si et seulement si* $-x$ *est éventuellement négative.*

Définition 1.1.3. *On dit qu'une fonction* $x : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *est oscillante sur* $[a, +\infty)$ *si elle est ni éventuellement positive ni éventuellement négative.*
Elle est dite non oscillante dans le cas contraire.

Remarque 1.1.1. *la fonction* x *est oscillante sur* $[a, +\infty)$ *si et seulement s'il existe une suite* $\{t_n\}_n \in [a, +\infty)$ *strictement croissante et converge vers* $+\infty$, *tel que*

$$x\,(t_n) = 0, \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Exemple 1.1.1. *Soit* $x : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *est définit par :* $x\,(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right)$, *alors* x *non* *oscillante, en effet,*

$$\sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \Leftrightarrow t_{=}\frac{1}{\pi n}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

comme la suite $(t_n)_n$ *est converge vers* 0*, alors* x *non oscillante.*

Exemple 1.1.2. *Considérons l'équation différentielle suivante*

$$x^{(2)}(t) + x(t) = 0, \qquad \text{pour } t \in [0, +\infty).$$

Elle a une solution $x(t) = \sin(t)$ *oscillante.*

Remarque 1.1.2. *Si* x *une fonction périodique n'implique pas que* x *est oscillante, par exemple* $t \to \sin(t) + 2$ *est une fonction périodique, mais elle est éventuellement positive.*

1.2 Inégalité

Nous présentons une inégalité que nous utilisons dans ce mémoire.

Lemme 1.2.1. *Soit* A, B, C *et* α *des constantes, tels que* $B > 0$*. Nous avons alors l'inégalité suivante*

$$Ax - B(x - C)^{1+\frac{1}{\alpha}} \leq AC + \frac{\alpha^\alpha A^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} B^\alpha}, \qquad \text{pour } x \geq 0. \tag{1.1}$$

Démonstration. Soit $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ est définit par :

$$f(x) = Ax - B(x - C)^{1+\frac{1}{\alpha}},$$

avec $A, C \in \mathbb{R}$ et $\alpha, B > 0$, alors

$$f'(x) = A - \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) B (x - C)^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad \text{pour } x \geq 0.$$

Soit $x^* \in \mathbb{R}^+$, tel que $f'(x^*) = 0$, alors

$$x^* = \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)\frac{A}{B}\right]^\alpha + C.$$

Par conséquent

$$\max_{x\in\mathbb{R}^+} f(x) = f(x^*) = AC + \frac{\alpha^\alpha A^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} B^\alpha},$$

donc

$$f(x) \leq AC + \frac{\alpha^\alpha A^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} B^\alpha}, \qquad \text{pour } x \geq 0.$$

Cela signifie l'inégalité (1.1) . □

Remarque 1.2.1. *Si $C = 0$ dans (1.1), on obtient*

$$Ax - Bx^{1+\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{\alpha^\alpha A^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} B^\alpha}, \qquad \textit{pour } x \geq 0. \tag{1.2}$$

Si $\alpha = 1$ dans (1.2), on obtient

$$Ax - Bx^2 \leq \frac{A^2}{4B}, \qquad \textit{pour } x \geq 0.$$

Chapitre 2

Oscillation pour une équation différentielle semi linéaire du seconde ordre

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'oscillation de toute solution de l'équation différentielles semi-linéaires d'ordre deux.

$$\left(r\left(x^{'}\right)^{\gamma}\right)^{'}(t)+p(t)\,x^{\gamma}(\tau(t))=0, \qquad \text{pour tout } t\in[t_0,+\infty). \tag{2.1}$$

On supposera que le probléme (2.1) admet au moins une solution dans l'espace $\mathcal{C}^2([t_0,+\infty),\mathbb{R})$.
On impose les conditions suivantes :

(A_1) $\gamma>0$ est de la forme $\gamma=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ où γ_1, γ_2 sont impairs positifs et $t_0\geq 0$.

(A_2) Les fonctions r et p sont des valeurs réelles et sont continues positives définies sur $[t_0,+\infty)$.

(A_3) La fonction $\tau:[t_0,+\infty)\to[t_0,+\infty)$ est continue, telle que

$$\tau(t)\leq t, \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to+\infty}\tau(t)=+\infty.$$

2.2 Cas où l'équation (2.1) admet une solution non oscillante

Dans cette section, nous supposons que l'équation (2.1) admet une solution éventuellement positive (le raisonnement reste valable si elle est éventuellement négative).

Lemme 2.2.1. *Supposons que l'équation (2.1) admet une solution éventuellement positive x sur $[t_0, \infty)$, tel que*

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{r(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} dt = \infty. \tag{2.2}$$

Alors, il existe $T \in [t_0, \infty)$, suffisamment assez grand, telle que

$$x^{'}(t) > 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [T, \infty).$$

Démonstration.
Si x est une solution éventuellement positive de l'équation (2.1).
Alors il existe $t_1 \in [t_0, \infty)$, tels que

$$x(t) > 0, \qquad x(\tau(t)) > 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

D'après (2.1), on a

$$\left(r\left(x^{'}\right)^{\gamma}\right)^{'}(t) = -p\,(t)\,x^{\gamma}\,(\tau\,(t)) < 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

Montrons que

$$r(t)(x^{'}(t))^{\gamma} \geq 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

Suppose le contraire c'est-à-dire, il existe $t_2 \geq t_1$, tel que

$$\xi = r(t_2)(x^{'}(t_2))^{\gamma} < 0.$$

Puisque la fonction $t \to r\left(x^{'}\right)^{\gamma}$ est strictement décroissante sur $[t_1, \infty)$, alors

$$r(t)(x^{'}(t))^{\gamma} \leq \xi, \qquad \text{pour tout } t \geq t_2.$$

Ce qui implique

$$x^{'}(t) \leq \left(\frac{\xi}{r(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \qquad \text{pour tout } t \geq t_2.$$

En intégrant la dernière inégalité entre t_2 , t on obtient

$$x(t) \leq x(t_2) + \xi^{\frac{1}{\gamma}} \int_{t_2}^{t} \left(\frac{1}{(r(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}} ds.$$

D'après (2.2), on obtient que $x\,(t)$ tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$.
D'ou la contradiction. □

Lemme 2.2.2. *Supposons que l'équation* (2.1) *admet une solution éventuellement positive x sur $[t_0, \infty)$ et* (2.2) *est vérifiée, tel que*

$$r^{'}(t) \geq 0, \quad \textit{pour } t \in [t_0, \infty), \quad \textit{et} \quad \int_{t_0}^{\infty} \tau^{\gamma}(t)p(t)dt = \infty. \tag{2.3}$$

Alors, il existe $T \in [t_0, \infty)$, suffisamment assez grand, telle que

$$x^{(2)}\,(t) \leq 0, \qquad x\,(t) > tx^{'}\,(t)\,, \qquad \left(\frac{x}{t}\right)^{'} < 0, \quad \textit{pour tout } t \in [T, \infty).$$

Démonstration.
Par le lemme 2.2.1, nous avons $x^{'} > 0$, sur $t \in [T, \infty)$. Montrons que $x^{(2)} \leq 0$, sur $[T, \infty)$. On a

$$\gamma r\,(t)\, x^{(2)}\,(t) \left(x^{'}\right)^{\gamma-1} = \left(r\left(x^{'}\right)^{\gamma}\right)^{'}(t) - r^{'}\,(t)\left(x^{'}\,(t)\right)^{\gamma}, \qquad \text{pour tout } t \geq T.$$

Comme $\left(r\left(x^{'}\right)^{\gamma}\right)^{'} < 0$ et $r^{'} \geq 0$ sur $[T, \infty)$, on obtient

$$\gamma r\,(t)\, x^{(2)}\,(t) \left(x^{'}\right)^{\gamma-1} \leq 0, \qquad \text{pour tout } t \geq T.$$

d'où $x^{(2)}\,(t) \leq 0$ sur $[T, \infty)$.
Ensuite, nous montrons que $\left(\frac{x}{t}\right)^{'} < 0$ sur $[T, \infty)$. Soit

$$v(t) := x(t) - tx^{'}(t), \qquad \text{pour tout } t \geq T.$$

Alors, pour tout $t \in [T, \infty)$, $v^{'}(t) := -tx^{''}(t) \geq 0$, c'est-à-dire v est strictement croissante sur $[T,\infty)$. Montrons qu'il existe $t_1 \in [T,\infty)$, telle que $v(t) > 0$ sur $[t_1,\infty)$. On suppose le contraire, par dérivation de la fonction $\dfrac{x(t)}{t}$, sur $[t_1,+\infty)$, on trouve

$$\left(\frac{x(t)}{t}\right)^{'} = \frac{-x(t)+tx^{'}(t)}{t^2} = -\frac{v(t)}{t^2} > 0, \qquad \text{pour tout } t \in [t_2,+\infty)\,. \tag{2.4}$$

Donc $\dfrac{x}{t}$ est strictement croissante sur $[t_1,\infty)$, on choisit $t_2 \in [t_1,+\infty)$, telle que

$$\tau(t) \geq \tau(t_3), \qquad \text{pour tout } t \geq t_2.$$

Alors

$$\frac{x(\tau(t))}{\tau(t)} \geq \frac{x(\tau(t_2))}{\tau(t_2)} := d > 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_2.$$

En intégrant l'équation (2.1) entre t à t_2 , on obtient

$$\int_t^{t_2} p(s)x^{\gamma}(\tau(s))ds = -r(t_2)(x'(t_2))^{\gamma} + r(t)(x^{'}(t))^{\gamma}.$$

Donc

$$\begin{aligned} r(t_2)(x^{'}(t_2))^{\gamma} &\geq \int_t^{t_2} p(s)x^{\gamma}(\tau(s))ds, \\ &\geq d^{\gamma}\int_t^{t_2} p(s)\tau^{\gamma}(s)ds. \end{aligned}$$

Ce qui donne la contradiction par (2.3).

