RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ IBN KHALDOUN DE TIARET.

FACULTÉ DES MATHEMATIQUES ET D'INFORMATIQUES

DÉPARTEMENT MATHEMATIQUES

Mémoire de Fin D'étude Pour Obtenir Le Diplôme De Master

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse Fonctionnelle et Équations différentielles

Présenté par :

Madani Mahdjouba

Gacem Amel

Ferrah Zakia

Sujet du mémoire

Étude de L'existence et L'unicité Des Solutions Pour Quelques Types D'équations Intégrales D'ordre Fractionnaires

Soutenu publiquement le /09/ 2019 devant le jury composé de :

Mr. Mokhtari Mokhtar	MCA	Président
Mr . Bendaoud Abed Sid Ahmed	MCB	Examinateur
Mr. Souid Mohammed Said	MCA	Encadreur

Remerciement

★ Tout d'abord nous remercions ALLAH le tout miséricordieux qui nous a donné la force et Le courage pour réaliser ce travail.

★ Le grand merci à notre promoteur

Dr. Souid Mohammed Said

pour ses conseils et son aide et qui a mis à disposition tous les nécessaires pour réaliser ce mémoire.

★ Nous voudrons remercier en deuxième lieu les membres de jury Dr. Mokhtari Mokhtar pour le grand honneur qu'il nous fait en présidant le jury de notre soutenance, Dr. Bendaoud Abed Sid Ahmed pour l'honneur qu'il nous fait d'avoir accepter l'examen de notre travail.

★ Nous remercions également toute l'équipe pédagogique de l'Université Ibn Khaldoun -Tiaret-spécialement département de mathématique pour leur encadrement durant notre cursus universitaires.

★ Enfin Nous tenons à remercier toutes les personnes qui nous ont conseillé lors de la rédaction de ce mémoire : Nos familles, nos amis, nos professeurs, et nos camarades de promotion.

★ ★ ★

Je dédie ce travail à

★ Mes parents qui m'ont ramené à cette vie d'abord et grâce à eux que j'ai vécu ce succès inoubliable.

★ Mes sœurs et frères et toute ma famille pour leurs encouragements permanentes et leur soutien moral.

★ Mes amis qui m'encouragent à touts moments.

★ Tous mes enseignants

★ Et en fin à toute personne qui voulait voir mon succès.

Gacem Amel

Je dédie ce travail à

✓ Je rend grâce à dieu de m'avoir donner le courage et la volonté ainsi que la conscience afin de terminer mes éudes.

✓ Mes très chers parents(Benaouda et Aicha) qui m'ont soutenue dans la réussite de mes études.

✓ Tous mes amis sans exception et toute la promotion de mathéatique

✓ Tous mes enseignants .

Madani Mahdjouba

Je dédie ce travail à

✓ Mes chers parents ma mère et mon père pour leur patience, leur amour et leur soutien.

✓ Mes frères et sœurs .

✓ Mes amis et mes camarades.

✓ Vous cher lecteur.

Ferrah Zakia

Table des matières

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est de présenter, des résultats d'existence et d'unicité des solutions continues pour quelques types d'équations intégrales (Fredholm, Volterra et Urysohn) d'ordre fractionnaires.
Parfois il y a intérêt à réduire la résolution d'un problème initial ou aux limites à des conditions locales ou non locales à la résolution d'une équation intégrale. C'est pourquoi, la question de prouver l'existence des solutions d'une équation intégrale. Pour cette raison, on peut utiliser les théorèmes de point fixe pour montrer l'existence des solutions des équations intégrales.

Dans ce mémoire en appliquant des théorèmes de point fixe tels que le théorème de Banach, Schauder et de Leray-Schauder. Étant donnés un ensemble M et un opérateur $T : M \to M$, ces théorèmes donnent certaines conditions sous lesquelles T admet un point fixe dans M.

La théorie du point fixe est au coeur de l'analyse non linéaire appliquée aux équations intégrales puisqu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes

d'existence dans beaucoup de problèmes non-linéaires différents. Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base en montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations.
les équations intégrales jouent un rôle très important dans l'analyse fonctionnlle, ainsi que dans la résolution des problèmes de la physique.

Ce mémoire se compose en quatre chapitres .

Dans **le premier Chapitre** (intitulé **"Préliminaire"**), nous donnons notions, définitions, et dans la dernière section on donne une introduction à la théorie du point fixe et quelques théorèmes du point fixe (Le théorème du point fixe de Banach, Schauder et Leray-Schauder).

Le deuxième chapitre est une introduction à la terminologie et à la classification des équations intégrales, tel que on va présenter une classification pour les équations intégrales linéaires et non-linéaires, comme on a donné des exemples sur ces équations,

Dans **Le troisième chapitre** Nous présentons, des résultats d'existence des solutions continues pour l'équation intégrale de type de Urysohn d'ordre fractionnaire suivante :

$$x(t) = a(t) + \int_0^t \frac{u(t,s,x(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \ t \in [0,T], \ 0 < \alpha < 1.$$

où $x(t)$ est une fonction inconnue et $a(t) \in \mathbf{C}([0,1])$.
Et de type Volterra d'ordre fractionnaire suivante :

$$x(t) = x_0 - g(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, x(s), D_1^\alpha x(s)) \frac{ds}{s}, \ t \in [1,T].$$

Le quatrième chapitre est consacré à la réducation d'un problème aux limites à une équation intégrale d'ordre fractionnaire de type Volterra-Fredholm suivante :

$$y(t) = \frac{c}{a+b} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s) ds.$$

Mots clés : équations intégrales, équations intégrales de type Fredholm et Volterra, équations intégrales non-linéaires de type Urysohn, espace de Banach, Le théorèmes du point point fixe, opérateur intégral.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre nous présentons des notations, définitions et des théorèmes utilisés dans ce mémoire.

