République Algérienne Démocratique et Populair
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique
Université Ibn Khaldoun – Tiaret –

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département des Mathématiques

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

DOMAINE : **Mathématiques et Informatique**

FILIERE : **Mathématiques**

SPECIALITE: **Analyse Fonctionnelle et Applications**

Présenté par

GHAFOUL FATIMA ZOHRA

CHEKAI MOUNA

SAFA SARA

SUJET DU MEMOIRE :

Étude de quelques formes linéaires associées aux polynômes orthogonaux

Soutenu le 13/10/2020 Devant Le Jury Composé de :

Mr : A. Hallouz, MCB	Président
Mr : A. Larabi, MCA	Encadreur
Mr : K. Benia, MAA	Examinateur

Année Universitaire : 2019/2020

Table des matières

0.1 Introduction

Les polynômes orthogonaux classiques (Hermite,Jacobi,Bessel,Laguerre) ont la proprieté d'être les seules suites orthogonales dans la suite des dérivées est aussi orthogonale, plus précisement :
si le poid $\rho(x)$ caractérise la famille initiale, le poid $\sigma^k(x)\rho(x)$ caractérise la famille dérivée d'ordre k où $\sigma(x)$ est un polynôme de degré deux dans le cas de Jacobi, de degré un dans le cas de Laguerre et une constante dans le cas d'Hermite. À partir de cette proprieté on introduit la notion de Semi-orthogonalité qui généralise la notion précédente.
L'idée de base dans ce mémoire et de travailler directement sur des formes linéaires, ainsi on se place dans le dual de l'éspace vectoriel des fonctions polynomiales et on utilise la notion de suite duale d'une suite de polynômes.
dans le chapitre 1, on donne quelques résultats sur les opérations qu'on peut définir dans le dual par transposition des opérations dans P. On donne aussi les résultats sur la suite duale d'une suite de polynômes
Dans le chapitre 2, on donne les définitions des différentes formes d'orthogonalité comme la quasi orthogonalité,la quasi orthogonalité strict...etc
Le chapitre 3, est consacré aux formes linéaires classiques,formes linéaires sem-classiques et aux formes linéaires du second degrée, ainsi que quelques applications.

Chapitre 1

Notions Générales

1.1 Préliminaires

Soit P l'espace vectoriel des fonctions polynômiales á coéfficients dans $\mathbb{C}$,naturellement aussi caractérisé.Comme $P = \bigcup_{n\geq 0} P_n$ oú $P_n \subset P_{n+1}$ est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré au plus égal à n.
Soit P' l'espace dual de P ,c'est l'espace des applications linéaires définies dans P et á valeurs dans $\mathbb{C}$.
On note :$< u, f >$ le crochet de dualité entre P et P',$f \in P$ et $u \in P'$
$(u)_n =< u, x^n >$,$n \in \mathbb{N}$ les moments de u par rapport á la suite $(x^n)_{n\geq 0}$
Si $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i, n \geq 0$ on a que $< u, f >= \sum_{i=o}^{n} a_i (u)_i, n \geq 0$
Une forme $u \in P'$ est uniquement déterminée par la suite $\{u_n\}_{n\geq 0}$ de ses moments.
Considérons la forme de Dirac appliquée au point $c \in \mathbb{C}$ notée δ_c qui est définie comme suit :
$< \delta_c, f(x) >= f(c), f \in P$.lorsque $c = 0$ on écrit δ á la place de δ_0 et les moments de cette forme sont :

$$(\delta)_n = < \delta, x_n > = \delta_{0,n} = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \geq 1 \end{cases}$$

1.1.1 Applications et propriétés élémentaires, les opérations dans l'espace dual

Soit $u \in P'$ et $f, g \in P$. Pour ce travail nous avons besoin de définir des transformations linéaires de P dans P'.
Par transposition des opérations élémentaires sur P,on définit les opérations correspondantes sur P'.
On désigne respectivement par I_p et $I_{P'}$ l'identité de P et P'.
Considérons maintenant les applications linéaires suivantes de P dans P' :

$$p \mapsto (fp)(x) = f(x)p(x), \quad f \in P$$

$$p \mapsto (\theta_c p)(x) = (p(x) - p(c))/(x - c), \quad c \in \mathbb{C}$$

$$p \mapsto (Dp)(x) = p'(x)$$

$$p \mapsto (\tau_b p)(x) = p(x - b), \quad b \in \mathbb{C}$$

$$p \mapsto (h_a p)(x) = p(ax), \quad a \in \mathbb{C}^*$$

$$p \mapsto (\sigma p)(x) = p(x^2)$$

Par transposition, on obtient les applications linéaires suivantes de P dans P'.

La translation d'une forme :

$$< \tau_b u, f(x) >=< u, \tau_{-b} f(x) >=< u, f(x+b) >, f \in P, u \in P', b \in \mathbb{C}$$

En outre :

$(\tau_b u)_n =< \tau_b u, x^n >$

$=< u, \tau_{-b} x^n >=< u, (x+b)^n >$

$=< u, \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i b^{n-i} >$

$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b^{n-i} (u)_i, n \geq 0$

L'homothétie d'une forme :

$< h_a u, f(x) >=< u, h_a f(x) >$

$=< u, f(ax) >, f \in P, u \in P', a \in \mathbb{C}^*$

En outre :

$(h_a u)_n =< h_a u, x^n >$

$=< u, (ax)^n >$

$= a^n < u, x^n >$

$= a^n (u)^n, n \geq 0$

La division d'une forme par un polynôme :

$< (x-1)^{-1} u, f(x) >=< u, \theta_c f(x) >, f \in P, u \in P', c \in \mathbb{C}$

En outre :

$((x-1)^{-1} u)_n =< (x-1)^{-1} u, x^n >$

$=< u, \theta_c x^n >$

$=< u, (x^n - c^n)/(x - c) >$
$=< u, \sum_{i=0}^{n} c^{n-i-1} x^i >$
$= \sum_{i=0}^{n} c^{n-i-1} (u)_i, n \geq 1$
Si $n = 0$: $((x-1)^{-1}u)_0 =< u, 0 >= 0$

Multiplication à gauche d'une forme par un polynôme :

$< fu, g >=< u, fg >; f, g \in P, u \in P'.$
En outre :
soit $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, a_i \in \mathbb{C}$
alors :$(fu)_n =< fu, x^n >$
$=< u, f(x)x^n >$
$=< u, \sum_{i=0}^{m} a_i x^{i+n} >$
$= \sum_{i=0}^{m} a_i (u)_{i+n}, n \geq 0$

Multiplication à droite d'une forme par un polynôme :

Considérons l'application :
$P' \times P \mapsto P'$
$(u, f) \mapsto uf$
Telle que : $(uf)(x) =< u, \theta_\varepsilon f(x) >$ où u agissant sur la variable ε.
Soit $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, a_i \in \mathbb{C}$ un polynôme de degré m alors :
$\theta_\varepsilon(xf(x)) = (xf(x) - \varepsilon f(\varepsilon))/(x - \varepsilon)$
$= \left(x \sum_{i=0}^{m} a_i x^i - \varepsilon \sum_{i-=0}^{m} a_i \varepsilon^i \right) /(x - \varepsilon)$

$= \sum_{i=0}^{m} a_i(x^{i+1} - \varepsilon^{i+1})/(x - \varepsilon)$

$= \sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{j=0}^{i} x^j \varepsilon^{i-j}$

Donc $(uf)(x) =< u, \sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{j=0}^{i} x^{i-j}\varepsilon^j >= \sum_{i=0}^{m} a_i \sum_{j=0}^{i} (u)_j x^{i-j}$

$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{i=j}^{m} a_j (u)_{j-i} x^i$

Car $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{i} \alpha_{i,j} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=i}^{m} \alpha_{j,j-i}$

Comme conséquence des définitions,on a que :

$(u\theta_0 f)(x) =< u, \frac{f(x)-f(\varepsilon)}{x-\varepsilon} >$

$=< u, \theta_\varepsilon f(x) >, f \in P, u \in P'$

avec u agissant sur la variable ε

En effet :

$(u\theta_0 f)(x) =< u, \frac{x\theta_0 f(x) - \varepsilon\theta_0 f(\varepsilon)}{x-\varepsilon} >$

$=< u, \frac{(f(x)-f(0))-(f(\varepsilon)-f(0))}{x-\varepsilon} >$

$=< u, \frac{f(x)-f(\varepsilon)}{x-\varepsilon} >$

$=< u, \theta_\varepsilon f(x) >, f \in P, u \in P'$

Produit de deux formes :

$< uv, f >=< u, vf >, f \in P$,en outre :

$(uv)_n =< uv, x^n >$

$=< u, vx^n >$

$vx^n =< v, (x^{n+1} - \varepsilon^{n+1})/(x - \varepsilon) >$

$=< v, \sum_{i=0}^{n} x^i \varepsilon^{n-i} >$

$= \sum_{i=0}^{n} (v)_{n-i} x^i, n \geq 0$

Alors : $(uv)_n =< u, \sum_{i=0}^{n} (v)_{n-i} x^i >$

$= \sum_{i=0}^{n} (v)_{n-i} u(x^i)$

$= \sum_{i=0}^{n} (v)_{n-i} (u)_i$

$= \sum_{i+j=n} (u)_i (v)_j, n \geq 0$

Dérivée d'une forme :

Soit $u \in P'$,la dérivée de u désignée par Du est définie par :

$< Du, f >= - < u, f' >, f \in P.$

En outre :

$(Du)_n =< Du, x^n >$

$= - < u, nx^{n-1} >$

$= -n(u)^{n-1}, n \geq 0$

Avec $(u)_{-1} = 0.$

La partie paire d'une forme :

$< \sigma u, f >=< u, \sigma f >, f \in P, u \in P'.$

En outre :

$(\sigma u)_n =< \sigma u, x^n >$

$=< u, \sigma x^n >$

$=< u, x^{2n} >= (u)^{2n}, n \geq 0$

1.2 Propriétés

Considérons premièrement quelques propriétés de base :
$\delta f = f, \quad \forall f \in P$
$(u+v)f = uf + vf, \quad \forall u, v \in P', \forall f \in P$
$v(uf) = (vu)f, \quad \forall u, v \in P', \forall f \in P.$
$(fg)u = f(gu), \quad \forall u, v \in P', \forall f \in P.$
$\delta u = u, \forall u \in P'$
$uv = vu, \quad \forall u, v \in P$
$(uv)w = u(vw), \quad \forall u, v, w \in P'$
$(u+v)w = uv + vw, \quad \forall u, v, w \in P'$
Considérons maintenant les propriétés importantes impliquant des opérateurs définis ci-dessus, qui sont facilement prouvées :
$\forall u, v \in P', \forall f, g \in P$:

$$h_a \circ h_{a-1} = I_P \tag{1.1}$$

$$\tau_b \circ \tau_{-b} b = I_{P'} \tag{1.2}$$

$$(\tau_b \circ h_a)u = (h_a \circ \tau_{a^{-1}b})u \tag{1.3}$$

$$(h_a \circ \tau b)u = (\tau_{ab} \circ h_a)u \tag{1.4}$$

$$f(\tau_b u) = \tau_b((\tau_{-b} f)u) \tag{1.5}$$

$$f(h_a u) = h_a((h_a f)u) \tag{1.6}$$

$$D(h_a u) = a_{-1} h_a Du \tag{1.7}$$

$$D(\tau_b u) = \tau_b Du \tag{1.8}$$

Lemme 1.2.1. *pour tout* $f, g \in P, u, v \in P', c \in \mathbb{C}$ *:*

a) $(ufg)(x) = ((fu)g)(x) + xg(x)(u\theta_0 f)(x)$ (1.9)

b) $f(x)(uv) = (f(x)v)u + x(v\theta_0 f)(x)u$ (1.10)

c) $(\theta_c D)f = (D\theta_c)f + \theta_c^2 f$ (1.11)

d) $(x-c)((x-c)^{-1}u) = u$ (1.12)

e) $(x-c)^{-1}((x-c)u) = u - (u)_0\delta_c$ (1.13)

f) $f((x-c)^{-1}u) = f(c)((x-c)^{-1}u) + (\theta_c f)u$ (1.14)

j) $(x-c)^{-1}(fu) = f(c)((x-c)^{-1}u) + (\theta_c f)u - < u, \theta_c f > \delta_c$ (1.15)

h) $(uf)'(x) = (u'f)(x) + (uf')(x) + (u\theta_0 f)(x)$ (1.16)

i) $(fu)' = u'f + f'u$ (1.17)

g) $(fu)^{(k)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{n} f^{(i)} u^{(k-i)}, k \geq 1$ (1.18)

k) $(uv)' = u'v + uv' + x^{-1}(uv)$ (1.19)

l) $((x-c)^{-1}u)'u = (x-c)^{-1}u' - (x-c)^{-2}u$ (1.20)

m) $(u\theta_0 f)(x) = (\theta_0 uf)(x)$ (1.21)

n) $Du = Dv \Rightarrow u = v$ (1.22)

1.3 Suite de Polynômes

1.3.1 Suite de Polynômes

Définition 1.3.1. *On appelle suite de polynômes notée* $\{B_n\}_{n\geq 0}$*, une suite telle que degrée de* $B_n \leq n, B_n \in P, n \geq 0$*.*

Lemme 1.3.1. *Une suite de polynômes* $\{B_n\}_{n\geq 0}$ *est libre si et seulement si degrée* $B_n = n, n \geq 0$*.*

Preuve :

Supposons que degrée $B_n = n$, soient $m, n \geq 0$,oú $n \leq m$ .Considérons que la combinaison linéaire donnée par : $\sum_{i=n}^{m} \alpha_i B_i(x)$ où $\alpha_i \in \mathbb{C}, n \leq i \leq m$

Supposons que $\sum_{i=n}^{m} \alpha_i B_i(x) = 0$
c'est-á-dire :
$\alpha_m B_m(x) + \sum_{i=n}^{m-1} \alpha_i B_i(x) = 0$ Nous supposons toujours B_n unitaire,$n \geq 0$ i.e :

$B_n(x) = x^n + b_n(x)$Où $b_n \in P_{n-1}$ donc $\alpha_m(x^m b_m(x)) + \sum_{i=n}^{m-1} \alpha_i B_i(x) = 0$, où degrée $(b_m) \leq m - 1$

Comme $\alpha_m x^m$ est le seul terme de degrée m, alors nécessairement $\alpha_m = 0$.
Reste à déterminer les termes restants. L'égalité précédente s'écrit maintenant :
$\alpha_{m-1}(x^{m-1} + b_{m-1}(x)) + \sum_{i=n}^{m-2} \alpha_i B_i(x) = 0$,oú degré$(b_{m-1}) \leq m - 2$
Par l'analogie déjà faite,nous avons $\alpha_{m-1} = 0$ En répétant le raisonnement, nous concluons que $\alpha_i = 0, n \leq i \leq m$.
Réciproquement :
supposons que $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de polynômes libre,donc par définition degrée $B_n \leq n, B_n \in P, n \geq 0$. supposons que le degrée de $B_n \leq n - 1, n \geq 0$
Ainsi
$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \beta_i(x)$ i.e :
$B_n(x) - \sum_{i=o}^{n-1} \alpha_i \beta_i(x) = 0$
I.e :$\sum_{i=o}^{m} \alpha_i \beta_i(x) = 0$,où $\alpha_n = -1$, ce qui contredit l'hypothèse, alors degrée $B_n = n, n \geq 0$.

