MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN
FACULTE DES MATEMATIQUES ET INFORMATIQUE
TIARET

BP 78 TIARET, 14000–ALGERIE- TEL/FAX 046-20-88-45

Mémoire

Pour obtenir le Diplôme de master

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnel

Intitulée

Etudier la Convergence en probabilité des moyennes arithmétiques

***Présentée par*:**

CHOUAF SOUFIANE
TRARI ABDELKADER
MOUKHTARI YSSINE

Soutenue le 15/10/2020

Devant le jury composé de :

Mr Halim Benali	***Maitre de conférences B***	***Président***
Mr Abderrahmane Arabie	***Maitre de conférences A***	***Examinateur***
Mr Daoudi Hamza	***Maitre de conférences B***	***Encadreur***

Reméerciements

Nous remercions Dieu d'abord et avant tout à la fin d'un tel travail et tous ceux qui, plus ou moins directement, ont contribué à le rendre possible.

Nous tenons à remercier vivement tout d'abord notre encadreur, monsieur **Hamza Daoudi** pour tout le temps qu'ils m'ont consacré et pour sa patience, son suivie et ses conseils durant l'évolution de ce travail.

Que le docteur **Halim Benali** trouve ici l'expression de nos remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à cet mémoire. Je le remercie chaleuresement d'avoir accepté d'être le président du jury de ce travail.

Je voudrais également remercier Monsieur le docteur **Abderrahmane Arabie** pour avoir accepter d'examiner cet mémoire.

Finalement, nos plus vifs remerciement s'adressent à tout personne qui a contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Ce travail est dédiée à toute ma famille...
et mes meilleurs amis...

Résumé

L'étude des moyennes arithmétiques permet d'interpréter la probabilité comme une fréquence de réalisation, justifiant ainsi le principe des sondages, et présente l'espérance comme une moyenne. Plus formellement, elle signifie que la moyenne empirique, calculée sur les valeurs d'un échantillon, converge vers l'espérance lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini. L'objectif de ce travail est d'étudier la convergence en probabilité des moyennes arithmétiques des variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées(i.i.d)

Mots clés Moyenne empirique ; convergence ; variables aléatoires

Abstract

The study of arithmetic means makes it possible to interpret the probability as a frequency of realization, thus justifying the principle of surveys, and presents the expectation as an average. More formally, it means that the empirical mean, calculated on the values of a sample, converges towards the expectation when the size of the sample tends towards infinity. The objective of this work is to study the convergence in probability of the arithmetic means of the independent real random variables identically distributed (i.i.d)

Key words Empirical mean ; convergence ; random variables.

Table des matières

Liste des tableaux

Introduction générale

En mathématiques, l'étude des probabilités(du latin probabilitas) est un sujet de grande importance donnant lieu à de nombreuses applications.
Le calcule de probabilité est une étude de phénomène aléatoire ou non déterministe ou bien, elle est une évaluation du caractère probable d'un évènement.
L'étude des moyennes arithmétiques permet d'interpréter la probabilité comme une fréquence de réalisation, justifiant ainsi le principe des sondages, et présente l'espérance comme une moyenne. Plus formellement, elle signifie que la moyenne empirique, calculée sur les valeurs d'un échantillon, converge vers l'espérance lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini.
Plusieurs théorèmes expriment cette loi, pour différents types de convergence en théorie des probabilités. La loi faible des grands nombres met en évidence une convergence en probabilité, tandis que la loi forte des grands nombres donne une convergence presque sûre. Historiquemen la loi des grand nembre désine les constat fait par les premier probabiliste (pascl ,fermet , huygens) de la convergence de lafrequente d'un évenment vers sa probabilitie lorsque le nombre d'épreuve(indépendantes)augmente indefiniment.
Cette convergnece etait alors percue comme une loi de la nature (d'ou le lot loi) et ce n'est que plus tard .Lorsque'on a commencé concevoir le calcul des probalitie comme un modele mathemmatique des phénomene aléatoire, que lon a pris concience qu'il s'agissait en réalite d'un vrai théoreme de mathématique, parfaitement démontrable (bernoulli, de moivre . L'usage a conservé l'ancienn application.
Cet memoire est divisé troi chapitres, Dans le premier chapitre on aborde la théorie moderne du calcul des probabilités en donnant la définition mathématique d'un espace de probabilités, nous avons essayé de faire appel aux

notions de la théorie de la mesure, qui reste malgré tout essentielle pour une approche rigoureuse du calcul des probabilités. Nous avons introduit la notion de probabilité conditionnelle ainsi que la notion d'indépendance pour les événements qui reste une notion propre à la théorie de la probabilité.
Dans le chapitre deux nous allons présenter et etudié la variable aléatoire et les types des variables aléatoire.
Le troisième on s'interesse à étudier les types de covenrgence de varibale aleatoire.Covergence en probilitie ,en moyenne,presque sûr et en loi et on va étudier la convergence en probabilité des moyennes arithmétiques et on termine par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Rappel au calcul des probabilités

1.1 Espace probabilisable

1.1.1 Espace échantillon

Définition 1.1 *On appelle expérience aléatoire ou épreuve, toute expérience dont le résultat est régi par le hasard l'orsqu'on répète l'expérience dans les mêmes conditions.*

Exemple 1.1 *Donnons quelques exemples simples d'expériences aléatoires :*

1. *le jet d'une pièce de monnaie et l'observation de la face supérieure.*
2. *Le jet d'un dé à six faces et l'observation de la face supérieure.*
3. *L'extraction d'une carte d'un jeu de 32 cartes.*
4. *La mesure de la durée de vie d'une batterie de téléphone portable.*
5. *La détermination du nombre de personnes arrivant à un guichet dans une période donnée.*

Définition 1.2 *On appelle l'ensemble des tous les résultats possibles d'une experience aleatoire espace échantillon ou espace des épreuves. On le note* Ω.

Remarque 1.1 *Les espaces échantillons correspondent aux experiencs aléatoires citees dans l'exemple precedent sont respectivement :* $\Omega_1 =$ *pile, face,*

Ω_2 = *1, 2, 3, 4, 5, 6*
Ω_3 = *l'ensembles des 32 carte,* $\Omega_4 = [0, +\infty[$, Ω_5 = *N.*

1.1.2 Algèbre-Tribu

Définition 1.3 *Soit Ω un espace échantillon, une algèbre $\mathcal{A}$ sur Ω est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :*

i $\Omega \in \mathcal{A}$

ii $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

iii $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Définition 1.4 *Soit Ω un espace échantillon, une tribu ou une σ-algebre $\mathcal{F}$ sur Ω est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ verifiant :*

i $\Omega \in \mathcal{A}$

ii $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

iii *Si $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{F}$alors :*

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{F}$$

Exemple 1.2 *Soient Ω un espace échantillon, $A \in \mathcal{P}$, alors :*

- $\mathcal{A}_{\prime} = \{\emptyset, \Omega\}$ *est une algèbre sur Ω appelee l'algèbre triviale sur Ω.*
- $\mathcal{P}$ *est une algèbre sur Ω , elle est appelée l'algèbre grossiere sur Ω .*
- *Soit $A \subset \Omega$, posons : $\sigma(A)\{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$. Il est clair que $\sigma(A)$ est une algèbre sur Ω , elle est appelee l'algebre engendree pas A.*
- *Posons $\Omega = \{a, b, c\}$ et $A = \{\emptyset, \Omega, a, b, a, c, c\}$ alors A n'est pas une algèbre sur Ω puisque $\{a, c\} = \{b\} \ni \mathcal{A}$*

Remarque 1.2 *Il n'est pas difficile de voir que :*

- *Une tribu est forcément une algèbre mais la réciproque est fausse en général.*
- *Une algèbre (et à fortiori une tribu) contient toujours l'ensemble vide.*
- *Une algèbre est stable par intersection finie.*
- *Une tribu est stable par intersection infinie dénombrable.*
- *La réunion de deux algèbres (resp. de deux tribus) nŠest pas une algèbre (resp. une tribu) en général.*

Cependant on a le résultat suivant :

Proposition 1.1 *L'intersection de deux algebres (resp. de deux tribus) est une algebre (resp. une tribu).*

Définition 1.5 *Soient* Ω *un espace echantillon,* $\mathcal{F}$ *une tribu sur* Ω*. Le couple* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est appele espace probabilisable ou espace mesurable.*

1.2 Espace de probabilité

Dans tout ce qui suit $(\Omega, \mathcal{F})$ designe un espace probabilisable.