Soit $C = (I =: [a, b], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues de I vers $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|y\|_\infty = \sup\{\|y(t)\| : t \in I\}.$$

$L^1(I)$ désigne la classe des fonctions intégrables de Lebesgue sur l'intervalle $I = [a, b]$ menu de la norme $\|u\|_{L_1} = \int_I |u(t)|dt$.

1.1 Quelques définitions et théorèmes

Définition 1.1. *Soit $C(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact I dans $\mathbb{R}$ de l'espace de Banach X, M un sous ensemble de $C(I, \mathbb{R})$.*

1. *M est dit **équicontinu** si est seulement si :*
   $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t_1, t_2 \in I$:
   $\|t_1 - t_2\| \leq \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon,\ \forall f \in M.$
2. *M est dit **uniformément borné** si et seulement si :*
   $\exists c > 0 : \|f(t)\| \leq c, \qquad \forall t \in I \qquad$ *et* $\qquad \forall f \in M.$

Théorème 1.1. *[22] **(Ascoli Arzela)** Un sous ensemble M de $C(I, \mathbb{R})$ est relati-*

vement compact si :

- *M est uniformement borné.*
- *M est équicontinu.*

Théorème 1.2. ***[7](Théorème de convergence dominée de Lebesgue)***
Soit G un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx et soit (f_n) une suite de fonction de L^1. On suppose que
a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ p.p. sur G
b)Il existe une fonction positive $g \in L^1$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur G.
Alors $f \in L^1(G)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$.

1.2 Notions sur les opérateurs

Définition 1.2. ***(Opérateur Linéaire)*** *Soit T un opérateur d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que T est linéaire s'il vérifie les conditions suivantes : pour tout φ_1, φ_2 dans E et λ dans $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.*

i) $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E$ on a, $T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2)$.

ii) $\forall \varphi \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a, $T(\lambda\varphi) = \lambda T(\varphi)$.

Définition 1.3. ***(Opérateur borné)*** *Soit T un opérateur Linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que T est borné s'il existe une constante positive C, telle que :*

$$\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \text{ pour tout } x \in E.$$

Définition 1.4. *Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ un opérateur.*

1. *T est dit **continu** si pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ dans E tel que $(x_n)_{n\in N}$ converge vers x dans E, la suite $(Tx_n)_{n\in N}$ converge vers Tx.*
2. *T est dit **compact**, si pour tout borné B de E, $T(B)$ est relativement compact.*
3. *T est dit **complètement continu** si T est continue et si l'image de tout borné B de E est relativement compact.*

4. Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

Définition 1.5. ***(Opérateur intégrale linéaire)***
Soit $K : C(I) \times C(I) \to \mathbb{R}$ une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire T sur $C(I)$ est définit par :

$$T : \varphi \in C(I) \to T\varphi \in C(I)$$

$$T\varphi(x) = \int_I K(x,t)\varphi(t)dt, \ x \in I,$$

où la fonction $K(x,t)$ s'appelle noyau de l'opérateur intégrale T.

1.3 Quelques concepts sur le calcul fractionnaire

Définition 1.6. *([16]) L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ de la fonction $h \in L^1([a,b],\mathbb{R}_+)$ est défini par :*

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds,$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma. Si $a = 0$ on écrit $I^\alpha h(t) = h(t) * \varphi_\alpha(t)$, avec $\varphi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $t > 0$, et $\varphi_\alpha(t) = 0$ pour $t \leq 0$, et $\varphi_\alpha \to \delta(t)$ quand $\alpha \to 0$, où δ représente la fonction delta.

Définition 1.7. *([16])**La dérivée fractionnaire de Caputo***
La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction $h \in L^1([a,b],\mathbb{R}_+)$ est défnie par :

$$({}^cD_{a+}^\alpha h)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h^{(n)}(s)ds.,$$

où $n = [\alpha] + 1$.

Proposition 1.1. *([16]) soient $\alpha, \beta > 0$. Alors on a*

(1) $I^\alpha : L^1([a,b],\mathbb{R}_+) \to L^1([a,b],\mathbb{R}_+)$ et si $h \in L^1([a,b],\mathbb{R}_+)$, alors
$I^\alpha I^\beta h(t) = I^\beta I^\alpha h(t) = I^{\alpha+\beta} h(t)$.

(2) L'opérateur d'intégration fractionnaire I^α est linéaire.

(3) $I_a^0 h(t) = I_d h(t) = h(t)$ où I_d est l'identité.

(4) La dérivée fractionnaire de Caputo d'une constante est égale à Zéro.

(5) ${}^c\mathcal{D}_a^\alpha$ est non inverse à droit de I_a^α c-à-d $I_a^{\alpha c}\mathcal{D}_a^\alpha \neq I_d$ mais ${}^c\mathcal{D}_a^\alpha I_a^\alpha = I_d$.

(6) La dérivée fractionnaire de Caputo et de Riemann-Liouville sont linéaire.