Remarque 1.3.1. *Dans ce cas, on peut toujours normaliser chaque polynôme de la suite, en considérant que* $B_n(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ..., n \geq 0$ *; on dira alors que la suite est normalisée.*

Notation :
On désigne par SP toute suite de polynômes libres et normalisée.

Proposition 1.3.1. *Si* $\{p_n\}_{n\geq 0}$ *est une* SP *et* $u \in P'$ *alors* $u = 0$ *si et seulement si* $< u, p_n >= 0, n \geq 0$.

Preuve :
Si $u = 0$ alors $< u, p >= 0, \forall p \in P$.
En particulier $< u, p_n >= 0, n \geq 0$
Réciproquement :
On considére un polynôme arbitraire $p \in P$ de degrée $k \geq 0$. Si nous écrivons p dans la base $\{p_n\}_{n\geq 0}$ c'est-á-dire :
$p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i p_i(x), a_i \in \mathbb{C}, 0 \leq i \leq k.$
Alors $< u, p(x) >= \sum_{i=0}^{k} a_i < u, p_i(x) >= 0$
Par l'hypothèse donc $u = 0$ puisque $< u, p >= 0, \forall p \in P$.

1.3.2 La suite duale

Considérons la SP $\{B_n\}_{n\geq 0}$

Définition 1.3.2. *On appelle suite duale de* $\{B_n\}_{n\geq 0}$*, la suite de formes linéaires* $\{u_n\}_{n\geq 0}$ *définie par :*

$$< u_n, B_m >= \delta_{n,m}; n, m \geq 0 \tag{1.3.23}$$

Proposition 1.3.2. *La suite duale* $\{u_n\}_{n\geq 0}$ *associée á une* $SP\{B_n\}_{n\geq 0}$ *existe,unique et libre (linéairement indépendants), Les deus suites* $\{U_n\}_{n\geq 0}$ *et* $\{B_n\}_{n\geq 0}$ *sont dite biorthogonales.*
u_0 *Appelé la forme canonique.*

Preuve :
On veut trouver une suite $\{u_n\}_{n\geq 0}$ où $u_n \in P'$ qui satisfait (1.3.23).
On peut toujours caractériser une forme à travers la suite de ses moments.
Par conséquent, on détermine$(u_n)_k, k \geq 0$
La SP $\{B_n\}_{n\geq 0}$ forment une base de P,on peut écrire $x^m, m \geq 0$ sous la forme :
$x^m = \sum_{k=0}^{m} \alpha_{m,k} B_k(x)$ où $\alpha_{m,m} = 1, m \geq 0$ Si $m \leq n$: $(u_n)_m =< u_n, x^m >$
$= \sum_{k=0}^{m} \alpha_{m,k} < u_n, B_k >$
$= \sum_{k=0}^{m} \alpha_{m,k} \delta n, k = \alpha_{m,m} \delta_{n,n}$
$= \delta_{n,m}$
Alors $(u_n)_n = 1$ et $(u_n)_m = 0, \forall m < n$. Si $m > n$: $(u_n)_m =< u_n, x^m >$
$= \sum_{k=0}^{m} \alpha_{m,k} < u_n, B_k >= \sum_{k=0}^{m} \alpha_{m,k} \delta_{n,k}$
$= \sum_{k=0}^{m} \alpha_{m,k} \delta_{n,k} + \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_{m,k} \delta n, k$
$= \alpha_{m,n} \delta_{n,n} = \alpha_{m,n}$. Ainsi $(u_n)_m = \begin{cases} 0 & , m < n \\ 1 & , m = n \\ \alpha_{m,n} & , m > n \end{cases}$
Donc $\{u_n\}_{n\geq 0}$ existe.
L'unicité de cette suite suit immédiatement du fait que la forme soit déterminée par la suite de ses moments.
Supposons $\sum_{i=n}^{m} \lambda_i u_i = 0_{P'}$ où $0 \leq n \leq m$ à savoir

$$(\sum_{i=n}^{m} \lambda_i u_i)_k = 0, k \geq 0 \tag{1.3.24}$$

C'est-á-dire
$\sum_{i=n}^{m} \lambda_i (u_i)_k = 0, k \geq 0$ Si $n \leq k \leq m$ alors,

$\sum_{i=n}^{m} \lambda_i (u_i)_k = \lambda_k$ D'aprés (1.3.24) nous avons :
$\lambda_i = 0, n \leq i \leq m.$
$\{u_n\}_{n\geq 0}$ est libre.

Lemme 1.3.2. *Soit* $\{B_n\}_{n\geq 0}$ *est une* SP *et* $\{u_n\}_{n\geq 0}$ *la suite duale correspondante.*
si $\{q_n\}_{n\geq 0}$ *est une* SP *alors :*

$$< u_n, q_m >= 0, 0 \leq m < n \tag{1.3.25}$$

Preuve :
Étant donnée que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ forme une base de P alors :
$q_m(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_{i,m} B_i(x)$ Où $\alpha_{m,m} = 1, m \geq 0$
Ainsi,
$< u_n, q_m(x) >=< u_n, \sum_{i=0}^{m} \alpha_{i,m} B_i(x) >$
$= \sum_{i=0}^{m} \alpha_{i,m} \delta_{n,i}, n \geq 0$
Si $m = n$ la relation précédente s'écrit : $< u_n, q_n(x) >= \alpha_{n,n} = 1$
Si $m \leq n - 1$ alors : $< u_n, q_m(x) >= 0.$

Lemme 1.3.3. *soit* $\{B_n\}_{n\geq 0} \geq 0$ *une* SP *et* $\{u_n\}_{n\geq 0} \geq 0$ *la suite duale correspondante,*
soit $u_n \in P'$ *et* $p \in \mathbb{N}$ *Pour que* u *vérifie*
$< u, B_{p-1} >\neq 0, < u, B_n >= 0, n \geq p,$
il est nécessaire et suffisant qu'il existe
$\lambda_i \in \mathbb{C}, 0 \leq i \leq p - 1, \lambda_{p-1} \neq 0$
tels que :
$u = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u_i$
En outre

$\lambda_i =< u, B_i >, 0 \leq i \leq p-1$

Preuve :

Par définition $< u, B_n >=< \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u_i, B_n >$
$= \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \delta_{i,n} = 0, n \geq p$
De même $< u, B_{p-1} >= \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i \delta_{i,p-1}$
$= \lambda_{p-1} \neq 0$ par l'hypothése.
réciproquement :
considérons la forme $v = u - \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i u_i$
où $\lambda_i \in \mathbb{C}, 0 \leq i \leq p-1$ sont des constantes arbitraires.
En effet, nous avons $< v, B_n >=< u - \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i, B_n >$
$=< u, B_n > - < \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i, B_n > - \sum_{i=0} \lambda_i \delta_{i,n}$
$=< u, B_n >= 0, n \geq p$, par l'hypothése.
Considérons que $0 \leq n \leq p-1$ nous avons trouvé, comme dans le cas précédent que
$< v, B_n >=< u, B_n > -\lambda_n$.
Par le choix des constantes $\lambda_n, 0 \leq n \leq p-1$
c'est-á-dire $\lambda_n =< u, B_n >$ alors $< v, B_n >= 0$.
d'aprés la proposition(1.3.1) il s'ensuit que $v = 0$, comme par hypothèse $\lambda_{p-1} =< u, B_{p-1} >\neq 0$

1.3.3 Transformations élémentaires

Soit $\{B_n\}_{n\geq 0}$ une SP et $\{u_n\}_{n\geq 0}$ la suite duale correspondante.

Transformation linéaire de variable :

Proposition 1.3.3. *Considèrons la SP $\{\tilde{B}_n\}_{n\geq 0}$ définie comme suit :*
$\tilde{B_n} = a^{-n} B_n(ax+b), n \geq 0$ *où* $a \in \mathbb{C}^*$ *et* $b \in \mathbb{C}$.

En désignant par $\{\tilde{u}_n\}_{n\geq 0}$ *la suite duale associée á* $\{\tilde{B}_n\}_{n\geq 0}$ *alors :*
$\tilde{u}_n = a^n(h_{a^{-1}} \circ \tau_{-b})u_n, n \geq 0.$

Preuve :
On commence par noter que degré $\tilde{B_n} = n$ et que $\tilde{B_n}$ est unitaire, $\forall n \geq 0$. Ainsi,il existe une suite duale unique qui satisfait :
$< \tilde{u_n}, \tilde{B_n} >= \delta_{n,m}; n, m \geq 0$ Noter que $\tilde{B_n} = a^{-m}(h_a \circ \tau_{-b})B_m(x)$ alors
$< \tilde{u_n}, \tilde{B_n} >=< \tilde{u_n}, a^{-m}(h_a \circ \tau_{-b})B_m(x) >$
$= a^{-m} < \tilde{u_n}, (h_a \circ \tau_{-b})B_m(x) >$
$= a^{-m} < h_a\tilde{u_n}, \tau_{-b}B_m(x) >= a^{-m} < (\tau_b \circ h_a)\tilde{u_n}, B_m(x) >$
$= \delta_{n,m}; n, m \geq 0$ Compte tenu de l'unicité de la suite duale, alors nécessairement

$$u_n = a^{-n}(\tau_b \circ h_a)\tilde{u_n} \tag{1.3.26}$$

I.e. $\tilde{u_n} = a^n(h_{a^{-1}} \circ \tau_{-b})u_n, n \geq 0$

Dérivation

Considérons la SP $\{B_n^{[1]}\}_{n\geq 0}$ désignée par la suite des dérivées d'ordre 1 de$\{B_n\}_{n\geq 0}$.

Proposition 1.3.4. *Considérons que la* SP $\{B_n^{[1]}\}_{n\geq 0}$ *est définie de la manière suivante :*

$$B_n^{[1]}(x) = (B'_{n+1}(x))/(n+1), n \geq 0 \tag{1.3.27}$$

Si $\{u_n^{[1]}\}_{n\geq 0}$ *est la suite duale correspondante alors :*

$$Du_n^{[1]} = -(n+1)u_{n+1}, n \geq 0 \tag{1.3.28}$$

Preuve :
par définition d'une suite duale

$$< u_n^{[1]}, B_n^{[1]} >= \delta_{n,m}; n, m \geq 0 \tag{1.3.29}$$

$< u_n^{[1]}, B_n^{[1]} >= (m+1)^{-1} < u_n^{[1]}, B'_{m+1} >$
$= -(m+1)^{-1} < Du_n^{[1]}, B_{m+1} >, n, m \geq 0$
En Prenant dans(1.3.29) $m = n$,on obtient que :
$< Du_n^{[1]}, B_{n+1} >= -(n+1) \neq 0, n \geq 0$
En substituant dans(1.3.29) m par $m-1$, on obtient :
$< Du_n^{[1]}, B_m >= 0, m \geq n+2$
En utilisant le lemme(1.3.3) pour $p = n+2$, on a que :
$Du_n^{[1]} = \sum_{m=0}^{n+1} \lambda_{n,m} u_m$ où $\lambda_{n,m} =< Du_n^{[1]}, B_m >= 0$
De(1.3.29) résulte que
$m\delta_{n,m-1} = -\lambda_{n,m}$ alors
$\lambda_{n,m} = \begin{cases} 0 & 0 \leq m \leq n \\ -(n+1) & n \geq 0 \end{cases}$
d'où le résultat

Proposition 1.3.5. *Soit $k \geq 1$. considérons la SP $\{B_n^{[k]}\}_{n\geq 0}$ définie de la manière suivante :*

$$B_n^{[k]}(x) = ((B_n^{[k-1]})'(x))/(n+1), n \geq 0 \tag{1.3.30}$$
$$Alors \quad Du_n^{[k]} = -(n+1)Du_{n+1}^{[k-1]}, n \geq 0 \tag{1.3.31}$$

Telle que $\{u_n^{[j]}\}_{n\geq 0}$ la suite duale associé a $\{B_n^{[j]}\}_{n\geq 0}, 1 \leq j \leq k$

Preuve :
Résultat de la proposition précédente.

1.3.4 Relation de Structure

Soit $\{B_n\}_{n\geq 0}$ une SP et considérons la division euclidienne de B_{n+2} par $B_{n+1}, n \geq 0$.
$B_{n+2}(x) = (x - \beta_{n+1})B_{n+1}(x) - \gamma_n(x), n \geq 0$
et $B_0(x) = 1, B_1(x) = x - \beta_0$
Où γ_n le reste de la division (degrée $\gamma_n(x) \leq n, n \geq 0$)
Ainsi,
il est possible d'écrire
$\gamma_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n,i}B_i(x), n \geq 0$ et $\alpha_{n,i} \in \mathbb{C}$
donc
$B_{n+2}(x) = (x - \beta_{n+1})B_{n+1}(x) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n,i}B_i(x), n \geq 0$

$$etB_0(x) = 1, B_1(x) = x - \beta_0 \tag{1.3.32}$$

Où $\beta_n, \alpha_{n,i} \in \mathbb{C}, 0 \leq i \leq n$

Proposition 1.3.6. *Soit $\{B_n\}_{n\geq 0}$ une SP et $\{u_n\}_{n\geq 0}$la suite duale correspondante alors*

$$\beta_n =< u_n, xB_n(x) >, n \geq 0 \tag{1.3.33}$$

$$Et \quad \alpha_{n,i} =< u_i, xB_{n+1}(x) >, 0 \leq i \leq n, n \geq 0 \tag{1.3.34}$$

Preuve :
En utilisant(1.3.32), on a :

$< u_{n+1}, B_{n+2} >=< u_{n+1}, (x - \beta_{n+1})B_{n+1} > - \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n,i} < u_{n+1}, B_i >$
$=< u_{n+1}, xB_{n+1} > -\beta_{n+1} < u_{n+1}, B_{n+1} > - \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n,i} < u_{n+1}, B_i >, n \geq 0$
Alors
$0 =< u_{n+1}, xB_{n+1} > -\beta_{n+1}$
i.e $\beta_{n+1} =< u_{n+1}, xB_{n+1} >$
De plus, comme $< u_0, B_1 >= 0$ et $< u_0, B_1 >=< u_0, x - \beta_0 >$
$=< u_0, x > -\beta_0 < u_0, 1 >$
$=< u_0, x > -\beta_0$
Alors, on conclut que $\beta_n =< u_n, xB_n(x) >, n \geq 0$
Considérons $0 \leq k \leq n$:
$< u_k, B_{n+2} >=< u_k, (x - \beta_{n+1})B_{n+1} > - \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n,i} < u_k, B_i >$
$=< u_k, xB_{n+1} > -\beta_{n+1} < u_k, B_{n+1} > - \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n,i}\delta_{k,i}, n \geq 0$
Par la définition de la suite duale, on obtient que
$< u_k, xB_{n+1} >= \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n,i}\delta_{k,i}$
i.e. $\alpha_{n,k} =< u_k, xB_{n+1} >, 0 \leq k \leq n$