Par (2.4), on obtient $\left(\dfrac{x}{t}\right)^{'} < 0$ sur $[t_2,\infty)$. □

Dans la suite, nous considérons l'équation (2.1) dans le cas particulier $r\,(t) \equiv 1$, c'est-à-dire

$$\left(\left(x^{'}\right)^{\gamma}\right)^{'}(t) + p\,(t)\,x^{\gamma}\,(\tau\,(t)) = 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_0. \tag{2.5}$$

Pour la simplification, on note

$$P(t) := p(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma},$$
$$q_* := \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} s^{\gamma+1}P(s)ds,$$
$$p_* := \liminf_{t\to\infty} t^{\gamma}\int_{t}^{\infty} P(s)ds.$$

Lemme 2.2.3. *Supposons que x une solution éventuellement positive de l'équation* (2.5)*, tel que* (2.3) *vérifie,*

$$\int_{t_0}^{\infty} P(t)\, dt < \infty. \tag{2.6}$$

Soit

$$w(t) := \left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)^{\gamma}, \qquad r := \liminf_{t\to\infty} t^{\gamma}w(t), \qquad et \qquad R := \limsup_{t\to\infty} t^{\gamma}w(t).$$

Alors

$$p_* + q_* \leq 1, \qquad p_* \leq r - r^{1+\frac{1}{\gamma}}.$$

Démonstration.

D'après le lemme 2.2.1, il existe $t_1 \in [t_0, \infty)$, tel que

$$x'(t) > 0, \quad x(t) > 0, \quad x(\tau(t)) > 0, \quad \text{sur } [t_1, \infty).$$

Alors $w(t) \geq 0$ pour $t \in [t_1, \infty)$. Par dérivation de la fonction w, on obtient

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{\left(\left(x'(t)\right)^{\gamma}\right)'}{x^{\gamma}(t)} - \frac{\left(x'(t)\right)^{\gamma}\left(x^{\gamma}(t)\right)'}{x^{2\gamma}(t)} \\ &= \frac{\left(\left(x'(t)\right)^{\gamma}\right)'}{x^{\gamma}(t)} - \gamma\left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)^{\gamma}\frac{x'(t)}{x(t)}. \end{aligned}$$

De (2.5), nous obtenons

$$w'(t) = -\frac{p(t)\, x^{\gamma}(\tau(t))}{x^{\gamma}(t)} - \gamma\left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)^{\gamma}\frac{x'(t)}{x(t)}.$$

Puisque $\tau(t) \leq t$ et $\frac{x}{t}$ est strictement décroissante sur $[t_1, +\infty)$, alors

$$\frac{x(t)}{t} \leq \frac{x(\tau(t))}{\tau(t)}.$$

Par la dernière inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} w^{'}(t) &\leq -\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma} p(t) - \gamma \left(\frac{x^{'}(t)}{x(t)}\right)^{\gamma+1} \\ &= -P(t) - \gamma \left(\frac{x^{'}(t)}{x(t)}\right)^{\gamma+1}. \end{aligned}$$

Substituons $w(t)$ dans la derniére inégalité, on obtient

$$w^{'}(t) \leq -P(t) - \gamma \left[w(t)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}},$$

donc

$$w^{'}(t) + P(t) + \gamma \left[w(t)\right]^{1+\frac{1}{\gamma}} \leq 0. \tag{2.7}$$

Puisque $P(t) > 0$ et $w(t) > 0$, pour $t \geq t_1$, alors par (2.7), on a $w^{'}(t) \leq 0$, pour $t \geq t_1$, donc w est strictement décroissante sur $[t_1, +\infty)$. Par le Lemme 2.2.2, on a

$$w(t) := \left(\frac{x^{'}(t)}{x(t)}\right)^{\gamma} \leq \frac{1}{t^{\gamma}}, \qquad \text{pour tout } t \in [t_1, \infty).$$

Ce qui implique $\lim_{t\to+\infty} w(t) = 0$ et

$$r \leq R \leq 1.$$

Par intégration de (2.7), entre t à ∞, on obtient

$$w(t) \geq \int_t^{\infty} P(s)ds + \gamma \int_t^{\infty} \left[w(s)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} ds.$$

Alors :

$$t^{\gamma} w(t) \geq t^{\gamma} \int_t^{\infty} P(s)ds + \gamma t^{\gamma} \int_t^{\infty} \left[w(s)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} ds. \tag{2.8}$$

Soit $\varepsilon > 0$, d'après les définitions de p_* et r, nous pouvons choisir $t_1 \in [T, \infty)$, suffisamment grand, telle que

$$t^{\gamma}\int_{t}^{\infty}P(s)ds \geq p_{*}-\varepsilon, \qquad t^{\gamma}w(t)\geq r-\varepsilon, \qquad \text{pour } t\geq t_1. \tag{2.9}$$

Substituons (2.9) dans (2.8), on obtient

$$\begin{aligned} t^{\gamma}w(t) &\geq p_{*}-\varepsilon+\gamma t^{\gamma}\int_{t}^{\infty}\left[\frac{r-\varepsilon}{s^{\gamma}}\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}ds \\ &\geq p_{*}-\varepsilon+\gamma(r-\varepsilon)^{1+\frac{1}{\gamma}}t^{\gamma}\int_{t}^{\infty}\frac{1}{s^{\gamma+1}}ds \\ &\geq p_{*}-\varepsilon+(r-\varepsilon)^{1+\frac{1}{\gamma}}. \end{aligned}$$

Donc,

$$r=\liminf_{t\to+\infty} t^{\gamma}w(t)\geq p_{*}-\varepsilon+(r-\varepsilon)^{1+\frac{1}{\gamma}},$$

Lorsque ε tend vers 0, nous déduisons

$$p_{*}\leq r-r^{1+\frac{1}{\gamma}}. \tag{2.10}$$

En multipliant les deux côtés de (2.7) par $t^{\gamma+1}$ et en intégrant entre T à t, on trouver

$$\int_{T}^{t}s^{\gamma+1}w^{'}(s)ds\leq-\int_{T}^{t}s^{\gamma+1}P(s)ds-\gamma\int_{T}^{t}s^{\gamma+1}w^{\lambda}(s)ds.$$

Avec $\lambda=(\gamma+1)/\gamma$. Par l'intégration par parties, nous avons

$$t^{\gamma+1}w(t)\leq T^{\gamma+1}w(T)+(\gamma+1)\int_{T}^{t}s^{\gamma}w(s)ds-\int_{T}^{t}s^{\gamma+1}P(s)-\gamma\int_{T}^{t}s^{\gamma+1}w^{\lambda}(s)ds.$$

Par conséquent

$$t^{\gamma+1}w(t)\leq T^{\gamma+1}w(T)-\int_{T}^{t}s^{\gamma+1}P(s)ds+\int_{T}^{t}\left[(\gamma+1)s^{\gamma}w(s)-\gamma s^{\gamma+1}w^{\lambda}(s)\right]ds.$$

En utilisant l'inégalité (1.1), avec $C=0$ et A, B sont des constants, nous obtenons

$$(\gamma+1)s^{\gamma}w(s)-\gamma s^{\gamma+1}w^{\lambda}(s)\leq 1.$$

Donc,

$$t^{\gamma+1}w(t) \leq T^{\gamma+1}w(T) - \int_T^t s^{\gamma+1}P(s)ds + (t-T).$$

Par conséquent

$$t^{\gamma}w(t) \leq \left(1 - \frac{T}{t}\right) + \frac{T^{\gamma+1}}{t}w(T) - \frac{1}{t}\int_T^t s^{\gamma+1}P(s)ds.$$

Alors

$$\begin{aligned} R &= \limsup_{t\to\infty} t^{\gamma}w(t) \\ &\leq 1 + \limsup_{t\to\infty} \frac{-1}{t}\int_T^t s^{\gamma+1}P(s)ds \\ &\leq 1 - \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_T^t s^{\gamma+1}P(s)ds \\ &\leq 1 - q_*. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Par (2.10) et (2.11), on obtient

$$p_* \leq r - r^{1+\frac{1}{\gamma}} \leq r \leq R \leq 1 - q_*,$$

d'où

$$p_* + q_* \leq 1.$$

□

2.3 Théorèmes d'existence de l'oscillation pour l'équation (2.1)

Dans cette section, nous établissons quelques conditions suffisantes qui garantissent que chaque solution x de (2.1) est oscillante sur $[t_0, \infty)$.

Théorème 2.3.1. *Supposons que (2.3) et (2.6) sont vérifiée, si*

$$p_* + q_* > 1. \tag{2.12}$$

Alors chaque solution de l'équation (2.3) est oscillante.

Démonstration.

Supposons le contraire, que x est une solution non oscillante de (2.5). Supposons que x est une solution éventuellement positive de l'équation (2.5), la substitution $y = -x$ transforme l'équation (2.5) en une équation de la même forme.

Par le lemme 2.2.3, nous avons

$$p_* + q_* \leq 1.$$

Ce qui donne la contradiction par (2.12). $\square$

Théorème 2.3.2. *Supposons que* (2.2) *et* (2.6) *sont vérifiée, si*

$$p_* = \liminf_{t\to\infty} t^{\gamma} \int_t^{\infty} p(s) \left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^{\gamma} ds > \frac{\gamma^{\gamma}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}. \tag{2.13}$$

Alors chaque solution de l'équation (2.5) *est oscillante.*

Démonstration.