Définition 1.6 *Soient* $A, B, A_1, A_2, ...A_n$ *des elements de* $\mathcal{F}$*.*

a *On dit que* $AetB$ *sont incompatibles ou disjoints si* $A \cap B = \emptyset$

b *On dit que* $A_1, A_2, ...A_n$ *sont deux a deux incompatibles si pour tout* $1 \leq i \neq j \leq n : A_i \cap B_i = \emptyset$

c *On dit que* $A_1, A_2, ...A_n$ *forment une partition de* Ω*, s'ils sont deux a deux incompatibles et si :*

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$$

Nous pouvons à présent donner la définition d'une probabilité :

Définition 1.7 *On appelle probabilite, toute application* $\mathbb{P} : \Omega \to [0,1]$ *verifiant les deux proprietes suivantes :*

i $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

ii σ*-additivite : Pour toute famille* $A_k, k \geq 1$ *d'éléments de* $\mathcal{F}$ *deux a deux incompatibles, on a :*

$$\mathbb{P}(\cup_{k\geq 1} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Remarque 1.3 *Cette definition merite quelques explications :*

1. *La première condition est assez naturelle puisque par definition,* Ω *est l'ensemble de tous les resultats possibles.*
2. *La condition de* σ*-additivite est aussi naturelle, en effet si on considere le jet d'un de equilibre, la probabilite d'avoir un 2 ou un 4 est* $2/6 = 1/6+1/6$ *donc la somme des probabilites d'avoir un 2 et un 4.*
3. *De cette definition, on peut comprendre l'utilité de la notion de tribu, introduite dans la definition 2.4, ainsi la tribu peut etre consideree comme le domaine de definition d'une probabilite* $\mathbb{P}$. *En effet dans cette dernière définition on peut parler de* $\mathbb{P}(A_n)$ *puisque* $A_n \in \mathcal{F}$, *mais on ne pouvait pas écrire* $\mathbb{P}(\cup_{n\geq 1} A_n)$ *si* $\mathcal{F}$ *n'était pas une tribu. (à méditer)*
4. *On peut se demander pourquoi ne pas definir une probabilite* $\mathbb{P}$. *sur* $\surd(\Omega)$. *tout simplement ? La reponse est que lorsque* Ω *est un ensemble fini, la tribu* $\mathcal{F}$ *sera souvent* $\surd(\Omega)$, *mais lorsque* Ω *est un ensemble infini, ceci n'est pas possible en general, ces considerations sont purement theoriques et sortent du cadre de ce polycopie.*

Remarque 1.4 *Il faut bien noter que pour la condition de* σ*-additivite exigée dans la definition précédente, on demande que les ensembles* $\{A_k, k \geq 1\}$, *soient deux à deux incompatibles, en effet si cette condition n'est pas verifiée, l'équation (2.1), peut ne pas être satisfaite, pour le voir il suffit de considérer l'éxperience aléatoire qui consiste a jeter un dé équilibre et à observer la face superieure. Soient :*

A : "avoir un chiffre pair"
B : "avoir un chiffre supérieur ou égale a 3".

On a $A = \{2,4,6\}, B = \{3,4,5,6\}$, *d'où* $A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$. *Ainsi* $\mathbb{P}(A) = 1/2, \mathbb{P}(B) = 2/3$ *et* $\mathbb{P}(A \cup B) = 5/6$, *par consequent :*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{6} \neq \frac{7}{6} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Définition 1.8 *Si* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est un espace probabilisable,* $\mathbb{P}$ *une probabilite definie sur* $(\Omega, \mathcal{F})$*, alors le triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est appele espace de probabilite.*

Proposition 1.2 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilite,* $A, B \in \mathcal{F}$*, alors :*

1. $\forall E \in \mathcal{F}, 0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1.$
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$
3. $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A).$
4. *Croissance :* $\mathbb{P}$ *est une application croissante :*

$$A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$

Exemple 1.3 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace probabilisable,* $A, B \in \mathcal{F}$ *Peut-on définir une probabilite vérifiant :*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4} et \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}?$$

Solution :
Il suffit de remarquer que $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \mathbb{P}(A)$ ce qui est impossible car $A \cap B \subset A$ et ceci implique d'aprés le quatrième point de la proposition 3.2 que $\mathbb{P}(A \cap B)$ doit être inférieur ou égale a $\mathbb{P}(A$.

Exemple 1.4 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace probabilisable,* $A, B \in \mathcal{F}$*. Peut-on définir une probabilité* $\mathbb{P}$ *verifiant :*
$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{7}{8}$ *et* $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Solution : D'apres la proposition 3.2, on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{9}{8} > 1$, ce qui est impossible d'apres la definition d'une probabilité.

Proposition 1.3 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilite,* $A, B \in \mathcal{F}$*, alors :*

- *L'ensemble vide est appelé l'évènement impossible.*
- *Si* $\mathbb{P}(A) = 0$*, on dit que* A *est un évènement presque impossible.*
- Ω *est appele l'évènement certain.*
- *Si* $\mathbb{P}(B) = 1$*, on dit que* B *est un évènement presque certain.*

Dans la définition de la σ-additivité (definition 2.7), on exige que les évènements $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ soient deux a deux incompatibles, pour pouvoir calculer la probabilité de la réunion de plusieurs évènements. Dans le cas ou cette condition n'est pas vérifiée, on a seulement une inégalité, dite inégalité de Boole :

Proposition 1.4 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité,* $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ *une suite d'élements de* $\mathcal{F}$*, alors :*

$$\mathbb{P}(\cup_{k \geq 1} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Une probabilité possède aussi une propriété qui ressemble à la continuité d'une fonction et qui nous sera utile pour la suite :

Proposition 1.5 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité Si* $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ *est une suite croissante d'éléments de* $\mathcal{F}$*(i.e* $A_n \subset A_{n+1}$*,pour tout* n *. 1), alors*

$$\mathbb{P}(\cup_{n\geq 1}A_n) = lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)$$

Si $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ *est une suite décroissante d'élements de* $\mathcal{F}$*(i.e* $A_n \supset A_{n+1}$*,pour tout* $n \geq 1$*, alors*

$$\mathbb{P}(\cup_{n\geq 1}A_n) = lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)$$

1.2.1 Le cas équiprobable

Supposons dans ce paragraphe que Ω est un ensemble fini avec $card(\Omega) = n$, on peut l'écrire : $\Omega = w_1, w_2, ..., w_n$. Supposons aussi que tous les évènements $\{w_k\}$. sont équiprobables ou uniformes i. e.

$$\mathbb{P}(\{w_1\}) = \mathbb{P}(\{w_1\}), \mathbb{P}(\{w_2\}), ..., \mathbb{P}(\{w_n\})$$

En utilsant les propriétés de la probabilité $\mathbb{P}$ (définition 2.7), on a par la propiriété de σ-additivite :

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n}\{w_k\}) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\{w_k\}) = n\mathbb{P}(\{w_1\})$$

Par suite

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\}, \mathbb{P}(\{w_k\}) = \frac{1}{n}$$

Soient à présent $1 \leq k \leq n, A \subset \Omega$, avec $card(A) = k$. Dans ce cas on peut écrire $A = \{w_1^{'}, w_2^{'}, ..., w_k^{'}\}$., où chaque $w_k^{'}$ est choisit dans l'ensemble Ω. Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\cup_{j=1}^{k}\{w_k^{'}\}) = \sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}(\{w_k^{'}\}) = k\mathbb{P}(\{w_1^{'}\}) = \frac{k}{n}$$

On a alors prouvé le résultat suivant :

Théorème 1.1 *Dans le cas équiprobable, la probabilité d'un evenement A est donnée par*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}$$

Afin d'illustrer ce résultat, donnons trois exemples :

Exemple 1.5 *On jette deux dés équilibrés, et on observe les faces superieures des deux dés. Notons par A l'évènement :*

A : "la somme des deux chiffres est egale a 5".

Calculer $\mathbb{P}(A)$.

Solution :
Soit Ω l'espace echantillon associe a cette experience aléatoire, ainsi

$$\Omega = \{(x, y)/x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

.

Par suite $card(\Omega) = 6 \times 6 = 36$. De plus les deux des sont équilibrés, donc chaque élément (x, y) de Ω a la même probabilité d'apparaître. On est par conséquent dans un cas équiprobable. D'autre part $A = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

Le théorème 2.6 donne :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{4}{\Omega}$$

Exemple 1.6 *On forme un nombre de 4 chiffres choisis au hasard dans l'ensemble $\{1, 2, ..., 9\}$. Quelle est la probabilités que le nombre soit pair ?*

Solution : Notons le nombre choisis par abcd et soit Ω l'espace échantillon associe a cette experience aleatoire, ainsi $\Omega = \{abcd/a, b, c, d \in \{1, 2, ...9\}\}$. D'ou $card(\Omega) = 9 \times 9 \times 9 \times 9 = \frac{9}{4}$. A présent, introduisons l'évènement B : "le nombre choisis est pair". Puisque le nombre est choisi au hasard, on est dans un cas équiprobable. D'autre part le nombre $abcd$ est pair si et seulement si $d \in \{2, 4, 6, 8\}$, donc $card(B) = 9 \times 9 \times 9 \times 4$. On a par le théorème

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{9^3 \times 4}{9^4} = \frac{4}{9}$$

Exemple 1.7 *Une urne contient 10 boules : 3 noires, 4 blanches et 3 rouges. On tire de cette urne 3 boules. calculer la probabilité des évènements suivants :*

- *A : "Avoir exactemeent 3 boules blanches".*
- *B : "Avoir une boule de chaque couleur".*
- *C : "Avoir au moins une boule rouge".*

Solution :
Dans cet exemple on n'attache pas d'importance a l'ordre d'apparition des boules, on forme donc un sous ensemble compose de trois boules choisis dans un ensemnble de 10 boules. Par consequent $card(\Omega) = C_3^{10}$.