Lemme 1.3.4. *Soit $\{B_n\}_{n\geq 0}$ une SP et $\{u_n\}_{n\geq 0}$ la suite duale correspondante, Soit $k \geq 0$,alors :*
la condition $\alpha_{n,k} =< u_k, xB_{n+1} >= 0, n \geq k+1$ sont équivalents à
$xu_k = u_{k-1} + \beta_k u_k + \alpha_{k,k} u_{k+1}, u_{-1} = 0.$

Preuve :
Fixons $k \geq 0$. Supposons alors que $\alpha_{n,k} = 0, n \geq k+1$, Dans la proposition (1.3.6), nous avons vu que :
$\alpha_{n,k} =< xu_k, B_{n+1}(x) >= 0, n \geq k+1$
Par le lemme (1.3.3),$\exists \lambda_{i,k} \in \mathbb{C}, 0 \leq i \leq k$
tels que $xu_k = \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_{i,k} u_i$
Ainsi $< xu_k, B_{n+1}(x) >=< \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_{i,k} u_i, B_{n+1}(x) >$

$= \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_{i,k} < u_i, B_{n+1}(x) >$
$= \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_{i,k}\delta_{i,n+1} = \lambda_{n+1,k}, n \geq k+1$
En conséquence, $\lambda_{n+1,k} =< u_k, xB_{n+1} >= 0, n \geq k+1$
En outre, comme degré $(xB_{n+1}(x)) = n+2$, d'aprés le lemme (1.3.2) :
$< u_k, xB_{n+1}(x) >= 0$ où $n+2 < k$ i.e. $n+1 < k-1$
Ainsi, $xu_k = \lambda_{k-1,k}u_{k-1} + \lambda_{k,k}u_k + \lambda_{k+1,k}u_{k+1}$
Si $n = k-1$, alors par le lemme (1.3.2) $\lambda_{k-1,k} =< u_k, xB_{k-1}(x) >= 1$
puisque Degré $(xB_k(x)) = k+1$
Pour $n = k$ il résulte que $\lambda_{k,k} =< u_k, xB_k(x) >= \beta_k$, d'après l'expression (1.3.33) et pour $n = k+1$, il s'ensuit que $\lambda_{k+1,k} =< u_k, xB_{k+1}(x) >= \alpha_{k,k}$ Comportant l'expression (1.3.34). On trouve donc le résultat.
Réciproquement :
l'expression $xu_k = u_{k-1} + \beta_k u_k + \alpha_{k,k}u_{k+1}$ implique que :
$< xu_k, B_{n+1}(x) >=< u_{k-1} + \beta_k u_k + \alpha_{k,k}u_{k+1}, B_{n+1}(x) >$ i.e.
$< u_k, xB_{n+1}(x) >=< u_{k-1}, B_{n+1}(x) > +\beta_k < u_k, B_{n+1}(x) > +\alpha_{k,k} < u_{k+1}, B_{n+1}(x) >$
Pour le côté droit de l'expression ci-dessus, on a par définition de la dualité, que : $< uk, xB_{n+1}(x) >= 0$, Si, $n < k-2$,ou si $n > k$ Alors,
$< u_k, xB_{n+1}(x) >= 0$ pour $n \geq k+1$
Depuis $\alpha_{n,k} =< u_k, xB_{n+1}(x) >, 0 \leq k \leq n, n \geq 0$

Chapitre 2

L'orthogonalité Régulière

2.1 Notions Générales

Définition 2.1.1. *La forme u est dite régulière si il est possible d'associer une SP* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *telle que :*

$$< u, p_n p_m >= r_n \delta_{n,m} \tag{2.1.1}$$

$$\boldsymbol{o\grave{u}}, r_n \neq 0; n, m \geq 0 \tag{2.1.2}$$

Dans ce cas la SP $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *est dite régulièrement orthogonale relativement á* u.
On dit que la forme u est normalisée si $(u)_0 = 1$

Proposition 2.1.1. *Toute suite* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *de polynômes orthogonaux relativement á* $u \in P'$ *est libre,c'est-à-dire elle constitue une base (algèbrique) de* P *qui peut toujours être normalisée.*

Preuve :
Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq m \leq n$,on veut montrer que
$\sum_{i=m}^{n} \alpha_i p_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, m \leq i \leq n.$

Considérons un entier k avec $m \leq k \leq n$
En multipliant l'équation $\sum_{i=m}^{n} \alpha_i p_i = 0$ par p_k
et appliquant à la fois u on obtient ce qui suit :
$< u, \sum_{i=m}^{n} \alpha_i p_i p_k >= 0, m \leq k \leq n$
Donc $\alpha_k < u, p_k^2 > + < u, \sum_{i=m,(i\neq k)}^{n} \alpha_i p_i p_k >= 0, m \leq k \leq n$ i.e.
$\alpha_k < u, p_k^2 > + \sum_{i=m,(i\neq k)}^{n} \alpha_i \delta_{i,k} = 0, m \leq k \leq n$ i.e.
$\alpha_k < u, p_k^2 >= 0, m \leq k \leq n$
Alors,$\alpha_k = 0, m \leq k \leq n$ car $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est régulièrement orthogonale

Proposition 2.1.2. *Si $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est une suite régulièrement orthogonale relativement à $u \in P'$ alors degré $P_n = n, \forall n \geq 0$ de plus $u_0 \neq 0$.*

Preuve :
Á l'aide de la proposition (2.1.1) et le lemme (1.3.1) il résulte que
Degré $P_n = n, \forall n \geq 0$.
On suppose que
$P_n(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$, où $\alpha_n \neq 0, n \geq 0$ Alors $< u, p_0^2 >\neq 0$
et d'autre part
$< u, p_0^2 >=< u, \alpha_0^2 >= \alpha_0^2 < u, 1 >= \alpha_0^2(u_0)$
Alors $(u_0) \neq 0$
.

Proposition 2.1.3. *Soit $u \in P'$ et $\{P_n\}_{n\geq 0}$ sont des SP ,les énoncés suivant sont équivalents :*
a) *$\{P_n\}_{n\geq 0}$ est orthogonale par rapport á u.*
b) *il existe une suite de polynômes $\{q_n\}_{n\geq 0}$ où degré $q_n = n, n \geq 0$*
tels que :
$< u, q_m p_n >= 0$ ***si*** $0 \leq m < n, n \geq 1$
et $< u, q_m p_n >\neq 0$ ***si*** $m = n, n \geq 0$

c)

$< u, x^m p_n >= 0$ ***si*** $0 \leq m < n, n \geq 0$

$< u, x^m p_n > \neq 0$ ***si*** $m = n, n \geq 0$

Preuve :

$a \Rightarrow b$

q_m est écrit dans la base $\{P_n\}_{n\geq 0}$

$q_m(x) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i pi(x), 0 \leq m < n, n \geq 1$,où degré $q_m = m, \alpha_m \neq 0$. Ainsi

$< u, q_m p_n >= \sum_{i=0}^{m} \alpha_i pi < u, p_i p_n >= 0$

Vu que $i \leq m$ et $m < n$ alors $i \neq n$

$< u, q_n p_n >= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i < u, p_i p_n >= \alpha_n < u, p_n^2 > \neq 0, n \geq 0$, vu que $\alpha_n \neq 0$ et par l'hypothèse $< u, q_n p_n > \neq 0$.

$b \Rightarrow c$

Il suffit de prendre $q_m(x) = x^m, 0 \leq m \leq n, n \geq 0$

$c \Rightarrow a$

On écrit p_m dans la base canonique :

$p_m(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x_i$ Comme degré $p_m = m, b_m \neq 0$.si $0 \leq m \leq n-1, n \geq 0$ alors :

$< u, p_n(x) p_m(x) >= \sum_{i=0}^{m} b_i < u, x^i p_n(x) >= 0$

Si $m \geq n+1$, il suffit de changer m avec n dans l'égalité précédente.

Si $m = n$ alors :

$< u, p_n^2(x) >= \sum_{i=0}^{n} b_i < u, x^i p_n(x) >= b_n < u, x^n p_n(x) > \neq 0, n \geq 0$ Vu que $b_n \neq 0$ et par l'hypothèse $< u, x^n p_n(x) > \neq 0$

Proposition 2.1.4. *Si* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *est une SPO relativement á u et* $\{u_n\}_{n\geq 0}$ *la suite duale correspondante alors :* $u = (u)_0 u_0$

Preuve :

D'aprés l'hypothèse on résulte que :

$< u, P_0 >=< u, P_0^2 >\neq 0$ et $< u, P_n >=< u, P_0 P_n >= 0, n \geq 1$ Ainsi, d'aprés le lemme(1.3.3) on résulte que :
$u = \lambda_0 u_0$ où $\lambda_0 =< u, P_0 >=< u, 1 >= (u)_0$

Remarques 2.1.1. *Dorénavant on suppose que u est une forme régulière et normalisée,et $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est (régulièrement) orthogonale relativement á u. Notez que, ainsi $u = u_0$*
Rappelant la relation exprimée en (1.3.32) appliqué á la suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$

$$\begin{cases} P_{n+2}(x) = (x - \beta_{n+1})P_{n+1}(x) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n,i} P_i(x), n \geq 0 \\ et \quad P_0(x) = 1, P_1(x) = x - \beta_0 \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Théorème 2.1.1. *Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ une SP et $\{u_n\}_{n\geq 0}$ la suite duale correspondante, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*
a) *La suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est orthogonale relativement á u_0*
b) *$\alpha_{n,i} = 0, 0 \leq i \leq n-1, n \geq 1; \alpha_{n,n} \neq 0, n \geq 0$ où $\alpha_{n,i}$ sont donnés par(1.3.34)*
c) *$xu_n = u_{n-1} + \beta_n u_n + \alpha_{n,n} u_{n+1}, \alpha_{n,n} \neq 0, n \geq 0, u_{-1} = 0$*
d) *Il existe une suite de polynômes $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ telle que degré $\varphi_n = n$ et $u_n = \varphi_n u_0, n \geq 0$*
e) *$u_n = (< u_0, P_n^2 >)^{-1} P_n u_0, n \geq 0$*

Preuve :
$a \Rightarrow b$
De (2.1.3) on peut écrire :
$\sum_{i=0}^{n} \alpha_{n,i} P_i(x) = -P_{n+2}(x) + xP_{n+1}(x) - \beta_{n+1} P_{n+1}(x), n \geq 0$, En multipliant l'égalité précédente par $P_m, 0 \leq m \leq n$ et appliquant u_0, il vient :
$\sum_{i=0}^{n} \alpha_{n,i} < u_0, P_i P_m >= - < u_0, P_{n+2} P_m > + < u_0, xP_{n+1} P_m > -\beta_{n+1} < u_0, P_{n+1} P_m >$

Par les conditions de l'orthogonalité,on a :

$$\alpha_{n,m} < u_0, P_m^2 >=< u_0, xP_{n+1}P_m >, 0 \leq m \leq n \tag{2.1.4}$$

Comme degré $(xP_m) = m+1$ alors par l'énoncé b) de la proposition (2.1.3),il vient :

$< u_0, xP_{n+1}P_m >= 0, 0 \leq m \leq n-1, n \geq 1$

$< u_0, xP_{n+1}P_n >\neq 0, n \geq 0$

En outre,Par les conditions de l'orthogonalité $< u_0, P_m^2 >\neq 0, m \geq 0$, a partir de (2.1.4) on obtient :

$\alpha_{n,n} \neq 0, n \geq 0$ et $\alpha_{n,m} = 0, 0 \leq m \leq n-1, n \geq 1$

$b \Rightarrow c$

Soit $k \geq 0$, dans le lemme (1.3.4) on a prouvé que : $\alpha_{n,k} = 0, k \leq n-1, n \geq 1$, alors $xu_k = u_{k-1} + \beta_k u_k + \alpha_{k,k} u_{k+1}$ où $u_{-1} = 0$

Ainsi,pour compléter la preuve il suffit de considérer que $\alpha_{n,n} \neq 0, n \geq 0$

$c \Rightarrow d$

Faites cette démonstration par récurrence Par l'hypothèse :

$$u_{k+1} = \alpha_{k,k}^{-1}(xu_k - u_{k-1} - \beta_k u_k), k \geq 0 \tag{2.1.5}$$

Pour $k = 0$, on a que $u = \alpha_{0,0}^{-1}(xu_0 - \beta_0 u_0) = \alpha_{0,0}^{-1}(x - \beta_0)u_0$ On peut donc écrire $u_1 = \varphi_1 u_0$ comme $\varphi_1 = \alpha_{0,0}^{-1}(x - \beta_0)$, degré $\varphi_1 = 1(\alpha_{0,0} \neq 0)$

Supposons qu'il existe des polynômes φ_l tels que degré $\varphi_l = l$

et $u_l = \varphi_l u_0, 0 \leq l \leq n$

et montrons qu'il existe φ_{k+1} de degré $\varphi_{k+1} = k+1$ et tels que $u_{k+1} = \varphi_{k+1} u_0$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, de(2.1.5) s'ensuit que

$u_{k+1} = \alpha_{k,k}^{-1}(x\varphi_k - \varphi_{k-1} - \beta_k \varphi_k)u_0 = \varphi_{k+1} u_0$ comme $\varphi_{k+1} = \alpha_{k,k}^{-1}((x - \beta_k)\varphi_k - \varphi_{k-1})$

On obtient degré $\varphi_{k+1} = k + 1(\alpha_{k,k} \neq 0)$

$d \Rightarrow a$

Comme chaque φ_n est de degré n, alors
$\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ constitue une base de P. Montrons premièrement que
$< u_0, P_nP_m >= 0, m \neq n; n, m \geq 0$. Supposons que $m < n$ alors :
$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_k\varphi_k(x)$ avec $a_m \neq 0$
Ainsi, $< u_0, P_nP_m >= \sum_{i=0}^{m} a_k < u_0, \varphi_kP_n >$
$= \sum_{i=0}^{m} a_k < \varphi_k u_0, P_n >= \sum_{i=0}^{m} a_k < u_k, P_n >$
Par l'hypothèse et par la définition de la suite duale, on a :
$< u_0, P_nP_m >= \sum_{i=0}^{m} a_i\delta_{i,n} = 0$
Montrons maintenant que : $< u_0, P_n^2 >\neq 0, n \geq 0$
$< u_0, P_n^2 >= \sum_{i=0}^{n} a_i\delta_{i,n} = a_n \neq 0$ puisque degré P_n =degré $\varphi_n = n$ donc $a_n \neq 0$
$a \Rightarrow e$
voyez que :
$< (< u_0, P_n^2 >)^{-1}P_nu_0, P_m >= (< u_0, P_n^2 >)^{-1} < P_nu_0, P_m >= (< u_0, P_n^2 >)^{-1} < u_0, P_nP_m >= \delta_{n,m}$
Mais, en considérant la définition de suite duale(1.3.32), et en faisant attention á la respective unicité (proposition (1.3.2),il résulte que :
$u_n = (< u_0, P_n^2 >)^{-1}P_nu_0$
$e \Rightarrow d$
Il suffit de faire $\varphi_n = (< u_0, P_n^2 >)^{-1}P_n$ Comme degré $P_n = n$ et $< u_0, P_n^2 >\neq 0$ alors degré $\varphi_n = n$