Lemme 1.1. *([16]) soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle*

$$
{}^c\mathcal{D}_a^\alpha h(t) = 0,
$$

admet les solutions
$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1}, c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \cdots, n-1, n = [\alpha] + 1.$

Lemme 1.2. *([16]) soit $\alpha > 0$, alors*

$$
I_a^{\alpha c}\mathcal{D}_a^\alpha h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_{n-1} t^{n-1},
$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \cdots, n-1, n = [\alpha] + 1$

Définition 1.8. *([16])**L'intégrale fractionnaire de Hadamard** L'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha \in (0, 1]$ pour la fonction $h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ est définie comme :*

$$
{}_H I^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha - 1} \frac{h(s)}{s} ds,
$$

Définition 1.9. *([16])**La dérivée fractionnaire de Hadamard** La dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre $\alpha \in (0, 1]$ pour la fonction $h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ est définie comme :*

$$
{}^H\mathcal{D}^\alpha h(t) = \frac{t}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} (\int_1^t (\log \frac{t}{s})^{-\alpha} \frac{h(s)}{s} ds).
$$

Corollaire 1.1. *([16]). Soit* $\alpha > 0$ *and* $n = [\alpha] + 1$.
Alors l'équation différentielle $({}^{H}\mathcal{D}^{\alpha} h)(t) = 0$ *admet les solutions* $h(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j (\log t)^{\alpha - j}$ *pour tout* $t \in J$.
où $c_j \in \mathbb{R}\underbrace{(j = 1, \ldots, n)}$ *sont des constantes arbitraires.*
En particulier, quand $0 < \alpha \leq 1$, *l'équation* $({}^{H}\mathcal{D}^{\alpha} h)(t) = 0$ *est vérifiée si et seulement si :* $h(t) = c(\log t)^{\alpha - 1}$ *pour tout* $c \in \mathbb{R}$

Proposition 1.2. *[16] Soit* $\alpha,\ \beta > 0$. *Alors nous avons*

(i) ${}_{H}I^{\alpha}:\ L^1([a, b], \mathbb{R}_+) \to L^1([a, b], \mathbb{R}_+)$, *et si* $h \in L^1([a, b], \mathbb{R}_+)$, *alors*

$$ {}_{H}I_{H}^{\alpha} I^{\beta} h(t) =_{H} I_{H}^{\beta} I^{\alpha} h(t) =_{H} I^{\alpha + \beta} h(t). $$

(ii) *L'opérateur d'intégration fractionnaire* ${}_{H}I^{\alpha}$ *est linear.*

Définition 1.10. *La dérivée fractionnaire de* ***Caputo-Hadamard*** *d'ordre* $0 < \alpha \leq 1$ *pour une fonction continue* $[1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est définie par :*

$$ D_1^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{n - \alpha - 1} \delta^n(x)(s) \frac{ds}{s},\ n - 1 < \alpha < n, $$

où $\delta^n = \left(t \dfrac{d}{dt} \right)^n, n = [\alpha] + 1.$

1.4 Quelques théorèmes de point fixe

Introduction

Les théorèmes de point fixe sont un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles et intégrales.

Un de ces théorème est le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en (1922) dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. Ce théorème donne un comportement régulier du point fixe par rapport aux paramètres. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs. D'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est pas donc nécessaire d'établir des estimées sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le Théorème de Banach (par exemple, l'identité).
Le théorème de Leray-Schauder, est aussi appelé théorème de continuité, représentent un outils puissant d'existence en étudiant les équations d'opérateur. Par des moyens de théorème de continuité nous pouvons obtenir une solution d'équation donnée si nous commençons par une des solutions de l'équation simple.

Définition 1.11. *Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach E dans lui-même, alors pour tout $x \in E$, tel que $x = T(x)$, s'appelle un point fixe de l'opérateur T.*

Définition 1.12. *Soit (X, d) un espace métrique. une application $T : X \to X$ est dite Lipschitzienne s'il existe une constante $k > 0$ (appelée constante de Lipschitz) telle que :*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \text{ pour tout } x, y \in X.$$

une application Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz $0 < k < 1$ *est appelée contraction.*

Théorème 1.3. ***[10] (Théorème du point fixe de Banach).***
Soit (X, d) *un espace métrique complet. une application* $T : X \to X$ *est une contraction avec la constante de Lipschitz* k*. Alors* T *a un point fixe unique* $x \in X$*.*

Théorème 1.4. ***[10](Théorème de point fixe de Schauder).***
Soit X *un espace de Banach,* $K \subset X$ *un ensemble convexe, fermé, borné et non vide, et soit* $T : K \to K$ *un opérateur complètement continue. Alors* T *admet au moins un point fixe.*

Théorème 1.5. ***[10] (Altérnative non linéaire de Leray-Schauder).***
Soit K *un ouvert, borné d'un espace de Banach* X *et* $N : K \longrightarrow X$ *une application continue et compacte. Alors*
ou (i) N *admet un point fixe dans* K*.*
ou (ii) Il existe $x \in \partial K$*, il existe* $t \in [0, 1] : x = tN(x)$*.*

Chapitre 2

Introduction à la théorie des équations intégrales

Dans ce chapitre, on donne les définitions et les types des équations intégrales et leurs classifications, avec une introduction à la théorie de ces équations.

2.1 Introduction

les principaux fondateurs de la théorie d'équation intégrales sont Vito Volterra (1860 -1940), et Ivar Fredholm (1866 - 1927), ainsi que David Hilbert (1862 - 1943) et Erhard Schmidt (b.1876). Volterra était le premier à avoir identifier l'importance de la théorie et pour la considérer systématiquement, mais la contribution de Fredholm a permis le franchissement (environ 1900), (plutôt qu'évitant), de la difficulté liée à la disparition du déterminate des coefficients. néanmoins, la priorité de Volterra généralement aurait été reconnue si son premier papier sur le sujet (1896) avait été présenté différemment. Mais Volterra au lieu de déduire ses résultats par les mêmes méthodes qu'il a employées pour leur découverte (qui étaient identiques à ceux utilisées plus tard tellement avec succès par Fredholm) a simplement édité une vérification de sa solution **[26]**.