- Pour le premier evenement, on veut 3 boules blanches, pour realiser cet évenement, on doit choisir nos 3 boules parmi les 4 boules blanches, on a donc $card(A) = C_3^4$. Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^4}{C_3^{10}}$$

- Pour lŠévènement B, on veut avoir une boule de chaque couleur, donc on a 3 choix pour la noire, 4 pour la blanches et 3 pour la rouges, ainsi $card(B) = 3 \times 4 \times 3 = 36$. Donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{36}{C_3^{10}}$$

- Enfin pour le dernier évènement, même si on peut calculer $\mathbb{P}(C)$ directement, il est préférable de calculer d'abord $\mathbb{P}(\overline{C})$ qui est plus simple. En effet, on a $\overline{C}$: "Ne pas avoir de boule rouge", mais il y a 7 boules qui ne sont pas de couleur rouge, d'où $card(\overline{C}) = C_3^7$. Par conséquent

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{C}) = 1 - \frac{\overline{C}}{card(\Omega)} = 1 - \frac{C_3^7}{C_3^{10}}$$

1.3 Probabilité conditionnelle

Soient$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$un espace de probabilité, $A \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$.

Définition 1.9 *Pour $A \in \mathcal{F}$, on désigne par $\mathbb{P}(A/B)$ la probabilité de A sachant B, elle est définie par :*

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Remarque 1.5 *Soient A, B deux évènements de Ω, $\mathbb{P}(A/B)$ se lit la probabilité de A sachant B ou la probabilité conditionnelle de A par rapport à B.*

La probabilité condionnelle par rapport a un évènement permet d'introduire une nouvelle probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$, en effet :

Remarque 1.6 *L'application $\mathbb{P}(./B)$ definie de $\mathcal{F}$ vers $[0, 1]$ par*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

est une probabilite sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Remarque 1.7 *Soient $C, D \in \mathcal{F}$. Cette proposition signifie en particulier que :*

a $\mathbb{P}(\Omega/B) = 1$.
b $\mathbb{P}(C \cup D/B) = \mathbb{P}(C/B) + \mathbb{P}(D/B) - \mathbb{P}(C \cap D/B)$.
c *Si C et D sont incompatibles, alors* $\mathbb{P}(C \cup D/B) = \mathbb{P}(C/B) + \mathbb{P}(D/B)$.
d $\mathbb{P}(\overline{C}/B) = 1 - \mathbb{P}(C/B)$.

Exemple 1.8 *On jette successivement deux dés équilibres. calculer la probabilité des événements suivants :*

1. *A : "La somme des chiffres sur les deux des est un nombre pair".*
2. *B : "La somme des chiffres sur les deux dés est un nombre pair sachant que le premier dé a donne le chiffre 5".*

Solution : Dans cet exemple $\Omega = \{(x, y)/x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. D'autre part, la somme de deux chiffres est paire si et seulement si les deux chiffres sont pairs ou impairs, d'où

$$A = \{(x, y)/x, y \in \{1, 3, 5\}\} \cup \{(x, y)/x, y \in \{2, 4, 6\}\}$$

Par consequent, $card(A) = 9 + 9 = 18$ et on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Pour le second évènement introduisons l'évènement C : "le premier de a donne le chiffre 5" On a ainsi $A \cap C = \{(5, y)/y \in \{1, 3, 5\}\}$ et on a $card(A \cap C) = 3$. Donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A/C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{3/36}{3/6} = \frac{1}{6}$$

.

Remarque 1.8 *Dans cet exemple, on a calculé dans les deux questions la probabilité que la somme des deux chiffres obtenus soit paire, mais à la difference de la première question où on n'avait aucune information, dans la deuxièmme question on savait que le premier dé a ramené le chiffre 5, ce qui explique la différence dans les résultats obtenus, et le fait que la probabilité calculée dans le second cas est plus petite que celle calculée au premier cas*

Exemple 1.9 *On jette deux pièces de monnaie équilibrés. Calculer :*

1. *La probabilité que les deux pièces ramènent pile, sachant que la première a ramené pile.*
2. *La probabilité que les deux pièces ramènent face, sachant qu'au moins l'une dŠentre elle a ramené face.*

Solution : Pour $i \in \{1, 2\}$, posons : A_i : "La ieme piece a ramene pile"

1. On cherche $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2/A_1)$. On a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2/A_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_1) = \frac{1/2 \times 1/2}{1/2} = \frac{1}{2}$$

2. On cherche $\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2/\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2)$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2/\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap (\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2))}{\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2)}{1 - \mathbb{P}(\overline{A_1 \cap A_2})} \\
&= \frac{1/2 \times 1/2}{1 - (1/2 \times 1/2)} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Remarque 1.9 *Soient $A, C \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(A) > 0 et \mathbb{P}(A \cap B) > 0$ D'apres la définition de la probabilité conditionnelle, on a*

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

d'où

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A/B)\mathbb{P}(B)$$

De même

$$\mathbb{P}(C/A \cap B) = \frac{\mathbb{P}(C \cap A \cap B)}{\mathbb{P}(A \cap B)}$$

ainsi

$$\mathbb{P}(C \cap A \cap B) = \mathbb{P}(C/A \cap B)\mathbb{P}(A \cap B)$$

En combinant cette dernière équation avec (2.11), on obtient

$$\mathbb{P}(C \cap A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(C/A \cap B)$$

En faisant un raisonnement par récurrence, on peut généraliser cette dernière formule à n évènements.

Remarque 1.10 *Cette proposition est souvent utilisée lorsqu'on veut calculer la probabilité de l'intersection de plusieurs évènements obtenus en répétant une expérience aléatoire plusieurs fois, et lorsque l'espace échantillon change à chaque répétition. Nous proposons un exemple simple pour illustrer cela :*

Exemple 1.10 *Une urne contient une boule blanche et une boule noire, on tire des boules de cette urne jusqu'à ce que la noire appraisse. A chaque fois qu'une boule blanche est tirée, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche. Calculer la probabilité que la boule noire n'apparaisse pas au cours des cinq premiers tirages.*

Solution :
Pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, posons : B_i : "la boule tiree au ième tirage est blanche"

B : " la boule noire n'apparaisse pas au cours des cinq premiers tirages."
Il est facile de voir que :

$$B = \cap_{i=1}^{5} B_i$$

En appliquant la proposition précédente, on a n'apparaisse pas au cours des cinq premiers tirages.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{5} B_i) \\
&= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_1/B_2)...\mathbb{P}(B_5/B_1 \cap B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

1.4 Théorème de Bayes

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ une partition de $\Omega, A \in \mathcal{F}$ et supposons que $\mathbb{P}(A) > 0$ et que $\mathbb{P}(A_k) > 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$ Soit $1 \leq k \leq n$, on a par les equations (2.11) :

$$\mathbb{P}(A \cap A_k) = \mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_k/A)\mathbb{P}(A)$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(A_k/A) = \frac{\mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(A)} =$$

En faisant appel à la formule des probabilités totales dans cette dernière égalité, on obtient :

Théorème 1.2 *Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ un systeme complet de $\Omega, A \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{P}(A_k) > 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Alors*

$$\mathbb{P}(A_k/A) = \frac{\mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k)}$$

Remarque 1.11 *La formule de Bayes est appelée aussi la formule des causes, en effet la quantité $\mathbb{P}(A_k/A)$ donne la probabilité que l'évènement A s'est réalisé à travers A_k ou " à cause" de A_k.*

Exemple 1.11 *On effectue un test dans un grand élevage de bovins pour dépister une maladie. Ce test a permis de déceler 1.8*

1. *Quelle est la probabilité qu'un animal choisis au hasard dans cet élevage soit atteint de cette maladie.*
2. *L'animal choisi est atteint de cette maladie, quelle est la probabilité qu'il soit un mâle.*

Solution :
Introduisons les évènements suivants :

- A : "L'animal choisi est atteint de cette maladie".
- M : "L'animal choisi est un mâle".