Supposons que (2.5) est non-oscillatoire sur $[t_0, +\infty)$, alors par les hypothèses de lemme 2.2.3, on a (2.6) est vérifiée. De l'inégalité (2.10), nous avons

$$p_* \leq r - r^{1+\frac{1}{\gamma}}.$$

En utilisant l'inégalité (1.1), avec $B = A = 1$ et $C = 0$, nous obtenons

$$p_* \leq \frac{\gamma^{\gamma}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}.$$

Ce qui donne la contradiction par (2.13). $\square$

Exemple 2.3.1. *Considérons l'équation différentielle semi-linéaire suivante*

$$((x^{'}(t))^3)^{'} + \frac{1}{t^4} x^3(t) = 0, \qquad t \geq 1. \tag{2.14}$$

Ici,

$$\gamma = 3, \qquad r\,(t) = 1, \qquad p\,(t) = \frac{1}{t^4}, \qquad \tau\,(t) = t.$$

Alors

$$\int_1^{\infty} dt = \infty, \quad et \quad \int_1^{\infty} P\,(t)\, dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^4} dt = \frac{1}{3}.$$

D'autre part, nous avons

$$t^{\gamma}\int_t^{\infty} p(s)\left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^{\gamma} ds = t^3\int_t^{\infty}\frac{1}{s^4}ds = \frac{1}{3} \rightarrow .$$

Par conséquent

$$p_* = \frac{1}{3} > \frac{\gamma^{\gamma}}{(\gamma+1)^{\gamma}} = \frac{9}{256}.$$

Donc (2.13) *est vérifiée. Le théorème 2.3.2 implique que la solution de l'équation* (2.14) *est oscillante.*

Théorème 2.3.3. *Supposons que* (2.2) *et* (2.3) *est vérifiée, si*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{t^{\gamma}}{r(t)}\int_t^{\infty} p(s)\left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^{\gamma} ds > 1. \tag{2.15}$$

Alors chaque solution de (2.1) *est oscillante.*

Démonstration.

Supposons que x est une solution éventuellement positive de (2.1) sur $[t_0, \infty)$.

Par les Lemmes 2.2.1 et 2.2.2, il existe $t_1 \geq t_0$ tels que

$$x(\tau(t)) > 0, \qquad x^{'}(t) > 0, \qquad x^{(2)}(t) < 0, \qquad \frac{x(t)}{t} > x^{'}(t),$$

sur $[t_1, \infty)$ et $\frac{x}{t}$ est strictement décroissant sur $[t_1, \infty)$. Par intégration de (2.1) entre t à T, on trouve

$$\int_t^T p(s)x^{\gamma}(\tau(s))ds = -r(T)(x^{'}(T))^{\gamma} + r(t)(x^{'}(t))^{\gamma}.$$

Comme $x^{'}(t) > 0$ et $x^{'}(t) < \frac{x(t)}{t}$, on obtient

$$\frac{1}{r(t)}\int_t^T p(s)x^{\gamma}(\tau(s))ds \leq (x^{'}(t))^{\gamma} \leq \frac{(x(t))^{\gamma}}{t^{\gamma}}.$$

Comme $\frac{x}{t}$ est strictement décroissant sur $[t_1, \infty)$, alors

$$\frac{\tau(t)}{t}x(t) \leq x(\tau(t)), \qquad \text{pour tout } t \geq t_1,$$

donc

$$\frac{1}{r(t)}\int_t^T p(s)x^{\gamma}(s)\left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^{\gamma} ds \leq \frac{(x(t))^{\gamma}}{t^{\gamma}}.$$

Puisque x est strictement croissante sur $[t_1,\infty)$, on trouve

$$\frac{(x(t))^{\gamma}}{r(t)}\int_t^T p(s)\left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^{\gamma} ds \leq \frac{(x(t))^{\gamma}}{t^{\gamma}}.$$

Par conséquent

$$\frac{t^{\gamma}}{r(t)}\int_t^T p(s)\left(\frac{\tau(s)}{s}\right) ds \leq 1.$$

Cet résultat donne la contradiction de (2.15). □

Pour la simplification, on note

$$d_+(t) := \max\{d(t),0\}.$$

Théorème 2.3.4. *Supposons que* (2.2) *et* (2.3) *sont vérifiées. S'il existe une fonction* $\sigma \in \mathcal{C}^1([t_0,\infty),\mathbb{R}_+)$, *telle que*

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[\sigma(s)p(s)\left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^{\gamma} - \frac{r(s)\left[\sigma'(s)\right]_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\sigma(s))^{\gamma}}\right] ds = \infty. \tag{2.16}$$

Alors chaque solution de l'équation (2.1) *est oscillante.*

Démonstration.

Supposons que (2.1) admet une solution non-oscillatoire sur $[t_0,\infty)$. Par les Lemmes 2.2.1 et 2.2.2, il existe $t_1 \geq t_0$ tels que

$$x(\tau(t)) > 0, \qquad x'(t) > 0, \qquad x^{(2)}(t) < 0, \qquad \frac{x(t)}{t} > x'(t),$$

sur $[t_1,\infty)$ et $\frac{x}{t}$ est strictement décroissant sur $[t_1,\infty)$.
Nous définissons la fonction w par :

$$w(t) := \sigma(t)r(t)\left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)^{\gamma}, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1. \tag{2.17}$$

Alors, $w(t) > 0$, pour tout $t \in [t_1, \infty)$. Par dérivation de la fonction w, on obtient

$$\begin{aligned}
w^{'}(t) &= \sigma^{'}(t)r(t)\frac{x^{'}(t)^{\gamma}}{x^{\gamma}(t)} + \sigma(t)\left(\frac{r(t)x^{'}(t)^{\gamma}}{x^{\gamma}(t)}\right)^{'} \\
&= \frac{\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)}w(t) + \sigma(t)\frac{(r(t)(x^{'}(t))^{\gamma})^{'}}{x^{\gamma}(t)} - \sigma(t)r(t)\frac{(x^{\gamma}(t))^{'}(x^{'}(t))^{\gamma}}{x^{2\gamma}(t))} \\
&= \frac{\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)}w(t) - \sigma(t)p(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{x(t)}\right)^{\gamma} - \gamma\sigma(t)r(t)\frac{(x^{'}(t))^{\gamma+1}}{x^{\gamma+1}(t)} \\
&= \frac{\sigma^{'}(t)}{\sigma(t)}w(t) - \sigma(t)p(t)\left(\frac{x(\tau(t))}{x(t)}\right)^{\gamma} - \frac{\gamma}{(\sigma(t)r(t))^{\frac{1}{\gamma}}}\left(w\left(t\right)\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{x}{t}$ est strictement décroissante sur $[t_1, \infty)$, on trouve

$$w^{'}(t) \leq -\sigma(t)p(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma} + \frac{\sigma^{'}_{+}(t)}{\sigma(t)}w(t) - \frac{\gamma}{(\sigma(t)r(t))^{\frac{1}{\gamma}}}\left(w\left(t\right)\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}.$$

En utilisant l'inégalité (1.1), nous avons

$$w^{'}(t) \leq -\sigma(t)p(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma} + \frac{r\left(t\right)\left[\sigma^{'}_{+}(t)\right]^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\left(\sigma(t)\right)^{\gamma}}, \tag{2.18}$$

avec

$$C = 0, \qquad A = \frac{\sigma^{'}_{+}(t)}{\sigma(t)}, \qquad B = \frac{\gamma}{(\sigma(t)r(t))^{\frac{1}{\gamma}}}.$$

Par intégration de (2.18) entre t_1 à t, nous avons

$$\int_{t_1}^{t}\left[\sigma(s)p(s)\left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^{\gamma} - \frac{r\left(s\right)\left[\sigma^{'}_{+}(s)\right]^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\left(\sigma(s)\right)^{\gamma}}\right]ds \leq -w(t) + w(t_1) \leq w(t_1),$$

d'où la contradiction de (2.16) pour t grand. □

Exemple 2.3.2. *Considérons l'équation de retard semi-linéaire*

$$\left[t^4\left(x^{'}(t)\right)^5\right]^{'} + \frac{1}{t^2}x^5\left(\frac{t}{2}\right) = 0, \qquad \text{pour tout } t \in [1, \infty). \tag{2.19}$$

Ici

$$\gamma = 5, \qquad r\left(t\right) = t^4, \qquad p\left(t\right) = \frac{1}{t^2}, \qquad \tau\left(t\right) = \frac{t}{2} \leq t.$$

Il est clair que les condition (2.2) et (2.3) sont vérifiées.

Pour appliquer le Théorème 2.3.4, il reste à prouver que la condition (2.16) *est vérifiée.*
Soit $\sigma(t) = t$, *de* (2.16) *nous avons*

$$\eta \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{s} ds = +\infty.$$

Avec $\eta > 0$. *Alors toute solution de* (2.19) *est oscillante sur* $[1, \infty)$.

Soit $H : [t_0, +\infty) \times [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue satisfaisant les conditions suivantes

$a)$ Pour tout $t \in [t_0, +\infty)$, $H(t, t) = 0$,

$b)$ H estdérivable par rapport à s.