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement est une fonction d'une ou plusieurs variables, se produit sous signe intégral.

$$\int_\Omega K(x, y, \varphi(y))dy = \lambda\varphi(x) + f(x).$$

Cette définition plutôt générale tient compte de beaucoup de différentes formes spécifiques et dans la pratique beaucoup de types distincts surgissent. Dans la théorie classique d'équations intégrales on distingue les équations de Fredholm (Ivare Fredholm (1866-1927), mathématicien Suédois).

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y) = f(x).$$

et les équations de Volterra (Vito Volterra $(1860 - 1940)$, mathématicien Italien).

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y) = f(x).$$

Dans une équation de Fredholm les régions d'intégrations sont fixées, tandis que dans une équation de Volterra une région est variable. Quelques équations intégrales s'appellent singulières, quelques auteurs appellent une équation singulière si l'intégral ne peut pas être interprétée comme d'habitude (c'est-à-dire : dans le sens de Riemann ou de Lebesgue), mais doit être considéré en tant que intégral de valeur principale.

Définition 2.1. *On appelle équation intégrale toute équation de la forme*

$$\int_\Omega K(x, y, \varphi(y))dy = \lambda\varphi(x) + f(x), \tag{2.1}$$

où Ω est un espace mesuré, $f(x)$ une fonction mesurable donnée sur Ω, λ un scalaire donné qui peut être réel ou complexe et $K(x, y, \varphi(y))$ une fonction mesurable sur Ω^3 appelée noyau de l'équation intégrale.
Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction φ qui satisfait l'équation (2.1).

2.2 Classification des équation intégrales

Les équations intégrales sont classées par leurs caractéristiques selon trois caractéristiques de base décrient leur structure globale, il est utile de les citer avant d'entrer dans les détails.

1. **limites d'intégration**

   Toute équation intégrale à limites constantes est appelée équation de Fredholm.

   $$\lambda\varphi(x) - \int_a^b K(x, y, \varphi(y)) = f(x) \qquad a \leq x \leq b.$$

   Si l'un des deux limites d'intégration est variable, l'équation devient une équation de Volterra.

2. **L'opérateur intégral T**,

   L'équation définit par

   $$T\varphi = f.$$

   est dite une équation de premier espèce.

   Si l'équation est définit par

   $$\varphi - T\varphi = f.$$

   Cette équation est dite une équation de deuxième espèce.

   C'est-à-dire

   Le type (espèce) d'une équation se rapporte à la localisation de la fonction inconnue. Pour les équations de premier espèce, la fonction inconnue apparaît uniquement à l'intérieur du signe intégral. Cependant pour les équations de seconde espèce, la fonction inconnue apparaît également à l'extérieur du signe intégral.

3. **Le second membre de l'équation**,

   Si $f = 0$ l'équation est une équation homogène. Sinon cette équation est dite équation non-homogène.

2.2.1 Équations intégrales de Volterra

Définition 2.2. *On appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce une équation de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt.$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

1. *Une équation de la forme :*

$$\int_a^x K(x,t,\varphi(t))dt = f(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue est appelée équation intégrale de Volterra non linéaire de premier espèce .

2. *On appelle une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation de la forme :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

3. *Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt.$$

elle est appelée équation intégrale linéaire homogène de Volterra de seconde espèce.

4. Une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme :

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x).$$

est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de premier espèce.

Exemples des équations intégrales de Volterra

Équations intégrales linéaires non homogènes de Volterra de la seconde et premier espèce

$$u(x) = x^2 + \sin x + 1 + \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt, \quad 0 = x^2 + 1 + \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt.$$

Équation intégrales linéaires homogènes de Volterra de la seconde et premier espèce

$$u(x) = \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt, \quad 0 = \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt.$$

2.2.2 Équations intégrales de Fredholm

Définition 2.3. *On appelle une équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce une équation de la forme*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt = f(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(x))dt.$$

Elle est dite équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce homogène, si dans le cas contraire.

Si $f(x) \neq 0$ elle est dite équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce non homogène.

1. *On appelle une équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connue et λ un paramètre réel.
Si $f(x) = 0$ et $\widetilde{K}(x,t) = \lambda K(x,t)$ l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \int_a^b \widetilde{K}(x,t)\varphi(t)dt.$$

Elle est dite équation intégrale de Fredholm de seconde espèce homogène si dans le cas contraire $f(x) \neq 0$ Elle est dite équation intégrale de Fredholm linéaire de seconde espèce non homogène.

2. *Une équation de la forme*

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x).$$

Est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de premier espèce.

2.3 Exemples des équation intégrales de Fredholm

Équation intégrales linéaire non homogènes de Fredholm de la seconde et premier espèce

$$u(x) = x^2 + \sin x + 1 + \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt, \quad 0 = x^2 + \sin x + 1 + \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - t)u(t)dt.$$

Équations intégrales linéaires homogène de Fredholm de la seconde et premier espèce

$$u(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 - t)u(t)dt, \quad 0 = \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 - t)u(t)dt.$$

2.3.1 Équation intégrale de Uryshon :

On appelle équation intégrale de Uryshon, une équation de la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{\Omega} K(x, y, \varphi(t))dt, \ t \in \Omega.$$

où $K, \ f$ sont des fonctions arbitraires. Ou

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{\Omega} K(x, y)F(\varphi(t))dt, \ t \in \Omega.$$

tel que F est une fonction non linéaire.

Remarque : On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les limites d'intégration sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des limites de l'intégration.

Chapitre 3

Existence de solutions pour l'équations intégrales non linéaire d'ordre fractionnaires de Urysohn et Volterra

Introduction

Le but de ce chapitre consacré à les applications de certaines théorèmes de point fixe (Le théorème du point fixe de Banach, Schauder) sur les équations intégrales (celles de Volterra, et celles de Urysohn) à fin de prouver l'existence et l'unicité des solutions continues de ces équations.