Pour la première question, on cherche $\mathbb{P}(A)$. On a par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A/M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(A/M)\mathbb{P}(M)\\ &= (0.018)(0.35) + (0.012)(0.65)\\ &= 0.0141.\end{aligned}$$

Pour la deuxièmme question on cherche $\mathbb{P}(M/A)$. On a par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(M/A) = \frac{\mathbb{P}(A/M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{(0.018)(0.35)}{0.0141} = 0.4468.$$

1.5 Indépendance des événements

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. un espace de probabilite, $A, B \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$.

Définition 1.10 *On dit que les évènements A et B sont indépendants si :*

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$$

Remarque 1.12 *Soient A et B deux evenements de Ω : - Intuitivement, A et B sont independants si la realisation de B n'influe pas sur la relisation de A et vice versa.*
- Si A et B sont independants et si $\mathbb{P}(A) > 0$, alors il n'est pas difficile de voir qu'on a aussi :

$$\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$$

Une conséquence importante de la définition est :

Théorème 1.3 *Deux évènements Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si :*

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Remarque 1.13 *On peut prendre l'équation (2.15) comme définition pour l'indépendance de deux évènements, dans ce cas on est pas obligé de supposer que la probabilité de l'un des deux évènements est strictement positive.*

Exemple 1.12 *On jette une pièce de monnaie deux fois de suites et on considère les évènements :*

- *A : "On obtient pile au premier jet"*
- *B : "On obtient le même résultat dans les deux jets"*
- *C : "On obtient pile dans les deux jets"*

Pour cette expérience on a $\Omega = \{(x, y)/x, y \in \{pile, face\}\}$, ainsi $card(\Omega) = 4$. D'autre part :

$$A = \{(pile, pile), (pile, face)\}, B = \{(pile, pile), (face, face)\},$$

$$C = \{(pile, pile)\}, A \cap B = \{(pile, pile)\}, A \cap C = \{(pile, pile)\},$$

d'où

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}$$

. Par suite

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

. Ainsi A et B sont independants. Mais

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$

ce qui montre que A et C ne sont pas independants.

Proposition 1.6 *Soient A, B deux evenements de Ω, les proprietes suivantes sont équivalentes :*

- *Les evenements A et B sont independants.*
- *Les evenements $\overline{A}$ et B sont independants.*
- *Les evenements A et $\overline{B}$ sont independants.*
- *Les evenements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont independants.*

En utilisant le theoreme 2.5, on peut généraliser la notion d'independance à plusieurs evenements :

Définition 1.11 *Soient $n \geq 2, A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements d'un espace de probabilite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ sont independants si :*

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{p} A_{k_i}) = \prod_{k=1}^{P} \mathbb{P}(A_{k_i})$$

pour tout $k_1, k_2, ..., k_p \in 1, 2, ..., n.$

Remarque 1.14 *D'après cette définition, pour montrer que n évènemente sont indépendants il faut vérifier que lŠéquation (2.16) est valide pour toutes les intersections possibles des ces évènements, ainsi trois évènements* A, B *et* C *sont indépendants si*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

et

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Exemple 1.13 *Considerons l'experience aleatoire qui consiste a jeter une piece de monnaie deux fois de suite et d'observer les resultats obtenus. Soient* A, B *et* C *les evenements :*

- A *: " Le resultat du premier jet est pile "*
- B *: " Le resultat du deuxieme jet est pile "*
- C *: " On obtient le meme resultat dans les deux jets "*

Ici $\Omega = \{(x, y), avecx, y \in pile, face\}$, donc $card(\Omega) = 4$. D'autre part $\mathbb{P}(C) =$ La probabilite d'avoir deux fois pile ou deux fois face $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

d'ou

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$$

d' un autre cote
$\mathbb{P}(A \cap B) =$ La probabilite d'avoir pile dans les deux jets
$\mathbb{P}(A \cap C) =$ La probabilite d'avoir pile dans les deux jets
$\mathbb{P}(B \cap C) =$ La probabilite d'avoir pile dans les deux jets.

Par suite

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$

et

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

.

Ainsi

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Par conséquent, les évènements A, B et C ne sont pas indépendants.

Chapitre 2

Variables aléatoires

2.1 Définition générale d'une variable aléatoire

Définition 2.1 *On appelle variable aléatoire le résultat d'une épreuve aléatoire lorsque l'issue de celle-ci peut être représentée par un nombre.*

Une variable aléatoire est généralement désignée par une lettre majuscule X, Y, etc. et peut également être définie en tant qu'application depuis l'univers ans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \mathbb{R} \\ w &\mapsto X(w) \end{aligned}$$

en considérant $w \in \Omega$ comme une réalisation particuliére de l'épreuve en question. L'ensemble des valeurs numériques prises par X est pour cette raison noté $X(\Omega)$, puisqu'il s'agit de l'image de Ω par X.

2.2 Variable aléatoire discrète

Définition 2.2 *On appelle variable aléatoire discrète une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs ponctuelles ("isolées").*

Exemple 2.1 *Résultat d'un jet de dé. Le résultat X est une variable aléatoire*

$$X : \Omega \ni w \mapsto X(\Omega)$$

à valeur dans $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ - Lancer de 2 pièces de monnaies identiques dont l'issue est P (pour pile) et F (pour face).
L'univers

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$$

n'est pas composé de grandeur numériques mais on peut par exemple s'intéresser au nombre de fois où face(F) est apparu, définissant ainsi une variable aléatoire X :

$X : \Omega \to \{0, 1, 2\} \subset \mathbb{R}$ *définie par le tableau*

Ω	PP	PF	FP	FF
X	0	1	1	2

TABLE 2.1 – Distribution d'une variable alétoire(X= nombre de "Face")

Cette application ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, la variable aléatoire X est discrète avec $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Les événements $\{X = x_i\}$ (x_i étant une valeur possible de X), engendrés par les diférentes valeurs prises par une variable aléatoire constituent les évènements élémentaires de X. Les événements élémentaires de l'exemple précédent seront ainsi notés $\{X = 0\}$ ("Aucun face n'a été tiré"), $\{X = 1\}$ ("Un face a été tiré") et $\{X = 2\}$ ("Deux faces ont été tirés"). On définit donc naturellement des variables aléatoires en associant un nombre à chaque évènement élémentaire. Comme on le verra, l'étude systématique des variables aléatoires fournit un cadre théorique d'étude des phénomènes aléatoires.

2.3 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 2.3 *La loi d'une variable aléatoire discrète X est une probabilité $\mathbb{P}_X$ définie sur ses événements élémentaires par l'application*

$$\begin{gathered}\mathbb{P}_X : X(\Omega) \to [0,1] \\ x \mapsto \mathbb{P}_X := \mathbb{P}[\{X = x\}]\end{gathered}$$

On note invariablement $\mathbb{P}[\{X = x\}], \mathbb{P}[X = x], P_X(x)$ ou $p(x)$ la probabilité que X prenne la valeur x. On vérifie aisément que cette application est bien une probabilité dont l'univers est l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.

Exemple 2.2 *Si on reprend l'exemple d'un dé à six faces équilibrées, et que X représente le résultat d'un jet, on a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et directement*

$$\mathbb{P}_X[X(\Omega)] = \mathbb{P}_X[\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}] = \mathbb{P}[X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}] = 1$$

De même, l'axiome de l'événement impossible ($\mathbb{P}_X[\emptyset] = 0$) et de l'additivité pour des événements disjoints sont vériés. Donner la loi d'une variable aléatoire revient alors à donner les probabilités des événements élémentaires qu'elle induit, et on présente souvent ces données sous forme d'un tableau, en notant d'une manière générale $X(\Omega) = (x_i)i = 1, ... = (x_1, x_2, ..., x_N)$ pour une variable aléatoires à N valeurs possibles (qui ne sont pas forcément $1, 2, ..., N$), Où l'on note respectivement $p_1 = \mathbb{P}_X(1) = \mathbb{P}[X = 1], p_2 =$

X	x_1	x_1	...	x_N
P_X	P_1	P_2	...	P_N

TABLE 2.2 – Distribution de probabilité d'une variable aléatoires discrète

$\mathbb{P}_X(2) = \mathbb{P}[X = 2], ..., p_N = \mathbb{P}_X(N) = \mathbb{P}[X = N]$. Ce tableau peut se représenter graphiquement par un diagramme en batons.

Exemple 2.3 $X(\Omega) = \{PP, FP, PF, FF\}$ *$X =$ nombre de "Face"*

X	0	1	2
$P_X(x)$	1/4	1/2	1/4

TABLE 2.3 – Distribution de probabilité(X= nombre de "Face")

2.3.1 Fonction de répartition

Définition 2.4 *Une loi de probabilité est souvent définie à partir de sa fonction de répartition*

$$F : \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \mapsto F(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$$

parfois également appelée fonction cumulative car on cumule les probabilités de toutes les valeurs inférieures ou égales à x.

