RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université IBN KHALDOUN Tiaret
Faculté de Mathématiques et Informatique
Département des Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Appliquée
Option : Analyse fonctionnelle et équations différentielles

Mémoire

Présentée en vue d'obtenir le diplôme de MASTER

Présenté par :

KHEL RAZIKA
KHEDIM ZINEB

Intitulé :

Existence de solutions pour des équations dynamiques fractionnaires conformes sur les échelles de temps

Soutenu le :07/10/2020

Devant de jury :

Président :	**MAHROUZ Tayeb** : M.C.B *U IBN KHALDOUN TIARET*
Encadreur :	**BENDOUMA Bouharket** : M.C.B *U IBN KHALDOUN TIARET*
Examinateur :	**BENHABI Mohammed** : M.A.A *U IBN KHALDOUN TIARET*

Année Universitaire : 2019/2020

Remerciements

Nous remercions DIEU, le tout puissant de nous avoir accordé la santé et le courage pour accomplir se modeste travail.

Nous tenons à remercier Monsieur ***BENDOUMA Bouharket****, d'avoir accepté de rapporter notr mémoire.Ce fut un grande honneur pour nous.*

Nous profitons de ces occasions pour remercier tous nos enseignants

Nous voudrons aussi remercier chaleureusement chacun des membres du jury qui me font le grand honneur d'y participer.

Un grand merci à tous nos amis(es) et nos collègues de la promotion pour les encouragemants qui nous accordés durant toute la période de notre formation

Nous tenons enfin à remercier tous ceux ui ont contrubués d'une autre à la réalisation de ce travail

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :
Mes très chers parents sans leurs amours, leurs sacrifices et leurs
Encouragements je ne serais jamais arrivée à réussir dans mes études.
Je sais bien quel que soit les remerciements que je leurs adresse c'est peu,
que Dieu les protége
Et leur donne la santé et une longue vie.
A mes chers frèes Tayeb, Abdallah, Naima, Khaled et Kheira
Amon binôme KHEDIM ZINEB
A toutes mes collègues de a promotion master II qui j'ai passé mes
meilleurs moments qui resteront un bon souvenir pour toujours.

Khedim Zineb

je dédie ce modeste travail
A mon père qui sur classe les pères de la terre entièr,
A mon mère dont la douceur et la patience m'ont permis d'évoluer,
A ma sœur et mes frères qui m'ont apporté tant de bonheur dans ma vie,
A tous ceux qui m'ont accompagné dans le travail que j'ai accompli,
A tous que j'aime et qui m'aiment,
Qu'il trouvent dans ce travail le résultat de leurs conseils et encouragements.

Khel Razika

Table des matières

Introduction

La théorie des échelles de temps a été introduite par Stéphan Hilger dans sa thèse de doctorat en 1988. Cette théorie permet d'unifier l'analyse discrète et l'analyse continue. Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous-ensemble fermé arbitraire de $\mathbb{R}$. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, les équations aux échelles de temps deviennent des équations différentielles. Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, les équations aux échelles de temps deviennent des équations aux différences finies.

Le calcul fractionnaire est la branche d'analyse mathématique qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres arbitraires (à des ordres non-entiers). Les équations différentielles fractionnaires ont été largement appliquées en physique, en chimie, en biologie,...etc (voir[2, 12, 13]).

En 2014, Khalil et al. [11] ont présenté une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire dénommée la dérivée fractionnaire conforme (voir Définition 2.1). En particulier, Benkhettou et al. [6] ont étendu cette définition à une échelle de temps arbitraire, qui est une extension naturelle du calcul fractionnaire conforme (voir Définition 2.2).

Ce mémoire est composé de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions et théoremes de l'analyse fonctionnelle, et nous présentons les résultats principaux sur la différentiabilité, l'intégration et la fonction exponentielle sur les échelles de temps.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques définitions et résultats concernant le calcul fractionnaire conforme sur des échelles de temps arbitraires.

Dans le troisième chapitre, nous étudierons des équations dynamiques fractionnaires conformes linéaires d'ordre $\alpha \in (0, 1]$ avec des conditions aux limites linéaires :, nous donnons quelque résultats d'éxistence de solutions des problèmes aux limites associés.

Dans le quatrième chapitre, nous établirons un théorème d'existence pour l'équation dynamique fractionnaire conforme non-linéaire sur les échelles de temps avec condition initiale :

$$\begin{cases} x_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = f(t, x^{\sigma}(t)), & \text{pour tout } t \in I = [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ x(a) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

Ici, $\mathbb{T}$ est une échelle de temps bornée, $J = [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ avec $a, b \in \mathbb{T}$, $0 \leq a < b$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$ désigne la delta dérivée fractionnaire conforme de x d'ordre $\alpha \in (0,1]$ en t et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Nous introduirons la notion de tube-solution associé à (1). Cette nouvelle notion est équivalente à la notion de sous- et sur-solution introduite par B. Bendouma et A. Hammoudi [5]. L'objectif de cette méthode est de prouver que si une solution $x \in C_{rd}^{\alpha}(J, \mathbb{R})$ existe, alors elle est incluse dans un tube solution, i.e. on peut trouver des fonctions $v \in C_{rd}^{\alpha}(J, \mathbb{R})$ et $M \in C_{rd}^{\alpha}(J, [0, \infty)))$ telles que

$$|x(t) - v(t)| \leq M(t) \text{ pour tout } t \in J.$$

Mots Clés : Calculs sur les échelles de temps, calcul fractionnaire conforme sur des échelles de temps, équation dynamique fractionnaire conforme, conditions aux limites, tube-solution, théorème du point fixe de Schauder.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et théoremes de l'analyse fonctionnelle, et nous présentons les résultats principaux sur la différentiabilité, l'intégration et la fonction exponentielle sur les échelles de temps. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [1, 7, 8, 9, 10].

1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

Définition 1.1 *(Norme) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle une norme sur E toute application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ telle que*

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

(iii) $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Inégalité triangulaire).*

Définition 1.2 *(Espace vectoriel normé) Un espace vectoriel E muni d'une norme $\|.\|$ noté $(E, \|.\|)$ sera appelé un espace vectoriel normé.*

Exemple 1.1.1 *On définit une norme sur l'espace vectoriel $C([a, b], \mathbb{R})$ de la maniére suivantes*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| .$$

Définition 1.3 *(Espace de Banach) On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur les corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.1.2 *Soit* $I := [a, b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$. $C(I, \mathbb{R})$ *est l'espace de Banach des fonctions* x *continues définie de* I *dans* $\mathbb{R}$ *avec la norme*

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in I} |x(t)|.$$

Définition 1.4 *Le sous ensemble* S *de l'espace normé* X *est dit borné si il existe* M *tel que*

$$\|x\| \leq M \quad \textit{pour tout } x \in S.$$

Définition 1.5 *L'ensemble* S *de l'espace vectoriel* X *est dit convexe si pour tout* $x, y \in S$

$$\lambda x + (1 - \lambda) \in S, \ \forall \lambda \in [0, 1].$$

Définition 1.6 *Soit* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *une application. On dit que* F *est bornée si elle envoie les parties bornées de* E *sur des parties bornées de* F *i.e.* F *(bornée) est bornée.*

Définition 1.7 *Soient* $a \in E$ *et* $\mathcal{T} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$. *On dit que* $\mathcal{T}$ *est continue au point* a *si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$, *pour* $x \in E$, *on a*

$$\|x - a\|_E < \delta \qquad \textit{implique} \qquad \|\mathcal{T}(x) - \mathcal{T}(a)\| < \varepsilon.$$

Alors l'opérateur $\mathcal{T}$ *est dit continu sur* E, *ou simplement continu si il est continu en tout point de* E.

Définition 1.8 *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* $T : E \longrightarrow F$ *est une fonction continue. On dit que* T *est compacte si* $\overline{T(E)}$ *est compact. On dit que* T *est complètement continue si* $\overline{T(B)}$ *est compact pour tout sous-ensemble borné* $B \subset E$.

Définition 1.9 *(Ensemble équicontinue) Un ensemble* F *de* $C([a, b], \mathbb{R})$ *est dit équicontinu, si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$, *tel que, pour tout* $t_1, t_2 \in [a, b], |t_2 - t_1| \leq \delta$ *on a :*

$$\|f(t_2) - f(t_1)\| \leq \varepsilon, \quad \textit{pour tout} \quad f \in F.$$

Définition 1.10 *(Ensemble uniformément borné)* F *est dit uniformément borné dans* $C([a, b], \mathbb{R})$ *s'il existe un nombre réel* $M > 0$ *tel que* $\|y\|_\infty \leq M$ *pour tout* $y \in F$.

Théorème 1.1 *(Arzela-Ascoli) Soit* $B \subset C([a,b],\mathbb{R})$, *B est relativement compact dans* $C([a,b],\mathbb{R})$ *si et seulement si :*

(a) *B est uniformément borné.*

(b) *B est équicontinu.*

Théorème 1.2 *(Théorème du point fixe de Schauder) Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach E et* $A : C \to C$ *une application compact i.e* ($\overline{A(C)}$ *est compact). Alors A admet au moins un point fixe (i.e il existe un point* x_0 *dans C tel que* $f(x_0) = x_0$).

1.2 La théorie des échelles de temps

Dans cette section, nous présentons les notions de base concernant les échelles de temps, la différentiabilité et l'intégration des fonctions sur les échelles de temps.

Définition 1.11 *Une échelle de temps* $\mathbb{T}$ *est un ensemble non vide fermé de l'ensemble de nombre réels* $\mathbb{R}$.
Par exemple, les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{N}$ *sont des échelles de temps, tandis que les ensembles* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ *et* $]0;1[$ *ne sont pas des échelles de temps.*
On sous-entend que la topologie de $\mathbb{T}$ *est induite par celle de* $\mathbb{R}$.

Définition 1.12 *Soit* $\mathbb{T}$ *une echelle de temps. Pour* $t \in \mathbb{T}$, *On définit :*

i) L'opérateur de saut-avant $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *par* $\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$.

ii) L'opérateur de saut-arriere $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *par* $\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$.

iii) - La fonction de granulation en avant $\mu : \mathbb{T} \to [0,\infty)$ *par* $\mu(t) := \sigma(t) - t$.

iv) - la fonction $f^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *par*

$$f^\sigma(t) := (f \circ \sigma)(t) = f(\sigma(t)), \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.13 *Soit* $\mathbb{T}$ *échelle de temps,* $t \in \mathbb{T}$ *:*

1) *Si* $\sigma(t) > t$, *on dit que t est un point dispersé à droite (rs).*

2) *Si* $\sigma(t) = t$ *et* $t < \sup \mathbb{T}$, *on dit que t est un point dense à droite (rd).*

3) *Si* $\rho(t) < t$, *on dit que t est un point dispersé à gauche (ls).*

4) *Si* $\rho(t) = t$ *et* $t > \inf \mathbb{T}$, *on dit que t est un point dense à gauche (ld).*

5) *Si un point est dispersé à droite et à gauche,(i.e* $\rho(t) < t < \sigma(t)$*), on dit qu'il est isolé.*

6) *Si un point est dense à droite et à gauche,(i.e* $t{=}\sigma(t){=}\rho(t)$*), on dit qu'il est dense.*

Exemple 1.1 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps,* $t \in \mathbb{T}$.
1. Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *on a :* $\sigma(t) = \rho(t) = t$.
Donc, chaque point de $\mathbb{R}$ *est dense :* $\mu(t) = \nu(t) = 0$.
2. Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *on a :* $\sigma(t) = t + 1$ *et* $\rho(t) = t - 1$.
Donc, chaque point de $\mathbb{Z}$ *est isolé et on a :* $\mu(t) = \nu(t) = 1$.