Le contenu de ce chapitre est basé sur les articles **[15, 5]**.

3.1 Résultats d'éxistence pour l'équation intégrale non-linéaire d'ordre fractionnaire de Urysohn

Notre premier résultat d'existence consacré à l'existence de solutions continues pour l'équation intégrale non-Linéaire d'ordre fractionnaire de Urysohn est donne par le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Considérons l'équation intégrale non linéaire d'ordre fractionnaire de type Urysohn suivante :*

$$x(t) = a(t) + \int_0^t \frac{u(t,s,x(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \; t \in [0,T], \; 0 < \alpha < 1, \tag{3.1}$$

où $x(t)$ est une fonction inconnue et $a(t) \in C([0,1])$. Supposons que

(h_1) *$a(\cdot) \in C([0,1])$ et $a(0) \geq 0$.*

(h_2) *La fonction à valeurs réelles $u(t,s,x)$ est continue sur $[0,T]^2 \times \mathbb{R}_+$ et non-décroissante par rapport à ses 3 variables, séparément.*

(h_3) *Si $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, alors $a(t_2) - a(t_1) + \frac{u(t_2,t_1,0)}{\alpha}(t_2^\alpha - t_1^\alpha) \geq 0$.*

(h_4) *Il existe une fonction $\varphi \in C([0,T])$, positive sur $[0,T]$ qui satisfait l'inégalité suivante*

$$a(t) + \int_0^t \frac{u(t,s,\varphi(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \leq \varphi(t), \; t \in [0,T].$$

Alors (3.1) a une solution continue et positive sur $[0,T]$.

Preuve

Considérons le sous-ensemble Ω_T de $C([0,T])$, donné par :

$$\Omega_T = \{x(\cdot) \in C([0,T]), \; 0 \leq x(t) \leq \varphi(t), \; t \in [0,T]\}.$$

Il est clair que Ω_T est un ensemble non-vide, fermé et convexe de $C([0,T])$. De plus, Ω_T est est uniformément borné par $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,T]} |\varphi(t)|$.

Considérons l'opérateur intégral défini sur $C([0,T])$ par :

$$Fx(t) = a(t) + \int_0^t \frac{u(t,s,x(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} ds.$$

Il est claire que, les points fixes de l'opérateur F sont des solutions de (3.1).
Nous montrons que F satisfait les conditions du théoreme du point fixe de Schauder.
La preuve sera donnée dans plusieurs étapes .
Étape 1 $F : \Omega_T \to \Omega_T$ est continue.
Soit $(x_n(\cdot))_n$ une suite dans Ω_T converge vers $x(\cdot)$. Puisque Ω_T est un sous-ensemble fermé de $C([0,T])$, alors $x(\cdot) \in \Omega_T$. La continuité uniforme de la fonction $u(\cdot,\cdot,\cdot)$ sur $[0,T]^2 \times [0, \|\varphi\|_\infty]$ implique que $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0$ tel que si $\|x_n(\cdot) - x(\cdot)\|_\infty < \eta$, alors on a

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]} |Fx_n(t) - Fx(t)| &\leq \int_0^t \frac{(\sup_{t,s\in[0,T]} |u(t,s,x_n(s)) - u(t,s,x(s))|)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \\ &< \int_0^T \left(\frac{\alpha}{T^\alpha}\epsilon\right) \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}} ds = \epsilon.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|Fx_n - Fx\|_\infty = 0$. Alors, nous avons montré que F est continue.
Étape 2 $F(\Omega_T) \subset \Omega_T$.
Pour tout $t,\ s \in [0,T]$, la fonction $x \to u(t,s,x)$ est non décroissant, alors $\forall x(\cdot) \in \Omega_T$, grace à l'hypothèse (h_4) on a

$$\begin{aligned}a(t) + \int_0^t \frac{u(t,s,x(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} ds &\leq a(t) + \int_0^t \frac{u(t,s,\varphi(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} \\ &\leq \varphi(t),\ t \in [0,T].\end{aligned} \tag{3.2}$$

De plus, en utilisant les hypothèses (h_1), (h_2) et (h_3), on obtient

$$\begin{aligned} Fx(t) = a(t) + \int_0^t \frac{u(t,s,x(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} ds &\geq a(t) + \int_0^t \frac{u(t,0,0)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \\ &\geq a(t) + u(t,0,0)\frac{t^\alpha}{\alpha} \\ &= a(0) + \left(a(t) - a(0) + u(t,0,0)\frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \geq a(0) \geq 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

En utilisant (3.2), (3.3) et la continuité de $x(\cdot)$, on conclut que $Fx(.) \in \Omega_T$ quelque soit $x(\cdot) \in \Omega_T$.

Étape 3 $F(\Omega_T)$ est relativement compact.