Dans le cas discret, il suffit d'additionner les probabilités élémentaires :

$$F(x_i) = P[X \leq x_i] = P[X = x_1] + ... + P[X = x_i] = p_1 + p_2 + ... + p_i :$$

Propriétés 2.1 *Si X est une variable aléatoire discréte de fonction de répartition F, alors on a les propriétés suivantes :*
- F est une fonction en escalier avec $lim_{x\to-\infty}F(x) = 0etlim_{x\to+\infty}F(x) = 1$.
- F est une fonction croissante.
- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$,

$$F(b)..F(a) = P[a < X \leq b]$$

La croissance se déduit de ce dernier point puisque si $a < b$, $F(b)..F(a) = P[a < X \leq b] \in [0,1]$ est en particulier positif.

2.3.2 Espérance mathématique

Définition 2.5 *L'espérance mathématique $E[X]$ d'une variable aléatoire X joue le rôle dévolu à la moyenne en statistiques : elle correspond à la valeur moyenne espérée par un observateur lors d'une réalisation de la variable* *aléatoire X. Les valeurs prises par cette variable sont pondérées par les probabilités des événements élémentaires de sorte que l'on définit*

$$E(x) = \sum_{i=1}^{N} p_i * x_i = \sum_{i=1}^{N} x_i * \mathbb{P}[X = x_i]$$

lorsque X peut prendre N valeurs différentes $x_1, ..., x_N$ avec comme probabilités élémentaires $p_i = P[X = x_i]$.

Exemple 2.4 *Lors du lancer de 2 pièces, le nombre de "face" moyen ou espéré correspond à l'espérance mathématique de la variable aléatoire X déja introduite, donnée par*

$$E(x) = \frac{1}{4}.0 + \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{4}.2 = 1$$

2.3.3 Variance

Pour décrire plus précisément le comportement de X, sans pour autant caractériser complétement la loi de X, on peut s'intéresser aux écarts de X par rapport à cette moyenne. Cependant, si on considére simplement la difference $X - E[X]$, on obtient un écart moyen $E[X - E[X]] = 0$ (par linéarité de l'espérance, voir 3.3). On pourrait considèrer la valeur moyenne de $X - E[X]$ mais on préfére considérer la moyen de $(X - E[X])^2$, plus pertinente mathématiquement.

Définition 2.6 *La variance mesure ainsi la déviation moyenne autour de la moyenne espérée $E[X]$, et est définie par*

$$V(x) = E[(X - E[X])^2] = \sum_{i=1}^{N} p_i.(x_i - E[X])^2$$

Propriétés 2.2 *(**formule de Koenig**) Elle est toujours positive puisqu'il s'agit de l'espérance d'un carré.*
On a l'expression suivante :

$$V(x) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Définition 2.7 *Pour mesurer la dispersion d'une variable aléatoire X, on considère souvent en statistiques **l'écart-type**, lié à la variance par :*

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Exemple 2.5 *Lorsque X est le nombre de face obtenu lors du lancer de 2 pièces équilibrées, la variance est*

$$V[X] = \frac{1}{4}.(0-1)^2 + \frac{1}{2}.(1-1)^2 + \frac{1}{4}.(2-1)^2 = \frac{1}{2}$$

Le lien entre la variance et le dispersion moyenne autour de la moyenne peut être explicité grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (cf (3.5)).

2.3.4 Propriétés de l'espérance et de la variance

Propriétés 2.3 *(**Linéarité de l'espérance**) Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même univers et a, b deux réels,*

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

En particulier, $E[aX] = aE[X]$.

Propriétés 2.4 *(**Non-linéarité de la variance**) Pour toute variable aléatoire X et $a, b \in \mathbb{R}$*

$$V(aX + b) = a^2 V[X]$$

Propriétés 2.5 *(**Inégalité de Markov**) Soit X une variable aléatoire positive d'espérance finie, alors pour tout $a > 0$*

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{1}{a} E[X]$$

Propriétés 2.6 *(**Inégalité de Bienaymé-Tchebychev**) Soit X une variable aléatoire réelle de variance finie, alors pour tout $a > 0$*

$$\mathbb{P}[|X - E[X]| \geq a] \leq \frac{1}{a^2} V(X)$$

2.4 Variable aléatoires continues

Définition 2.8 *On appelle variable aléatoire continue une variable aléatoire dont l'ensemble des valeurs est $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.*

Exemple 2.6 *Durée de vie d'une ampoule éléctrique : Bien que n'étant pas éternelle, on considére souvent qu'une ampoule éléctrique peut avoir n'importe quelle durée de vie et qu'elle peut tomber en panne ou ne pas tomber en panne à tout moment. Aucune durée n'est exclue et la variable X qui la représente est une variable aléatoire continue dont l'ensemble des valeurs est $\mathbb{R}^+ = [0, +1[$. D'une manière plus réaliste, les ampoules ont une durée de vie maximale D et X est une variable aléatoire continue à valeurs dans l'intervalle $X(\Omega) = [0, D]$, mais la durée maximale étant souvent inconnue, on considère généralement $X(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$.*
- Étude de la taille dans une population donnée : Si on considére sur une population de taille N dont on note ti la taille de chaque individu $i(i = 1, ..., N)$, la variable X qui dénote la taille d'un individu de la population pris au hasard, l'ensemble des valeurs prises par X est l'ensemble discret $X(\Omega) = \{t_1, t_2, ..., t_N\}$. Néanmoins, la taille d'un individu pouvant a priori prendre toute valeur réelle positive, on considère pour étudier des populations en général que X peut également prendre toutes les valeurs réelles et est donc une variable continue à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (ou dans un sous-intervalle si on veut considèrer une taille maximale).

Sa loi, c'est à dire la description des valeurs probables de X (avec quantification de ces probablités) est plus brièvement qualifiée de *loi continue*. La description d'une loi continue diffère de celles des lois discrètes puisque pour une variable aléatoire continue X, la probabilité que X prenne une valeur bien précise $xP_X(x) = P[X = x]$ est nulle. Il y a en effet une infinité de valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans un intervalle, et au regard de toutes ces valeurs précises, le poids de la valeur particulière est tellement insignifiant qu'il en est nul ! Il n'est ainsi pas possible de définir la loi de X par la donnée des probabilités des événements élémentaires. Par contre, il est possible de déduire les probabilités que X prenne ses valeurs dans une partie de $\mathbb{R}$ à partir de la fonction de répartition qui vaut dans ce cas continu

$$F(x) = P[X \leq x] = P[X < x]$$

Fonction de répartition

On considère une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X

$$F(x) = P[X \leq x]$$

Propriétés 2.7 *On a les propriétès suivantes :*
- *F est une continue,*
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$,
- *F est une fonction croissante,*
- *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$,*

$$F(b) - F(a) = \mathbb{P}[a < X \leq b]$$

Le défaut de la fonction de répartition (que ne possède pas la notion de loi des variables aléatoires discrètes) est qu'elle ne fait pas apparaître l'additivité des probabilités. Fort du parallèle que l'on peut faire entre probabilités et surfaces, il est trés avantageux de restreindre l'étude à une classe de variables aléatoires dites à densité.

Fonction de densité

Définition 2.9 *Une variable aléatoire possède une densité si F_x est dérivable. La dérivée notée f_X est appelée densité de probabilité de la variable aléatoire X.*

Propriétés 2.8 *De ce fait,*

$$\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(t)dt$$

,

et la probabilité de trouver X dans un intervalle $[a; b]$ donné apparaît comme l'aire d'une partie du graphique située entre la courbe de la densité f_X et l'axe des abscisses.

Remarque 2.1 *Dans les applications, il n'est pas nécéssaire de calculer ces aires à l'aide de calculs car des tables de lois recapitulant les valeurs principales existent.*

Propriétés 2.9 *La donnée d'une densité f permet donc de décrire complétement notre variable aléatoire en caractérisant sa loi grâce aux propriétès suivantes :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx = 1$$

$$P[a < X \leq b] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(X)dx$$

2.5 Couples aléatoires

nous avons introduit la notion de variable aléatoire à une dimension, maintenant on va généraliser cette notion aux variables à deux dimensions (couple).

Définitions-Exemples

Définition 2.10 *Soient* X, Y *deux applications de* Ω *vers* $\mathbb{R}$. *Si* X *et* Y *sont deux variables aleatoires reelles alors le couple* (X, Y) *est appele couple aleatoire.*

Définition 2.11 *On jette deux dés équilibrés et on note par* X *le chiffre obtenu par le premier dé,* Y *la somme des chiffres obtenus.* (X, Y) *est un couple aléatoire.*

Exemple 2.7 *On prélève un groupe de TD au hasard et on mesure le poids et la taille des étudiants de ce groupe. On note par* X *la taille en cm et* Y *le poids en kg.* (X, Y) *est un couple aléatoire.*

Définition 2.12 *Soit* (X, Y) *un couple aléatoire, l'application* $F_{(X,Y)}$ *définie sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *par*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, F_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y).$$

est applée la fonction de répartition du couple (X, Y).