Définition 1.14 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps,* $t \in \mathbb{T}$. *Si* $\mathbb{T}$ *admet un maximum* M *dispersé à gauche, on pose* $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$, *sinon* $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.
- Soit $a, b \in \mathbb{T}$ *tel que* $a < b$, *on définie l'intervalle* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{T}$ *par :*

$$[a, b] = [a, b]_{\mathbb{T}} = [a, b] \cap \mathbb{T} = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}$$

Définition 1.15 *Une fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est dite régulière, si sa limite à droite existe en tout point dense à droite de* $\mathbb{T}$, *et sa limite à gauche existe en tout point dense à gauche de* $\mathbb{T}$.

Définition 1.16 *Une fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est dite rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de* $\mathbb{T}$, *et si sa limite à gauche existe et finie en tout point dense à gauche de* $\mathbb{T}$.
On note :
$-$ *L'ensemble des fonctions* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *qui sont rd-continues sur* $\mathbb{T}$ *par*

$$\mathrm{C}_{rd} = \mathrm{C}_{rd}(\mathbb{T}) = \mathrm{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Théorème 1.3 *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *on a :*
1. *Si* f *est continue, alors* f *est rd-continue.*
2. *Si* f *est rd-continue, alors* f *est régulière.*
3. *L'opérateur de saut à droite* σ *est rd-continue.*
4. *Si* f *est rd-continue (resp. régulière), alors* $f \circ \sigma$ *est rd-continue (resp. régulière).*
5. *Si* f *est rd-continue (resp. régulière) et* g *est continue, alors* $g \circ f$ *est rd-continue (resp. régulière).*

1.2.1 Différentiation

Définition 1.17 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $t \in \mathbb{T}^k$. On dit que f est Δ-différentiable en t s'il existe un nombre réel $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de t (i.e, $\mathcal{U} = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ pour certain $\delta > 0$) tel que*

$$\left| f^{\sigma}(t) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \qquad \textit{pour tout} s \in \mathcal{U}.$$

On appelle $f^{\Delta}(t)$ la Δ-dérivée de f en t.
Si f est Δ-différentiable en tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est appelée la delta dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

- L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont différentiables et ses dérivées sont rd-continues sur $\mathbb{T}$ par

$$\mathrm{C}^1{}_{rd} = \mathrm{C}^1{}_{rd}(\mathbb{T}) = \mathrm{C}^1{}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Exemple 1.2 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction*
1. *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. on a $\sigma(t) = t$ alors :*

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t).$$

2. *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. on a $\sigma(t) = t + 1$ alors :*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

où Δ l'opérateur de différence .

Théorème 1.4 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $t \in \mathbb{T}^k$.*

1) *Si f est Δ-différentiable en t, alors f est continue en t.*

2) *Si t est dispersé à droite et f est une fonction continue en t, alors f est différentiable en t et*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

3) *Si* t *est dense à droite alors* f *est* Δ*-différentiables en* t*, si seulement si* $\lim_{s\to t}\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$ *existe et finie. Dans ce cas on a*

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}.$$

4) *Si* f *est* Δ*-différentiable en* t*, alors*

$$f^{\sigma}(t)=f(t)+\mu(t)\,f^{\Delta}(t)\,. \tag{1.1}$$

Exemple 1.3 *Soit* $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *une fonction définie par :*

1. $f(t)=\alpha$ *pour tout* $t\in\mathbb{T}$*, où* $\alpha\in\mathbb{R}$ *est constante. alors* $f^{\Delta}(t)=0$.
2. $f(t)=t$ *pour tout* $t\in\mathbb{T}$*, alors* $f^{\Delta}(t)=1$.

Théorème 1.5 *Soient* $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *deux fonctions* Δ*-différentiables en* $t\in\mathbb{T}^k$ *alors :*

1) $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*

$$(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t).$$

2) *Pour tout constante* $\alpha\in\mathbb{R}$. $\alpha f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*

$$(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t)\,.$$

3) $fg:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*

$$(fg)\Delta(t)=f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)=f(t)g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)). \tag{1.2}$$

4) *Si* $f(t)f^{\sigma}(t)\neq 0$*, alors* $\dfrac{1}{f}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t)=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

5) *Si* $g(t)g^{\sigma}(t)\neq 0$*, alors* $\dfrac{f}{g}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}. \tag{1.3}$$

Exemple 1.4 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(t) = t^2$, on a :*

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s\to t} \frac{(\sigma(t))^2 - s^2}{\sigma(t) - s} = \sigma(t) + t \ \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}^k$$

1. *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, on a $\sigma(t) = t$ et $\rho(t) = t$, alors :*

$$f^{\Delta}(t) = f'(t) = 2t.$$

2. *Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, on a $\sigma(t) = t + h$ et $\rho(t) = t - h$ alors :*

$$f^{\Delta}(t) = 2t + h.$$

Pour $h = 1$ $(i, e\mathbb{T} = \mathbb{Z})$ on a $f^{\Delta}(t) = \Delta f(t) = 2t + 1$.

1.2.2 Intégration

Définition 1.18 *La fonction $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite la Δ-antidérivée de $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ si*

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \quad \text{pour chaque } t \in \mathbb{T}^k.$$

- On définit l'intégrale de Cauchy par :

$$\int_a^b f(t)\Delta(t) = F(b) - F(a), \text{pour tout} \quad a, b \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.19 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière , on définit l'intégrale indéfinie par :*

$$\int f(t)\Delta(t) = F(t) + c,$$

où c est une constante arbitraire et F est la Δ-antidérivée de f.

Théorème 1.6 *Toute fonction rd-continue possède une Δ-antidérivée. En particulier ,si $t_0 \in \mathbb{T}$, alors la fonction F définit par :*

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau)\Delta\tau, \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{T},$$

est une Δ-antidérivée de f.

Théorème 1.7 *Tout fonction continue f sur $[a, b]$ est Δ-intégrable.*

Théorème 1.8 *Si* $f \in C_r d$ *et* $t \in \mathbb{T}^k$*, alors*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta(\tau) = \mu(t)f(t).$$

Théorème 1.9 *Si* $a, b, c \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}$ *et* $f, g \in C_r d$*, alors :*
1. $\int_a^b [\alpha f(t) + g(t)]\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t.$

2. $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t.$

3. $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t.$

4. $\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta} g(t)\Delta t.$

5. $\int_a^a f(t)\Delta t = 0.$

6. *Si* $|f(t)| \leq g(t)$ *sur* $[a, b]$*, alors* $|\int_a^b f(t)\Delta t| \leq \int_a^b g(t)\Delta t.$

Théorème 1.10 *Soient* $a, b \in \mathbb{T}$*et* $f \in C_r d$
1.*Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$*, alors*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

où l'intégrale à droite est l'intégrale usuelle de Riemann.
2. *Si* $[a, b]$ *ne contient que des points isolés, alors*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t \in [a,b)} \mu(t)f(t) & si\ a<b \\ 0 & si\ a=b \\ -\sum\limits_{t \in [a,b)} \mu(t)f(t) & si\ a>b \end{cases}$$

3. *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *alors*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum\limits_{t=a}^{b-1} f(t) & si\ a<b \\ 0 & si\ a=b \\ -\sum\limits_{t=b}^{a-1} f(t) & si\ a>b \end{cases}$$

Exemple 1.5 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps :*
1. *Soit $a, b \in \mathbb{T}$, on a :*

$$\int_a^b c\Delta t = c\int_a^b 1\Delta t = c(b-a).$$

2. *On calculons $\int_0^t s\Delta s$ sur $\mathbb{T}$:*

-Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ on a :

$$\int_0^t s\Delta s = \int_0^t sds = \left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^t = \frac{1}{2}t^2.$$

-Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ on a :

$$\int_0^t s\Delta s = \sum_{s=0}^{t-1} s = \frac{t(t-1)}{2}.$$

1.2.3 la fonction exponentielle

Définition 1.20 *Pour $h > 0$, on définit les nombres complexes de Hilger , axe réel et l'axe imaginaire de Hilger*

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_h &= \{z \in \mathbb{C}, z \neq \frac{-1}{h}\} \\
\mathbb{R}_h &= \{z \in \mathbb{C}_h, z \in \mathbb{R}, z > \frac{-1}{h}\} \\
\mathbb{Z}_h &= \{z \in \mathbb{C}, \frac{-\pi}{h} < Im(z) \leq \frac{\pi}{h}\}
\end{aligned}$$

Pour $h = 0$, on a $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$

Définition 1.21 *On définit*

– *L'addition $\oplus$ dans $\mathbb{C}_h$ par*

$$z \oplus w = z + w + zwh \qquad pour z, w \in \mathbb{C}_h.$$

– *La soustraction $\ominus$ sur $\mathbb{C}_h$ par*

$$z \ominus w = z \oplus (\ominus w) = \frac{z-w}{1+wh} \qquad pour z, w \in \mathbb{C}_h.$$

$$\ominus z = \frac{-z}{1+zh}$$

Si $h = 0$, on a $z \oplus w = z + w$ et $z \ominus w = z - w$

Définition 1.22 *Une fonction $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite régressive si :*

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{T}^k$$

On note L'ensemble des fonctions régressives et rd-continues par :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

et on note par $\mathcal{R}^+ = \{p : \mathbb{T} \to \mathbb{R} : 1 + \mu(t)p(t) > 0\}$ pour tout $t \in \mathbb{T}$ l'ensemble des fonctions régressives positives.