Soient $t_1, t_2 \in [0, T]$, on suppose que $t_1 < t_2$, alors on a

$$\begin{aligned}
|Fx(t_2) - Fx(t_1)| &\leq |a(t_2) - a(t_1)| + \left| \int_0^{t_1} \frac{u(t_2, s, x(s))}{(t_2 - s)^{1-\alpha}} - \frac{u(t_1, s, x(s))}{(t_1 - s)^{1-\alpha}} ds \right| \quad (3.4)\\
&+ \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{u(t_2, s, x(s))}{(t_2 - s)^{1-\alpha}} ds \right|\\
&\leq |a(t_2) - a(t_1)| + \left| \int_0^{t_1} \frac{u(t_2, s, x(s)) - u(t_1, s, x(s))}{(t_2 - s)^{1-\alpha}} ds \right|\\
&+ \left| \int_0^{t_1} u(t_1, s, x(s)) \left(\frac{1}{(t_2 - s)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(t_1 - s)^{1-\alpha}} \right) ds \right|\\
&+ \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{u(t_2, s, x(s))}{(t_2 - s)^{1-\alpha}} ds \right|\\
&\leq |a(t_2) - a(t_1)| + \int_0^{t_2} \frac{|u(t_2, s, x(s)) - u(t_1, s, x(s))|}{(t_2 - s)^{1-\alpha}} ds\\
&+ u(t_1, t_1, \|\varphi\|_\infty) \int_0^{t_1} \left(\frac{1}{(t_1 - s)^{1-\alpha}} - \frac{1}{(t_2 - s)^{1-\alpha}} \right) ds\\
&+ u(t_2, t_2, \|\varphi\|_\infty) \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{(t_2 - s)^{1-\alpha}}\\
&\leq |a(t_2) - a(t_1)| + \int_0^{t_2} \frac{|u(t_2, s, x(s)) - u(t_1, s, x(s))|}{(t_2 - s)^{1-\alpha}} ds\\
&+ \frac{u(t_1, t_1, \|\varphi\|_\infty)}{\alpha} (t_1^\alpha - t_2^\alpha + (t_2 - t_1)^\alpha)\\
&+ \frac{u(t_2, t_2, \|\varphi\|_\infty)}{\alpha} (t_2 - t_1)^\alpha.
\end{aligned}$$

Puisque la fonction $u(t, s, x)$ est uniformément continue sur $[0, T]^2 \times [0, \|\varphi\|_\infty]$, on a

$$\lim_{t_2 \to t_1} |u(t_2, s, x(s)) - u(t_1, s, x(s))| = 0$$

uniformément dans $s \in [0, T]$ et $x(\cdot) \in \Omega_T$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_2} \frac{|u(t_2, s, x(s)) - u(t_1, s, x(s))|}{(t_2 - s)^{1-\alpha}} ds \\ &\leq \sup_{s \in [o,T], x \in [0, \|\varphi\|_\infty]} |u(t_2, s, x(s)) - u(t_1, s, x(s))| \frac{t_2}{\alpha} \to 0 \ quand \ t_1 \to t_2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

En utilisant la continuité de $a(t)$ avec (3.4) et (3.5), on conclut que : $\lim_{t_1 \to t_2} |Fx(t_2) - Fx(t_1)| = 0$. Par conséquent, $F(\Omega_T)$ est un sous-ensemble équicontinu de $C([0, T])$. Comme Ω_T et par conséquent $F(\Omega_T)$ est uniformément borné et puisque $F(\Omega_T)$ est équicontinue, alors d'après le théorème d'Ascoli Arzela, on conclut que $F(\Omega_T)$ est relativement compact de $C([0, T])$.
En conséquence de étape1 à étape 3 avec le théorème d'Ascoli-Arzéla, on résult que $F : \Omega_T \to \Omega_T$ est continu et compact de $C([0, T])$.
En utilisant le théorème de point fixe de Schauder, on conclut que l'opérateur F a au moins un point fixe dans Ω_T qui est une solution de (3.1) dans $C([0, T])$.

Exemple 3.1.1. *Considérons l'équation intégrale non-linéaire d'ordre fractionnaire avec la loi de puissance de non-linéarité suivante :*

$$x(t) = a(t) + \int_0^t \frac{1 + s^\beta (x(s))^\eta}{(t - s)^{1-\alpha}} ds, \ 0 < \alpha < 1, \ t \in [0, T], \tag{3.6}$$

où $T, \beta > 0$ deux nombres réels positifs arbitraires et $a(t) \in C([0, T])$ est satisfait les conditions $a(0) \geq 0$ et la fonction $a(t) + (\frac{t^\alpha}{\alpha})$ est non-décroissante. Il est clair que sous ces conditions, (3.6) satisfait les conditions $(h_1), (h_2)$ et (h_3) du théorème précédent . Il reste de vérifier que la condition (h_4) est aussi satisfaite. À cette fin,on considère la fonction constante donnée par $\varphi(t) = R_T$, pour tout $t \in [0, T]$, où R_T est un nombre réel positif satisfaisant la condition suivante

$$\|a\|_\infty + \frac{T^\alpha}{\alpha} + R_T^\eta \frac{T^{\alpha+\beta}}{\alpha} \leq R_T.$$

Noter que puisque

$$\lim_{R\to+\infty} \|a\|_\infty + \frac{T^\alpha}{\alpha} + R^\eta \frac{T^{\alpha+\beta}}{\alpha} - R = -\infty,$$

l'inégalité si-dessous a toujours une solution. Par conséquent la condition (h_4) *est aussi satisfaite. Par conséquent,* (3.6) *a une solution continue et positive sur* $[0, T]$.

3.2 Résultats d'existence et d'unicité pour l'équation intégrale non linéaire d'ordre fractionnaire de Volterra

Notre deuxième resultat d'existence et d'unicité de solutions continues consacré à l'équation intégrale non-linéaire d'ordre fractionnaire de Volterra, la preuve est basé sur le théorème de point fixe de Banach. On considère l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$x(t) = x_0 - g(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, x(s), D_1^\alpha x(s)) \frac{ds}{s},\ t \in [1, T]. \tag{3.7}$$

Théorème 3.2. *Supposons* $f : [1, T] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : C([1, T], \mathbb{R})$ *sont continues et vérifiées les conditions suivantes :*
(H1) *Il existe* $K_1 \in \mathbb{R}^+$, $K_2, K_3 \in (0, 1)$ *telque*

$$|f(t, u, v) - f(t, \widetilde{u}, \widetilde{v})| \leq K_1 |u - \widetilde{u}| + K_2 |v - \widetilde{v}|,$$

$$|g(x) - g(\widetilde{x})| \leq K_3 \|x - \widetilde{x}\|.$$

Si

$$\beta = K_3 + \frac{K_1}{1 - K_2} \frac{(\log(t))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1,$$

alors (3.7) *a une solution unique* $x \in C([1,T],\mathbb{R})$.