Proposition 2.1.5. *En admettant vérifiée un des points du théorème précédent, nous avons :*

$$\begin{cases} P_{n+2}(x) = (x - \beta_{n+1})P_{n+1}(x) - \gamma_{n+1}P_n(x), n \geq 0 \\ et \quad P_0(x) = 1, P_1(x) = x - \beta_0 \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Où $\beta_n =< u_0, xP_n^2 > / < u_0, P_n^2(x) >, n \geq 0$

et

$$\gamma_{n+1} = \alpha_{n,n} =< u_0, P_{n+1}^2(x) > / < u_0, P_n^2(x) >\neq 0, n \geq 0 \qquad (2.1.7)$$

Preuve :

En multipliant l'application précédente par P_{n+1},et appliquant u_0, on obtient que :

$< u_0, P_{n+1}P_{n+2} >=< u_0, xP_{n+1}^2 > -\beta_{n+1} < u_0, P_{n+1}^2 > -\gamma_{n+1} < u_0, P_{n+1}P_n >$

En conditions d'orthogonalité,on obtient :

$\beta_{n+1} =< u_0, xP_{n+1}^2 > / < u_0, P_{n+1}^2 >, n \geq 0$ Par les conditions initiales de la relation de récurrence, on a :

$P_1(x) = x - \beta_0 = xP_0 - \beta_0 P_0$, En multipliant l'égalité précédente par P_0,et appliquant u_0,on obtient :

$< u_0, P_0P_1 >=< u_0, xP_0^2 > -\beta_0 < u_0, P_0^2 >$

Et,en raison de conditions d'orthogonalité,on a que :

$\beta_0 =< u_0, xP_0^2 > / < u_0, P_0^2 >$ Par conséquent,on obtient l'expression de β_n :

$\beta_n =< u_0, xP_n^2 > / < u_0, P_n^2(x) >, n \geq 0$ multipliant la relation de récurrence par P_n et appliquant u_0 ,il vient

$< u_0, P_nP_{n+2} >=< u_0, xP_nP_{n+1} > -\beta_{n+1} < u_0, P_nP_{n+1} > -\gamma_{n+1} < u_0, P_n^2 >$
$, n \geq 0$

On obtient l'expression suivante pour γ_{n+1} :

$\gamma_{n+1} =< u_0, xP_n(x)P_{n+1}(x) > / < u_0, P_n^2(x) >, n \geq 0.$

En effectuant la division euclidienne de p_{n+1} par xP_n on obtient :

$P_{n+1}(x) = xP_n(x) + r(x)$

où degré $r(x) \leq n$,alors :

$< u_0, xP_n(x)P_{n+1}(x) >=< u_0, P_{n+1}^2(x) > - < u_0, r(x)P_{n+1}(x) >$
$=< u_0, P_{n+1}^2(x) >$

Par la proposition (2.1.3) on obtient :

$\gamma_{n+1} =< u_0, P_{n+1}^2(x) > / < u_0, P_n^2(x) >, n \geq 0$, d'aprés les conditions d'orthogonalité : $\gamma_{n+1} \neq 0, n \geq 0$,

Corollaire 2.1.1. *Si* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *est une* SPO*,alors* P_n *et* $P_{n+1}, n \geq 0$ *n'ont pas de zéros communs.*

Preuve :

Supposons que P_n et $P_{n+1}, n \geq 0$ ont un zéro commun, disons z

En écrivant la relation de récurrence pour $n \geq 1$:

$P_{n+1}(z) = (z - \beta_n)P_n(z) - \gamma_n P_{n-1}(z), n \geq 1$

On obtient que $\gamma_n P_{n-1}(z) = 0, n \geq 1$ En appliquant le raisonnement ci-dessus pour $n-2, n-3, ..., 0$ nous concluons que :

$P_{n-2}(z) = ... = P_1(z) = P_0(z) = 0.$

Mais cela est absurde, puisque $P_0(z) = 1$.

En effet, en écrivant la relation de récurrence pour $n = 0$ on a que :

$P_2(z) = (z - 1)P_1(z) - \lambda_1 P_0(z).$

Ainsi, par hypothèse, $\lambda_1 P_0(z) = 0$. comme $\lambda_1 \neq 0$, alors : $P_0(z) = 0$, ce qui est absurde, puisque $P_0 \equiv 1$.

Lemme 2.1.1. *Soit* $u \in P'$ *régulière et soit* ϕ *un polynôme,tel que* $\phi u = 0$*.Alors, nécessairement,* $\phi = 0$

Preuve :

Supposons que $\phi \neq 0$ alors $\phi(x) = cx^t + ...$ où $c \neq 0$ et degré $\phi = t$

Si u est régulière, il existe une SPO $\{P_n\}_{n\geq 0}$ relativement à u, alors

$< \phi u, P_t >= 0$

En outre $< \phi u, P_t >=< u, \phi P_t >= c < u, P_t^2 >\neq 0$

D'où la contradiction, alors il résulte que $\phi = 0$

2.2 Relation de Type fini et Applications :

Soit ϕ un polynôme unitaire de degré t et soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ une SP et $\{u_n\}_{n\geq 0}$la suite duale correspondante.
Généralement, il ya des valeurs de n tels que $\phi u_n = 0$,
En fait, cela ne sera possible que pour $0 \leq n < t$; en effet :
si $n \geq t$ il s'ensuit que
$< \phi u_n, P_{n-t} >=< u_n, \phi P_{n-t} >=< u_n, P_n >= 1$
alors $\phi u_n \neq 0$

Définition 2.2.1. *Une SP $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est dite compatible avec ϕ si*
$\phi u_n \neq 0, n \geq 0$

Exemple :
Toute SPO est compatible avec n'importe quel polynôme unitaire.
En effet :
$\forall n \geq 0 : \phi u_n \neq 0 \Leftrightarrow \exists k \geq 0 :< \phi u_n, P_k >\neq 0, n \geq 0$
Par le théorème (2.1.1) $u_n = (< u_0, P_n^2 >)^{-1} P_n u_0$ donc :
$< \phi u_n, P_k >=< u_n, \phi P_k >=< (< u_0, P_n^2 >)^{-1} P_n u_0, \phi P_k >$
$= (< u_0, P_n^2 >)^{-1} < u_0, \phi P_n P_k >, n \geq 0$
Considérons $k = n + t$, il résulte que :
$< \phi u_n, P_{n+t} >= (< u_0, P_n^2 >)^{-1} < u_0, \phi P_n P_{n+t} >$
$= (< u_0, P_n^2 >)^{-1} < u_0, \phi P_{n+t}^2 \neq 0, n \geq 0$

Remarques 2.2.1. *Soit $\{q_n\}_{n\geq 0}$ une suite de polynômes unitaires et $\{P_n\}_{n\geq 0}$ une SP,*
la formule suivante est toujours valable
$\phi(x) q_n(x) = \sum_{i=0}^{n+t} \lambda_{n,i} P_i(x)$

ceci est une conséquence immédiate de : degré$(\phi q_n) = n + t$ *et* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *soit libre.*

Définition 2.2.2. *Quand il existe un entier* $s \geq 0$ *tel que*

$$\phi(x)q_n(x) = \sum_{i=n-s}^{n+t} \lambda_{n,i} P_i(x), n \geq 0 \tag{2.2.1}$$

$$\exists r \geq 0 : \lambda_{r,r-s} \neq 0 \tag{2.2.2}$$

Nous disons que (2.2.1) et(2.2.2) est une relation du type fini entre $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *et* $\{q_n\}_{n\geq 0}$ *Relativement a* ϕ.
si, au lieu de (2.2.2), nous considérons

$$\lambda_{n,n-s} \neq 0, n \geq 0 \tag{2.2.3}$$

alors nous disons que (2.2.1)et (2.2.3) est une relation strictement de type fini.

Résultats fondamentaux :

Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ et $\{q_n\}_{n\geq 0}$ des suites de polynômes unitaires et $\{u_n\}_{n\geq 0}$ et $\{v_n\}_{n\geq 0}$ les suites duales correspondantes respectivement

Lemme 2.2.1. *Pour toute SP* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *compatible avec* ϕ, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe un entier* $s \geq 0$ *tel que*

$$\phi(x)q_n(x) = \sum_{i=n-s}^{n+t} \lambda_{n,i} P_i(x), n \geq s \tag{2.2.4}$$

$$\exists r \geq 0 : \lambda_{r,r-s} \neq 0 \tag{2.2.5}$$

2. il existe un entier $s \geq 0$ et une application

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$m \to \mu_m$$

qui satisfait :

$$Max\{0, m-t\} \leq \mu_m \leq m+s, m \geq 0 \tag{2.2.6}$$

$$\exists m_0 \geq 0 : \mu_{mo} = m_0 + s \quad Et \quad tel \quad que \tag{2.2.7}$$

$$\phi u_m = \sum_{i=m-t}^{\mu_m} \lambda_{i,m} v_i, m \geq t \tag{2.2.8}$$

$$\lambda_{\mu_m,m} \neq 0, m \geq 0 \tag{2.2.9}$$

Preuve :

$1 \Rightarrow 2$

De (2.2.4), on a :

$< \phi u_m, q_n >=< u_m, \phi q_n >= \sum_{i=n-s}^{n+t} \lambda_{n,i} < u_m, P_i >$

$= \sum_{i=n-s}^{n+t} \lambda_{n,i} \delta_{m,i}$

$= \begin{cases} \lambda_{n,m} & \text{si } n-s \leq m \leq n+t, n \geq s \\ 0 & \text{si } 0 \leq m \leq n-s-1, n \geq s+1 \end{cases}$

I.e. $< \phi u_m, q_n > = \begin{cases} \lambda_{n,m} & \text{si } n-t \leq n \leq m+s, m \geq t \\ 0 & \text{si } 0 \leq m \leq n+s+1, m \geq 0 \end{cases}$

Il s'ensuit que $< \phi u_m, q_{m+s} >= \lambda_{m+s,m}$ si $m \geq 0$

$$et < \phi u_m, q_n >= 0 \ si \ n \geq m+s+1, m \geq 0 \tag{2.2.10}$$

comme $\phi u_m \neq 0, m \geq 0$ (car $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est compatible avec ϕ),
il existe $\mu_m, 0 \leq \mu_m \leq m+s$ tel que $< \phi u_m, q_{\mu_m} >\neq 0$ si $m \geq 0$ et
$< \phi u_m, q_n >= 0$ si $n \geq \mu_m + 1, m \geq 0$ vu que, par (2.2.5) il existe $r \geq 0$ tel

que $\lambda_{r,r-s} \neq 0$.

nous prenons $m_0 = r - s$ et en considérant (2.2.10), nous avons que :

$\mu_{m_0} = m_0 + s$ où (2.2.7)

D'aprés le lemme (1.3.3) , nous avons :

$$\phi u_m = \sum_{i=0}^{\mu_m} \tau_{m,i} v_i, m \geq 0 \tag{2.2.11}$$

Ainsi

$< \phi u_m, q_n >= \sum_{i=0}^{\mu_m} \tau_{m,i} < v_i, q_n >= \sum_{i=0}^{\mu_m} \tau_{m,i}\delta_{i,n} = \tau_{m,n}, 0 \leq n \leq \mu_m \leq m + s$

si $m \geq n - s, < \phi u_m, q_n >= \lambda_{n,m}$, alors

$\tau_{m,n} = \lambda_{n,m}$ et $\tau_{m,\mu_m} = \lambda_{\mu_m,m} \neq 0, m \geq 0$ où (2.2.9)

En considérant (2.2.11) nous obtenons : (2.2.8) puisque, d'aprés la définition $\lambda_{i,m} = 0, 0 \leq i \leq m - t - 1, m \geq t + 1$.

Finalement, on a que : $< \phi u_m, q_{m-t} >= 1 = \sum_{i=m-t}^{\mu_m} \lambda_{i,m} < v_i, q_{m-t} >$ par (2.2.8) qui nécessite que $\mu_m \geq m + t$.

$2 \Rightarrow 1$

Comme degré $\phi(x)q_m(x) = n + t$ et $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est une SP libre, on a que : $\phi(x)q_m(x) = \sum_{i=0}^{n+t} \tilde{\lambda}_{n,i} P_i(x), n \geq 0$

En considérant la relation précédente, on obtient

$< \phi u_m, q_m >= \tilde{\lambda}_{n,m}, 0 \leq m \leq n + t, n \geq 0$ parce que

$< \phi u_m, q_m >=< u_m, \phi q_n >= \sum_{i=0}^{n+t} \tilde{\lambda}_{n,i} < u_m, p_i >= \sum_{i=0}^{n+t} \tilde{\lambda}_{n,i}\delta_{m,i}$

D'autre part, compte tenu de (2.2.8), on obtient que :

$< \phi(x)u_m, q_m >= \sum_{i=m-t}^{\mu_m} \lambda_{i,m} < v_i, q_n >= \sum_{i=m-t}^{\mu_m} \lambda_{i,m}\delta_{i,n}$ si $m - t \leq n \leq \mu_m$ il résulte que :

$\tilde{\lambda}_{n,m} = \lambda_{n,m}$ et de (2.2.9)on a que : $\tilde{\lambda}_{mu_m,m} = \lambda_{mu_m,m} \neq 0, m \geq 0$

D'aprés (2.2.7) il existe $m_0 \geq 0$ que ce soit $m_0 = r - s, r \geq s$ tel que :

$\mu_{m_0} = r$, par lequel $\lambda_{r,r-s} \neq 0$, d'où (2.2.5)

si $n \geq \mu_m + 1$ on a que $\tilde{\lambda}_{n,m} = 0$.

Depuis (2.2.6), la condition $0 \leq m \leq n-s-1$ implique $\mu_m \leq m+s \leq n-1$ alors (2.2.4) est satisfaite.

Remarques 2.2.2. *Lorsque la relation entre $\{P_n\}_{n\geq 0}$ et $\{q_n\}_{n\geq 0}$ est de type strictement fini, la relation (2.2.10) montre que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ et $\{q_n\}_{n\geq 0}$ est automatiquement compatibles avec φ, et évidemment,on a que $\mu_m = m+s, m \geq 0$*

Proposition 2.2.1. *Supposons que la SP $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est orthogonale, alors les suites $\{P_n\}_{n\geq 0}$ et $\{q_n\}_{n\geq 0}$*
satisfont á la relation de type fini (2.2.4) et (2.2.5) si et seulement si, il existe un entier $s \geq 0$ et une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: $m \to \mu_m$ qui vérifie : (2.2.6) et (2.2.7) tel que :

$$\Phi P_m u_0 = < u_0, P_m^2 > \sum_{i=m-t}^{\mu_m} \lambda_{i,m} v_i \tag{2.2.12}$$

$$Et \ \lambda_{\mu_m,m} \neq 0, m \geq 0 \tag{2.2.13}$$

Preuve :
Il suffit de considérer le lemme (2.2.1) et l'utilisation en (2.2.8) l'égalité $u_m = (< u_0, P_m^2 >)^{-1} P_m u_0$ Qui est garantie par le théorème (2.1.1).