Définition 1.23 *On définit dans $\mathcal{R}(\mathbb{T})$*

- *L'addition $\oplus$ par :*

$$(p \oplus q)(t) = p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t); \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k, \text{ et } p, q \in \mathcal{R}.$$

- *La soustraction $\ominus$ par :*

$$(p \ominus q)(t) = (p \oplus (\ominus q))(t) = \frac{p(t) - q(t)}{1 + \mu(t)q(t)}; \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k, \text{ et } p, q \in \mathcal{R}(\mathbb{T}).$$

Définition 1.24 *Si $p \in \mathcal{R}$, alors on définit la fonction exponentielle par :*

$$e_p(t, s) = \exp\Big(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\Big) \text{ pour } t, s \in \mathbb{T}$$

Où $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ est la trnsformation cylindrique définie par :

$$\xi_h(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}\log(1 + zh) & \text{si } h > 0 \\ z & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

Où log *désigne le logarithme nipérien .*
Donc on a

$$e_p(t, s) = \exp\Big(\int_s^p \frac{\log(1 + \mu(\tau)p(\tau))}{\mu(\tau)}\Delta\tau\Big) \text{ pour } t, s \in \mathbb{T}$$

Théorème 1.11 *:Si p, $q \in \mathcal{R}$, alors*

1. *$e_0(t, s) \equiv 1$ et $e_p(t, t) \equiv 1$*
2. *$e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$*

3. $\dfrac{1}{e_p(t,s)} = e_{\ominus p}(t,s)$
4. $e_p(t,s) = \dfrac{1}{e_p(s,t)} = e_{\ominus p}(s,t)$
5. $e_p(t,s)e_p(s,r) = e_p(t,r)$
6. $e_p(t,s)e_q(t,s) = e_{p\oplus q}(t,s)$
7. $\dfrac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)} = e_{p\ominus q}(t,s)$
8. $\left(\dfrac{1}{e_p(t,s)}\right)^{\Delta} = -\dfrac{p(t)}{e_p^{\sigma}(t,s)}$
9. $e_p(t,\sigma(s))e_p(s,r) = \dfrac{e_p(t,r)}{1+\mu(s)p(s)}$

Remarque 1.1 *1. Soit $p \in \mathcal{R}$ et $t_0 \in \mathbb{T}$ fixé, la fonction $e_p(.,t_0)$ est définie comme la solution unique du problème de Cauchy :*

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t), y(t_0) = 1.$$

2. On a

$$e_p^{\Delta}(t,s) = p(t)e_p(t,s).$$

Exemple 1.2.1 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps et $p \in \mathcal{R}$, calculons $e_p(t,s)$. On a*

$$\begin{aligned} e_p(t,s) &= \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \\ &= \exp\left(\int_s^t \frac{\log(1+\mu(\tau)p(\tau))}{\mu(\tau)}\Delta\tau\right) \quad \textit{pour} \quad t,s \in \mathbb{T} \end{aligned}$$

– *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$,$\mu(t) = 0$. On a :*

$$e_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t p(\tau)\Delta\tau\right).$$

Si p est une constante, alors $e_p(t,s) = e^{p(t-s)}$ et $e_0(t,s) = 1$, $e^{p(t-s)}e_p(t,0) = e^{pt}$ et $e_1(t,0) = e^t$.

– *Pour* $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, $\mu(t)=1$ *on a :*

$$\begin{aligned} e_p(t,s) &= \exp\left(\int_s^t \log\left(1 \ + \ p(\tau)\right)\Delta\tau\right) = \exp\left(\sum_s^{t-1} \log\left(1+p(\tau)\right)\right) \\ &= \exp\left(\log\prod_{\tau=s}^{t-1}\left(1 \ + \ p(\tau)\right)\right) = \prod_{\tau=s}^{t-1}\left(1 \ + \ p(\tau)\right). \end{aligned}$$

Si p est une constante, alors
$e_p(t,s)=\prod_{\tau=s}^{t-1}(1+p)=(1+p)^{t-s}$ *et* $e_p(t,0)=(1+p)^t$,$e_1(t,0)=2^t$.

Chapitre 2

Calcul fractionnaire conforme sur les échelles de temps

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et résultats concernant le calcul fractionnaire conforme sur des échelles de temps arbitraires. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [4, 5, 6].

2.1 Delta dérivée fractionnaire conforme

Définition 2.1 (*La dérivée fractionnaire conforme*) *Soit* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction et soit* $\alpha \in (0, 1]$. *La dérivée fractionnaire conforme d'ordre* α *de* f *est définie par :*

$$f^{(\alpha)}(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \tag{2.1}$$

pour tout $t > 0$. *Si* $f^{(\alpha)}(t)$ *existe et est finie, on dit que* f *est* α*-differentiable en* t.

Si f *est* α*-differentiable dans un intervalle* $]0, a[$, $a > 0$, *et* $\lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ *existe, alors la dérivé fractionnaire conforme de* f *d'ordre* α *en* $t = 0$ *est défini comme*

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t).$$

Définition 2.2 (*La delta dérivée fractionnaire conforme*) *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction,* $t \in \mathbb{T}^\kappa$, *et soit* $\alpha \in]0, 1]$. *Pour* $t > 0$, *on définit le réel* $f_\Delta^{(\alpha)}(t)$

(supposons qu'il existe) vérifiant : pour tout $\epsilon > 0$, *il existe un voisinage* $\mathcal{V}_t \subset \mathbb{T}$ *(i.e.,* $\mathcal{V}_t :=]t-\delta, t+\delta[\cap \mathbb{T}$*) de* t, $\delta > 0$, *tel que*

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)]\, t^{1-\alpha} - f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)\, [\sigma(t) - s] \right| \leq \epsilon\, |\sigma(t) - s| \text{ pour tout } s \in \mathcal{V}_t. \tag{2.2}$$

- On appelle $f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$ *la delta dérivée fractionnaire conforme de* f *d'ordre* α *en* t*, et on définit la delta dérivée fractionnaire conforme de* f *en* 0 *par* $f_{\Delta}^{(\alpha)}(0) = \lim\limits_{t \to 0^+} f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$.
-On dit que f *est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre* α *sur* $\mathbb{T}^{\kappa}$ *si* $f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$ *existe pour tout* $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$.

Remarque 2.1 *(i) Si* $\alpha = 1$, *on a* $f_{\Delta}^{(\alpha)} = f^{\Delta}$.
(ii) Si $\alpha = 0$, *nous notons* $f_{\Delta}^{(\alpha)} = f$.
(iii) Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *alors* $f_{\Delta}^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}$ *est la dérivée fractionnaire conforme de* f *d'ordre* α*(voir Définition 2.1).*

Nous introduisons l'espace suivant :

$$C_{rd}^{\alpha}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}) = \{f \text{ delta différentiable fractionnaire conforme } \\ \text{d'ordre } \alpha \text{ sur } [a,b]_{\mathbb{T}} \text{ et } f_{\Delta}^{(\alpha)} \in C_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})\}.$$

Théorème 2.1 *Soit* $\alpha \in]0,1]$ *et* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction et soit* $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$. *Alors on a :*
(i) Si f *est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre* α *en* $t > 0$, *alors* f *est continue en* t.
(ii) Si f *est continue en* t *et* t *est dispersé à droite, alors* f *est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre* α *en* t *et*

$$f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha} = t^{1-\alpha} f^{\Delta}(t).$$

(iii) Si t *est dense à droite, alors* f *est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre* α *en* t *si et seulement si la limite* $\lim_{s \to t} \frac{f(t)-f(s)}{(t-s)} t^{1-\alpha}$ *existe et est finie, dans ce cas on a* $f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t)-f(s)}{(t-s)} t^{1-\alpha} = t^{1-\alpha} f'(t)$.
(iv) Si f *est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre* α *en* t, *alors* $f(\sigma(t)) = f(t) + (\mu(t)) t^{\alpha-1} f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$.

Preuve 2.1.1 *(i) Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $t \in \mathbb{T}^k$, supposons que f est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α en $t > 0$. Alors, il existe un voisinage $\mathcal{V}_t$ de t tel que*

$$\left|\left(f(\sigma(t)) - f(s)\right) t^{1-\alpha} - f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)\left(\sigma(t) - s\right)\right| \leq \epsilon\left|\sigma(t) - s\right|$$

pour $s \in \mathcal{V}_t$. Donc,

$$\begin{aligned}|f(t) - f(s)| \leq & \left|\left(f(\sigma(t) - f(s)\right) - f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)\left(\sigma(t) - s\right) t^{\alpha-1}\right| + \left|\left(f(\sigma(t)) - f(t)\right)\right| \\ & + \left|f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)\right|\left|\left(\sigma(t) - s\right)\right|\left|t^{\alpha} - 1\right|,\end{aligned}$$

pour tout $s \in \mathcal{V}_t \cap]t - \epsilon, t + \epsilon[$ et, comme t est dense à droite,

$$\begin{aligned}|f(t) - f(s)| & \leq \left|\left(f^{\sigma}(t) - f(s)\right) - f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)\left(\sigma(t) - s\right)^{\alpha}\right| + \left|f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)\left(t - s\right)^{\alpha}\right| \\ & \leq \epsilon\delta + \left|t^{\alpha-1}\right|\left|f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)\right|\delta,\end{aligned}$$

d'où la continuité de f en t.
(ii) Supposons que f est continue en t et t est dispersé à droite. Alors,

$$\lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} t^{1-\alpha} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} t^{1-\alpha} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha}.$$

Soit $\epsilon > 0$ et $\alpha \in]0, 1]$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_t$ de t tel que

$$\left|\frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} t^{1-\alpha} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha}\right| \leq \epsilon$$

pour tout $s \in \mathcal{V}_t$. Donc

$$\left|\left[f(\sigma(t)) - f(s)\right] t^{1-\alpha} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha}(\sigma(t) - s)\right| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|$$

pour tout $s \in \mathcal{V}_t$. Alors on a

$$f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha} = t^{1-\alpha} f^{\Delta}(t).$$

(iii) Supposons que f est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α en t et t dense à droite. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Comme f est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α en t, il existe un voisinage $\mathcal{V}_t$ de t tel que

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)]t^{1-\alpha} - f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \epsilon|\sigma(t) - s| \text{ pour tout } s \in \mathcal{V}_t.$$

Comme $\sigma(t) = t$, *on a*

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha} - f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) \right| \leq \epsilon \text{ pour tout } s \in \mathcal{V}_t, s \neq t.$$

donc

$$f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{(t - s)} t^{1-\alpha}.$$

la réciproque, soit $t \in \mathbb{T}^k$ *est dense à droite et* $\lim_{s \to t} \frac{f(t)-f(s)}{(t-s)} t^{1-\alpha} = A$ *(avec* $A < \infty$.*)*
Soit $\varepsilon > 0$, *il existe un voisinage* $\mathcal{V}_t$ *de* t *tel que* $|(f(t) - f(s))t^{1-\alpha} - A(t - s)| \leq \epsilon|t - s|$ *pour tout* $s \in \mathcal{V}_t$. *Comme* $\sigma(t) = t$, *on a*

$$\left|(f(\sigma(t)) - f(s))t^{1-\alpha} - A(\sigma(t) - s)\right| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|.$$

D'aprés la définition de la delta dérivée fractionnaire conforme, on a $A = f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$, *alors*

$$f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{(t - s)} t^{1-\alpha}.$$

(iv) supposons que f *est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre* α *en* t.