Théorème 2.3.5. *Supposons que* (2.2) *et* (2.3) *sont vérifiées. S'il existe une fonction* $\phi \in \mathcal{C}^1([t_0, \infty), \mathbb{R}_+)$ *et* $H : [t_0, +\infty) \times [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^+$, *telle que*

$$\frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^{\infty} [H(t, s)\phi(s)P(s) - \vartheta(t, s)]dt = \infty,$$

où

$$\vartheta(t, s) := \frac{r(s)(\phi'(s))^{\gamma+1} \left(\frac{\partial H}{\partial s}(t, s)\right)^{\gamma+1}}{(\gamma + 1)^{\gamma+1}(\phi(s))^{\gamma}(H(t, s))^{\gamma}}.$$

Alors chaque solution de (2.1) *oscillante sur* $[t_0, +\infty)$.

Corollaire 2.3.1. *Supposons que* (2.2) *et* (2.3) *sont vérifiées. S'il existe une fonction* $\phi \in \mathcal{C}^1([t_0, \infty), \mathbb{R}_+)$, *telle que*

$$\frac{1}{t^m} \int_{t_0}^{\infty} \left[(t - s)^m P(s) - \frac{m^{\gamma+1} r(s)((t - s)^{m-1})^{\gamma+1}}{(\gamma + 1)^{\gamma+1}((t - s)^{m\gamma}}\right] ds = \infty.$$

Avec $m \geq 1$. *Alors chaque solution de* (2.1) *est oscillante sur* $[t_0, \infty)$.

2.4 Comportement asymptotique pour l'équation (??)

Dans cette section, nous établissons quelques conditions suffisantes qui garantissent que chaque solution x de (2.1) oscillante sur $[t_0, +\infty)$ ou converge.

Théorème 2.4.1. *Soit σ définie dans le théorème 2.3.4 telle que (2.16) soit vérifiée, si*

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[\frac{1}{r(t)}\int_{t_0}^{t}p(s)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}}dt=\infty. \tag{2.20}$$

Alors toute solution de (2.1) est oscillante sur $[t_0,\infty)$ ou converge.

Théorème 2.4.2. *Supposons que (2.3) et (2.20) sont vérifiées. Soit σ définie dans le théorème 2.3.4 telle que (2.16) soit vérifiée.*
Alors chaque solution de (2.1) est oscillante sur $[t_0,+\infty)$ ou $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$.

Démonstration.
Par le théorème 2.4.1, chaque solution de l'équation (2.1) est oscillante sur $[t_0,\infty)$ ou $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=b$.
Supposons que $b>0$, donc

$$x(\tau(t))>b>0,\qquad \text{pour } t>t_1.$$

Nous définissons la fonction u par :

$$u(t):=r(t)\left(x'(t)\right)^{\gamma},\qquad \text{pour } t>t_1.$$

D'après (2.1) , on trouve

$$u^{'}(t)=-p(t)x^{\gamma}(\tau(t))\leq -b^{\gamma}p(t),\qquad \text{pour } t>t_1.$$

Par intégration de la dernière inégalité entre t_1 à t, on trouve

$$\begin{aligned} u(t) &\leq u(t_1)-b^{\gamma}\int_{t_1}^{t}p(s)ds \\ &< -b^{\gamma}\int_{t_1}^{t}p(s)ds. \end{aligned}$$

Donc,

$$b\left[\frac{1}{r(t)}\int_{t_1}^{t}p(s)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}}\leq -x'(t),\qquad \text{pour } t>t_1.$$

Par intégration de la dernière inégalité entre t_1 à t, on obtient

$$b\int_{t_1}^{t}\left[\frac{1}{r(s)}\int_{t_1}^{s}p(u)du\right]^{\frac{1}{\gamma}}ds\leq -x(t)+x(t_1)\leq x(t_1).$$

Cet résultat donne la contradiction de (2.20). $\square$

Exemple 2.4.1. *Considérons l'équation semi-linéaire*

$$\left[t^{\frac{8}{3}}\left(\sqrt[3]{x'(t)}^{5}\right)\right]' + \sqrt[3]{x(t))}^{5} = 0, \qquad \textit{pour } t \in [1, \infty). \tag{2.21}$$

Ici

$$r(t) = t^{\frac{8}{3}}, \qquad p(t) = 1, \qquad \tau(t) = t, \qquad \gamma = \frac{5}{3}.$$

Il est clair que (2.3) *et* (2.20) *sont vérifiée.*

Pour appliquer le Théorème 2.4.2, il reste à prouver que la condition (2.16) *est vérifiée, Soit* $\sigma(t) = 1$*, de* (2.16) *nous avons*

$$\int_{t_0}^{\infty} p(s)ds = \infty.$$

Alors toute solution de (2.21) *est oscillante sur* $[1, \infty)$ *ou* $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Chapitre 3

Comportement asymptotique de la solution d'une équation différentielle non linéaire du troisième ordre

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons le comportement asymptotique de toute solution de l'équation différentielle non-linéaires d'ordre trois.
On supposera que le probléme (3.1) admet au moins une solution dans l'espace $\mathcal{C}^3\left([t_0,+\infty),\mathbb{R}\right)$.

$$\left[b(t)\left\{\left(a(t)x^{'}(t)\right)^{'}\right\}^{\gamma}\right]^{'}+q(t)x^{\gamma}(t)=0,\qquad \text{pour } t\geq t_0. \tag{3.1}$$

On impose les conditions suivantes :

(C_1) $\gamma>0$ est de la forme $\gamma=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ où γ_1, γ_2 sont impairs positifs et $t_0\geq 0$.

(C_2) Les fonctions a , b et q sont des valeurs relles et sont continues positives définies sur $[t_0,+\infty)$.

3.2 Cas où l'équation (3.1) admet une solution non oscillante

Nous présentons le lemme suivant qui donne les propriétés de la solution éventuellement positive x de l'équation (3.1)

Lemme 3.2.1. *Supposons que x est une solution éventuellement positive de (3.1) et*

$$\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{1}{b(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}dt=\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{a(t)}dt=\infty. \tag{3.2}$$

Alors, il y a seulement deux cas possibles, pour tout $t\in[t_1,+\infty)$ avec $t_1\in[t_0,+\infty)$ suffisamment grand :

1) $x'(t)>0$, $(a(t)x'(t))'>0$, *pour* $t\in[t_1,\infty)$,

2) $x'(t)<0$, $(a(t)x'(t))'>0$, *pour* $t\in[t_1,\infty)$.

Démonstration.
Soit x une solution éventuellement positive de (3.1) sur $[t_0,\infty)$.
Alors il existe $t_1\geq t_0$ tel que $x(t)>0$, pour $t\geq t_1$. Par (3.1), nous avons

$$\left[b(t)\left\{\left(a(t)x'(t)\right)'\right\}^{\gamma}\right]'<0, \qquad \text{pour } t\geq t_1,$$

donc la fonction $t\to b\left\{\left(ax'\right)'\right\}^{\gamma}$ est décroissent sur $[t_1,\infty)$.
Alors x' et $\left\{\left(ax'\right)'\right\}^{\gamma}$ sont des signes constant pour t assez grand.
Montrons que $(ax')'>0$, pour $t\geq t_1$. Supposons le contraire, alors il existe une constante $\eta>0$ et $t_2\geq t_1$ tels que

$$\left(a(t)x'(t)\right)'\leq-\left(\frac{\eta}{b(t)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \qquad \text{pour } t\geq t_2.$$

Par intégration de la dernière inégalité entre t_2 à t, nous obtenons

$$a(t)x'(t)\leq a(t_2)x'(t_2)-\int_{t_2}^{t}\left(\frac{\eta}{b(s)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}ds, \qquad \text{pour } t\geq t_2.$$

D'après (3.2), on déduit que $a(t)x'(t)\to-\infty$ lorsque $t\to+\infty$. Donc il existe $t_3\geq t_2$, tel que

$$x^{'}(t) \leq -\frac{1}{a(t)}, \qquad \text{pour } t \geq t_3.$$

Par intégration de cette formule entre t_3 a t, on trouve

$$x(t) \leq x(t_3) - \int_{t_3}^{t} \frac{1}{a(s)} ds, \qquad \text{pour } t \geq t_3.$$

D'après (3.2), on déduit que $x(t) \to -\infty$ lorsque $t \to +\infty$.

D'où la contradiction. $\square$

Lemme 3.2.2. *Soit x une solution de l'équation* (3.1) *et qui satisfait le cas* (1) *de lemme 3.2.1, alors*

$$x^{'}(t) \geq \frac{\delta(t)(b(t))^{\frac{1}{\gamma}}}{a(t)}(a(t)x^{'}(t))^{'}, \qquad \textit{pour } t \geq t_1, \tag{3.3}$$

avec

$$\delta(t) := \int_{t_1}^{t} \frac{1}{b^{\frac{1}{\gamma}}(s)} ds, \qquad \textit{pour } t \geq t_1.$$

Démonstration.

Si $x^{'}(t) > 0$, pour tout $t \geq t_1$, de l'équation (3.1) on déduit que la fonction $t \to b\left\{\left(ax^{'}\right)^{'}\right\}^{\gamma}$ est décroissent sur $[t_1, \infty)$.