Comme dans le cas réel, la fonction de répartition possède de nombreuses bonnes propriétés :

Propriétés 2.10 *Soit* (X, Y) *un couple aléatoire,* $F_{(X,Y)}$ *sa fonction de répartition, alors*

- *Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0 \leq F_{(X,Y)}(x, y) \leq 1$
- $\lim_{xety \to -\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = 0$ *et* $\lim_{xety \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = 1$
- *Pour tout* $y \in \mathbb{R}$, *l'application* $x \to F_{(X,Y)}(x, y)$ *est croissante et continue a droite.*
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *l'application* $y \to F_{(X,Y)}(x, y)$ *est croissante et continue a droite.*

Définition 2.13 *Soit (X, Y) un couple aléatoire, Les fonctions de répartition marginales associées au couple (X, Y) sont données par :*

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, y)$$

et

$$F_Y(x) = \lim_{X \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, y)$$

Couples discrets

Définition 2.14 *Soient X, Y deux applications de Ω vers $\mathbb{R}$. On dit que (X, Y) est un couple aleatoire discret si X e Y sont deux variables aleatoire discretes.*

Définition 2.15 *Soit (X, Y) un couple aléatoire déscrèt, l'application $P_{(X,Y)}$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par*

$$P_{(X,Y)}(X, Y) \begin{cases} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \quad si \quad (x, y) \in supp(X) \times supp(Y)\,; \\ 0, \quad sinon. \end{cases}$$

est applée la fonction de masse du couple (X, Y).

Exemple 2.8 *On jette deux dés équilibrés et on note par X le chiffre obtenu par le premier dé, Y la variable aléatoire qui vaut 1 si le deuxième dé ramène un chiffre inférieur ou égale à 4 et 0 sinon. La fonction de masse pour ce couple aléatoire est donnée par*

$$P_{(X,Y)}(X, Y) \begin{cases} \frac{2}{3} \quad si \quad (x, y) \in \{1, 2, 3, 4\} \times \{1\}\,; \\ \frac{1}{3} \quad si \quad (x, y) \in \{5, 6\} \times \{0\}\,; \\ 0, \quad sinon. \end{cases}$$

Remarque 2.2 *Les fonctions de masse marginales sont aussi appelées les lois marginales associées au couple (X, Y).*

Définition 2.16 *Soient* (X, Y) *un couple aléatoire discret,* $P_{(X,Y)}$ *sa fonction de masse. lŠespérance mathématique ou la moyenne du couple* (X, Y) *est* $(E(X), E(Y))$.

Définition 2.17 *Soient* (X, Y) *un couple aléatoire discret, alors*

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y).$$

Couples absolument continus

Définition 2.18 *Soient un couple aléatoire* (X, Y) *est absolument continu si sa fonction de répartition* $F_{(X,Y)}$ *est continue à droite et à gauche par rapport à chacune des variables et possède une dérivée seconde :*

$$\frac{\partial^2 F_{(X,Y)}}{\partial x \partial y}$$

sur un domaine non-vide $\mathcal{D}$.

Définition 2.19 *Soit (X, Y) un couple aléatoire absolument continu. La fonction*

$$f_{(X,Y)}(X, Y) \begin{cases} \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}}{\partial x \partial y} & si \quad (x, y) \in \mathcal{D}\,; \\ 0, \quad sinon. \end{cases}$$

est appelée la fonction de densité du couple (X, Y).

Proposition 2.1 *Une application* f *définie sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *est une fonction de densité si et seulement si*

- *Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) \geq 0$.
- $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$.

Remarque 2.3 *Les fonctions de densité marginales sont aussi appelées les lois marginales associées au couple* (X, Y).

Proposition 2.2 *Si* (X, Y) *est un couple aleatoire absolument continu, alors pour tout* $(x, y) \in \mathcal{D}$ *:*

$$f_X(x) = F_X^{'}(x), \text{ et } f_Y(y) = F_Y^{'}(y).$$

Exemple 2.9 *Soient* $c \in \mathbb{R}$, f *la fonction definie par*

$$f(x, y) = cxye^{-x^2-y^2}, x, y \in \mathbb{R}^+$$

.

- *Déterminer* c *pour que* f *soit la fonction de densité d'un couple aléatoire* (X, Y).
- *Calculer* $F_{(X,Y)}$ *la fonction de répartition du couple* (X, Y).
- *En déduire les fonctions de répartitions marginales.*
- *Calculer les fonctions de densité marginale*

Définition 2.20 *Soient* (X, Y) *un couple aléatoire absolument continu,* $f_{(X,Y)}$ *sa fonction de densité. l'espérance mathématique ou la moyenne du couple* (X, Y) *est* $(E(X), E(Y))$.

2.5.1 Variables aléatoires indépendantes

La notion d'independance est tres importante en theorie des probabilités, elle est l'hypothese principale dans plusieurs resultats fondamentaux concernant le comportement asymptotique des moyennes de variables aleatoires. Commencons par rappeler la notion de tribu engendree par une variable aleatoire definie dans le troisieme chapitre. Soit X une variable aléatoire reelle, la tribu engendree par X et notee $\sigma(X)$ est definie par

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(A), A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$$

où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu boréliènne sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.21 *Soient X, Y deux variables aléatoires réelles. On dit que X et Y sont indépendantes si les tribus engendrées par les variables X et Y sont indépendantes. i. e.*

$$\forall A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

Remarque 2.4 *Vérifier l'indépendance de deux variables aléatoires revient à vérifier l'indépendance des tribus engendrées par ces deux variables.*
Ű De la même manière, la notion dŠindépendance ainsi définie peut être généralisée à plusieurs variables.

En général, il est difficile de prouver l'indépendance de deux variables aléatoires en utilisant cette définition, c'est pour cette raison que nous allons proposer d'autre critères.

Proposition 2.3 *Soient (X, Y) un couple aléatoire, $F_{(X,Y)}$ sa fonction de répartition, F_X et F_Y les fonctions de répartition marginales. Alors*

$$\textit{Les variables } X \textit{ et } Y \textit{ sont independantes} \Leftrightarrow F_{(X,Y)}(x, y) = FX(x)FY(y).$$

Chapitre 3

Etudier la Convergence en probabilité des moyennes arithmétiques

Tout au long de ce chapitre, $\{X_n, n \geq 1\}$ désignera une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

3.1 Les types de Convergence

3.1.1 Convergence en probabilité

Définition 3.1 *On dit qu'une suite de variables aléatoires $\{X_n, n \geq 1\}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0$$

On note $X_n \xrightarrow{P} X$.

Exemple 3.1 *Considérons la suite de variables aléatoires $\{X_n, n \geq 1\}$ où chaque variable X_n prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $1 - \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$, alors la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ converge vers 0 en probabilité. En effet*

si $\varepsilon > 0$ *alors deux cas peuvent se présenter :*
PREMIER CAS : $\varepsilon > 1$
Dans ce cas, il est clair que pour tout $n \geq 1$,

$$P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = P(X_n \geq \varepsilon) = 0$$

DEUXIEME CAS : $0 \leq \varepsilon \leq 1$
Dans ce cas, on a

$$P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \tfrac{1}{n}$$

d′ *où* $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Proposition 3.1 *Soient* $\{X_n, \quad Y_n n \geq 1\}$ *deux suites de variables aléatoires,* $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ *une fonction continue. Supposons que* $X_n, n \geq 1($ *resp.* $Y_n n \geq 1)$ *converge en probabilité vers une variable aléatoire* $X($ *resp.* $Y)$, *alors*
− *Pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha X_n + \beta Y_n \overset{P}{\to} \alpha X + \beta Y$
$-X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$
$-f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$

3.1.2 Convergence en moyenne

Définition 3.2 *Soit* X *une variable aléatoire réelle.*

− *On dit que* X *est intégrable si* $\mathbb{E}(|X| < \infty)$

− *On dit que* X *est de carré intégrable si* $\mathbb{E}\left(|X|^2 < \infty\right)$

− *Si* $p \geq 1$, *on dit que* X *est dans* $L^p(\Omega)$ *si* $\mathbb{E}(|X|^p < \infty)$

Définition 3.3 *On dit qu'une suite de variables aléatoires intégrables* $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en moyenne vers une variable aléatoire* X, *si*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|\right) = 0$$

On note $X_n \to X$ *en moyenne.*

Définition 3.4 *On dit qu'une suite de variables aléatoires de carré intégrable* $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en moyenne quadratique vers une variable aléatoire* X, *si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|^2\right) = 0$
On note $X_n \to X$ *en moyenne quadratique.*

Remarque 3.1 *Il faut bien noter que*

- On ne peut pas parler de la convergence en moyenne (resp. en moyenne quadratique) si les variables considérées ne sont pas intégrables (resp. de carré intégrable).