- *Si* $\sigma(t) = t$ *on a* $\mu(t) = 0$, *alors*

$$f(\sigma(t)) = f(t) = f(t) + t^{\alpha-1}\mu(t) f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$$

- *Si* $\sigma(t) > t$ *et* f *est continue en* t, *et d'après (iii) on a*

$$f(\sigma(t)) - f(t) = t^{\alpha-1} f_{\Delta}^{(\alpha)}(t).\mu(t)$$

donc

$$f(\sigma(t)) = f(t) + t^{\alpha} f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)\mu(t).$$

Exemple 2.1.1 *Soit* $\alpha \in (0, 1]$. *Les fonctions suivantes* $f, g, h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *définies par* $f(t) = t$, $g(t) \equiv \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $h(t) = e_p(t, a)$, $p \in \mathcal{R}_{\mu}$, *sont delta différentiables fractionnaires conformes d'ordre* α *avec*

1. $f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha}$;
2. $g_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = 0$;
3. $h_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = t^{1-\alpha} p \; e_p(t, a)$.

Théorème 2.2 (*Les propriétés de delta dérivée fractionnaire conforme*)
Soit $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sont delta différentiables fractionnaires conformes d'ordre α. Alors,

(i) La somme $f+g$ est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α et $(f+g)_{\Delta}^{(\alpha)} = f_{\Delta}^{(\alpha)} + g_{\Delta}^{(\alpha)}$;

(ii) Pour toute constante $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α et $(\lambda f)_{\Delta}^{(\alpha)} = \lambda f_{\Delta}^{(\alpha)}$;

(iii) Si f et g sont continues, alors le produit fg est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α et

$$(fg)_{\Delta}^{(\alpha)} = f_{\Delta}^{(\alpha)} g + (f \circ \sigma) g_{\Delta}^{(\alpha)} = f_{\Delta}^{(\alpha)} (g \circ \sigma) + f g_{\Delta}^{(\alpha)};$$

(v) Si $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, tout point $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ et si f et g sont continues, alors f/g est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α

$$\left(\frac{f}{g}\right)_{\Delta}^{(\alpha)} = \frac{f_{\Delta}^{(\alpha)} g - f g_{\Delta}^{(\alpha)}}{g(g \circ \sigma)}. \tag{2.3}$$

Preuve 2.1.2 *Soit $\alpha \in]0,1]$. Supposons que f et g sont delta différentiables fractionnaires conformes d'ordre α en $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$.*
(i) Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe les voisinages $\mathcal{V}_t$ et $\mathcal{U}_t$ de t tel que

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)]t^{1-\alpha} - f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)\,(\sigma(t) - s)\right| \leq \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s| \quad \textit{pour tout } s \in \mathcal{V}_t$$

et

$$\left|[g(\sigma(t)) - g(s)]t^{1-\alpha} - g_{\Delta}^{(\alpha)}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \frac{\epsilon}{2}|\sigma(t) - s| \quad \textit{pour tout } s \in \mathcal{U}_t.$$

Soit $\mathcal{W}_t = \mathcal{V}_t \cap \mathcal{U}_t$. Alors

$$\left|[(f+g)(\sigma(t)) - (f+g)(s)]t^{1-\alpha} - \left[f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) + g_{\Delta}^{(\alpha)}(t)\right](\sigma(t) - s)\right| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|$$

pour tout $s \in \mathcal{W}_t$. Donc, $f+g$ est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α en t et

$$(f+g)_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) + g_{\Delta}^{(\alpha)}(t).$$

(ii) Soit $\epsilon > 0$. Alors

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)]t^{1-\alpha} - f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \epsilon|\sigma(t) - s| \textit{ pour tout } s \in \mathcal{V}_t.$$

Il s'ensuit que

$$\left|[(\lambda f)(\sigma(t)) - (\lambda f)(s)]t^{1-\alpha} - \lambda f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \epsilon|\lambda|\,|\sigma(t)-s| \text{ pour tout } s \in \mathcal{V}_t.$$

Donc λf *est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre* α *en* t *et* $(\lambda f)_{\Delta}^{(\alpha)} = \lambda f_{\Delta}^{(\alpha)}$.
(*iii*) *Si* t *est dispersé à droite, alors*

$$\begin{aligned}(fg)_{\Delta}^{(\alpha)}(t) &= \left[\frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}t^{1-\alpha}\right] g(\sigma(t)) + \left[\frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{\mu(t)}t^{1-\alpha}\right] f(t)\\ &= f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)g(\sigma(t)) + f(t)g_{\Delta}^{(\alpha)}(t).\end{aligned}$$

Si t *est dense à droite, alors*

$$\begin{aligned}(fg)_{\Delta}^{(\alpha)}(t) &= \lim_{s\to t}\left[\frac{f(t) - f(s)}{t-s}t^{1-\alpha}\right] g(t) + \lim_{s\to t}\left[\frac{g(t) - g(s)}{t-s}t^{1-\alpha}\right] f(s)\\ &= f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)g(t) + g_{\Delta}^{(\alpha)}(t)f(t) = f_{\Delta}^{(\alpha)}(t)g(\sigma(t)) + g_{\Delta}^{(\alpha)}(t)f(t).\end{aligned}$$

Exemple 2.1.2 *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction définie par* $f(t) = t^2$, *on a :*

$$\forall t \in \mathbb{T}^k,\ f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = \lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}t^{1-\alpha} = \lim_{s\to t}\frac{(\sigma(t))^2 - s^2}{\sigma(t) - s}t^{1-\alpha} = (\sigma(t)+t)t^{1-\alpha}.$$

1. *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *on a* $\sigma(t) = t$, *alors :*

$$f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = f^{(\alpha)}(t) = 2t.t^{1-\alpha} = 2t^{2-\alpha}.$$

2. *Si* $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, *on a* $\sigma(t) = t + h$, *alors :*

$$f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = (2t + h)t^{1-\alpha}.$$

   Pour $h = 1$ *(i.e* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$*) on a* $f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = (\Delta f(t))t^{1-\alpha} = (2t + 1)t^{1-\alpha}$, *où* Δ *est l'opérateur de différence.*

Remarque 2.2 *- Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *la* Δ*-dérivée équivaut à la dérivée au sens classique et les équations aux échelles de temps deviennent des équations différentielles.*
- Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *les équations aux échelles de temps deviennent des équations aux différences finies.*

2.2 Delta α-intégrale fractionnaire conforme

Maintenant, nous introduisons delta α-intégrale fractionnaire conforme (ou delta α-intégrale fractionnaire) sur les echelles de temps.

Définition 2.3 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière et $0 < \alpha \leq 1$. On définit delta α-intégrale fractionnaire de f par :*

$$\int f(t)\Delta^{\alpha}t := \int f(t)t^{\alpha-1}\Delta t.$$

Définition 2.4 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière et $0 < \alpha \leq 1$. On définit delta α-intégrale fractionnaire indéfinie de f d'ordre α par :*

$$F(t) = \int f(t)\Delta^{\alpha}t.$$

On définit delta α-intégrale fractionnaire de Cauchy par :

$$\int_a^b f(t)\Delta^{\alpha}t = F(b) - F(a) \text{ pour tout } a, b \in \mathbb{T}.$$

Exemple 2.2.1 *Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, et $f(t) = t$. Alors*

$$\int_1^{10^{\frac{2}{3}}} f(t)\Delta^{\alpha}t = \int_1^{10^{\frac{2}{3}}} t.t^{\frac{1}{2}-1}\Delta t = \int_1^{10^{\frac{2}{3}}} t^{\frac{1}{2}}dt = 6.$$

Théorème 2.3 *Soit $\alpha \in (0, 1]$. Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est une fonction rd-continue, alors il existe une fonction $F : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que :*

$$F_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = f(t), \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{T}^k.$$

- La fonction F est appelée la fonction α-primitive de f.

Théorème 2.4 *Si $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est une fonction rd-continue et $t \in \mathbb{T}^k$, alors*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta^{\alpha}s = f(t)\mu(t)t^{\alpha-1}.$$

Preuve. D'aprés le Théorème 2.4(précédent), il existe une α-primitive F de f, et on a :

$$F_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = f(t), \qquad F(\sigma(t)) - F(t) = F_{\Delta}^{(\alpha)}(t)\mu(t)t^{\alpha-1},$$

et

$$\begin{aligned} \int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta^\alpha\tau &= F(\sigma(t)) - F(t) \\ &= \mu(t)F_{\Delta}^{(\alpha)}(t)t^{\alpha-1} \\ &= \mu(t)f(t)t^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Théorème 2.5 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, $a, b \in \mathbb{T}$ avec $a < b$.*
Si $f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, b] \cap \mathbb{T}$, alors f est une fonction croissante sur $[a, b] \cap \mathbb{T}$.

Preuve. Soit $f_{\Delta}^{(\alpha)}(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a; b]$ et soit $s, t \in \mathbb{T}$ avec $a \leq s \leq t \leq b$, on a

$$\int_s^t f(\tau)\Delta^\alpha\tau \geq 0 \quad et \quad \int_s^t f(\tau)\Delta^\alpha\tau = f(t) - f(s).$$

D'où $f(t) - f(s) \geq 0$, alors $f(t) \geq f(s)$.
Donc f est croissante.

Théorème 2.6 *Si $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1]$, et $f, g \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Alors,*

(i) $\displaystyle\int_a^b [\lambda f(t) + g(t)]\Delta^\alpha t = \lambda \int_a^b f(t)\Delta^\alpha t + \int_a^b g(t)\Delta^\alpha t\,;$

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t = -\int_b^a f(t)\Delta^\alpha t\,;$

(iii) $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t = \int_a^c f(t)\Delta^\alpha t + \int_c^b f(t)\Delta^\alpha t\,;$

(iv) $\displaystyle\int_a^a f(t)\Delta^\alpha t = 0\,;$

(v) s'il existe $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ avec $|f(t)| \leq g(t)$ pour tout $t \in [a,\ b]_{\mathbb{T}}$, alors $\left|\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta^\alpha t\,;$

(vi) si $f(t) > 0$ pour tout $t \in [a,\ b]_{\mathbb{T}}$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t \geq 0.$

Chapitre 3

Problèmes dynamiques fractionnaires conformes linéaires

Dans ce chapitre, nous étudions l'équation dynamique fractionnaire conforme linéaire d'ordre $\alpha \in (0,1]$ avec des conditions aux limites linéaires :

$$\begin{cases} x_{\Delta}^{(\alpha)}(t) - t^{1-\alpha}p(t)\; x(\sigma(t)) = g(t), \qquad t \in I = [a,b]_{\mathbb{T}}, \\ a_0 x(a) - b_0 x(\sigma(b)) = \lambda_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

Ici, $\mathbb{T}$ est une échelle de temps bornée, $J = [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ avec $a, b \in \mathbb{T}$, $0 \leq a < b$, $x_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$ désigne la delta dérivée fractionnaire conforme de x d'ordre $\alpha \in (0,1]$ en t, $-p \in \mathcal{R}_{\mu}$, $g \in C_{rd}^{\alpha}(I, \mathbb{R})$ et $a_0, b_0, \lambda_0 \in \mathbb{R}$.
Nous obtenons l'expression de la fonction de Green fractionnaire pour ce problème linéaire.