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} a(t)x^{'}(t) &= a(t_1)x^{'}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \left(a(s)x^{'}(s)\right)^{'} ds \\ &= a(t_1)x^{'}(t_1) + \int_{t_1}^{t} \frac{1}{b^{\frac{1}{\gamma}}(s)} \left\{b\left(s\right)\left(\left(a(s)x^{'}(s)\right)^{'}\right)^{\gamma}\right\}^{\frac{1}{\gamma}} \\ &\geq b\left(t\right)\left(\left(a(t)x^{'}(t)\right)^{'}\right)^{\gamma} \int_{t_1}^{t} \frac{1}{(b(s))^{\frac{1}{\gamma}}} ds \\ &\geq \delta(t)(b(t))^{\frac{1}{\gamma}}(a(t)x^{'}(t))^{'}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme $\square$

3.3 Comportement asymptotique pour l'équation (3.1)

Maintenant, nous établissons quelques conditions suffisantes pour que toute solution x de (3.1) soit oscillante sur $[t_1, \infty)$ ou convergente.
Pour la simplification, on note

$$\left[\rho^{'}(s)\right]_{+} := \max\{0, (\rho^{'}(s)\}.$$

Théorème 3.3.1. *Supposons que (3.2) est vérifiée. S'il existe une fonction* $\rho \in \mathcal{C}^1\left([t_0, \infty), \mathbb{R}_+\right)$ *et si*

$$\int_{t_1}^{\infty}\left[\rho(s)q(s) - \frac{a^{\gamma}(s)\left[\rho^{'}(s)\right]_{+}^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^{\gamma}\rho^{\gamma}(s)}\right]ds = \infty. \tag{3.4}$$

Alors toute solution de (3.2) est oscillante sur $[t_0, \infty)$ *ou converge.*

Démonstration.
Soit x une solution non-oscillatoire de (3.1). Sans perte de généralité on peut supposer que $x(t) > 0$, pour $t > t_1$ où t_1 est suffisamment grand. Par le lemme 3.2.1, on a deux cas,
Si $x^{'}(t) > 0$, pour $t \geq t_1$.
Nous définissons la fonction w par

$$w(t) := \rho(t)\frac{b(t)\left((a(t)x^{'}(t))^{'}\right)^{\gamma}}{x^{\gamma}(t)}, \qquad \text{pour } t \geq t_1. \tag{3.5}$$

Alors $w(t) > 0$, par dérivation la fonction w, on obtient

$$w^{'}(t) = -b(t)\left((a(t)x^{'}(t))^{'}\right)^{\gamma}\left(\frac{\rho(t)}{x^{\gamma}(t)}\right)^{'} + \frac{\rho(t)}{x^{\gamma}(t)}\left(b(t)\left((a(t)x^{'}(t))^{'}\right)^{\gamma}\right)^{'}.$$

D'après (3.1), on obtient

$$w^{'}(t) = -\rho(t)q(t) + \frac{\rho^{'}(t)}{\rho(t)}w(t) - \gamma b(t)\left((a(t)x^{'}(t)\right)^{\gamma}\frac{\rho(t)x^{'}(t)}{x^{\gamma+1}(t)}.$$

Par (3.3), on trouve

$$\begin{aligned} w^{'}(t) &\leq -\rho(t)q(t) + \frac{\rho^{'}(t)}{\rho(t)}w(t) - \gamma\rho(t)b(t)\frac{\delta(t)(b(t))^{\frac{1}{\gamma}}\left((a(t)x^{'}(t))^{'}\right)^{\gamma+1}}{x^{\gamma+1}(t)} \\ &\leq -\rho(t)q(t) + \frac{\left[\rho^{'}(t)\right]_{+}}{\rho(t)}w(t) - \frac{\gamma\delta(t)}{[\rho(t)]^{\frac{1}{\gamma}}a(t)}(w(t))^{1+\frac{1}{\gamma}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

En utilisant l'inégalité (1.1), nous avons

$$w^{'}(t) \leq -\rho(t)q(t) + \frac{a^{\gamma}(t)\left(\rho^{'}(t)\right)_{+}^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(t))^{\gamma}\rho^{\gamma}(t)}, \tag{3.7}$$

avec

$$B = \frac{\left[\rho^{'}(t)\right]_{+}}{\rho(t)}, \qquad A = \frac{\gamma\delta(t)}{(\rho(t))^{\frac{1}{\gamma}}a(t)}.$$

Par intégration de (3.7) entre t_1 à ∞, nous avons

$$\int_{t_1}^{\infty}\left[\rho(s)q(s) - \frac{a^{\gamma}(s)\left[\rho^{'}(s)\right]_{+}^{\gamma+1}}{\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^{\gamma}\rho^{\gamma}(s)}\right]ds \leq w(t_1) - w(t) < w(t_1),$$

d'où la contradiction de (3.4) pour t grand.

Si $x^{'}(t) < 0$, pour $t \geq t_1$, alors x est converge vers une limite finie, car la fonction x est décroissante et minorée par 0. □

Théorème 3.3.2. *Supposons que* (3.2) *est vérifiée. Soit ρ définie dans le Théorème 3.3.1 telle que* (3.4) *soit vérifiée, si*

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{a(z)}\int_{z}^{\infty}\left[\frac{1}{b(u)}\int_{u}^{\infty}q(s)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}}dudz = \infty. \tag{3.8}$$

Alors toute solution de (3.1) *est oscillante sur* $[t_0, \infty)$ *ou converge vers zéro.*

Démonstration.

De la preuve du Théorème 3.3.1, chaque solution de l'équation (3.1) est oscillante sur $[t_0, \infty)$ ou $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ existe. D'autre part, supposons que $x^{'}(t) < 0$, pour $t \geq t_1$. Alors x est décroissante sur $[t_1, \infty)$ et $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = b \geq 0$ existe.

Supposons que $b > 0$.

Par intégration de la formule (3.1) entre t_1 à $+\infty$, on obtient

$$b(t)\left(\left(a(t)x^{'}(t)\right)^{'}\right)^{\gamma} \geq \int_{t}^{\infty} q(s)x^{\gamma}(s)ds.$$

Ce qui implique

$$\left(a(t)x^{'}(t)\right)^{'} \geq \left[\frac{1}{b(t)}\int_{t}^{\infty} q(s)x^{\gamma}(s)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}}.$$

En intégrant la dernière inégalité entre t à ∞, on obtient

$$-a(t)x^{'}(t) \geq \int_{t}^{\infty}\left[\frac{1}{b(u)}\int_{u}^{\infty} q(s)x^{\gamma}(s)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}} du,$$

donc

$$-x^{'}(t) \geq \frac{1}{a(t)}\int_{t}^{\infty}\left[\frac{1}{b(u)}\int_{u}^{\infty} q(s)x^{\gamma}(s)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}} du.$$

En intégrant la dernière inégalité entre t_1 à ∞, on obtient

$$x(t_1) \geq \int_{t_1}^{\infty}\frac{1}{a(z)}\int_{z}^{\infty}\left[\frac{1}{b(u)}\int_{u}^{\infty} q(s)x^{\gamma}(s)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}} dudz.$$

Puisque $x(t) \geq b$, pour $t \geq t_1$, alors

$$x(t_1) \geq b\int_{t_1}^{\infty}\frac{1}{a(z)}\int_{z}^{\infty}\left[\frac{1}{b(u)}\int_{u}^{\infty} q(s)ds\right]^{\frac{1}{\gamma}} dudz.$$

Cet résultat donne la contradiction de (3.8). □

Exemple 3.3.1. *On considère l'équation différentielle non linéaire du troisième ordre*

$$\left[\frac{1}{t}\sqrt[3]{\left(\left\{\frac{1}{t}x^{'}(t)\right\}\right)^{'}}\right]^{'} + \frac{1}{t^2}\sqrt[3]{x\,(t)} = 0, \qquad \text{pour } t \geq 1. \tag{3.9}$$

Ici

$$b(t) = a\,(t) = \frac{1}{t}, \qquad q(t) = \frac{1}{t^2}, \qquad \gamma = \frac{1}{3}.$$

Il est clair que (3.2) est vérifiée.

Pour appliquer le Théorème 3.3.1, il reste a prouver que la condition (3.4) est vérifiée.

On a

$$\delta(t) = \frac{1}{4}\left(t^4 - t_1^4\right) \sim \frac{t^4}{4}, \qquad \text{pour } t \text{ assez grand.}$$

Soit $\rho(t) = t^3$, *de* (3.4), *nous avons*

$$\int_{t_1}^{\infty} s - \eta \frac{\sqrt[3]{s^4}}{\sqrt[3]{s^4 - t_1^4}} ds \sim \int_{t_1}^{\infty} s - \eta ds = \infty.$$

avec $\eta \geq 0$.

Alors toute solution de (3.9) *est oscillante sur* $[1, +\infty)$ *ou converge.*

Corollaire 3.3.1. *Supposons que* (3.2), (3.8) *sont vérifiées, si*

$$\int_{t_1}^{\infty} sq(s) - \frac{a^{\gamma}(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^{\gamma} s^{\gamma}} ds = \infty. \tag{3.10}$$

Alors toute solution de (3.1) *est oscillante sur* $[t_0, \infty)$ *ou converge vers zéro.*

Corollaire 3.3.2. *Supposons que* (3.2), (3.8) *sont vérifiées, si*

$$\int_{t_1}^{\infty} \left[s^{\gamma+1} q(s) - \frac{a^{\gamma}(s)}{(\delta(s))^{\gamma}} \right] ds = \infty.$$

Alors toute solution de (3.1) *est oscillante sur* $[t_0, \infty)$ *ou converge vers zéro.*

Théorème 3.3.3. *Supposons que* (3.2), (3.8) *sont vérifiées, soit* ρ *définie dans le Théorème 3.3.1 telle que* (3.4) *soit vérifiée, si*

$$\frac{1}{t^n} \int_{t_1}^{\infty} (t-s)^n \left[\rho(s) q(s) - \frac{a^{\gamma}(s) \left[\rho'(s) \right]_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1} (\delta(s))^{\gamma} \rho^{\gamma}(s)} \right] ds = \infty, \qquad \text{pour } n \geq 1. \tag{3.11}$$

Avec $n \geq 1$.