2.3 Quasi-Orthogonalité

Définition 2.3.1. *Soit $u \in P'$ et $s \in \mathbb{N}$ une suite de polynômes $\{B_n\}_{n\geq 0}$ dite quasi-orthogonale d'ordre s.*
relativement à la forme u, si elle vérifie :

$$< u, B_n B_m >= 0 \ \textit{\textbf{si}} \ |n-m| \geq s+1 \tag{2.3.1}$$

$$\exists r \geq s :< u, B_{r-s} B_r > \neq 0 \tag{2.3.2}$$

Remarque 2.3.1. *1. Les conditions (2.3.1) et (2.3.2) sont équivalentes à :*

$$< u, B_nB_m >= 0 \ si \quad 0 \leq m \leq n-s-1, n \geq s+1 \qquad (2.3.3)$$

$$\exists r \geq s :< u, B_{r-s}B_r > \neq 0 \qquad (2.3.4)$$

2. Une suite quasi-orthogonale d'ordre zéro est une suite orthogonale

Lemme 2.3.1. *Soit $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ une SP. Depuis que la suite de polynômes $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est libre, les conditions suivantes sont équivalentes :*

a)$\{B_n\}_{n\geq 0}$ quasi-orthogonale d'ordre $s \geq 0$ relativement à u

..

$$b) < u, Q_nB_m >= 0 \ \textbf{\textit{si}} \ 0 \leq m \leq n-s-1, n \geq s+1 \qquad (2.3.5)$$

$$\exists r \geq s :< u, Q_{r-s}B_r > \neq 0 \qquad (2.3.6)$$

Preuve :

$a \Rightarrow b$

Supposons que $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est libre et quasi-orthogonale d'ordre $s \geq 0$, alors on peut écrire chaque polynôme $\{Q_n\}_{n\geq 0}, n \geq 0$ comme :

$Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n,i}B_i(x)$ avec $\alpha_{n,i} \in \mathbb{C}, 0 \leq i \leq n$ et $\alpha_{n,n} \neq 0$

Considérant $0 \leq m \leq n-s-1, n \geq s+1$, on a que

$< u, Q_mB_n >=< u, \sum_{i=0}^{m} \alpha_{m,i}B_iB_n >= \sum_{i=0}^{m} \alpha_{m,i} < u, B_iB_n >$

compte tenu de (2.3.3), on conclut (2.3.5)

En écrivant Q_{r-s} comme $Q(r-s) = \sum_{i=0}^{r-s} \alpha_{r-s,i}B_i$ avec $\alpha_{r-s,r-s} \neq 0$, on a que

$< u, Q_{r-s}B_r >=< u, \sum_{i=0}^{r-s} \alpha_{r-s,i}B_iB_r >$

$= \alpha_{r-s,r-s} < u, B_{r-s}B_r >$, par (2.3.3)

Comme, par l'hypothèse $\alpha_{r-s,r-s} \neq 0$, de (2.3.4) il résulte (2.3.6)

$b \Rightarrow a$
Supposons que $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est libre et vérifie (2.3.5) et (2.3.6)
étant donné que la suite des polynômes $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est libre, il faut :
$B_n = \sum_{i=0}^{n} \beta_{n,i} Q_i, n \geq 0.$
ainsi
$< u, B_m B_n >=< u, \sum_{i=0}^{m} \beta_{n,i} Q_i B_n >$
$= \sum_{i=0}^{m} \beta_{n,i} < u, Q_i B_n >= 0, 0 \leq m \leq n-s-1, n \geq s+1$
par (2.3.5) nous concluons (2.3.3).
De même, il s'ensuit que $< u, B_{r-s} B_r >= \sum_{i=0}^{r-s} \beta_{r-s,i} Q_i B_r >$
$= \beta_{r-s,r-s} < u, Q_{r-s} B_r >$
Depuis (2.3.6) et le fait que $\beta_{r-s,r-s} \neq 0$, on obtient la condition (2.3.4).

Remarques 2.3.1. *En particulier le résultat précédent est valable si l'on considère la suite*
$Q_n(x) = x^n, n \geq 0$:

$$< u, x^m B_n >= 0 \ \textbf{\textit{si}} \ 0 \leq m \leq n-s-1, n \geq s+1 \tag{2.3.7}$$

$$\exists r \geq s :< u, x^{r-s} B_r > \neq 0 \tag{2.3.8}$$

Lemme 2.3.2. *Soit $u \in P'$ régulière. Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la SP orthogonale correspondante alors :*
Toute suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ quasi-orthogonale d'ordre $s \geq 1$ par rapport à u donnée par
$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{n,i} P_i(x)$ *si* $0 \leq n \leq s-1$

$$B_n(x) = \sum_{i=n-s}^{n} b_{n,i} P_i(x) \ \textbf{\textit{si}} \ n \geq s \tag{2.3.9}$$

Et $\exists r \geq s : b_{r-s} \neq 0$

Preuve :

Puisque $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est libre alors :
$\forall n \geq 0, \exists b_{n,i} \in \mathbb{C}, 0 \leq i \leq n$ tel que
$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{n,i} P_i(x)$
par le lemme (2.3.1) toute suite quasi-orthogonale d'ordre $s \geq 0$ satisfait les conditions
$< u, P_n B_m >= 0$ si $0 \leq m \leq n - s - 1, n \geq s + 1$
et $\exists r \geq s :< u, P_{r-s} B_r > \neq 0$
Ainsi
$< u, P_m B_n >= 0$ si $0 \leq m \leq n - s - 1, n \geq s + 1$
i.e. $B_n(x) =< u, \sum_{i=0}^{n} b_{n,i} P_i P_m >= 0$ si $0 \leq m \leq n - s - 1, n \geq s + 1$
i.e. $b_{n.m} < u, {P_m}^2 >= 0$ si $0 \leq m \leq n - s - 1, n \geq s + 1$.
Comme par la régularité de $u, < u, {P_m}^2 > \neq 0$ alors :
$b_{n,m} = 0, 0 \leq m \leq n - s - 1, n \geq s + 1$
Ainsi $B_n(x) = \sum_{i=n-s}^{n} b_{n,i} P_i(x)$ si $n \geq s + 1$
En outre : $\exists r \geq s :< u, P_{r-s} B_r > \neq 0$ i.e.
$\exists r \geq s : \sum_{i=r-s}^{n} b_{r,i} < u, P_{r-s} P_i > \neq 0$ i.e.
$\exists r \geq s : b_{r,r-s} < u, {P_{r-s}}^2 > \neq 0$ alors
$\exists r \geq s : b_{r,r-s} \neq 0$, ce qui conclut la démonstration.

2.4 Quasi Orthogonalité Stricte d'ordre s

Définition 2.4.1. *La suite de polynômes $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est dite strictement quasi-orthogonale d'ordre $s \geq 0$ par rapport à une forme u si elle vérifie (2.3.1) et :*

$$\forall n \geq s :< u, B_{n-s} B_n > \neq 0 \tag{2.4.1}$$

Lemme 2.4.1. *Toute suite de polynôme $\{B_n\}_{n\geq 0}$ strictement quasi-orthogonale d'ordre $s \geq 0$ relativement à u est libre, elle peut être toujours normalisé.*

Preuve :

Soient n, m deux entiers positifs avec $n \leq m$
Si $\sum_{i=n}^{m} \alpha_i \beta_i = 0$ où $\alpha_i \in \mathbb{C}, n \leq i \leq m$ alors, en considérant $n \leq k \leq m$:
La condition $\sum_{i=n}^{m} \alpha_i < u, B_{k+s} B_i >= 0$ est équivalente á :

$$\sum_{i=k}^{m} \alpha_i < u, B_{k+s} B_i >= 0 \tag{2.4.2}$$

Puisque $\{B_n\}_{n\geq 0}$ vérifie (2.3.1).
Si $k = m$ la condition (2.4.2) exige que $\alpha_m = 0$ car $< u, B_{m+s} B_m >\neq 0$, puisque $\{B_n\}_{n\geq 0}$ vérifie (2.4.1)
Ensuite, en prenant $k = m-1$,on obtient de manière analogue que :$\alpha_{m-1} = 0$.
En répétant le processus, on conclut que $\alpha_k = 0, n \leq k \leq m$ Ce qui conclut la démonstration.

Remarque 2.4.1.
1. *Toute suite strictement quasi-orthogonale d'ordre $s \geq 0$ relativement à u,est quasi-orthogonale d'ordre $s \geq 0$ relativement à u.*

2. *Une SP strictement quasi-orthogonale d'ordre zéro, est une SP (régulièrement) orthogonale,et u régulière.*

Lemme 2.4.2. *Soit $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ une SP, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\{B_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de polynômes strictement quasi-orthogonale d'ordre $s \geq 0$ relativement à u.*

2.

$$< u, Q_m B_n >= 0 \ \boldsymbol{si} \ 0 \leq m \leq n-s-1, n \geq s+1 \tag{2.4.3}$$

$$et \quad \forall n \geq s :< u, Q_{n-s} B_n > \neq 0 \tag{2.4.4}$$

Preuve :

Compte tenu des résultats précédents,la preuve de ce résultat est analogue á celle du lemme (2.3.1).

Lemme 2.4.3. *Soit $u \in P'$ régulière.Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la SP orthogonale correspondante alors : Toute suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est strictement quasi-orthogonale d'ordre $s \geq 1$ par rapport à u peut s'écrire sous la forme :*

$$B_n(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} b_{n,i} P_i(x) \ si \ 0 \leq n \leq s-1 \\ \sum_{i=n-s}^{n} b_{n,i} P_i(x) \ si \ n \geq s \end{cases} \tag{2.4.5}$$

Et $\forall n \geq s : b_{n-s} \neq 0$

Preuve :

Compte tenu des résultats précédents,la preuve de ce résultat est analogue á celle du lemme (2.3.2).

L'utilisation la plus fréquente de la quasi-orthogonalité se fait dans les conditions suivantes :

Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ une SP normalisée orthogonale á $u \in P'$ régulière ,il existe une forme $\tilde{u}$ de telle sorte que la SP $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est quasi-orthogonale relativement à $\tilde{u}$ On peut caractériser une telle situation comme suit :

Proposition 2.4.1. *Pour chaque SP $\{P_n\}_{n\geq 0}$ normalisée et régulièrement orthogonale Relativement á u et pour chaque $\tilde{u} \in P'$, les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *la SP* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *est quasi-orthogonale d'ordre* $s \geq 0$ *relativement á* $\tilde{u}$.

2. $\exists r \geq s$ *tel que* $< \tilde{u}, P_{r-s}P_r > \neq 0$ *et* $< \tilde{u}, P_n >= 0, n \geq s+1$

3. *il existe un polynôme unique* ϕ *de degré* s *tel que* $\tilde{u} = \phi u$.

4. *la SP* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *est strictement quasi-orthogonale d'ordre* $s \geq 0$ *relativement á* $\tilde{u}$

5. $\exists s \geq 0$ *tel que* $< \tilde{u}, P_s > \neq 0$ *et* $< \tilde{u}, P_n >= 0, n \geq s+1$

Preuve :

$1 \Rightarrow 2$

il en résulte immédiatement de la définition de la suite quasi-orthogonale.
Pour $s \geq 0 : \exists r \geq s < \tilde{u}, P_{r-s}P_r > \neq 0$ et $< \tilde{u}, P_n p_0 >= 0, n \geq s+1$

$2 \Rightarrow 3$

considérons $v \in P'$ donnée par : $v = \tilde{u} - \sum_{i=0}^{s} \lambda_i x^i u$

Par l'hypothèse on a que $< v, P_n >= 0, n \geq s+1$ comme

$< v, P_n >=< \tilde{u} - \sum_{i=0}^{s} \lambda_i x^i u, P_n >=< \tilde{u}, P_n > - \sum_{i=0}^{s} \lambda_i < u, x^i P_n >, n \geq s+1$

Et $< \tilde{u}, P_n >= 0, n \geq s+1$ et $< u, x^i P_n >= 0, n \geq s+1$ (par orthogonalité régulière de $\{P_n\}_{n\geq 0}$ relativement à u).

Il Est possible de déterminer les coefficients $\lambda_i, 0 \leq i \leq s$ de façon unique par :

les conditions $< v, P_n >= 0, 0 \leq n \leq s$ Dit d'autre manière, nous prétendons déterminer les coefficients.

$\lambda_i, 0 \leq i \leq s$ de manière que

$< \tilde{u}, P_n > - \sum_{i=0}^{s} \lambda_i < u, x^i P_n >= 0, 0 \leq n \leq s$

ce qui correspond à résoudre le système triangulaire superieure de $n+1$

equation à $n+1$ inconnues au-dessus présenté sous la forme matricielle :

$$U\lambda = B, \tag{2.4.6}$$

où ce systeme présente une solution unique λ, depuis
D et $U = \prod_{i=0}^{s} < u, P_i^2 > \neq 0$
étant donné les relations d'orthogonalité.
Ainsi d'aprés la proposition (1.3.1), $v = 0$ par lequel $\tilde{u} = \phi u$, comme
$\phi = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i x^i$
Il reste á voir que degré $\phi = s$.
Supposons que degré $\phi < s$, on aura nécessairement que
$\lambda_s = 0$, ce qui contredit l'hypotèse
$\exists r \geq s \geq 0$ tel que $< \tilde{u}, P_{r-s}P_r > \neq 0$, en effet :
si $\lambda_s = 0$ alors
$< \tilde{u}, P_{r-s}P_r >= \sum_{i=0}^{s-1} \lambda_i < u, x^i P_{r-s}P_r >= 0$ parceque : degré$(x^i P_{r-s}) < r, 0 \leq i \leq s-1$,
et $< u, x^i P_{r-s}P_r >= 0, 0 \leq i \leq s-1$ étant donné que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est orthogonale à u.
Ainsi, $\lambda_s \neq 0$ et degré $\phi = s$.
$3 \Rightarrow 4$
En supposons que $\tilde{u} = \phi u = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i x^i u$ comme $\lambda_s \neq 0$, il résulte que
$< \tilde{u}, P_m P_n >= \sum_{i=0}^{s} \lambda_i < u, x^i P_m P_n >= 0$ si $0 \leq m \leq n-s-1, n \geq s+1$
parce que $0 \leq$ degré$(x^i P_m) \leq n-1$ et $\{P_n\}_{n\geq 0}$ orthogonale relativement à u
Possède que $< u, x^i P_m p_n >= 0, 0 \leq i \leq s$ pour
$0 \leq m \leq n-s-1, n \geq s+1$
Ainsi, on montre que $\{P_n\}_{n\geq 0}$ satisfait à la première condition.
$\forall n \geq s, < \tilde{u}, P_{n-s}P_n >= \sum_{i=0}^{s} \lambda_i < u, x^i P_{n-s}P_n >= \lambda_s < u, x^s P_{n-s}P_n >= \lambda_s < u, P_n^2 > \neq 0$
Alors nous montrons la deuxième condition.