Une solution de (3.1) sera une fonction $x \in C_{rd}^{\alpha}(J, \mathbb{R})$ satisfaisant (3.1).

3.1 Théorème (cas général)

Théorème 3.1 *Soit $-p \in \mathcal{R}_{\mu}$ et $a_0 e_{-p}(\sigma(b), a) \neq b_0$. Si $g \in C_{rd}^{\alpha}(I, \mathbb{R})$, alors problème* (3.1) *à une solution unique $x \in C_{rd}^{\alpha}(J, \mathbb{R})$, donnée par*

$$x(t) = \int_{[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} G(t,s)g(s)\Delta^{\alpha}s + \frac{\lambda_0 e_{-p}(\sigma(b), t)}{a_0 e_{-p}(\sigma(b), a) - b_0}, \quad t \in J, \tag{3.2}$$

où G est la fonction de Green (fractionnaire) donnée par

$$G(t,s) = \frac{e_{-p}(s,t)}{a_0 e_{-p}(\sigma(b),a) - b_0} \begin{cases} a_0 e_{-p}(\sigma(b),a), & a \leq s \leq t \leq \sigma(b), \\ b_0, & a \leq t \leq s \leq \sigma(b), \end{cases} \tag{3.3}$$

Preuve.
Soit x est solution du problème (3.1), on a :

$$\begin{aligned} \Big[x(t)e_{-p}(t,a)\Big]_{\Delta}^{(\alpha)} &= x_{\Delta}^{(\alpha)}(t)e_{-p}(t,a) - p(t)t^{1-\alpha}e_{-p}(t,a)x(\sigma(t)), \\ &= e_{-p}(t,a)g(t). \end{aligned}$$

On intégré les deux cotés de cette égalité sur $[a,t]_{\mathbb{T}}$ et on obtient

$$x(t)e_{-p}(t,a) - x(a) = \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} e_{-p}(s,a)g(s)\Delta^{\alpha}s. \tag{3.4}$$

Donc,

$$x(t) = e_{-p}(a,t)\left(x(a) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} e_{-p}(s,a)g(s)\Delta^{\alpha}s\right) \tag{3.5}$$

Par (3.1) et (3.5), on obtient

$$x(a) = \frac{b_0}{a_0 e_{-p}(\sigma(b),a) - b_0}\int_{[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} e_{-p}(s,a)g(s)\Delta^{\alpha}s + \frac{\lambda_0 e_{-p}(\sigma(b),a)}{a_0 e_{-p}(\sigma(b),a) - b_0}. \tag{3.6}$$

Maintenant en substituant (3.6) à (3.5), on obtient

$$\begin{aligned} x(t) = &\frac{b_0 e_{-p}(a,t)}{a_0 e_{-p}(\sigma(b),a) - b_0}\int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} e_{-p}(s,a)g(s)\Delta^{\alpha}s + e_{-p}(a,t)\int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} e_{-p}(s,a)g(s)\Delta^{\alpha}s \\ &+ \frac{b_0 e_{-p}(a,t)}{a_0 e_{-p}(\sigma(b),a) - b_0}\int_{[t,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} e_{-p}(s,a)g(s)\Delta^{\alpha}s + \frac{\lambda_0 e_{-p}(\sigma(b),t)}{a_0 e_{-p}(\sigma(b),a) - b_0} \\ = &\frac{\lambda_0 e_{-p}(\sigma(b),t)}{a_0 e_{-p}(\sigma(b),a) - b_0} + \frac{1}{a_0 e_{-p}(\sigma(b),a) - b_0}\Big(a_0\int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} e_{-p}(\sigma(b),a)e_{-p}(s,t)g(s)\Delta^{\alpha}s \\ &+ b_0\int_{[t,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} e_{-p}(s,t)g(s)\Delta^{\alpha}s\Big) \\ = &\int_{[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} G(t,s)g(s)\Delta^{\alpha}s + \frac{\lambda_0 e_{-p}(\sigma(b),t)}{a_0 e_{-p}(\sigma(b),a) - b_0}. \end{aligned}$$

3.2 Cas particuliers

On peut déduire du théorème précédent, les résultats suivants (pour les cas particuliers : initiale ($a_0 = 1, b_0 = 0$), terminale ($a_0 = 0, b_0 = 1$) et périodique ($a_0 = b_0 = 1, \lambda_0 = 0$) :

Corollaire 3.1 *Le problème de Cauchy (à valeur initiale)*

$$\begin{cases} x_\Delta^{(\alpha)}(t) - t^{1-\alpha}p(t)\ x(\sigma(t)) = g(t), & t \in I; \\ x(a) = x_0. \end{cases} \tag{3.7}$$

avec $-p \in \mathcal{R}_\mu$, $x_0 \in \mathbb{R}$, *et* $g \in C_{rd}^\alpha(I, \mathbb{R})$, *admet une solution unique* $x \in C_{rd}^\alpha(J, \mathbb{R})$, *donnée par*

$$x(t) := \int_{[a,\sigma(b)]_\mathbb{T}} G_I(t,s)g(s)\Delta^\alpha s + x_0 e_{-p}(a,t), \quad t \in J, \tag{3.8}$$

où G_I *est la fonction de Green donnée par*

$$G_I(t,s) = e_{-p}(s,t) \begin{cases} 1, & a \le s \le t \le \sigma(b), \\ 0, & a \le t \le s \le \sigma(b). \end{cases} \tag{3.9}$$

Si $-p \in \mathcal{R}_\mu^+$, *par* (3.9), *il est clair que* $G_I \ge 0$ *sur* $J \times J$.

Corollaire 3.2 *Le problème à valeur terminale*

$$\begin{cases} x_\Delta^{(\alpha)}(t) - t^{1-\alpha}p\ x(\sigma(t)) = g(t), & t \in I; \\ x(\sigma(b)) = x_1. \end{cases} \tag{3.10}$$

avec $-p \in \mathcal{R}_\mu$, $x_1 \in \mathbb{R}$, *et* $g \in C_{rd}^\alpha(I, \mathbb{R})$, *admet une solution unique* $x \in C_{rd}^\alpha(J, \mathbb{R})$, *donnée par*

$$x(t) := \int_{[a,\sigma(b)]_\mathbb{T}} G_T(t,s)g(s)\Delta^\alpha s + x_1 e_{-p}(\sigma(b),t), \quad t \in J, \tag{3.11}$$

où G_T *est la fonction de Green donnée par*

$$G_T(t,s) = -e_{-p}(s,t) \begin{cases} 0, & a \le s \le t \le \sigma(b), \\ 1, & a \le t \le s \le \sigma(b), \end{cases} \tag{3.12}$$

Corollaire 3.3 *Le problème périodique*

$$\begin{cases} x_{\Delta}^{(\alpha)}(t) - t^{1-\alpha}p(t)\ x(\sigma(t)) = g(t), \quad t \in I; \\ x(a) = x(\sigma(b)). \end{cases} \tag{3.13}$$

avec $-p \in \mathcal{R}_{\mu}$, $e_{-p}(\sigma(b), a) \neq 1$ *et* $g \in C_{rd}^{\alpha}(I, \mathbb{R})$, *admet une solution unique* $x \in C_{rd}^{\alpha}(J, \mathbb{R})$, *donnée par*

$$x(t) := \int_{[a,\sigma(b)]_{\mathbb{T}}} G_P(t,s)g(s)\Delta^{\alpha}s, \quad t \in J, \tag{3.14}$$

où G_P *est la fonction de Green (fractionnaire) donnée par*

$$G_P(t,s) = \frac{e_{-p}(s,t)}{e_{-p}(\sigma(b),a) - 1} \begin{cases} e_{-p}(\sigma(b),a), & a \leq s \leq t \leq \sigma(b), \\ 1, & a \leq t \leq s \leq \sigma(b), \end{cases} \tag{3.15}$$

3.3 Exemples

Exemple 3.1 *Soit* $\mathbb{T} = [-1, 5] \cap \mathbb{Z}$ *, on considère le problème*

$$\begin{cases} x_{\Delta}^{(\frac{1}{3})}(t) = -t^{\frac{2}{3}}\ x(\sigma(t)) + 2^t t^{\frac{2}{3}}, \quad \textit{pour tout } t \in I = [1,3]_{\mathbb{T}}, \\ x(1) = 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Alors, ce problème est sous la forme (3.7), *avec* $\alpha = \frac{1}{3}$, $p(t) \equiv -1$, $g(t) = 2^t t^{\frac{2}{3}}$, $a = 1, b = 3, \sigma(b) = 3 + 1 = 4, J = [1, 4]_{\mathbb{T}}$ *et* $x_0 = 0$.
Comme $-p \in \mathcal{R}_{\mu}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, *alors la fonction* $e_1(.,.)$ *existe et donnée par*

$$e_1(s,t) = 2^{s-t}, \qquad \textit{pour tout } t, s \in \mathbb{Z}.$$

Par le Corollaire 3.1, la solution de (3.16) *est*

$$x(t) := \int_{[0,\sigma(3)]_{\mathbb{T}}} G_I(t,s)s^{\frac{2}{3}}2^s\Delta^{\alpha}s + 0.e_1(1,t), \quad t \in J,$$

où G_I *est la fonction de Green donnée par*

$$G_I(t,s) = e_1(s,t) \begin{cases} 1, & 1 \leq s \leq t \leq \sigma(3), \\ 0, & 1 \leq t \leq s \leq \sigma(3). \end{cases} = \begin{cases} 2^{s-t}, & 1 \leq s \leq t \leq 4, \\ 0, & 1 \leq t \leq s \leq 4. \end{cases}$$

D'ou

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{[1,t]_{\mathbb{T}}} G_I(t,s)s^{\frac{2}{3}}2^s\Delta^\alpha s + \int_{[t,4]_{\mathbb{T}}} G_I(t,s)s^{\frac{2}{3}}2^s\Delta^\alpha s + 0.e_1(1,t)\\
&= \int_{[1,t]_{\mathbb{T}}} 2^{s-t}.s^{\frac{2}{3}}2^s\Delta^{\frac{1}{3}}s = \int_{[1,t]_{\mathbb{T}}} 2^{2s-t}.s^{\frac{2}{3}}s^{\frac{1}{3}-1}\Delta s\\
&= \int_{[1,t]_{\mathbb{T}}} 2^{2s-t}\Delta s = 2^{-t}\sum_{s=1}^{s=t-1} 4^s\\
&= \frac{2^{2-t}}{3}(4^t-1).
\end{aligned}$$