preuve : Définissons l'opérateur $P : C([1,T],\mathbb{R}) \longrightarrow C([1,T],\mathbb{R})$ comme suit :

$$(Px)(t) = x_0 - g(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} z_x(s) \frac{ds}{s},$$

oú

$$z_x(t) = f(t, x_0 - g(x) + I_1^\alpha z_x(t), z_x(t)).$$

Il est clair que les points fixes de P sont des solutions de (3.7). Soit $x, y \in C([1,T],\mathbb{R})$, alors nous avons

$$\begin{aligned} |(Px)(t) - (Py)(t)| &\leq |g(x) - g(y)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |z_x(s) - z_y(s)| \frac{ds}{s} \\ &\leq K_3 \|x - y\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |z_x(s) - z_y(s)| \frac{ds}{s}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

et

$$\begin{aligned} |z_x(t) - z_y(t)| &\leq |f(t, x(t), z_x(t)) - f(t, x(t), z_y(t))| \\ &\leq K_1 |x(t) - y(t)| + K_2 |z_x(t) - z_y(t)| \\ &\leq \frac{K_1}{1 - K_2} |x(t) - y(t)|. \end{aligned} \tag{3.9}$$

En remplaçant (3.9) dans l'inégalité (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} |(Px)(t) - (Py)(t)| &\leq K_3 \|x - y\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{K_1}{1 - K_2} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |x(s) - y(s)| \frac{ds}{s} \\ &\leq K_3 \|x - y\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{K_1}{1 - K_2} \left(\int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{ds}{s} \right) \|x - y\|_\infty \\ &\leq \left(K_3 + \frac{K_1}{1 - K_2} \frac{(\log(t))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \|x - y\|_\infty, \end{aligned}$$

donc

$$\|Px - Py\|_\infty \leq \beta \|x - y\|_\infty,$$

alors l'opérateur P est une contraction, d'après le théorème du point fixe de Banach, P a un point fixe unique $x \in C([1, T], \mathbb{R})$, qui est une solution unique de (3.7).

Chapitre 4

Réducation d'un problème aux limites à une équation intégrale

4.1 Introduction

le but de ce chapitre est expliquer par une application comment un problème aux limites peut s'écrire, comme une équation intégrale. C'est pourquoi, la question de prouver l'existence des solutions d'un problème aux limites se rèduit à prouver l'existence de solutions d'une équation intégrale. Pour cette raison, on peut utiliser les théorèmes de point fixe pour montrer l'existence des solutions des équations intégrales.

Le contenu de ce chapitre est basé sur l'ouvrage **[1]**(page 117-124).

4.2 Application

Dans cette section nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de solutions au problème aux limite suivant :

$$^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t), ^cD^\alpha y(t)),\ pour\ tout\ t \in J := [0, T],\ 0 < \alpha \leq 1, \tag{4.1}$$

$$ay(0) + by(T) = c, \tag{4.2}$$

où $^cD^\alpha$ est la dérivé fractionnaire au sens de Caputo, $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction donnée et a, b et c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.
Le premier résultat est basé sur le principe de contraction de Banach.

4.2.1 Existence de Solutions

Définition 4.1. *Une fonction $u \in C(J)$ est dite solution de problème (4.1)-(4.2) si u satisfait l'équation (4.1) et les conditions (4.2) sur J.*

Pour l'existence de solutions au problème (4.1)-(4.2), nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant.

Lemme 4.1. *Soit $0 < \alpha \leq 1$ et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue y est une solution du problème aux limite*

$$^cD^\alpha y(t) = g(t),\ pour\ tout\ t \in J,\ 0 < \alpha \leq 1,$$

$$ay(0) + b(T) = c,$$

si et seulement si y est une solution de l'équation intégrale d'ordre fractionnaire de type Volterra-Fredholm suivante :

$$y(t) = \frac{c}{a+b} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s) ds$$

. où $g \in C(J, \mathbb{R})$ satisfait l'équation

$$g(t) = f(t, y(t), g(t)).$$

Théorème 4.1. *Supposons les hypothèses suivantes*

(H1) la fonction $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue.*

(H2) il existe constantes $K > 0$ *et* $0 < L < 1$ *tellque*
$|f(t, u, v) - f(t, \overline{u}, \overline{v})| \leq K|u - \overline{u}| + L|v - \overline{v}|$
pour tout $u, v, \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}$ *et* $t \in J$.
Si

$$\frac{KT^{\alpha}}{(1-L)\Gamma(\alpha)+1}\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) < 1, \tag{4.3}$$

alors il existe une unique solution pour le problème aux limites (4.1)-(4.2) sur J.