$4 \Rightarrow 5$

Il en résulte immédiatement de la définition de la quasi-orthogonalité stricte d'ordre $s \geq 0$ de $\{P_n\}_{n\geq 0}$ relativement à u.

$5 \Rightarrow 2$

Il est immédiat : il suffit considérer $s = r$.

$4 \Rightarrow 1$

Toute suite strictement quasi-orthogonale d'ordre $s \geq 0$ relativement à une forme particulière est aussi quasi-orthogonale d'ordre $s \geq 0$, alors $4 \Rightarrow 1$

On peut appliquer ce résultat dans la construction de suites orthogonales à partir d'une suite orthogonale donnée.

Chapitre 3

Les Formes Classiques Et Semi-Classiques

3.1 Les Formes classiques

Dans ce chapitre, on s'interesse aux propriétés d'orthogonalités de la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ des dérivées de la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ on note : $Q_n = \frac{B'_{n+1}}{n+1}$, en général la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ n'est pas orthogonale. On pose le problème suivant :
déterminer toutes les suites orthogonales dont la suite des dérivés est aussi orthogonale.

Définition 3.1.1. *la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ orthogonale par rapport á u est une suite classique si et seulement si la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est orthogonale.*

Une premiere caractérisation est données par :

Proposition 3.1.1. *Pour que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ soit telle que la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ soit aussi orthogonale il faut et il suffit qu'ils existent deux polynômes ϕ et ψ tels que sa forme canonique verifie l'équation :*

$D(\phi u_0) + \psi u_0 = 0.$
où $deg\phi = t$ *avec* $t \leq 2$ *et* $deg\psi = 1$

Preuve :
On a les deux relations :
$B_0(x) = 1, B_1(x) = x - \beta_0$

$$B_{n+2}(x) = (x - \beta_{n+1})B_{n+1}(x) - \gamma_{n+1}B_n(x) \tag{3.1.1}$$

et : $Q_0(x) = 1, Q_1(x) = x - \alpha_0$

$$Q_{n+2}(x) = (x - \alpha_{n+1})Q_{n+1}(x) - \rho_{n+1}Q_n(x) \tag{3.1.2}$$

On dérivons (3.1.1), on obtient :

$$B_{n+2} = (n+2)Q_{n+1} + (n+1)\beta_{n+1}Q_n + n\gamma_{n+1}Q_{n-1} - (n+1)xQ_n \tag{3.1.3}$$

notons $\{u_n\}_{n\geq 0}$ et $\{v_n\}_{n\geq 0}$ les suites duales associées respectivement aux suites $\{B_n\}_{n\geq 0}$ et $\{Q_n\}_{n\geq 0}$, on applique v_0 á la relation (3.1.3) on obtient :
$< v_0, B_{n+1} >= 0$ pour $n \geq 2$
$< v_0, B_2 >= \gamma_2 - 2\rho_1$
ainsi la forme v_0 s'écrit :
$v_0 = \sum_{v=0}^{2} \lambda_v u_v$ avec :
$< v_0, B_0 >= \lambda_0 < u_0, B_0 >=< v_0, Q_0 >$ d'où : $\lambda_0 = 1.$
$< v_0, B_1 >= \lambda_1 < u, B_1 >= \beta_1 - \alpha_0 = \lambda_1$
$< v_0, B_2 >= \lambda_2 = \gamma_2 - 2\rho_1$
D'autre part on a d'aprés la propostion(1.3.2) $u_n = (< u_0, B_n^2 >)^{-1} B_n u_0$ d'où la relation :
$v_0 = (1 + \frac{\beta_1 - \alpha_0}{< u_o, b_1^2 >} B_1 + \frac{\gamma_2 - 2\rho_1}{< u_0, B_2^2 >} B_2) u_0$
c'est-á-dire $v_0 = \phi(x)u_0, deg\phi \leq 2.$
on a aussi $Dv_0 = -u_1 = -\frac{B_1}{< u_0, B_1^2 >} u_0 = 0$ d'où $Dv_0 + \frac{B_1}{< u_0, B_1^2 >} u_0 = 0$

$D(\phi(x)u_0) + \psi(x)u_0 = 0$ où $\psi(x) = \frac{B_1}{<u_0,B_1^2>}$
inversement
posons $\tilde{u} = \phi(x)u_0$ on a :
$< \tilde{u}, Q_n >= (n+1)^{-1} < \tilde{u}, B'_{n+1} >= -(n+1)^{-1} < D(\phi(x)u_0), B_{n+1} >= (n+1)^{-1} < u_0, \psi(x)B_{n+1} >= 0, n \geq 1$
$< \tilde{u}, xQ_n >= (n+1)^{-1} < u_0, x\psi(x)B_{n+1} >= 0, n \geq 2$
par réccurence on a :
$< \tilde{u}, x^m Q_n >= (n+1)^{-1} < u_0, x^m\psi(x)B_{n+1} >= 0, n \geq m+1$
d'où : $< \tilde{u}, x^m Q_n >= 0, n \geq m+1.....(*)$
d'autre part on a :
$< \tilde{u}, Q_0 >=< u_0, \psi(x)B_1 >\neq 0$
$< \tilde{u}, xQ_1 >= \frac{1}{2} < u_0, x\psi(x)B_2 >\neq 0$
par réccurence on a :
$< \tilde{u}, x^n Q_n >= \frac{1}{n+1} < u_0, x^n\psi(x)B_{n+1} >\neq 0$
d'où : $< \tilde{u}, x^n Q_n >\neq 0, \forall n \geq 0.....(**)$
les relations $(*)$ et $(**)$ signifient tous simplement que la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est orthogonale par rapport à $\tilde{u}$.

3.2 Construction des suites classiques

Par définition une suite classique $\{B_n\}_{n\geq 0}$ vérifie (3.1.1) et la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ vérifie (3.1.2) on utilisons ces deux relations plus la relation (3.1.3) de la façon suivante :
on utilise (3.1.3) pour exprimer B_{n+1}, B_{n+2}, B_n en fonction des Q_j ensuite on remplace le tous dans (3.1.1) on obtient une relation donnant Q_{n+2} en fonction de : $xQ_{n+1}, Q_{n+1}, Q_n, Q_{n-1}, Q_{n-2}, xQ_n, xQ_{n-1}$ on utilise ensuite (3.1.2) pour exprimer les xQ_j on obtient finalement Q_{n+2} en fonction de
$xQ_{n+1}, Q_{n+1}, Q_n, Q_{n-1}, Q_{n-2}$

d'autre part $xQ_{n+1}, (Q_j)_{j=0}^{n+1}$ est une base de P_{n+2} et on trouve que Q_{n+2} à deux expressions dans la même base, une identification des coefficients entre les deux écritures donne le système suivant :

$\alpha_0 = \frac{1}{2}(\beta_0 + \beta_1)$

$(n+2)\beta_{n+2} - n\beta_{n+1} - (n+3)\alpha_{n+1} + (n+1)\alpha_n = 0, n \geq 0$

$(n+1)\gamma_{n+2} - (n-1)\gamma_{n+1} - (n+3)\rho_{n+1} + (n+1)\rho_n + (n+1)(\beta_{n+1} - \alpha_n)^2 = 0$

$\gamma_2 + \gamma_1 - 3\rho_1 + (\beta_1 - \beta_0)^2 = 0$

$n\gamma_{n+1}(\beta_{n+1} + \beta_n - 2\alpha_{n-1}) + (n+1)\rho_n(\alpha_{n-1} + \alpha_n - 2\beta_{n+1}) = 0$

$-2n\rho_{n-1}\gamma_{n+1} + (n+1)\rho_{n-1}\rho_n + (n-1)\gamma_n\gamma_{n+1} = 0$

pour résoudre ce système on pose :

$\rho_n = \frac{n}{n+1}\gamma_{n+1}\theta_n$ et le système précédent devient :

$(n+1)(1 - \frac{n+3}{n+2}\theta_{n+1})\gamma_{n+2} + (1 + n\theta_n - n)\gamma_{n+1} + (n+1)(\beta_{n+1} - \alpha_n)^2 = 0$

$\beta_{n+1}(1 - 2\theta_n) + \beta_n = (2 - \theta_n)\alpha_{n-1} - \theta_n\alpha_n$

$\theta_{n+1} + \frac{1}{\theta_n} = 2$

La dernière équation permet de résoudre le système, elle possède les deux solutions ;

$\theta_n = 1$ et $\theta_n = \frac{n+z+1}{n+z}$ avec $z \neq n$

1. cas :

   A : $\theta_n = 1$:

   $\beta_n = \beta_0 - 2cn$ et $\gamma_{n+1} = (n+1)(\gamma_1 + c^2 n)$ avec $c = \frac{1}{2}(\beta_0 - \beta_1)$

   $K\phi(x) = 1 + \frac{c}{\gamma_1}(\beta_0 - x)$ où K est un facteur de normalisation.

   A1 : $c = 0$ donc : $K = 1, \phi(x) = 1$ et $\psi(x) = 2x$ on obtient :

   $\beta_n = 0$ et $\gamma_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)$

   La forme u dans ce cas est la forme "d'HERMITE" H, elle est définie positive.

   A2 : $c \neq 0$ donc $K = -\frac{c}{\gamma_1}$ et on posons $\gamma_1 = \alpha + 1$ on a :

   $\phi(x) = x$ et $\psi(x) = x - \alpha - 1$ et $\beta_n = 2n + \alpha + 1$ et $\gamma_{n+1} = (n+1)(n+\alpha+1)$

La forme u dans ce cas est la forme de "LAGUERRE" $L(\alpha)$.Celle ci est définie positive si $\alpha + 1 \geq 0$

2. cas :
   B : $\theta_n = \frac{n+z+1}{n+z}$ on distingue deux cas selon que ϕ à une racine double ou deux racines simple
   B1 : ϕ possède une racine double alors on a :
   $\phi(x) = x^2$ et $\psi(x) = -2(\alpha x + 1)$ avec $2\alpha = z + 1$
   $\beta_n = \frac{1-\alpha}{(n+\alpha)(n+\alpha-1)}$
   $\gamma_{n+1} = -\frac{(n+1)(n+2\alpha-1)}{(2n+2\alpha-1)(2n+\alpha+1)(n+\alpha)^2}$
   la forme u dans ce cas et la forme "BESSEL" $B(\alpha)$ celle-ci n'est jamais définie positive.
   B2 : ϕ possède deux racines simples dans ce cas on a :
   $\phi(x) = x^2 - 1$ et $\psi(x) = -(\alpha+\beta+2)x + \alpha - \beta$ où on pose : $\alpha+\beta+1 = z$
   $\beta_n = \frac{\alpha^2-\beta^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$
   $\gamma_{n+1} = \frac{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+1)(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)^2(2n+\alpha+\beta+3)}$
   la forme u dans ce cas est la forme de "JACOBI" $J(\alpha, \beta)$ elle est définie positive lorsque $\alpha, \beta \geq -1$
   plusieurs cas particuliers sont biens connus :
   $\alpha = \beta$: la forme de "GEGENBAUER"
   $\alpha = \beta = 0$: la forme de "LEGENDRE"
   $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$: la forme de "TCHEBYCHEV" de premiers espece
   $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$: la forme de "TCHEBYCHEV" de deuxième espece.

Remarques 3.2.1. *si la forme u est représentée par :*
$u(.) = \int_{-\infty}^{+\infty} .w(x)dx$
alors la fonction poid $w(x)$ vérifie l'équation differentille :
$D(\phi w) + \psi w = 0$, *qui permet d'avoir par exemple pour la forme d'HERMITE :*

$H(.) = \int_{-\infty}^{+\infty} .e^{-x^2}dx$

3.3 Autres Caractérisation des Suites Classiques

On peut caractériser les suites classiques par des relations differentielles du premier et du second ordre qu'on appelle les relations de structures, dans ce contexte on a :

Proposition 3.3.1. *(EL SALAM, CHIHARA) Pour que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ orthogonale par rapport á u soit une suite classique, il faut et il suffit qu'il existe un polynôme unitaire ϕ ou $t = deg\phi \leq 2$ et une suite $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ tels que :*

$$\phi(x)B'_{n+1}(x) = q(x,n)B_{n+1}(x) + \lambda_n B_n \tag{3.3.1}$$

où $q(x,n)$ est un polynôme de degrée $t-1$ (lorsque $t = 0, q(x,n) = 0$) pour montrer cette proposition on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.3.1. *Soit $\{B_n\}_{n\geq 0}$ une suite orthogonale par rapport á u et ϕ un polynôme de degrée t, alors pour tout $n \geq 0$ il existe un polynôme $q(x,n)$ de degrée $t-1$ et un système de nombres réels $\theta_{n,v}, v \leq n$ tels ques :*

$$\phi(x)B'_{n+1} = q(x,n)B_{n+1} + \sum_{v=0}^{n} \theta_{n,v}B_v \tag{3.3.2}$$

De plus la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$vérifie la relation :

$$< D(\phi u), B_m B_{n+1} > + < u, (q(.,m-1) + q(.,n))B_m B_{n+1} > + K_{nm} = 0 \tag{3.3.3}$$

où

$$K_{nm} = \theta_{n,m} < u, B_m^2 > \quad si \quad m \leq n \tag{3.3.4}$$

$\theta_{m-1,n+1} < u, B_{n+1}^2 > \quad si \quad m \geq n+1$

Preuve du lemme :

la relation (3.3.2) est le resultat de la division euclidienne de $\phi(x)B'_{n+1}$ par B_{n+1}, pour (3.3.3) et (3.3.4) on a d'un coté :

$< u, \phi B'_{n+1}B_m > = < \phi u, (B_{n+1}B_m)' - B'_m B_{n+1} >$

$= - < D(\phi u), B_{n+1}B_m > - < u, \phi B'_m B_{n+1} >$

$= - < D(\phi u), B_{n+1}B_m > - < u, q(., m-1)B_m B_{n+1} - \sum_{v=0}^{m-1} \theta_{m-1,v} < u, B_v B_{n+1} > .....(*)$

d'un autre coté on a :

$< u, \phi(x)B'_{n+1}B_m > = < u, q(., n)B_{n+1}B_m > + \sum_{v=0}^{n} \theta_{n,m} < u, B_v B_m > .....(**)$

par identification de (*) et (**) on a :

$< D(\phi u), B_{n+1}B_m > + < u, (q(., m-1) + q(., n))B_{n+1}B_m > + K_{nm} = 0$

où :$K_{nm} = \sum_{v=0}^{n} \theta_{nm} < u, B_v B_m > + \sum_{v=0}^{m-1} \theta_{m-1,v} < u, B_v B_{n+1} >$

On distingue les deux cas : $m \leq n$ et $m \geq n+1$ on obtient (3.3.4)

Preuve de la proposition :

On a : $D(\phi u) + \psi u = 0$ où ϕ est de degré $t \leq 2$, la relation (3.3.3) devient pour $n \leq m$:

$- < u, \psi B_m B_{n+1} > - < u, (q(., m-1) + q(., n))B_m B_{n+1} > + \theta_{nm} < u, B_m^2 > = 0$

de l'orthogonalité de $\{B_n\}_{n \geq 0}$ on a :

$\theta_{nm} = 0$ pour $m \leq n-1$

pour $n = m$ et on posons $\psi(x) = a_1 x + a_0$ on a :

$-a_1 < u, B_{n+1}^2 > + < u, (q(., n-1) + q(., n))B_n B_{n+1} > + \theta_{nn} < u, B_n^2 > = 0$

si $t \leq 1$ alors $\deg q(x, n) = 0$ et donc :

$\theta_{nn} = \lambda_n = a_1 \frac{<u, B_{n+1}^2>}{<u, B_n^2>} = a_1 \gamma_{n+1} \neq 0$

si $t = 2$ on a : $q(x, n) = (n+1)x + z_n$ et dans ce cas on a :

$\theta_{nn} = \lambda_n = (a_1 - (2n+1))\gamma_{n+1} \neq 0$ (car pour $t = 2$ on a $a_1 \notin \mathbb{N}^*$)

d'où (3.3.1).

inversement :
si la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ vérifie (3.3.1) on a nécessairement par comparaison avec (3.3.2) :
$\theta_{nm} = 0$ pour $m \leq n-1$ et $\theta_{nn} = \lambda_n$, d'un côté posons maintenant :
$G = D(\phi u) + (\chi_0 B_0 + \chi_1 B_1)u$, on a
$< G, B_n >= 0, n \geq 2$
de plus de la relation (3.3.3) pour $n = 0$ ensuite pour $m = 0$ on obtient :
$\chi_0 = 0$ et $\chi_1 = \frac{1}{\gamma_1}(< u, q(.,0)B_1 > +\lambda_0)$ donc on a $G = 0$ où $D(\phi u) + \psi u = 0$ avec $\psi = \chi_1 B_1$ la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est classique.