Exemple 3.2 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps bornée, on considère le problème :*

$$\begin{cases} x_\Delta^{(\alpha)}(t) = -3x(\sigma(t)) + 5t^{1-\alpha}, \quad \textit{pour tout } t \in I = [0,1]_{\mathbb{T}},\\ x(0) = x(\sigma(1)). \end{cases} \tag{3.17}$$

Alors, ce problème est sous la forme (3.13)*, avec* $0 < \alpha \leq 1$*,* $p(t) \equiv -3$*,* $g(t) = 5t^{1-\alpha}$*,* $a = 0, b = 1, J = [0,\sigma(1)]_{\mathbb{T}}$*.*
Comme $-p = 3 \in \mathcal{R}_\mu(\mathbb{T},\mathbb{R})$*, alors la fonction* $e(.,.)$ *existe. Par le Corollaire 3.3, la solution de* (3.17) *est*

$$x(t) := \int_{[0,\sigma(1)]_{\mathbb{T}}} G_P(t,s)g(s)\Delta^\alpha s, \quad t \in J,$$

où G_P *est la fonction de Green donnée par*

$$G_P(t,s) = \frac{e_3(s,t)}{e_3(\sigma(1),0)-1}\begin{cases} e_3(\sigma(1),0), & 0 \leq s \leq t \leq \sigma(1),\\ 1, & 0 \leq t \leq s \leq \sigma(1). \end{cases}$$

D'ou

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_{[0,t]_{\mathbb{T}}} G_P(t,s)g(s)\Delta^\alpha s + \int_{[t,\sigma(1)]_{\mathbb{T}}} G_P(t,s)g(s)\Delta^\alpha s\\
&= \int_{[0,t]_{\mathbb{T}}} \frac{e_3(s,t)e_3(\sigma(1),0)}{e_3(\sigma(1),0)-1}5s^{1-\alpha}\Delta^\alpha s + \int_{[t,\sigma(1)]_{\mathbb{T}}} \frac{e_3(s,t)}{e_3(\sigma(1),0)-1}5s^{1-\alpha}\Delta^\alpha s\\
&= 5\int_{[0,t]_{\mathbb{T}}} \frac{e_3(s,t)e_3(\sigma(1),0)}{e_3(\sigma(1),0)-1}\Delta s + 5\int_{[t,\sigma(1)]_{\mathbb{T}}} \frac{e_3(s,t)}{e_3(\sigma(1),0)-1}\Delta s.
\end{aligned}$$

- *Si* $\alpha = 1$ *et* $\mathbb{T}$ *est un intervalle réel, on a* $x_\Delta^{(\alpha)} = x'$, $I = J = [0,1]$, $e_3(s,t) = e^{3(s-t)}$, $e_3(\sigma(1),0) = e^3$ *et*

$$\begin{aligned} x(t) &= 5\int_{[0,t]} \frac{e^{3(s-t)}e^3}{e^3-1}ds + 5\int_{[t,1]} \frac{e^{3(s-t)}}{e^3-1}ds \\ &= \frac{5e^{-3t}}{e^3-1}\left[\int_{[0,t]} e^{3(s+1)}ds + \int_{[t,1]} e^{3s}ds\right] \\ &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Chapitre 4

Équation dynamique fractionnaire conforme non-linéaire

Dans ce chapitre, nous établirons un théorème d'existence pour l'équation dynamique fractionnaire conforme non-linéaire sur les échelles de temps avec condition initiale :

$$\begin{cases} x_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = f(t, x^{\sigma}(t)), & \text{pour tout } t \in I = [a, b]_{\mathbb{T}}, \\ x(a) = x_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Ici, $\mathbb{T}$ est une échelle de temps bornée, $J = [a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}$ avec $a, b \in \mathbb{T}$, $0 \leq a < b$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$ désigne la delta dérivée fractionnaire conforme de x d'ordre $\alpha \in (0, 1]$ en t et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Pour obtenir un théorème d'existence pour problème (4.1), nous introduirons la notion de tube-solution associé à (4.1). Cette nouvelle notion est équivalente à la notion de sous- et sur-solution introduite par B. Bendouma et A. Hammoudi [5].

4.1 Théorème d'existence.

Une solution du problème sera une fonction $x \in C_{rd}^{\alpha}(J, \mathbb{R})$ satisfaisant (4.1). Introduisons la notion de tube-solution pour le problème (4.1). C'est à partir de cette notion que nous obtiendrons notre résultat d'existence.

Définition 4.1 *Soit $(v, M) \in C_{rd}^{\alpha}(J, \mathbb{R}) \times C_{rd}^{\alpha}(J, [0, \infty))$. On dira que (v, M) est un tube-solution de (4.1) si* *(i)* $(x - v^{\sigma}(t))\left(f(t,x) - v_{\Delta}^{(\alpha)}\right) \leq M^{\sigma}(t)M_{\Delta}^{(\alpha)}(t)$ *pour tout* $t \in I$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $|x - v^{\sigma}(t)| = M^{\sigma}(t)$,

(ii) $v_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = f(t, v^{\sigma}(t))$ *et* $M_{\Delta}^{(\alpha)}(t) = 0$ *pour tout* $t \in I$ *tel que* $M^{\sigma}(t) = 0$,

(iii) $|x_0 - v(a)| \leq M(a)$,

Remarque 4.1 *(1) Si* $\alpha = 1$ *et* $\mathbb{T}$ *est un intervalle réel, notre définition de tube solution est équivalente à la notion de tube solution introduite par B. Mirandette [14] pour d'équations différentielles ordinaires du premier ordre.*

(2) Si $\mathbb{T}$ *est un intervalle réel, notre définition de tube solution est équivalente à la notion de tube solution introduite par B. Bayour et D. F. M. Torres [3]*

On notera

$$T(v,M) = \{x \in C_{rd}^{\alpha}(J,\mathbb{R}) : |x(t) - v(t)| \leq M(t) \text{ pour tout } t \in J\}.$$

Nous avons besoin des lemmes auxiliaires suivants :

Lemme 4.1 *Soit une fonction* $r \in C_{rd}^{\alpha}(J,\mathbb{R})$, *telle que* $r_{\Delta}^{(\alpha)}(t) < 0$ *sur* $\{t \in I : r(\sigma(t)) > 0\}$. *Si* $r(a) \leq 0$, *alors* $r(t) \leq 0$ *pour tout* $t \in J$.

Preuve.
Supposons qu'il éxiste un $t \in J$ tel que $r(t) > 0$. Dans ce cas, il existe un $t_0 \in J$, tel que $r(t_0) = \max_{t\in J} r(t) > 0$, car r est continue sur J. Si $\rho(t_0) < t_0$, alors $r_{\Delta}^{(\alpha)}(\rho(t_0))$ existe, car $\mu(\rho(t_0)) = t_0 - \rho(t_0) > 0$ et puisque $r \in C_{rd}^{\alpha}(J,\mathbb{R})$. Alors,

$$r_{\Delta}^{(\alpha)}(\rho(t_0)) = \frac{r(t_0) - r(\rho(t_0))}{t_0 - \rho(t_0)}(\rho(t_0))^{1-\alpha} \geq 0,$$

et comme $r(t_0) = r(\sigma(\rho(t_0))) > 0$, alors par hypothèse, $r_{\Delta}^{(\alpha)}(\rho(t_0)) \geq 0$, d'où la contradiction.
Si $t_0 = \rho(t_0) > a$, alors il existe un intervalle $[t_1, \rho(t_0))$ tel que $r(\sigma(t)) > 0$ pour tout $t \in [t_1, \rho(t_0)) \cap \mathbb{T}$. Ainsi,

$$0 \leq r(t_0) - r(t_1) = r(\rho(t_0)) - r(t_1) = \int_{[t_1,\rho(t_0))\cap\mathbb{T}} r_{\Delta}^{(\alpha)}(s)\Delta^{\alpha}s < 0,$$

ce qui contredit la maximalité de $r(t_0)$.
Finalement, le cas $t_0 = a$ est impossible. En prenant $t_0 = b$, par ce qui précède, on trouvrait que $r(b) < 0$, ce que nous mène directement à la conclusion.

Lemme 4.2 *Soit $\alpha \in (0,1]$ et $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est delta différentiable fractionnaire conforme d'ordre α en $t > 0$. On sait que la fonction $|.| : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to [0, \infty)$ est différentiable. Si $t = \sigma(t)$, alors*

$$|x(t)|_{\Delta}^{(\alpha)} = \frac{x(t)\ x_{\Delta}^{(\alpha)}(t)}{|x(t)|}.$$

Preuve.
D'aprés la Definition 2.2 et les Théorèmes 2.1 et 2.2, on a que

$$\begin{aligned}
|x(t)|_{\Delta}^{(\alpha)} &= \lim_{s \to t} \frac{|x(\sigma(t))| - |x(s)|}{\sigma(t) - s} t^{1-\alpha} \\
&= \lim_{s \to t} \frac{|x(t)|^2 - |x(s)|^2}{t - s} \frac{1}{(|x(t)| + |x(s)|)} t^{1-\alpha} \\
&= \lim_{s \to t} \frac{|x(\sigma(t))|^2 - |x(s)|^2}{\sigma(t) - s} \frac{1}{(|x(t)| + |x(s)|)} t^{1-\alpha} \\
&= \left[x^2(t)\right]_{\Delta}^{(\alpha)} \frac{1}{2|x(t)|} \\
&= 2x(t) x_{\Delta}^{(\alpha)}(t) \frac{1}{2|x(t)|} = \frac{x(t)\ x_{\Delta}^{(\alpha)}(t)}{|x(t)|}.
\end{aligned}$$

On peut déduire du Corollaire 3.1, le lemme suivant

Lemme 4.3 *Le problème de Cauchy (à valeur initiale)*

$$\begin{cases} x_{\Delta}^{(\alpha)}(t) + \alpha t^{1-\alpha}\ x(\sigma(t)) = g(t), \quad \textit{pour tout } t \in I; \\ x(a) = x_0. \end{cases} \tag{4.2}$$

avec $x_0 \in \mathbb{R}$, et $g \in C_{rd}^{\alpha}(I, \mathbb{R})$, admet une solution unique $x \in C_{rd}^{\alpha}(J, \mathbb{R})$, donnée par

$$x(t) := \int_{[a, \sigma(b)]_{\mathbb{T}}} G_I(t,s) g(s) \Delta^{\alpha} s + x_0 e_{\alpha}(a,t), \quad t \in J, \tag{4.3}$$

où G_I est la fonction de Green donnée par

$$G_I(t,s) = e_{\alpha}(s,t) \begin{cases} 1, & a \le s \le t \le \sigma(b), \\ 0, & a \le t \le s \le \sigma(b). \end{cases} \tag{4.4}$$

Afin de démontrer notre théorème d'existence, nous aurons recours au problème modifié suivant.

$$\begin{cases} x_{\Delta}^{(\alpha)}(t) + \alpha\ t^{1-\alpha}\ x(\sigma(t)) = f(t, \overline{x}(\sigma(t))) + \alpha\ t^{1-\alpha}\ \overline{x}(\sigma(t)), \quad t \in I, \\ x(a) = x_0, \end{cases} \tag{4.5}$$

où

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} \frac{M(t)}{|x-v(t)|}(x - v(t)) + v(t), & \text{si } |x - v(t)| > M(t), \\ x(t), & \text{si } |x - v(t)| \leq M(t). \end{cases} \tag{4.6}$$

Définissons l'opérateur $\mathcal{F}_1 : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$ par :

$$\mathcal{F}_1(x)(t) = \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} G_I(t,s) \left(f(s, \overline{x}(\sigma(s))) + \alpha\ s^{1-\alpha}\ \overline{x}(\sigma(s))\right) \Delta^{\alpha} s + x_0 e_{\alpha}(a,t),$$

où

$$G_I(t,s) = e_{\alpha}(s,t) \begin{cases} 1, & a \leq s \leq t \leq b, \\ 0, & a \leq t \leq s \leq b. \end{cases}$$

G_I est la fonction de Green du problème de Cauchy (4.2).