- Lorsqu'une suite de variables aléatoires intégrables $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en moyenne (resp. en moyenne quadratique) vers une variable aléatoire* X *alors* X *est aussi intégrable i. e.* $\mathbb{E}(|X| < \infty)$ *. (resp. de carré intégrable i. e.* $E\left(|X|^2\right) < \infty$*)*

Exemple 3.2 *Considérons la suite de variables aléatoires* $\{X_n, n \geq 1\}$ *où chaque variable* X_n *prends les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives* $1 - e^{-n}$ *et* e^{-n}, *alors la suite* $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge vers 0 en moyenne. En effet si* $n \geq 1$, *alors*
Dans ce cas, il est clair que pour tout $n \geq 1$

$$\mathrm{E}\left(|X_n - 0|\right) = \mathrm{E}\left(X_n\right) = e^{-n} \longrightarrow 0$$

lorsque $n \to +\infty$.

3.1.3 Convergence presque sûre

Définition 3.5 *On dit qu'une suite de variables aléatoires* $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge presque sûrement vers une variable aléatoire* X, *si*

$$P\left\{\omega \in \Omega, \lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = 1$$

On note $X_n \longrightarrow X$ *p. s.*
Un critère très utilisé pour établir la convergence presque sûre pour une suite des variables aléatoires réelles est donné par le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoires.*
– *Supposons que pour tout* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) < \infty$$

alors la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge presque surement vers* X.
– *Réciproquement, si* $\{X_n, n \geq 1\}$ *est une suite de v. a. r indépendantes qui converge presque sûrement vers* X, *alors la condition 6.1 est vérifiée.*

Exemple 3.3 *Considérons la suite de variables aléatoires* $\{X_n, n \geq 1\}$ *où chaque variable* X_n *prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives* $1 - \frac{1}{n^2}$ *et* $\frac{1}{n^2}$, *alors la suite* $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge vers 0 presque sûrement.*
En effet si $\varepsilon > 0$, *alors on peut considérer les deux cas suivants :*
PREMIER CAS : $\varepsilon > 1$ *Il est clair que dans ce cas, on a pour tout* $n \geq 1$

$$P\left(|X_n - 0| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(X_n \geq \varepsilon\right) = 0$$

$\frac{\textit{DEUXIEME CAS}}{\textit{Dans ce cas, on a}}$: $0 \leq \varepsilon \leq 1$

$$P\left(|X_n - 0| \geq \varepsilon\right) = P\left(X_n \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(X_n = 1\right) = \tfrac{1}{n^2}$$

Comme $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$, *on a bien*

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(|X_n - 0| \geq \varepsilon\right) < \infty$$

Ainsi la condition 3.1 est vérifiée et la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge presque sûrement vers* 0.

3.1.4 Convergence en loi

On rappelle que si X est une variable aléatoire, sa loi que nous avons notée P_X est une probabilité définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ par

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad P_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$$

On rappelle aussi que si X est une variable aléatoire réelle, on peut lui associer une fonction réelle qu'on appelle fonction de répartition, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right)$$

On a vu aussi que deux variables aléatoires ont même loi (i.e. $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$) si et seulement si elles ont la même fonction de répartition i. e. $F_X = F_Y$. Pour une suite de variables aléatoire $\{X_n, n \geq 1\}$, on note $\{F_n, n \geq 1\}$ (resp. φ_n) la suite des fonctions de répartitions associées (resp. la suite des fonctions caractéristiques associées) i.e. pour tout $x, t \in \mathbb{R}$:

$$\forall n \geq 1, \quad F_n(x) = F_{X_n}(x) \quad \text{et} \quad \varphi_n(t) = \varphi_{X_n}(t)$$

Définition 3.6 *Soient* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoires réelles,* $\{F_n, n \geq 1\}$ *la suite des fonctions de répartitions correspondantes. On dit que* $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en loi vers une variable aléatoire* X *de fonction de répar- tition* F_X*, si*

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(t) = F_X(t)$$

pour tout point t *où* F_X *est continue. On note* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Exemple 3.4 *Soient* $\alpha > 0, \{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes de même fonction de densité :*

$$f(x) = \alpha x^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)$$

et posons pour $n \geq 1$:

$$Y_n = n^{-\frac{1}{\alpha}} \max_{1 \leq k \leq n} X_k$$

La suite de variables aléatoires $\{Y_n, n \geq 1\}$ *converge en loi vers la variable* Y *de loi*

$$f_Y(y) = \alpha y^{-(\alpha+1)} e^{-y^{-\alpha}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

En effet, on a pour tout $x > 1$, *la fonction de répartition pour chaque variable* X_n *est*

$$F(x) = \int_0^x \alpha t^{-(\alpha+1)} dt = 1 - x^{-\alpha}$$

Par suite, si $x > 0$ *on peut écrire :*

$$\begin{aligned}
F_{Y_n}(x) &= \mathbb{P}\left(n^{-\frac{1}{\alpha}} \max_{1 \leq k \leq n} X_k \leq x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} X_k \leq n^{\frac{1}{\alpha}} x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\forall 1 \leq k \leq n, X_k \leq n^{\frac{1}{\alpha}} x\right) \\
&= \left(F\left(n^{\frac{1}{\alpha}} x\right)\right)^n \\
&= \left(1 - \frac{1}{n x^{\alpha}}\right)^n
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall x > 0, \quad F_{Y_n}(x) \longrightarrow e^{-x^{-\alpha}}$$

lorsque $n \to +\infty$, pour tout $x > 0$. Ceci prouve la convergence en loi de la suite $\{Y_n, n \geq 1\}$. En dérivant cette dernière fonction on obtient la loi de Y. Dans bien des situations, il est difficile de montrer la convergence en loi d'une suite da variables aléatoires en utilisant la définition, c'est pourquoi le résultat suivant peut être d'une grande utilité :

Proposition 3.2 *Soient $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles,$\{\varphi_n, n \geq 1\}$ la suite des fonctions caractéristiques correspondantes. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*
$-\{X_n, n \geq 1\}$ converge en loi vers X – Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = \varphi_X(t)$ – Pour toute fonction continue et bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(f\left(X_n\right)\right) = \mathbb{E}(f(X))$$

De cette dernière proposition, on peut déduire le résultat suivant :

Proposition 3.3 *Soient $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles,$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ converge en loi vers une variable aléatoire X alors la suite $\{h\left(X_n\right), n \geq 1\}$ converge en loi vers la variable aléatoire $h(X)$.*

Exemple 3.5 *Soient $\{p_n, n \geq 1\}$ une suite de nombres réels, $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles. Supposons que pour tout $n \geq 1$:*

$$0 < p_n < 1, \quad X_n \leftrightarrow \mathcal{B}\left(n, p_n\right)$$

et qu'il existe $\lambda > 0$, vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$$

Alors il existe une variable aléatoire $X \leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, telle que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$
<u>SoLUTION :</u> Faisont appel au deuxieme point de la Proposition 6.2 pour établir ce résultat, en effet on sait (voir Chapitre 4) que si $X \leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$$

De même, on a vu au chapitre 4 aussi que si φ_n est la fonction caractéristique de la variable X_n, alors on a pour $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_n(t) = \left(1 - p_n + p_n e^{it}\right)^n$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \left(1 - p_n\left(1 - e^{it}\right)\right)^n \\ &= \left(1 - np_n \frac{\left(1 - e^{it}\right)}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Mais

$$\lim_{n \to +\infty} np_n = \lambda$$

Ainsi on a

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - np_n \frac{\left(1 - e^{it}\right)}{n}\right)^n = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)} = \varphi_X(t)$$

D'où le résultat .

3.2 Comparaison des modes de convergence

On a défini quatre modes de convergence, se sont les plus imprtants en probabilité, à présent nous étudions les relations qui existent entre ces modes de convergence, afin de comprendre les différentes situations qui peuvent se pré- senter. Nous commençons par le lien entre la convergence presque sûre et la convergence en probabilité :

Proposition 3.4 *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoires réelles, Alors*

–Si $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge presque súrement vers* X *alors elle converge en probabilité vers* X.

– *Il existe une suite* $\{X_n, n \geq 1\}$ *qui converge en probabilité mais qui ne converge pas presque sûrement.*

–Si $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en probabilité vers* X *alors il existe une suite de nombres naturels positifs* $\{m_n, n \geq 1\}$ *strcictement croissante, telle que la sous-suite* $\{X_{m_n}, n \geq 1\}$ *converge presque sûrement vers* X

Pour la convergence en moyenne et en moyenne quadratique, on a

Proposition 3.5 *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoires réelles.*

–Si $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en moyenne vers* X *alors elle converge en probabilité vers* X.

– *Il existe une suite* $\{X_n, n \geq 1\}$ *qui converge en probabilité mais qui ne converge pas en moyenne.*

–Si $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en moyenne quadratique vers* X *alors elle converge en moyenne vers* X *et donc en probabilité vers* X.