Alors toute solution de (3.1) *est oscillante sur* $[t_0, \infty)$ *ou converge vers zéro.*

Démonstration.

Soit x une solution non-oscillatoire de (3.1). Sans perte de généralité on peut supposer que $x(t) > 0$, pour $t > t_1$ où t_1 est suffisamment grand. Par le lemme 3.2.1, on a deux cas,

Si $x'(t) > 0$, pour $t \geq t_1$.

De la preuve du Théorème 3.3.1, on a trouver (3.7). D'après (3.7), on a

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t}(t-s)^n\left[\rho(s)q(s)-\frac{a^{\gamma}(s)\left[\rho'(s)\right]_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^{\gamma}\rho^{\gamma}(s)}\right]ds &\leq \int_{t_1}^{t}(t-s)^n w'(s)ds\\ &= w(t_1)(t-t_1)^n-n\int_{t_1}^{t}(t-s)^{n-1}w(s)ds\\ &\leq w(t_1)(t-t_1)^n.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{t^n}\int_{t_1}^{t}(t-s)^n\left[\rho(s)q(s)-\frac{a^{\gamma}(s)\left[\rho'(s)\right]_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^{\gamma}\rho^{\gamma}(s)}\right]ds\leq w(t_1)\left(\frac{t-t_1}{t}\right)^n.$$

Alors

$$\frac{1}{t^n}\int_{t_1}^{\infty}(t-s)^n\left[\rho(s)q(s)-\frac{a^{\gamma}(s)\left[\rho'(s)\right]_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^{\gamma}\rho^{\gamma}(s)}\right]ds\leq w(t_1),$$

d'où la contradiction de (3.11) pour t grand.

Si $x'(t)<0$, pour tout $t\geq t_1$, la preuve est similaire le Théorème 3.3.2. □

Exemple 3.3.2. *On considère l'équation différentielle non linéaire du troisième ordre*

$$\left(\frac{x'}{t}\right)^{(2)}+t^{\lambda}x(t)=0,\qquad \textit{pour } t\geq 1. \tag{3.12}$$

Avec $\lambda\geq 0$. *Ici*

$$b(t)=1,\qquad a(t)=\frac{1}{t},\qquad q(t)=t^{\lambda},\qquad \gamma=1.$$

Il est clair que (3.2) *et* (3.8) *sont vérifiées*

Pour appliquer le Théorème 3.3.3, il reste a prouver que la condition (3.11) *est vérifiée.*

Si on prend $n=1$ *et* $\rho(t)=1$, *nous avons*

$$\frac{1}{t^2}\int_{t_1}^{t}(t-s)q(s)ds\sim\frac{t^{\lambda}}{(\lambda+1)(\lambda+2)},\qquad \textit{pour } t \textit{ assez grand.}$$

Alors toute solution de (3.9) *est oscillante sur* $[1,+\infty)$ *ou converge vers zéro.*

Théorème 3.3.4. *Supposons que* (3.2), (3.8) *sont vérifiées, Soit* ρ *définie dans le*

Théorème 3.3.1, si

$$\frac{1}{t^n}\int_{t_1}^{\infty}\left[(t-s)^n\rho(s)q(s)-\frac{\rho(s)a^{\gamma}(s)P^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^{\gamma}(t-s)^{n\gamma}}\right]ds=\infty. \tag{3.13}$$

Avec

$$P(t,s):=(t-s)^n\frac{\left[\rho'(s)\right]_+}{\rho(s)}-n(t-s)^{n-1}, \qquad \textit{pour } t\geq s\geq t_0.$$

Alors toute solution de (3.1) *est oscillante sur* $[t_0,\infty)$ *ou converge vers zéro.*

Démonstration.

Soit x une solution non-oscillatoire de (3.1). Sans perte de généralité on peut supposer que $x(t)>0$, pour $t>t_1$ où t_1 est suffisamment grand. Par le lemme 3.2.1, on a deux cas,

Si $x'(t)>0$, pour $t\geq t_1$.

D'autre part

$$\int_{t_1}^{t}(t-s)^n\,w'(s)=w(t_1)(t-t_1)^n-n\int_{t_1}^{t}(t-s)^{n-1}w(s)ds. \tag{3.14}$$

De la preuve du Théorème 3.3.1, on a trouver (3.6).

Par (3.6) et (3.14), on obtient

$$\int_{t_1}^{t}(t-s)^n\rho(s)q(s)ds\leq w(t_1)(t-t_1)^n+\int_{t_1}^{t}\left[(t-s)^n\frac{\left[\rho'(s)\right]_+}{\rho(s)}-n(t-s)^{n-1}\right]w(s)ds$$
$$-\int_{t_1}^{t}\gamma(t-s)^n\frac{\delta(s)}{(\rho(s)a^{\gamma}(s))^{\frac{1}{\gamma}}}\left[w(s)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}ds.$$

En utilisant l'inégalité (1.1), nous avons

$$\int_{t_1}^{\infty}(t-s)^n\left[\rho(s)q(s)-\frac{a^{\gamma}(s)\left[\rho'(s)\right]_+^{\gamma+1}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\left[\delta(s)\rho(s)\right]^{\gamma}}\right]ds\leq\frac{1}{t^n}w(t_1).$$

Avec

$$C:=0, \qquad B:=(t-s)^n\frac{\left[\rho'(s)\right]_+}{\rho(s)}-n(t-s)^{n-1}, \qquad A:=\frac{\gamma\delta(s)(t-s)^n}{\left[\rho(s)a^{\gamma}(s)\right]^{\frac{1}{\gamma}}}.$$

D'où la contradiction de (3.13) pour t grand.

Si $x'(t) < 0$, pour tout $t \geq t_1$, la preuve est similaire le Théorème 3.3.2. $\square$

Théorème 3.3.5. *Supposons que* (3.2), (3.8) *sont vérifiées, Soit* ρ *définie dans le Théorème 3.3.1, si*

$$\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_1}^{\infty}\left[H(t,s)\rho(s)q(s)-\frac{\rho(s)a^{\gamma}(s)Q^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(\delta(s))^{\gamma}H^{\gamma}(t,s)}\right]ds=\infty. \tag{3.15}$$

Avec

$$Q(t,s):=(t-s)^{n}\frac{\left[\rho'(s)\right]_{+}}{\rho(s)}H(t,s)-h(t,s)\sqrt{H(t,s)}.$$

Alors toute solution de (3.1) *est oscillante sur* $[t_0,\infty)$ *ou converge vers zéro.*

Démonstration.

Soit x une solution non-oscillatoire de (3.1). Sans perte de généralité on peut supposer que $x(t) > 0$, pour $t > t_1$ où t_1 est suffisamment grand. Par le lemme 3.2.1, on a deux cas,

Si $x'(t) > 0$, pour $t \geq t_1$.

De la preuve du Théorème 3.3.1, on a trouver (3.6).

Par (3.6) et (3.14), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t}H(t,s)\rho(s)q(s)ds &\leq -\int_{t_1}^{t}H(t,s)w'(s)ds\\ &\quad+\int_{t_1}^{t}H(t,s)\left[\frac{\left[\rho'(s)\right]_{+}}{\rho(s)}w(s)-\frac{\gamma\delta(s)}{(\rho(s))^{\frac{1}{\gamma}}a(s)}\left[w(s)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]ds.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_{t_1}^{t}H(t,s)w'(s)ds=-H(t,t_1)w(t_1)-\int_{t_1}^{t}\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}w(s)ds,$$

donc

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t}H(t,s)\rho(s)q(s)ds &= H(t,t_1)w(t_1)+\int_{t_1}^{t}\left[H(t,s)\frac{\left[\rho'(s)\right]_{+}}{\rho(s)}-h(t,s)\sqrt{H(t,s)}\right]w(s)ds\\ &\quad-\int_{t_1}^{t}H(t,s)\frac{\gamma\delta(s)}{(\rho(s))^{\frac{1}{\gamma}}a(s)}\left[w(s)\right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}ds.\end{aligned}$$

Nous déduisons que

$$\int_{t_1}^{t} H(t,s)\rho(s)q(s)ds \;\leq\; H(t,t_1)w(t_1) + \int_{t_1}^{t}\left[H(t,s)\frac{\left[\rho^{'}(s)\right]_{+}}{\rho(s)} - h(t,s)\sqrt{H(t,s)}\right]w(s)ds$$
$$- \int_{t_1}^{t} H(t,s)\frac{\gamma\delta(s)}{(\rho(s))^{\frac{1}{\gamma}}a(s)}w^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(s)ds.$$

En utilisant l'inégalité (1.1), nous avons

$$\frac{1}{H(t,t_1)}\int_{t_1}^{t}\left[H(t,s)\rho(s)q(s) - \frac{\rho(s)a^{\gamma}(s)Q^{\gamma+1}(t,s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}\left[\delta(s)H(t,s)\right]^{\gamma}}\right]ds \leq w(t_1).$$

Avec

$$B := H(t,s)\frac{\left[\rho^{'}(s)\right]_{+}}{\rho(s)} - h(t,s)\sqrt{H(t,s)}, \qquad A := \gamma\frac{H(t,s)\delta(s)}{\left[\rho(s)\right]^{\frac{1}{\gamma}}a(s)}.$$

d'où la contradiction de (3.15) pour t grand.