Proposition 4.1 *Si $(v, M) \in C_{rd}^{\alpha}(J, \mathbb{R}) \times C_{rd}^{\alpha}(J, [0, \infty))$ est un tube-solution de (4.1), alors l'opérateur $\mathcal{F}_1 : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$ est compact.*

Preuve : La preuve est donnée en plusieures étapes.
Etape 1 : $\mathcal{F}_1$ est continu.
Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C(J, \mathbb{R})$ convergeant vers $x \in C(J, \mathbb{R})$. Alors pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} &\Big|\mathcal{F}_1(x_n(t)) - \mathcal{F}_1(x(t))\Big| \\ &\quad\leq \int_{[a,\sigma(b))_{\mathbb{T}}} |G_I(t,s)| \Big(|f(s, \overline{x_n}(\sigma(s))) - f(s, \overline{x}(\sigma(s)))| \\ &\qquad\qquad + \alpha |s^{1-\alpha}| |\overline{x_n}(\sigma(s)) - \overline{x}(\sigma(s))| \Big) \Delta^{\alpha} s \\ &\quad\leq M \int_{[a,\sigma(b))_{\mathbb{T}}} \Big(|f(s, \overline{x_n}(\sigma(s))) - f(s, \overline{x}(\sigma(s)))| \\ &\qquad\qquad + (\sigma(b))^{1-\alpha} |\overline{x_n}(\sigma(s)) - \overline{x}(\sigma(s))| \Big) \Delta^{\alpha} s. \end{aligned}$$

où

$$M := \max_{s,t\in J} |G_I(t,s)| = \max_{s,t\in J} |e_\alpha(s,t)| = e_\alpha(b,a) \text{ et } \max_{s\in J} |s^{1-\alpha}| = (\sigma(b))^{1-\alpha}.$$

Puisqu'il existe une constante $R > 0$ tel que $\|\overline{x}\|_{C(J,\mathbb{R})} < R$, il existe un indice N tell que $\|\overline{x_n}\|_{C(J,\mathbb{R})} \leq R$ pour tout $n > N$. Ainsi, f uniformément continue sur $J \times B_R(0)$. Alors pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un $\delta > 0$ tel que $x, y \in \mathbb{R}$ où

$$|y-x| < \delta < \frac{\epsilon a^{1-\alpha}}{2M(\sigma(b)-a)(\sigma(b))^{1-\alpha}}, |f(s,y)-f(s,x)| < \frac{\epsilon a^{1-\alpha}}{2M(\sigma(b)-a)},$$

pour tout $s \in I$. Par hypothèse, il est possible de trouver un indice $\hat{N} > N$ tel que $\|\overline{x_n} - \overline{x}\|_{C(J,\mathbb{R})} < \delta$ pour $n > \hat{N}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{F}_1(x_n(t)) - \mathcal{F}_1(x(t))\Big| \\
&\qquad \leq Ma^{\alpha-1} \int_{[a,\sigma(b))_{\mathbb{T}}} \left(\frac{\epsilon a^{1-\alpha}}{2M(\sigma(b)-a)} + \frac{(\sigma(b))^{1-\alpha}\epsilon a^{1-\alpha}}{2M(\sigma(b)-a)(\sigma(b))^{1-\alpha}} \right) \Delta s \\
&\qquad \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

ce qui nous convainc de la continuité de $\mathcal{F}_1$.
Etape 2 : L'ensemble $\mathcal{F}_1(C(J,\mathbb{R}))$ est relativement compact.
Considérons une suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}_1(C(J,\mathbb{R}))$ pour tout $n \in N$ il existe une suite $(x_n)_{n\in N} \in C(J,\mathbb{R})$ tell que $y_n = \mathcal{F}_1(x_n(t))$ pour tout $n \in N$. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{F}_1(x_n)(t)\Big| \\
&\quad \leq \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} s^{1-\alpha}|G_I(t,s)| \left(|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s)))| + \alpha\ s^{1-\alpha}\ |\overline{x_n}(\sigma(s))|\right) \Delta s + e_\alpha(a,t)|x_0| \\
&\quad \leq M\Big[a^{\alpha-1} \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} \left(|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s)))| + b^{1-\alpha}\,|\overline{x_n}(\sigma(s))|\right) \Delta s + |x_0|\Big].
\end{aligned}$$

Puisque

$$|\overline{x}_n(s)| \leq R, \qquad \text{pour tout } s \in J \text{ et tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $I \times \overline{B}\,(0,R)$ est un ensemble sur $J \times \mathbb{R}$ et f étant continue sur $I \times \overline{B}\,(0,R)$, nous pouvons déduire l'existance d'une constante $A > 0$, telle que

$$|f(s,\overline{x}_n(s)| \leq A, \qquad \text{pour tout } s \in I \quad \text{et} \quad \text{tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc,

$$|y_n(t)| = |\mathcal{F}_1(x_n)(t)| \leq M\Big[a^{\alpha-1}(b-a)(A+b^{1-\alpha}R) + |x_0|\Big] < +\infty.$$

Ainsi, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$.
D'autre part, pour tout $t_1 < t_2 \in J$, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathcal{F}_1(x_n)(t_2) - \mathcal{F}_1(x_n)(t_1)\Big| \\
&\leq \int_{[a,t_1]_{\mathbb{T}}} |G_I(t_2,s) - G_I(t_1,s)| \Big|\Big(f(s,\overline{x_n}(\sigma(s))) + \alpha\ s^{1-\alpha}\ \overline{x_n}(\sigma(s))\Big)\Big|\Delta^\alpha s \\
&\quad + \int_{[t_2,b)_{\mathbb{T}}} |G_I(t_2,s) - G_I(t_1,s)| \Big|\Big(f(s,\overline{x_n}(\sigma(s))) + \alpha\ s^{1-\alpha}\ \overline{x_n}(\sigma(s))\Big)\Big|\Delta^\alpha s \\
&\quad + \int_{[t_1,t_2]_{\mathbb{T}}} |G_I(t_2,s) - G_I(t_1,s)| \Big|\Big(f(s,\overline{x_n}(\sigma(s))) + \alpha\ s^{1-\alpha}\ \overline{x_n}(\sigma(s))\Big)\Big|\Delta^\alpha s \\
&\quad + |x_0||e_\alpha(a,t_2) - e_\alpha(a,t_1)| \\
&\leq \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} s^{\alpha-1}\,|e_\alpha(s,t_2) - e_\alpha(s,t_1)|\,\Big(|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s)))| + b^{1-\alpha}\ |\overline{x_n}(\sigma(s))|\Big)\Delta s \\
&\quad + \int_{[t_1,t_2]_{\mathbb{T}}} s^{\alpha-1}\,|e_\alpha(s,t_2)|\,\Big(\,|f(s,\overline{x_n}(\sigma(s)))| + b^{1-\alpha}\ |\overline{x_n}(\sigma(s))|\Big)\Delta s \\
&\quad + |x_0||e_\alpha(a,t_2) - e_\alpha(a,t_1)| \\
&\leq |e_\alpha(a,t_2) - e_\alpha(a,t_1)|\Big[D\ a^{\alpha-1}\Big(A(b-a) + b^{1-\alpha}\ R\Big) + |x_0|\Big] \\
&\qquad\qquad + Ma^{\alpha-1}\Big(A + b^{1-\alpha}\ R\Big)|t_2 - t_1|,
\end{aligned}$$

où $D := \max_{s\in\mathbb{T}}\{\dfrac{1}{e_\alpha(a,s)}\}$. Donc, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue.
Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, on obtient que l'ensemble $\mathcal{F}_1(C(J,\mathbb{R}))$ est relativement compacte dans $C(J,\mathbb{R})$. Ainsi, $\mathcal{F}_1$ est compacte.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat d'existence suivant.

Théorème 4.1 *Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $(v, M) \in C^\alpha_{rd}(J,\mathbb{R}) \times C^\alpha_{rd}(J,[0,\infty))$ est un tube-solution de (4.1), alors le problème (4.1) possède une solution $x \in C^\alpha_{rd}(J,\mathbb{R}) \cap \mathrm{T}(v,M)$.*

Preuve.
Par la Proposition 4.1, l'opérateur $\mathcal{F}_1$ est compacte. Ainsi, par le Théorème

du point fixe de Schauder, $\mathcal{F}_1$ admet un point fixe. Le Lemme 4.3 nous assure que ce point fixe est une solution du problème (4.5). Il suffit donc de démontrer que pour toute solution x de (4.5), $x \in T(v, M)$.
Considérons l'ensemble $\mathcal{B} := \{t \in I : |x(\sigma(t)) - v(\sigma(t))| > M(\sigma(t))\}$. Si $t \in \widehat{\mathcal{B}} = \{t \in \mathcal{B} : t = \sigma(t)\}$, alors par le Lemme 4.2, nous avons

$$(|x(t) - v(t)| - M(t))_\Delta^{(\alpha)} = \frac{(x(\sigma(t)) - v(\sigma(t)))\left(x_\Delta^{(\alpha)}(t) - v_\Delta^{(\alpha)}(t)\right)}{|x(\sigma(t)) - v(\sigma(t))|} - M_\Delta^{(\alpha)}(t).$$