En fin, concernant la convergence en loi, nous avons

Proposition 3.6 *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoires réelles, Alors*

–Si $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en probabilité vers une v. a.* r , *elle converge aussi en loi vers* X.

– *Il existe une suite* $\{X_n, n \geq 1\}$ *qui converge en loi mais qui ne converge pas en probabilité.*

–Si $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge en loi vers une constante* C *alors elle converge*

aussi en probabilité vers C.
Nous n'allons pas donner la preuve des liens entre ces différents modes de convergence, car elle nécessite des outils mathématiques qui n'entrent pas dans le cadre de ce cours (théorie de la mesure), cependant nous donnerons quelques exemples simples afin d'illustrer le fait qu'on peut avoir la convergence dans un mode précis et pas dans un autre.
La convergence en probabilité n'implique pas la convergence presque sûre :
Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ *la suite de variables aléatoires indépendantes où chaque variable* X_n *prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilité respectives* $1 - \frac{1}{n}$ *et* $\frac{1}{n}$. *On a vu dans l'exemple 6.1 que cette suite converge en probabilité vers* 0, *cependant si* $0 < \varepsilon < 1$, *alors*

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(|X_n - 0| > \varepsilon\right) = \sum_{n\geq 1} P\left(X_n = 1\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$$

D'après le deuxiemme point du Théorème 6.1, la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ *ne peut pas converger vers 0 presque sûrement.*
La convegence en probabilité n'implique pas la convergence en moyenne :
Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ *la suite de variables aléatoires où chaque variable* X_n *prend les valeurs 0 et n avec les probabilité respectives* $1 - \frac{1}{n}$ *et* $\frac{1}{n}$. *Comme pour l'exemple* 6.1, *il n' n'est pas difficile de vérifier que cette suite converge en probabilité vers* 0. *D'autre part*

$$\mathbb{E}\left(|X_n - 0|\right) = \mathrm{E}\left(X_n\right) = 1$$

Ainsi cette suite ne converge pas en moyenne.
La convegence en loi n'implique pas la convergence en probabilité :
Soit $X \leftrightarrow \mathcal{N}(0,1), Y = -X$ *et posons pour* $n \geq 1, X_n = X$. *Une variable de loi* $\mathcal{N}(0,1)$

est symétrique, ainsi X *et* Y *ont la même loi, d'autre part il est évident que*
X_n *converge en loi vers* X *donc vers* Y *aussi. Mais comme* $Z := X - Y \leftrightarrow \mathcal{N}(0,2)$, *on peut voir que*
$P\left(|X_n - Y| \geq 2\right) = IP(|X - Y| \geq 2) = P(|Z| \geq 2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{8}} dx > 0$

Ainsi, la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ *ne converge pas en probabilité.*
La convergence presque sûre n'implique pas la convergence en moyenne
Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ *la suite de variables aléatoires où chaque variable* X_n *prend les valeurs 0 et* n^2 *avec les probabilités respectives* $1 - \frac{1}{n^2}$ *et* $\frac{1}{n^2}$. *Remarquons tout d'abord que pour tout* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(|X_n - 0| > \varepsilon\right) = \sum_{n\geq 1} P\left(X_n = n^2\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$$

A présent, le Théorème 6.1 permet de conclure que la suite $\{X_n, n \geq 1\}$ *converge presque súrement vers* 0. *D'un autre coté*

$$\mathrm{E}\left(|X_n - 0|\right) = \mathrm{E}\left(X_n\right) = 1$$

Cette suite ne peut pas converger vers 0 en moyenne.
La convegence en moyenne n'implique pas la convergence presque sûre :
Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ *la suite de variables aléatoires indépendantes où chaque variable* X_n *prend les valeurs 0 et* $\sqrt{n}$ *avec les probabilités respectives* $1 - \frac{1}{n}$ *et* $\frac{1}{n}$. *En faisant appel encore une fois au Théorème* 6.1, *on montre que cette suite ne converge pas presque sûrement. D'autre part*

$$\mathrm{E}\left(|X_n - 0|\right) = \mathrm{E}\left(X_n\right) = \tfrac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

Par suite, cette suite converge vers 0 en moyenne. On arrive donc au résultat suivant :

Proposition 3.7 *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoires réelles, alors*

- La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.

- La convergence en probabilité implique la convergence en loi.

- La convergence en moyenne implique la convergence en probabilité.

- Les implications réciproques sont en général fausses.

3.3 la Convergence en probabilité des moyennes arithmétiques

Cette partie est consacré à la délicate question de la convergence en théorie des probabilités est ses corollaires légendaires : les lois des grands nombres, Elle est délicate car il y'a au moins quatre modes de convergence.
Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, Dans ce paragraphe on s'intéresse au comportement des moyennes arithmétiques

$$\overline{X}_n = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k=1}^{n} X_k$$

lorsque n devient de plus en plus grands.

Nous commençons par établir deux résultats de la seconde famille de lois :

Proposition 3.8 *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoire réelles indépendantes, centrées et de carré intégrable. Supposons que*

$$\tfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\left(X_k\right) \longrightarrow 0$$

alors les moyennes $\left\{\overline{X}_n, n \geq 1\right\}$ *convergent vers 0 en probabilité. Comme corollaire direct de ce résultat, on obtient*

Théorème 3.2 *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoire réelles indépendantes, de même loi et de carré intégrable. Posons* $\mu = \mathrm{E}\left(X_1\right)$, *alors*

$$\overline{X}_n \longrightarrow \mu$$

en probabilité lorsque $n \to \infty$

PREUVE

Pour $k \geq 1$, posons $Y_k = X_k - \mu, \sigma^2 = \mathrm{Var}(X_k) = \mathrm{Var}(Y_k)$. La suite $\{Y_n, n \geq 1\}$ est par construction une suite de v. a. r indépendantes et centrées, de plus

$$\tfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(Y_k) = \frac{\sigma^2}{n} \longrightarrow 0$$

Par la proposition précédente,

$$\tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu) \longrightarrow 0$$

en probabilité, ainsi

$$\overline{X}_n = \tfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \longrightarrow \mu$$

en probabilité.

Conclusion et perspectives

Cette contribution est sur la convergence des moyennes arithmétiques, avec des variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées(i.i.d). Nous avons établi la convergence en probabilité de cette loi.
Dans la continuité de ce travail, cette recherche ouvre la voie à de nouveaux travaux sur le sujet. l'étude du convergence presque complète des moyennes arithmétiques, avec des variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées(i.i.d). Le cas des variables aléatoires réelles dépendantes identiquement distribuées.

Bibliographie

[1] Ash. R., *Probability and measure theory*. Harcourt Academic Press. 2000.

[2] Barbe. P., and Ledoux. M., *Probabilité*. EDP Sciences. 2007.

[3] Bertsekas. P. and Tsitsiklis. J. N., *Introduction to Probability*. Course. 2000.

[4] Boukhari. F., *Probabilités*. Polycopié, Université aboubekr belkaid tlemcen. 2016.

[5] Cacoullos. T., *Exercises in Probability*. Springer-Verlag. 1989.

[6] Calot. G., *Cours de calcul des Probabilités*. Dunod. 1982.

[7] Féjoz. J., *Chapitres d'intégration et de probabilités*. 2014.

[8] François D., *Probabilité et statistiques*. 2ème édition, Dunod, 1997.

[9] Gordon. H., *Discrete Probability*. Springer-Verlag New York, Inc. 1997.

[10] Gut. A., Probability : *a graduate course*. Springer texts in statistics. 2005.

[11] Jacod. J., Protter. P., *Probability-Essentials*. Springer-Verlag. 2003.

[12] Jean-Yves. O., *Probabilités*. Tomes 1 et 2. Cassini, 2008.

[13] Kai Lai C., *A course in probability theory*. 3rd Edition, Academic Press, 2001.

[14] Laamri. E., *Mesures, intégration, convolution et transformée de fourier des fonctions-rappel de cours et exercices corrigés*. 2007.

[15] Lefebvre. M., *Basic Probability theory with applications*. Springer. 2000.

[16] Miri. S. E., *Algèbe et Analyse*. Polycopié, Université Abou Bekr Belkaid. 2013.

[17] Redjdal. K., *Cours de Probabilités*. O.P.U. 1995.

[18] Pierre. P., *Probabilités*. 2005.

[19] Olivier. G., *Mesure et Probabilités*. 2003.

[20] Thierry. G. and Raphaèle H., *Mesure et intégration*. 2004.

[21] Xavier. M., *Théorie de la Mesure et Intégration*. 2012.

[22] Velenik. Y., *Probabilités et Statistique*. 2016.

[23] William F., *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. 1. 3rd Edition, Wiley series in probabilities and mathematical statistics, 1968.