Corollaire 3.3.1. *les racines d'un polynôme classique sont simples*

Preuve :
si x_0 est une racine de B_{n+1} alors d'aprés la proposition (3.3.1) on a :
$\phi(x_0)B'_{n+1}(x_0) = \lambda_n B_n(x_0)$
or B_n et B_{n+1}, n'ont pas de racines communs, donc $B_n(x_0) \neq 0$
c'est à dire $B'_{n+1}(x_0) \neq 0$ puisque $\lambda_n \neq 0$.

Proposition 3.3.2. *, (BOCHNER)*
soit $\{B_n\}_{n\geq 0}$ une suite orthogonale par rapport à u
la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est une suite classique si et seulement si ils existent deux polynômes ϕ, ψ où $deg\phi = t, t \leq 2$ et $deg\psi = 1$ et une suite $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}, \lambda_n \neq 0$ tels que :

$$\phi(x)B''_{n+1}(x) - \psi(x)B'_{n+1}(x) = \lambda_n B_{n+1}, n \geq 0 \qquad (3.3.5)$$

Preuve :
toujours la même technique on divise $\phi(x)B''_{n+1} - \psi(x)B'_{n+1}$ par B_{n+1} on obtient : $\phi(x)B''_{n+1} - \psi(x)B'_{n+1} = \lambda_n B_{n+1} + \sum_{v=0}^{n} \theta_{n,v} B_v$

on multiplie par B_m et on applique u on obtient :
$< u, (\phi(x)B''_{n+1} - \psi(x)B'_{n+1})B_m >= \theta_{n,m} < u, B_m^2 >, m \leq n.....(*)$
or on a :
$< u, \phi(x)B''_{n+1}B_m >=< \phi u, (B'_{n+1}B_m)' - B'_mB'_{n+1} >$
$= - < D(\phi u), B'_{n+1}B_m > - < \phi u, B'_{n+1}B'_m >$
$=< \psi u, B'_{n+1}B_m > - < \phi u, B'_{n+1}B'_m >$ c'est à dire :
$< u, \phi(x)B''_{n+1}B_m > - < u, \psi(x)B'_{n+1}B_m >= - < \phi u, B'_mB'_{n+1} >$
ou encore :
$< u, (\phi(x)B''_{n+1} - \psi(x)B'_{n+1})B_m >= - < \phi u, B'_{n+1}B'_m > .....(**)$
de $(*)$ et $(**)$ on a :
$\theta_{n,m} = -\frac{<\phi u, B'_mB'_{n+1}>}{<u, B_m^2>} = 0, m \leq n$.d'où la relation demandé.
inversement
si $\{B_n\}_{n\geq 0}$ vérifie la relation (3.3.5) alors on a :
$< u, \phi(x)B''_{n+1} - \psi(x)B'_{n+1} >= 0, n \geq 0$
$< D^2(\phi u), B_{n+1} > + < D(\psi u), B_{n+1} >= 0$
$< D(D(\phi u) + \psi u), B_{n+1} >= 0, n \geq 0$
$D(D(\phi u) + \psi u) = 0$, c'est à dire $D(\phi u) + \psi u = 0$

Remarques 3.3.1. *la suite des dérivées est elle même classique car elle est orthogonale par rapport à $\tilde{u}$ qui vérifie l'équation :*
$D(\phi\tilde{u}) + (\psi - \phi')\tilde{u} = 0$ *avec* $deg(\psi - \phi') = 1$.
On peut donner d'autres caractérisations des suites classiques permis lequelles on site l'utilisation de la fonction de "STIELJES" associée à une forme linéaire, on verra ça dans un cadre plus général celui des suites semi-classique.

Les formes semi-classiques géneralisent naturellement les formes classiques de la façon suivante :

3.4 Les Formes Semi-Classiques

Définition 3.4.1. *On appelle forme semi-classique toute forme régulière solution de l'équation :*

$$D(\phi u) + \psi u = 0 \qquad (3.4.1)$$

où $deg\phi = t \geq 0$ *et* $deg\psi = P \geq 1$
la suite normalisée associée à u *est appellée suite semi-classique.*

Remarques 3.4.1. *Le couple* (ϕ, ψ) *qui vérifie les conditions précédentes est appellée un couple admissible.*
une forme semi-classique vérifie une infinite d'équation du type (3.4.1), il suffit de multiplier par un polynôme unitaire χ *pour obtenir un nouveau couple admissible* $(\chi\phi, \chi\psi - \chi'\phi)$ *et l'équation :* $D(\chi\phi u) + (\chi\psi - \chi'\phi)u = 0$
D'autre part on peut attacher à chaque couple admissible (ϕ, ψ) *un entier* s *définie par :*

$$s = max(t-2, p-1) \qquad (3.4.2)$$

ainsi à toute forme semi-classique u *on peut associer une partie de* $\mathbb{N}$ *noté* $h(u)$.

Définition 3.4.2. *on appelle classe de* u *l'élément minimum de* $h(u)$.

PROPRIETES SUR LA SUITE DES DERIVÉES D'UNE SUITE SEMI-CLASSIQUE :
On a déja vue que dans le cas classique la suite des dérivées $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est

orthogonale.
pour le cas semi-classique on perd cette propriété, commençons d'abord par donner quelques définitions, à côté de la notion de quasi-orthogonalité déja vue dans le chapitre '2' on a :

Définition 3.4.3. *la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est dite $\frac{1}{p}$-orthogonale si p est le plus petit entier superieur ou égal à 1 tel que*

$$< u, B_nB_m >= 0 \textbf{ pour } n \geq mp+1, m \geq 0 \tag{3.4.3}$$

Définition 3.4.4. *la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est dite faiblement orthogonale d'index (p, q) si :*

$$< u, B_{p-1} >\neq 0, < u, B_n >= 0, n \geq p \tag{3.4.4}$$

$$< u, xB_{q-1} >\neq 0, < u, xB_n >= 0, n \geq q \tag{3.4.5}$$

Remarques 3.4.2. *une suite strictement quasi-orthogonale d'ordre s est une suite faiblement orthogonale d'index $(s+1, s+2)$*

Preuve :
une suite strictement quasi-orthogonale d'ordre s vérifie :

$$< u, B_nB_m >= 0, |n-m| \geq s+1 \tag{3.4.6}$$

$$\forall n \geq s, < u, B_{n-s}B_n >\neq 0 \tag{3.4.7}$$

si $m = 0$ dans (3.4.6) et $n = s$ dans (3.4.7) on obtient (3.4.4)
si $n = s+1$ dans (3.4.7) alors $< u, B_1B_{s+1} >\neq 0$ et $< u, xB_n >= 0$ pour $n \geq s+2$ on obtient alors (3.4.5).

Proposition 3.4.1. *Pour chaque suite* $\{B_n\}_{n\geq 0}$ *regulièrement orthogonale par rapport a u les énnonces suivants sont équivalents :*

a) *La suite* $\{B_n\}_{n\geq 0}$ *est quasi-orthogonale d'ordre s par rapport á* $\tilde{u}$.

b) $\exists r \geq s \geq 0$ *tel que :* $< \tilde{u}, B_{r-s}B_r > \neq 0$ *et* $< \tilde{u}, B_n >= 0, n \geq s+1$.

c) *Il existe un polynôme unique* ϕ *de degrée s tel que :*$\tilde{u} = \phi u$.

d) *la suite* $\{B_n\}_{n\geq 0}$*est strictement quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à*$\tilde{u}$.

e) $\exists s \geq 0$ *tel que* $< \tilde{u}, B_s > \neq 0$ *et* $< \tilde{u}, B_n >= 0$ *pour* $n \geq s+1$.

Preuve :

$a \Rightarrow b$:evident par définition.

$b \Rightarrow c$

d'après le lemme (1.3.3)

$\tilde{u} = \sum_{v=0}^{s} \lambda_v u_v$

$\tilde{u} = \sum_{v=0}^{s} (< u_0, B_v^2 >)^{-1} B_v u_0 = \phi u_0$.

$c \Rightarrow d$

Si on note $\phi(x) = c_s x^s + ...$ alors $< \tilde{u}, B_{n-s}B_n >= c_s < u_0, B_n^2 > \neq 0$.

$d \Rightarrow e$:evident d'après la définition.

$e \Rightarrow a$: d'aprés le lemme (1.3.3)

Proposition 3.4.2. *La suite* $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ *des derivées de la suite* $\{B_n\}_{n\geq 0}$*semi-classique de classe s par rapport á uest :*

1. *strictement quasi-orthogonale d'ordre s par rapport á* $\tilde{u} = \phi u$ *si* $P - 1 \geq t - 2$.

2. *Quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à* $\tilde{u} = \phi u$ *si* $p - 1 < t - 2$.

Preuve :

On a $D(\phi u) + \psi u = 0$ avec $deg\phi = t$ et $deg\psi = p, s = max(p-1, t-2)$

posons $\tilde{u} = \phi u$

$< \tilde{u}, Q_n >=< \tilde{u}, \frac{B'_{n+1}}{n+1} > -\frac{1}{n+1} < \phi u, B'_{n+1} >= -\frac{1}{n+1} < D(\phi u), B_{n+1} >$

$= \frac{1}{n+1} < \psi u, B_{n+1} >= \frac{1}{n+1} < u, \psi B_{n+1} >= 0$ pour $n \geq s+1$

de même :

$< \tilde{u}, Q_1 Q_n >= \frac{1}{n+1} < u, Q_1 \psi B_{n+1} >= 0$ pour $n \geq s+2$.

$< \tilde{u}, Q_m Q_n >= \frac{1}{n+1} < u, Q_m \psi B_{n+1} >= 0$ pour $n \geq s+m+1$ donc :

$< \tilde{u}, Q_m Q_n >= 0$ pour $n - m \geq s+1$...

D'autres part on a pour tout $n \geq s$:

$< \tilde{u}, Q_{n-s} Q_n >= \frac{1}{n+1} < u, \psi(x) Q_{n-s} B_{n+1} >$

si $p - 1 \geq t - 2$:

$degQ_{n-s}\psi(x) = p + n - (p-1) = n+1$ donc :

$< \tilde{u}, Q_{n-s} Q_n > \neq 0$ pour tout $n \geq s$

$\{Q_n\}_{n \geq 0}$ est strictement quasi-orthogonale d'ordre s

si $p - 1 < t - 2$:

on a pour $n = s$: $< \tilde{u}, Q_s >= \frac{1}{s+1} < u, \psi(x) B_{s+1} >= 0$ puisque $p < s+1$.

donc la suite est seulement quasi-orthogonale d'ordre s.

Remarques 3.4.3. *Dans le cas classique on a toujours $p-1 = t-2$ la suite $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ est strictement quasi-orthogonale d'ordre 0 c'est-á-dire orthogonale*

Proposition 3.4.3. *Si la suite $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ est quasi-orthogonale d'ordre s alors la suite $\{B_n\}_{n \geq 0}$ est une suite semi-classique de classe s*

Preuve :

La suite $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ est quasi-orthogonale par rapport á une forme $\tilde{u}$

$< \tilde{u}, x^m Q_n >= 0$ pour $n \geq m+s+1$

$\exists r \geq s$ tel que $< \tilde{u}, x^{r-s} Q_r > \neq 0$. On a :

$B_{n+1} = (n+2)Q_{n+1} + (n+1)\beta_{n+1} Q_n + n\gamma_{n+1} Q_{n-1} - (n+1)x Q_n$

$< \tilde{u}, B_{n+1} >= 0$ pour $n \geq s+2$ de plus :

$\exists t \leq s+2$ tel que :$< \tilde{u}.B_t > \neq 0$ et $< \tilde{u}, B_n >= 0$ pour $n \geq t+1$

D'aprés la proposition(3.4.3) il existe un polynôme ϕ de degrée t tel que :
$\tilde{u} = \phi u_0$
$< D(\phi u_0), B_{n+1} >= - < \phi u_0, B'_{n+1} >= -(n+1) < \tilde{u}, Q_n >$
$< \tilde{u}, Q_n >= 0$ pour $n \geq s+1$ alors il existe un $p \geq 1, p-1 \leq s$ tel que :
$< \tilde{u}, Q_{p-1} > \neq 0$ et $< \tilde{u}, Q_n >= 0$ pour $n \geq p$.
Ce qui signifie pour la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$
$< D(\phi u_0), B_p > \neq 0$ et $< D(\phi u_0), B_n >= 0$ pour $n \geq p+1$
d'aprés le lemme on trouve que :
$D(\phi u_0) = (\sum_{v=0}^{p} \lambda_v (< u_0, B_v^2 >)^- 1 B_v) u_0 = -\psi u_0$
d'où finalement : $D(\phi u_0) + \psi u_0 = 0$
la condition sur la suite des dérivées peut être remplacée par une condition moin forte qui est la faible orthogonalité, dans se cadre on a :