Si $x^{'}(t) < 0$, pour tout $t \geq t_1$, la preuve est similaire le Théorème 3.3.2. $\square$

Chapitre 4

Oscillation pour une équation différentielle de retard de second ordre

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'oscillation de toute solution de l'équation différentielle de retard de second ordre

$$\left(r\left(z^{'}\right)^{\alpha}\right)^{'}(t)+q\left(t\right)x^{\alpha}\left(\sigma\left(t\right)\right)=0,\qquad \text{pour tout } t\geq t_0>0. \tag{4.1}$$

Avec $z(t)=x(t)+p(t)x(\tau(t))$. On impose les conditions suivantes :

(H_1) $\gamma>0$ est de la forme $\alpha=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ où γ_1, γ_2 impairs positifs.

(H_2) $r\in\mathcal{C}([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$, tel que

$$\pi(t_0):=\int_{t_0}^{\infty}r^{\frac{-1}{\alpha}}(s)ds<\infty.$$

(H_3) La fonction de retard $\sigma\in\mathcal{C}^1([t_0,\infty),\mathbb{R})$ et

$$\sigma(t)\leq t,\qquad \sigma^{'}(t)>0,\qquad \lim_{t\to\infty}\sigma(t)=\infty.$$

(H_4) La fonction de retard $\tau \in \mathcal{C}^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ et

$$\tau(t) \leq t, \qquad \lim_{t \to \infty} \tau(t) = \infty.$$

(H_5) $q, p \in \mathcal{C}([t_0, \infty), [0, \infty))$, tel que

$$0 \leq p(t) < 1, \qquad p(t) < \frac{\pi(t)}{\pi(\tau(t))}.$$

4.2 Théorèmes d'existence de l'oscillation pour l'équation (4.1)

Pour la simplification, on note

$$Q(t) := q(t) \left(1 - p(\sigma(t)) \frac{\pi(\tau(\sigma(t)))}{\pi(\sigma(t))} \right)^{\alpha}.$$

Théorème 4.2.1. *Supposons que*

$$\int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{1}{r(t)} \int_{t_1}^{t} Q(s) \pi^{\alpha}(\sigma(s)) ds \right)^{\frac{1}{\alpha}} dt = \infty. \tag{4.2}$$

et

$$\int_{t_1}^{\infty} Q(t) dt = \infty. \tag{4.3}$$

Alors chaque solution de l'équation (4.1) *est oscillante sur* $[t_0, +\infty)$.

Démonstration.
Supposons le contraire, que x est une solution éventuellement positive de (4.1) sur $[t_0, \infty)$.
Alors il existe $t_1 \geq t_0$, tel que

$$x(\tau(t)) > 0, \qquad x(\sigma(t)) > 0, \qquad x(t) \geq z(t) > 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

Par (4.1), en déduire que la fonction $r(z^{'})^{\alpha}$ est décroissante sur $[t_1, \infty)$.
Par conséquent, $z^{'}$ est une solution éventuellement négatif ou éventuellement positif de l'équation (4.1) sur $[t_1, \infty)$.

Supposons que $z^{'}(t) < 0$, pour tout $t \geq t_1$. Puisque

$$\begin{aligned} z(t) &\geq -\int_t^{\infty} r^{\frac{-1}{\alpha}}(s) r^{\frac{1}{\alpha}}(s) z^{'}(s) ds \\ &\geq -\pi(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(t) z^{'}(t). \end{aligned} \tag{4.4}$$

D'autre part, on a

$$\left(\frac{z}{\pi}\right)^{'}(t) = \frac{z^{'}(t)}{\pi(t)} + \frac{z(t)\, r^{\frac{-1}{\alpha}}(t)}{\pi^2(t)} \geq 0.$$

Par la définition de z, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= z(t) - p(t) x(\tau(t)) \\ &\geq z(t) - p(t) z(\tau(t)) \\ &\geq z(t)\left(1 - p(t)\frac{\pi(\tau(t))}{\pi(t)}\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

De (4.5), on obtient

$$\begin{aligned} \left(r\left(z^{'}\right)^{\alpha}\right)^{'}(t) &\leq -q(t)\left(1 - p((\sigma(t))\frac{\pi(\tau(\sigma(t)))}{\pi(\sigma(t))}\right) z^{\alpha}(\sigma(t)) \\ &= -Q(t) z^{\alpha}(\sigma(t)). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Puisque la fonction $r\left(z^{'}\right)^{\alpha}$ est décroissante sur $[t_1, \infty)$, alors

$$-r(t)\left(z^{'}\right)^{\alpha}(t) \geq r(t_1)\left(z^{'}\right)^{\alpha}(t_1) := \gamma > 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

Par (4.4), on obtient

$$z(t) \geq \gamma^{\frac{1}{\alpha}} \pi(t), \qquad \text{pour tout } t \geq t_1. \tag{4.7}$$

De (4.6) et (4.7), on obtient

$$\left(r\left(z^{'}\right)^{\alpha}\right)^{'}(t) \leq -\gamma Q(t) \pi^{\alpha}(\sigma(t)), \qquad \text{pour tout } t \geq t_1. \tag{4.8}$$

Par intégration de (4.8) entre t_1 à t, on obtient

$$\begin{aligned} r(t)\left(z'\right)^{\alpha}(t) &\leq r(t)\left(z'\right)^{\alpha}(t_1) - \gamma\int_{t_1}^{t} Q(s)\pi^{\alpha}(\sigma(s))ds \\ &\leq -\gamma\int_{t_1}^{t} Q(s)\pi^{\alpha}(\sigma(s))ds. \end{aligned}$$

Par intégration de la dernière inégalité entre t_1 à t, on obtient

$$z(t) \leq z(t_1) - \gamma^{\frac{1}{\alpha}}\int_{t_1}^{t}\left(\frac{1}{r(s)}\int_{t_1}^{s} Q(u)\pi^{\alpha}(\sigma(u))du\right)^{\frac{1}{\alpha}} ds.$$

Cet résultat donne la contradiction de (4.2).

Maintenant, on suppose que $z'(t) > 0$, pour tout $t \geq t_1$. Alors

$$x(t) \geq (1 - p(t))z(t), \qquad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

De (4.1), on obtient

$$\left(r\left(z'\right)^{\alpha}\right)'(t) \leq -q(t)\left(1 - p(\sigma(t))\right)^{\alpha} z^{\alpha}(\sigma(t)). \tag{4.9}$$

Par (H_4), on a

$$\frac{\pi(\tau(\sigma(t)))}{\pi(\sigma(t))} \geq \frac{1}{p(\sigma(t))} \geq 1.$$

Alors

$$1 - p(\sigma(t)) \geq 1 - p(\sigma(t))\frac{\pi(\tau(\sigma(t)))}{(\pi(\sigma(t))}, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1. \tag{4.10}$$

Par intégration de (4.9) entre t_1 à t et et en utilisant (4.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} r(t)\left(z'\right)^{\alpha}(t) &\leq -r(t_1)\left(z'\right)^{\alpha}(t_1) - \int_{t_1}^{t} q(s)(1 - p(\sigma(s)))^{\alpha} z^{\alpha}(\sigma(s))ds \\ &\leq -r(t_1)\left(z'\right)^{\alpha}(t_1) - z^{\alpha}(\sigma(t_1))\int_{t_1}^{t} q(s)(1 - p(\sigma(s)))^{\alpha}ds \\ &\leq -r(t_1)\left(z'\right)^{\alpha}(t_1) - z^{\alpha}(\sigma(t_1))\int_{t_1}^{t} Q(s)ds. \end{aligned}$$

Par (4.3), on a $\lim_{t\to+\infty} r(t)\left(z'\right)^{\alpha}(t) = -\infty$, d'ou la contradiction. □

Théorème 4.2.2. *Supposons que* (4.3) *est vérifiée, si*

$$\limsup_{t\to\infty} \pi^{\alpha}(t)\int_{t_1}^{t} Q(s)ds > 1. \tag{4.11}$$

Alors chaque solution de l'équation (4.1) est oscillante sur $[t_0, +\infty)$.

Démonstration.

Supposons le contraire, que x est une solution éventuellement positive de (4.1) sur $[t_0, \infty)$.

Alors il existe $t_1 \geq t_0$, tel que

$$x(\tau(t)) > 0, \qquad x(\sigma(t)) > 0, \qquad x(t) \geq z(t) > 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

De (4.1), nous avons que la fonction $r(z^{'})^{\alpha}$ est décroissante sur $[t_1, \infty)$.

Par conséquent, $z^{'}$ est une solution éventuellement négatif ou éventuellement positif de l'équation (4.1) sur $[t_1, \infty)$.

Supposons que $z^{'}(t) < 0$, pour tout $t \geq t_1$. Par intégration de (4.6) entre t_1 à t, on obtient

$$\begin{aligned} r(t)\left(z^{'}\right)^{\alpha}(t) &\leq r(t_1)\left(z^{'}\right)^{\alpha}(t_1) - \int_{t_1}^{t} Q(s) z^{\alpha}(\sigma(s)) ds \\ &\leq -z^{\alpha}(\sigma(t)) \int_{t_1}^{t} Q(s) ds. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Puisque $\sigma(t) \leq t$ et z est une fonction décroissante sur $[t_1, +\infty)$, alors

$$-r(t)\left(z^{'}\right)^{\alpha}(t) \geq z^{\alpha}(t) \int_{t_1}^{t} Q(s) ds.$$

De (4.4) et la dernière inégalité, on trouve

$$\pi^{\alpha}(t) \int_{t_1}^{t} Q(s) ds \leq 1.$$

Cet résultat donne la contradiction de (4.11).