Si $t \in \mathcal{B}$ est disperé à droite, nous avons que

$$\begin{aligned}
&(|x(t) - v(t)| - M(t))_\Delta^{(\alpha)} \\
&\quad = \frac{|x(\sigma(t)) - v(\sigma(t))| - |x(t) - v(t)|}{\mu(t)} t^{1-\alpha} - M_\Delta^{(\alpha)}(t) \\
&\quad = \frac{|x(\sigma(t)) - v(\sigma(t))|^2 - |x(\sigma(t)) - v(\sigma(t))||x(t) - v(t)|}{\mu(t)|x(\sigma(t)) - v(\sigma(t))|} t^{1-\alpha} - M_\Delta^{(\alpha)}(t) \\
&\quad \le \frac{(x(\sigma(t)) - v(\sigma(t)))\,(x(\sigma(t)) - v(\sigma(t)) - (x(t) - v(t)))}{\mu(t)|x(\sigma(t)) - v(\sigma(t))|} t^{1-\alpha} - M_\Delta^{(\alpha)}(t) \\
&\quad = \frac{(x(\sigma(t)) - v(\sigma(t)))\left(x_\Delta^{(\alpha)}(t) - v_\Delta^{(\alpha)}(t)\right)}{|x(\sigma(t)) - v(\sigma(t))|} - M_\Delta^{(\alpha)}(t).
\end{aligned}$$

Nous allons montrer que $(|x(t) - v(t)| - M(t))_\Delta^{(\alpha)} < 0$ pour tout sur $\mathcal{B}$.
Si $\{t \in \mathcal{B} : M(\sigma(t)) > 0\}$, alors par hypothèse du tube-solution, on a

$$\begin{aligned}
&(|x(t) - v(t)| - M(t))_\Delta^{(\alpha)} \\
&\quad = \frac{(x(\sigma(t)) - v(\sigma(t)))\left(f(t, \overline{x}(\sigma(t))) + \alpha\, t^{1-\alpha}\ (\overline{x}(\sigma(t)) - x(\sigma(t))) - v_\Delta^{(\alpha)}(t)\right)}{|x(\sigma(t)) - v(\sigma(t))|} \\
&\qquad - M_\Delta^{(\alpha)}(t) \\
&\quad = \frac{(\overline{x}(\sigma(t)) - v(\sigma(t)))\left(f(t, \overline{x}(\sigma(t))) - v_\Delta^{(\alpha)}(t)\right)}{M(\sigma(t))} \\
&\qquad + \alpha\, t^{1-\alpha}\,(M(\sigma(t)) - |x(\sigma(t)) - v(\sigma(t))|) - M_\Delta^{(\alpha)}(t) \\
&\quad < \frac{M(\sigma(t)) M_\Delta^{(\alpha)}(t)}{M(\sigma(t))} - M_\Delta^{(\alpha)}(t) \\
&\quad < 0.
\end{aligned}$$

De plus, si $M(\sigma(t)) = 0$, alors par hypothèse du tube-solution, on a

$$\begin{aligned}
(|x(t) - v(t)| - M(t))_{\Delta}^{(\alpha)} \\
&\leq \frac{(x(\sigma(t)) - v(\sigma(t)))\Big(f(t, \overline{x}(\sigma(t))) + \alpha\ t^{1-\alpha}\ \left(\overline{x}(\sigma(t)) - x(\sigma(t))\right) - v_{\Delta}^{(\alpha)}(t)\Big)}{|x(\sigma(t)) - v(\sigma(t))|} \\
&\quad - M_{\Delta}^{(\alpha)}(t) \\
&= \frac{(x(\sigma(t)) - v(\sigma(t)))\Big(f(t, v(\sigma(t))) - v_{\Delta}^{(\alpha)}(t)\Big)}{|x(\sigma(t)) - v(\sigma(t))|} - \alpha\ t^{1-\alpha}(|x(\sigma(t)) - v(\sigma(t))|) \\
&\quad - M_{\Delta}^{(\alpha)}(t) \\
&< -M_{\Delta}^{(\alpha)}(t) \leq 0.
\end{aligned}$$

En posant $r(t) = |x(t) - v(t)| - M(t)$, il en résulte que $r_{\Delta}^{(\alpha)} < 0$ pour tout $t \in \{t \in I : r(\sigma(t)) > 0\}$. De plus, par hypothèse du tube-solution, et $x(a) = x_0$, alors $r(a) < 0$. Ainsi, les hypothèses du Lemme 4.1 sont satisfaites, ce qui démontre le théorème.

4.2 Exemples

Dans cette partie nous donnons quelques exemples d'applications.

Exemple 4.2.1 *On considère le problème :*

$$\begin{cases} x_{\Delta}^{(\frac{1}{3})}(t) = \dfrac{2t - 1 - x^5(\sigma(t))}{\sqrt{t}}, & t \in I = [\frac{1}{2}, 1]_{\mathbb{T}}, \\ x(\frac{1}{2}) = 1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Ce problème est un cas particulier de (4.1), avec $\alpha = \frac{1}{3}$ *et* $f(t, x^{\sigma}(t)) = \dfrac{2t - 1 - x^5(\sigma(t))}{\sqrt{t}}$. *Il est clair que* f *est une fonction continue. On peut vérifier que* $(v, M) = (0, 1)$ *est un tube-solution pour (4.7). En effet, ona* $v_{\Delta}^{(\frac{1}{3})}(t) = 0$, $M_{\Delta}^{(\frac{1}{3})}(t) = 0$, *et* $|x_0 - v(\frac{1}{2})| = |1| \leq M(\frac{1}{2}) = 1$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $|x - v(t)| = M(t)$, *alors* $x = 1$ *ou* $x = -1$, *et on a pour*

$t \in I = [\frac{1}{2}, 1]_{\mathbb{T}}$

$$\begin{aligned}
(x - v^{\sigma}(t))\left(f(t,x) - v_{\Delta}^{(\alpha)}\right) &= (x)(\frac{2t-1-x^5}{\sqrt{t}}),\\
&= \begin{cases} -2\sqrt{t} & si\ x = -1,\\ \dfrac{2(t-1)}{\sqrt{t}} & si\ x = 1,\end{cases}\\
&\leq 0 = M^{\sigma}(t) M_{\Delta}^{(\alpha)}(t) \quad pour\ tout\ t \in I = [\frac{1}{2}, 1]_{\mathbb{T}}.
\end{aligned}$$

D'aprés le Théorème 4.1, le problème (4.7) admet une solution $x \in C_{rd}^{\frac{1}{3}}([\frac{1}{2}, \sigma(1)]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ *telle que* $|x(t)| \leq 1$ *pour tout* $t \in [\frac{1}{2}, \sigma(1)]_{\mathbb{T}}$.

Exemple 4.2.2 *On considère l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$$\begin{cases} x^{(\alpha)}(t) = -\dfrac{x^3(t)}{2} - \cos(\frac{\pi}{2}x(t)) + \sqrt{e^t}, \quad pour\ tout\ t \in I = [1,2], \\ x(1) = 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Ce problème est un cas particulier de (4.1) avec $0 < \alpha \leq 1$, $\mathbb{T}$ *est un intervalle réel contenant* I *et* $f(t, x(t)) = -\frac{x^3(t)}{2} - \cos(\frac{\pi}{2}x(t)) + \sqrt{e^t}$. *Il est clair que* f *est une fonction continue sur* $[1,2] \times \mathbb{R}$. *On peut vérifier que* $(v, M) = (1, 1)$ *est un tube-solution pour (4.8). En effet, nous avons* $v^{(\alpha)}(t) = 0$, $M^{(\alpha)}(t) = 0$, *et* $|x_0 - v(1)| = |1| \leq M(1) = 1$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $|x - v(t)| = M(t)$, (*i.e.*, $|x-1| = 1$) *alors* $x = 0$ *ou* $x = 2$, *et nous avons pour* $t \in I = [1,2]$

$$\begin{aligned}
(x - v(t))\left(f(t,x) - v^{(\alpha)}\right) &= (x-1)\left(-\frac{x^3(t)}{2} - \cos(\frac{\pi}{2}x(t)) + \sqrt{e^t}\right),\\
&= \begin{cases} 1 - \sqrt{e^t} & si\ x = 0,\\ -3 + \sqrt{e^t} & si\ x = 2,\end{cases}\\
&\leq 0 = M(t) M^{(\alpha)}(t) \quad pour\ tout\ t \in I.
\end{aligned}$$

D'aprés le Théorème 4.1, le problème (4.8) admet une solution $x \in C^{\alpha}([1,2], \mathbb{R})$ *telle que* $|x(t) - 1| \leq 1$ *pour tout* $t \in [1,2]$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous présentons des résultats d'existence de solutions pour des équations dynamiques fractionnaires conformes linéaires d'ordre $\alpha \in]0,1]$ sur les échelles de temps. Aussi, nous présentons un résultat d'existence de solutions pour d' équation dynamique fractionnaire conforme non linéaire d'ordre $\alpha \in]0,1]$ sur l'échelle de temps, ce résultat est obtenu grâce a la notion de tube solution et théorème de point fixe de Schauder.

Bibliographie

[1] D. Anderson, J. Bullock, L. Erbe, A. Peterson and H. Tran, *Nabla dynamic equations on time scales,* Panamer. Math. J. 13 (2003), no. 1, 1-47.

[2] D.R. Anderson and D.J. Ulness, *Properties of the Katugampola fractional derivative with potential application in quantum mechanics*, J. Math. Phys. **56** (2015), no. 6, 063502, 18 pp.

[3] B. Bayour and D. F. M. Torres, *Existence of solution to a local fractional nonlinear differential equation*, J. Comput. Appl. Math. **312** (2016), 127–133.

[4] B. Bendouma and A. Hammoudi, *A nabla conformable fractional calculus on time scales*, Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications. **7** (2019), no. 1, 202-216.

[5] B. Bendouma and A. Hammoudi, *Nonlinear functional boundary value problems for conformable fractional dynamic equations on time scales*, Mediterr. J. Math. (2019) 16 :25 https ://doi.org/10.1007/s00009-019-1302-5.

[6] N. Benkhettou, S. Hassani and D.F.M. Torres, *A conformable fractional calculus on arbitrary time scales*, J. King Saud Univ. Sci. **28** (2016), no. 1, 93-98.

[7] M. Bohner and A. Peterson, *Dynamic equations on time scales.* Birkhäuser Boston. Boston, MA, 2001.

[8] M. Bohner and A. Peterson, *Advances in dynamic equations on time scales.* Birkhäuser Boston., Boston, MA, 2003.

[9] B. Bendouma, A. Benaissa Cherif and A. Hammoudi, *Systems of first-order nabla dynamic equations on time scales*, Malaya Journal of Mathematik. **6** (2018), no. 4, 757-765.

[10] S. Hilger, *Analysis on measure chains a unified approach to continuous and discrete calculus,* Results Math.18 (1990), 18-56.

[11] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef and M. Sababheh, *A new definition of fractional derivative*, J. Comput. Appl. Math. **264** (2014), 65–70.

[12] A. Kilbas, M.H. Srivastava and J.J. Trujillo, *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, North Holland Mathematics Studies 204, 2006.

[13] R. L. Magin, *Fractional calculus in Bioengineering*, CR in Biomedical Engineering. **32** (2004), no. 1, 1-104.

[14] B. Mirandette, *Résultats d'existence pour des systèmes d'équations différentielles du premier ordre avec tube-solution.* M.Sc. thesis, University of Montréal. 1996.