Proposition 3.4.4. *soit $\{B_n\}_{n\geq 0}$ une suite orthogonale par rapport à u, les énoncés suivants sont équivalents :*

a) *la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est faiblement orthogonale d'index $(p,q)/\tilde{u}$*

b) *les formes u et $\tilde{u}$ vérifient les trois propriétées suivantes :*

1. *il existe un polynome ψ de deg p tel que : $< \tilde{u}, B' >=< \psi u, B >$.*

2. *il existe un polynome χ de deg q tel que : $< x\tilde{u}, B' >=< \chi u, B >$.*

3. *posons $s = max(p-1, q-2)$*
   $\exists r \leq s+2$ et un polynome ϕ de deg $s+2-r$ tel que : $\tilde{u} = \phi_u$

c) *la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est quasi-orthogonale d'ordre $s/\tilde{u}$*

Preuve :

$a \Rightarrow b$
$< \tilde{u}, Q_{p-1} > \neq 0$ et $< \tilde{u}, Q_n >= 0, n \geq p$
$< \tilde{u}, xQ_{q-1} > \neq 0$ et $< \tilde{u}, xQ_n >= 0, n \geq q$

soit G dans P' définie par :

$< G, B >=< \tilde{u}, B' >$

on a : $< G, B_{n+1} >= 0, n \geq p$ et $< G, B_p >\neq 0$

d'aprés la proposition (3.4.4) il existe un polynome ψ de $degp$ tel que :

$G = \psi u$ d'où 1)

la meme chose pour 2) on considérant :

$< G_1, B >=< \tilde{u}, xB' >$

pour 3)

$s = max(p-1, q-2)$

on a la relation

$B_n = (n+1)Q_n + n\beta_n Q_{n-1} + (n-1)\gamma_n Q_{n-2} - nxQ_{n-1}$

$< \tilde{u}, B_n >= 0$ pour $n \geq max(p+2, q+1) = s+3$

pour $n = s+2$ on distingue deux cas :

$p < q-1$ on a : $< \tilde{u}, B_{s+2} >= -q < \tilde{u}, xQ_{q-1} >\neq 0$

$q-1 < p$ on a : $< \tilde{u}, B_{s+2} >= p\gamma_{p+1} < \tilde{u}, Q_{p-1} >\neq 0$

$p = q-1$ on a : $< \tilde{u}, B_{s+2} >= p\gamma_{p+1} < \tilde{u}, Q_{p-1} > -q < \tilde{u}, xQ_{p-1}$

donc on peut dire qu'il $\exists r \leq s+2$ tel que $< \tilde{u}, B_{s+2-r} >\neq 0$ et toujours d'aprés la proposition (3.4.4) il existe un polynome ϕ de deg $s+2-r$ tel que :

$\tilde{u} = \phi u$

$b \Rightarrow c$

de 1) et 3) de b) on a pour R et B dans P :

$< \tilde{u}, B'R >=< \tilde{u}, (BR)' > - < \tilde{u}, BR' >$

$=< \psi u, BR > - < \phi u, BR' >$

$=< u, B(\psi R - \phi R') >$

en particulier si $R(x) = x$ on a :

$< \tilde{u}, xB' >=< u, B(x\psi, -\phi) >$ d'où compte tenu de 2) :

$< u, \chi B >=< u, B(x\psi - \phi) >$ d'où $\phi = x\psi - \chi$

on en déduit que :

$< \tilde{u}, B'R >=< u, B[\psi((R - xR') + \chi R')] >$
en particulier si $B = \frac{B_{n+1}}{n+1}$ et $R = x^m$ on a :
$< \tilde{u}, x^m Q_n >= \frac{1}{n+1} < u, B_{n+1}(1-m)x^m\psi + mx^{m-1}\chi >$
d'où $< \tilde{u}x^m Q_n >= 0$ pour $n \geq m + s + 1$...(*)
pour $m = n - s$
si $p < q - 1 :< \tilde{u}, Q_s >= 0$ et $< \tilde{u}, xQ_{s+1} >\neq 0$
si $q - 1 < p :< \tilde{u}, Q_s >\neq 0$ et $< \tilde{u}, xQ_{s+1} >= 0$
si $p = q - 1 :< \tilde{u}, Q_s >\neq 0$ et $< \tilde{u}, xB_{s+1} >\neq 0$
donc on peut dire qu'il existe $r \geq s$ tel que :
$< \tilde{u}, x^{r-s} Q_r >\neq 0$...(**)
(*) et (**) signifient que $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est quasi-orthogonale d'ordre s.
$c \Rightarrow a$ évident.
Conclusion :
la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ orthogonale par rapport á u est semi classique de classe s si et seulement si la suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ est faiblement orthogonale.
Caractérisation Des suites semi-classiques
on a une généralisation des relations de structures des suites classiques

Proposition 3.4.5. *pour que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ orthogonale par rapport à u, soit une suite semi-classique il faut et il suffit qu'il existe un entier $s \geq 0$ et un polynôme ϕ de degrée $t \leq s + 2$ tel que :*
$\phi(x)B'_{n+1} = q(x,n)B_{n+1} + \sum_{v=n-s}^{n} \theta_{n,v}B_v$ *pour* $n \geq s$
$\theta_{n,n-s} \neq 0, n \geq s$

Proposition 3.4.6. *pour que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ soit une suite semi-classique il faut et il suffit qu'il existe un entier $s \geq 0$et deux polynômes ϕ et ψ ou $deg\phi \leq s + 2$ et $deg\psi = s + 1$ et une suite $\{\lambda_{n,v}\}$ tels que :*
$\phi(x)B''_{n+1} - \psi(x)B'_{n+1} = q_s(x,n)B_{n+1} + \sum_{v=n-s+1}^{n} \lambda_{n,v}B_v, n \geq s$

Proposition 3.4.7. *Si la suite* $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ *est* $\frac{1}{s}$*-orthogonale*$(s \geq 1)$*alors la suite* $\{B_n\}_{n\geq 0}$ *est semi-classique de classe* $s-1$.

Preuve :

On a :$< \tilde{u}, x^m Q_n >= 0$ pour $n \geq ms+1$
$< \tilde{u}, Q_n >= 0, n \geq 1$
$< \tilde{u}, xQ_n >= 0, n \geq s+1$
La suite $\{Q_n\}_{n\geq 0}$est faiblement orthogonale d'index $(1, s+1)$
Donc la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est semi-classique de classe $max(1-1, s+1-2) = s-1$.
Les polynômes orthogonaux semi-classiques peuvent être caractérisés par la relations de structures comme dans le cas classique mais aussi par :

Définition 3.4.5. *On appelle fonction de "STIELTJES" formelle de la forme u la série formelle définie par :*
$S(u)(x) = -\sum_{n\geq 0} \frac{(u)_n}{x^{n+1}}$

3.5 proprietes

1. $S'(u) = S(Du)$.

2. $S(u^2) = -xS^2(u)$.

3. $S(fu) = fS(u) + u.\theta_0 f$.

Proposition 3.5.1. *Pour qu'une forme u soit semi-classique il faut et il suffit que sa fonction de "STIELTJES" formelle vérifie l'équation affine :*

$$\phi(x)S''(x) = C(x)S(x) + D(x) \tag{3.5.1}$$

où :$C(x) = -(\phi'(x) + \psi(x))$ *et* $D(x) = -(u.\theta_0\phi)'(x) - (u.\theta_0\phi)(x)$

Preuve :

on a :$D(\phi u) + \psi u = 0$

$\phi Du = (-\phi' - \psi)u$

$S(\phi(Du)) = S((-\phi' - \psi)u)$

On utilise la propriété (3.5) on a :

$\phi S(Du) + u\theta_0\phi = (-\phi' - \psi)S(u) + u\theta_0(-\phi' - \psi)$

$\phi S' = CS + D$ où :$C(x) = -\phi' - \psi$ et $D(x) = -(u\theta_0\phi)' - (u\theta_0\psi)$

Remarques 3.5.1. *Dans le cas des polynômes classique la relation (3.5.1)s'écrit :*

$$\phi S' = -[(\phi' + \psi)S + \frac{1}{2}\phi'' + \psi'] \tag{3.5.2}$$

l'équation (3.5.1) est appeler l'équation de LAGUERRE-HAHN affine.

Définition 3.5.1. *Si* $\{B_n\}_{n\geq 0}$ *est une suite orthogonale par rapport a u. La suite* $\{B_n^{[1]}\}_{n\geq 0}$*définie par :*

$B_n^{[1]}(x) =< u, \frac{B_{n+1}(x)-B_{n+1}(t)}{x-t} >$

ou on suppose que u agit sur la variable t est appellée suite associée a la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$.

on note $u^{[1]}$*la forme lineaire associée á la suite* $\{B_n^{[1]}\}_{n\geq 0}$ *on a :*

1. $\gamma_1 u^{[1]} = -x^2 u^{-1}$.

2. $\gamma_1 S(u^[1]) = -\frac{1}{S(u)} - (x - \beta_0)$

La forme $u^{[1]}$ *vérifie l'équation :*

$$\phi S' = B_1 S^2 + C_1 S + D_1 \tag{3.5.3}$$

où : $B_1 = \gamma_1 D, C_1 = 2(x - \beta_0)D - C$

$\gamma_1 D_1 = (x - \beta_0)^2 D - (x - \beta_0)C - \phi$

l'équation (3.5.3)est une équation de RICATTI. donc $u^{[1]}$ *n'est pas une forme*

semi classique.
Les formes linéaires qui vérifient une relation du type (3.5.3) sont appellés les formes de LAGUERRE HAHN.

Application :
Cherchons dans quels cas la forme associée á une forme classique est une forme semi-classique :
Pour cela on détermine les polynômes C et D dans chaque cas :

1. HERMITE :$C(x) = -2x$ et $D(x) = -2$

2. LAGUERRE :$C(x) = -(x - \alpha)$ et $D(x) = -1$

3. BESSEL :$C(x) = 2(\alpha - 1)x + 2$ et $D(x) = 2\alpha - 1$

4. JACOBI :$C(x) = (\alpha + \beta)x + \beta - \alpha$ et $D(x) = \alpha + \beta + 1$

On remarque que la forme associée est semi-classique dans deux cas seulement,le cas BESSEL lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$ et le cas JACOBI lorsque $\alpha + \beta + 1 = 0$

3.6 Les Formes du Second degrée

Définition 3.6.1. *Une forme régulière u est appellée une forme du second degrée si sa fonction de "stieltjes" formelle vérifie l'équation :*

$$B(x)S^2(u)(x) + C(x)S(u)(x) + D(x) = 0 \qquad (3.6.1)$$

$$B \neq 0 \text{ et } C^2 - 4BD \neq 0 \text{ et } D(x) = (u\theta_0 C)(x) - (u^2\theta_0^2 B)(x) \qquad (3.6.2)$$

u vérifie :

$$B(x)u^2 - xC(x)u = 0 \qquad (3.6.3)$$

Proposition 3.6.1. *une forme du second degrée est une forme semi-classique et si u vérifie (3.6.2) et (3.6.3) alors u vérifie :*
$D(\phi u) + \psi u = 0$ *où :*
$\phi(x) = B(x)[C^2 - 4BD]$
$\psi(x) = -\psi'(x) - [2B(B'D - BD') + C(BC' - CB')]$

Remarques 3.6.1. *l'inverse n'est pas vrai, on pose le problème suivant : déterminer les formes semi-classique qui sont des formes du second degrée, autrement dit étant donné le couple admissible (ϕ, ψ), déterminer B et C tels que :*
$B[C^2 - 4BD] = \phi(x)$
$2B[B'D - BD'] + C[BC' - B'C] = -\phi'(x) - \psi(x)$
l'étude est faite pour le cas classique
le systeme admet une solution dans un seul cas celui de JACOBI :
$\phi(x) = x^2 - 1$ *et* $\psi(x) = -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha$
lorsque : $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ *et* $\alpha = -\frac{1}{2}(2n+1), \beta = \frac{1}{2}(2n-1)$

Proposition 3.6.2. *l'ensemble des formes classiques du second degrée est constitue par :*

$J(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ *et* $J(-\frac{1}{2}(2n+1),\frac{1}{2}(2n-1))$

Preuve :

on a les deux équations :

1. $B(C^2-4BD)=\phi(x)$

2. $2B(B'D-BD')+C(BC'-CB')=-\phi'(x)-\psi(x)$

on dérivant 1 et on ajoutant 2 on a :
$-6BB'D+3BCC'-6B^2D'=-\psi(x)$
$(C^2-4BD)'=-\frac{2\psi(x)}{3B(x)}$
$(\frac{\phi(x)}{B(x)})'=-\frac{2\psi(x)}{3B(x)}$
on obtient finalement :
$\frac{B'}{B}=\frac{\phi'+\frac{2}{3}\psi}{\phi}$
pour les formes classique on a :

1. HERMITE : $\phi(x)=1$ et $\psi(x)=2x$
$\frac{B'}{B}=\frac{4}{3}x$

2. LAGUERRE : $\phi(x)=x$ et $\psi(x)=x-\alpha-1$
$\frac{B'}{B}=\frac{\frac{2}{3}x-\alpha}{x}$

3. BESSEL : $\phi(x)=x^2$ et $\psi(x)=-2(\alpha x+1)$
$\frac{B'}{B}=\frac{(2-\frac{4}{3}\alpha)x-\frac{4}{3}}{x^2}$

4. JACOBI : $\phi(x)=x^2-1$ et $\psi(x)=-(\alpha+\beta+2)x+\alpha-\beta$
$\frac{B'}{B}=\frac{2}{3}.\frac{(1-(\alpha+\beta))x+(\alpha-\beta)}{x^2-1}$

pour les trois premiers cas l'équation n'a pas de solution, pour le dernier cas on distingue les deux cas : $B' = 0$ et $B' \neq 0$

si $B' = 0$

alors on a $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ d'où $J(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

si $B' \neq 0$

$\frac{B'}{B} = \frac{2}{3}.(\frac{12-\beta}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}-\alpha}{x+1})$

$B = (x-1)^{\frac{3}{2}(\beta-\frac{1}{2})}(x+1)^{\frac{3}{2}(\frac{1}{2}-\alpha)}$

d'où $\alpha = -n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(2n+1)$ et $\beta = n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2n-1)$ c-à-d :

$\alpha = -\frac{1}{2}(2n+1)$ et $\beta = \frac{1}{2}(2n-1)$

Références

[1] A. Larabi. Etude des Polynômes Orthogonaux semi-classiques, Mémoire de DEA, Institut National des sciences Appliquées de Rouen, France, Septembre 2002.

[2] P. Maroni. Semi-classical character and finite-type relations between polynomial sequences, journal of Appl. Numer. Math volume31,1999, n 3,295-330.

[3] P. Maroni. Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. Application aux polynômes orthogonaux semi-classiques,Orthogonal polynomials and their applications (Erice, 1990), 95–130, IMACS Ann. Comput. Appl. Math., 9, Baltzer, Basel, 1991.

[4] P. Maroni. Variations autour des polynômes orthogonaux classiques. (French) [Variations on classical orthogonal polynomials] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 313 (1991), no. 5, 209–212.