Si $z^{'}(t) > 0$, pour tout $t \geq t_1$. La preuve est similaire le Théorème 4.2.1. □

Exemple 4.2.1. *Considérons l'équation différentielle linéaire suivante*

$$\left(t^2\left[x(t) + \frac{1}{4}x\left(\frac{t}{2}\right)\right]^{'}\right)^{'} + 4x(t) = 0, \qquad \textit{pour tout } t \geq 1. \tag{4.13}$$

Ici,

$$\alpha = 1, \qquad ,r(t) = t^2, \qquad p(t) = \frac{1}{4}, \qquad q(t) = 2, \qquad \tau(t) = \frac{t}{2}, \qquad \sigma(t) = t.$$

Alors

$$\pi(t) = \frac{1}{t} \qquad et \qquad Q(t) = 2.$$

Il est clair que (4.3) *est vérifiée.*

D'autre part, nous avons

$$\lim_{t\to\infty} \pi^{\alpha}(t) \int_{t_1}^{t} Q(s)ds = \lim_{t\to\infty} \frac{2(t-t_1)}{t} = 2.$$

Donc, (4.11) *est vérifiée.*

Le Théorème 4.2.2, implique que la solution de l'équation (4.13) *est oscillante sur* $[1, \infty)$.

Théorème 4.2.3. *Supposons que* (4.3) *est vérifiée. S'il existe une fonction* $\delta \in \mathcal{C}^1([t_0, \infty), \mathbb{R}_+)$, *tel que*

$$\lim_{t\to+\infty} \left\{ \frac{\pi^{\alpha}(t)}{\delta(t)} \int_{t_0}^{\infty} \left(\delta(s)Q(s) - \frac{r(s)\left[\delta'(s)\right]^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}(\delta(s))^{\alpha}} \right) ds \right\} > 1. \tag{4.14}$$

Avec $\sigma(t) = t$, *pour tout* $t \geq t_0$.

Alors chaque solution de l'équation (4.1) *est oscillante sur* $[t_0, +\infty)$.

Démonstration.

Supposons le contraire, que x est une solution éventuellement positive de (4.1) sur $[t_0, \infty)$.

Alors il existe $t_1 \geq t_0$, tel que

$$x(\tau(t)) > 0, \qquad x(\delta(t)) > 0, \qquad x(t) \geq z(t) > 0, \qquad \text{pour tout } t \geq t_1.$$

On a alors deux cas, si $z'(t) < 0$, pour tout $t \geq t_1$.

Nous définissons la fonction w par

$$w(t) := \delta(t) \left\{ \frac{r(t)\left(z'(t)\right)^{\alpha}}{z^{\alpha}(t)} + \frac{1}{\pi^{\alpha}(t)} \right\}, \qquad \text{pour toutt} \geq t_1. \tag{4.15}$$

Alors $w(t) \geq 0$, pour tout $t \geq t_1$ et

$$
\begin{aligned}
w'(t) &= \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} w(t) + \delta(t) \frac{\left(r\left(z'\right)^{\alpha}\right)'(t)}{z^{\alpha}(t)} - \alpha \delta(t) r(t) \left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)^{\alpha+1} + \frac{\alpha \delta(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t) \pi^{\alpha+1}(t)} \\
&\leq \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} w(t) + \delta(t) \frac{\left(r\left(z'\right)^{\alpha}\right)'(t)}{z^{\alpha}(t)} - \frac{\alpha}{(\delta(t) r(t))^{\frac{1}{\alpha}}} \left(w(t) - \frac{\delta(t)}{\pi^{\alpha}(t)}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{\alpha \delta(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t) \pi^{\alpha+1}(t)}.
\end{aligned}
$$

Par (4.9), on obtient

$$
\left(r\left(z'\right)^{\alpha}\right)'(t) \leq -Q(t) z^{\alpha}(t), \qquad \text{pour tout } t \geq t_1. \tag{4.16}
$$

Donc

$$
w'(t) \leq -\delta(t) Q(t) + \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} w(t) - \frac{\alpha}{(\delta r(t))^{\frac{1}{\alpha}}} \left(w(t) - \frac{\delta(t)}{\pi^{\alpha}(t)}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{\alpha \delta(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t) \pi^{\alpha+1}(t)}.
$$

En utilisant l'inégalité (1.1), nous avons

$$
\begin{aligned}
w'(t) &\leq -\delta(t) Q(t) + \frac{\delta'(t)}{\pi^{\alpha}(t)} + \frac{r(t)(\delta'(t))^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \delta^{\alpha}(t)} + \frac{\alpha \delta(t)}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t) \pi^{\alpha+1}(t)} \\
&= -\delta(t) Q(t) + \left(\frac{\delta(t)}{\pi^{\alpha}(t)}\right)' + \frac{r(t)(\delta'(t))^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \delta^{\alpha}(t)}.
\end{aligned}
$$

Avec

$$
A := \frac{\delta'(t)}{\delta(t)}, \qquad B := \frac{\alpha}{(\delta(t) r(t))^{\frac{1}{\alpha}}}, \qquad C := \frac{\delta}{\pi^{\alpha}(t)}.
$$

En intégrant la dernière l'inégalité entre t_1 à t, nous obtenons

$$
\int_{t_1}^{t} \left(\delta(s) Q(s) - \frac{r(s)\left(\delta'(s)\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} (\delta(s))^{\alpha}}\right) ds \leq \left(\frac{\delta(t)}{\pi^{\alpha}(t)} - w(t)\right) - \left(\frac{\delta(t_1)}{\pi^{\alpha}(t_1)} - w(t_1)\right).
$$

Substituons (4.15) dans la dernière inégalité, nous avons

$$
\begin{aligned}
\int_{t_2}^{\infty} \left[\delta(s) Q(s) - \frac{r(s)\left(\delta'(s)\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} (\delta(s))^{\alpha}}\right] ds &\leq \delta(t_1) \frac{r(t_1)(z'(t_1))^{\alpha}}{(z(t_1))^{\alpha}} - \delta(t) \frac{r(t)(z'(t))^{\alpha}}{(z(t))^{\alpha}} \\
&\leq -\delta(t) \frac{r(t)(z'(t))^{\alpha}}{(z(t))^{\alpha}}.
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

De (4.4), on a

$$-\,\delta\,(t)\,r(t)\left(\frac{z^{'}(t)}{z\,(t)}\right)^{\alpha}\leq\frac{\delta\,(t)}{\pi^{\alpha}(t)}. \tag{4.18}$$

Par (4.17) et (4.18), on trouve

$$\frac{\pi^{\alpha}(t)}{\delta(t)}\int_{t_2}^{\infty}\left[\delta(s)Q(s)-\frac{r(s)\left(\delta^{'}(s)\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}(\delta(s))^{\alpha}}\right]ds\leq 1.$$

Cet résultat donne la contradiction de (4.14).

Si $z^{'}(t)>0$, pour tout $t\geq t_1$. La preuve est similaire le Théorème 4.2.1. $\square$

Bibliographie

[1] S. Saker, Oscillation theory of delay differntial ans difference equatios, second and third orders, VDM verlag 2010.

[2] S. Saker, Oscillation Theory of Dynamic Equations on Time Scales, Second and Third Orders, LAP LAMBERT Academic Publishing 2010.

[3] L. Erbe, T. S. Hassan, A. Peterson, S. H. Saker, Oscillation Criteria for Half-Linear Delay Dynamic Equations on Time Scales, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 9(1), (2009),$51-68$.

[4] L. Erbe, A. Peterson, S. H. Saker, Asymptotic behavior of solutions of a third-order nonlinear dynamic equation on time scales, Journal of Computational and Applied Mathematics 181(2005)$92-102$.

[5] M. Bohner, S. R. Grace, I. Jadlovská, Oscillation criteria for second-order neutral delay differential equations, Elec. J. Qualitative. Theory. Diff. Equ. 2017,1-12.

[6] F. Z. Ladrani, A. Hammoudi, A. Benaissa Cherif, Oscillation theorems for fourth-order nonlinear dynamic equations on time scales, Elec. J. Math. Anal. Appl. 3, (2015), 46-58.

[7] A. Benaissa Cherif, F. Z. Ladrani, A. Hammoudi, Oscillation theorems for higher order neutral nonlinear dynamic equations on time scales, Malaya. J. Mat. 4, (2016), pp. 599–605.

[8] F. Z. Ladrani, Etude qualitative des solutions d'équations différentielles sur les échelles de temps, PhD thesis, 2016.

[9] A. Wintner, A criterion of oscillatory stability, Quarterly of Applied Mathematics , 7(1) :115–117, 1949.

[10] P. Hartman, On non-oscillatory linear differential equations of second order, American Journal of Mathematics , 74(2) :389–400, 1952.

Résumé

L'objet de ce travail consiste à l'étude de l'oscillation des équations différentielles ordinaires. on étudiera l'oscillation de toute solution de l'équation différentielles semi-linéaires d'ordre deux.

Nous utilisont le théorèmes d'existence de l'oscillation pour une équation diffirentielle ordinaire, nous présentons le comportement asymptotique de toute solution de l'équation différentielle non-linéaires d'ordre trois et en fin, on étudiera l'oscillation de toute solution de l'équation différentielle de retard de second ordre

Mots clé :

Equations différentielles ordinaires, semi-linéaire, oscillation.

Abstarct : This thesis concerns the oscillation of the solution of the semi-linear differential equation of order two with delay, we introduce the criteria of oscillation for the half-linear second-order equations, we present the asymptotic behavior of solution of the third order non-linear differential equation and finally, we will study the oscillation of any solution of the second order delay differential equation

Key words :

Ordinary differential equation, semi-linearn, oscillation.