Preuve :
Définissons l'opérateur $N : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$ par :

$$N(y(t)) = \frac{c}{a+b} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)ds - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s)ds \tag{4.4}$$

où $g \in C(J, \mathbb{R})$ satisfait l'équation

$$g(t) = f(t, y(t), g(t)).$$

Il est claire que, les points fixes de l'opérateur N sont des solutions de problème (4.1)-(4.2). Soit $u, w \in C(J, \mathbb{R})$. En suite pour $t \in J$ on a
$(Nu(t)) - (Nw)(t)$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(g(s) - h(s))ds - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}(g(s) - h(s))ds,$$

où $g, h \in C(J, \mathbb{R})$ teleque

$$g(t) = f(t, u(t), g(t)),$$

et

$$h(t) = f(t, w(t), h(t)).$$

Alors pour $t \in J$, ona
$|(Nu)(t) - (Nw)(t)| \leq$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |(g(s)-h(s))| ds + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |(g(s)-h(s)| ds, \quad (4.5)$$

d'après (H2) nous avons,

$$\begin{aligned} |g(t) - h(t)| &= |f(t, u(t), g(t)) - f(t, w(t), h(t))| \\ &\leq K|u(t) - w(t)| + L|g(t) - h(t)|, \end{aligned}$$

donc,

$$|g(t) - h(t)| \leq \frac{K}{(1-L)} |u(t) - w(t)|.$$

D'après (4.5), pour $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} |(Nu)(t) - (Nw)(t)| \leq & \\ & \frac{K}{(1-L)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |u(s) - w(s)| ds \\ & + \frac{|b|K}{|a+b|(1-L)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |u(s) - w(s)| ds \\ & \leq \frac{KT^\alpha}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) \|u - w\|_\infty. \end{aligned}$$

Alors,

$$\|Nu - Nw\|_\infty \leq \frac{KT^\alpha}{(1-L)\Gamma(a+1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) \|u - w\|_\infty.$$

D'après (4.3), l'opèrateur N est une contraction, alors par le principe de contraction

de Banach N a un point fixe unique qui est la solution unique de problème (4.1)-(4.2).
le deuxième résultat est basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Théorème 4.2. *Supposons (H1),(H2) et l'hypothèse suivante :*

(H3) il existe $p, q, r \in C(J, \mathbb{R}_+)$ *avec* $r^* = \sup_{t\in J} r(t) < 1$ *telle que*

$$|f(t,u,w)| \leq p(t) + q(t)|u| + r(t)|w|, \text{ pour } t \in J \text{ et } u,\ w \in \mathbb{R}.$$

Si

$$q^* M\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) < 1, \tag{4.6}$$

où $q^* = \sup_{t\in J} q(t)$ *et* $M = \frac{T^\alpha}{(1-r^*)\Gamma(\alpha+1)}$, *alors le problème aux limites (4.1)-(4.2) a aux moins une solution.*

Preuve : Considérons l'opèrateur N défini en(4.4). Nous montrons que N satisfait aux hypothèses du théoreme du point fixe de Leaury Schauder. La preuve sera donnée dans plusieurs étapes .
Étape 1 : N est continue. Soit u_n est une suite telle que $u_n \to u$ dans $C(J, \mathbb{R})$ pour tout $t \in J$
$|N(u_n)(t) - N(u)(t)| \leq$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|g_n(s)-g(s)|ds + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|g_n(s)-g(s)|ds, \tag{4.7}$$

et comme $g_n, g \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ telle que

$$g_n(t) = f(t, u_n(t), g_n(t))$$

$$g(t) = f(t, u(t), g(t)),$$

par (4.1) on a

$$|g_n(t) - g(t)| = |f(t, u_n(t), g_n(t)) - f(t, u(t), g(t))|$$
$$\leq K|u_n(t) - u(t)| + L|g_n(t) - g(t)|.$$

Donc

$$|g_n(t) - g(t)| \leq \frac{K}{(1-L)}|u_n(t) - u(t)|,$$

puisque $u_n \to u$, alors $g_n(t) \to g(t)$ quand $n \to \infty$ pour tout $t \in J$.
Soit $\sigma > 0$ telleque $|g_n(t)| \leq \sigma$ et $|g(t)| \leq \sigma$, alors on a :

$$(t-s)^{\alpha-1}|g_n(s) - g(s)| \leq (t-s)^{\alpha-1}[|g_n(s)| - |g(s)|]$$

$$\leq 2\sigma(t-s)^{\alpha-1}.$$

Pour tout $t \in J$, La fonction $s \to 2\sigma(t-s)^{\alpha-1}$ est integrable dans $[0, T]$, alors le théorème de convergence dominè de Lebesgue et (4.7) implique que :

$$|N(u_n)(t) - N(u)(t)| \to 0 \; n \to \infty,$$

$$\|N(u_n)(t) - N(u)(t)\|_\infty \to 0 \; quand \; n \to \infty,$$

donc, N est continue.
Étape 2 N transforme les bornés en des bornés dans $C(J, \mathbb{R})$
Il suffit de montrer que pour tout $\rho > 0$ exist un constante positif ℓ telleque : pour tout $u \in B_\rho = \{u \in C(J, \mathbb{R}) : \|u\|_\infty \leq \rho\}$ nous avons, $\|N(u)\|_\infty \leq \ell$.
Pour $u \in B_\rho$, on a pour tout, $t \in J$,

$$|(Nu)(t)| \leq \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|g(s)|ds + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|g(s)|ds. \tag{4.8}$$

Pour tout $t \in J$ on a :

$$\begin{aligned}|g(t)| &= |f(t,u(t),g(t))| \\ &\leq p(t) + q(t)|u(t)| + r(t)|g(t)| \\ &\leq p(t) + q(t)\rho + r(t)|g(t)| \\ &\leq p^* + q^*\rho + r^*|g(t)|.\end{aligned}$$

Alors,

$$|g(t)| \leq \frac{p^* + q^*\rho}{1 - r^*} := M^*.$$

Donc(4.8) implique que

$$|(Nu)(t)| \leq \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{M^*T^*}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|b|M^*T^*}{|a+b|\Gamma(\alpha+1)}.$$

Par Coséquence,

$$\|(Nu)\|_\infty \leq \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{M^*T^*}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|b|M^*T^*}{|a+b|\Gamma(\alpha+1)} := \ell.$$

Étape 3 N transforme les ensembles bornés en ensembles équicontinus de $C(J,\mathbb{R})$. Soit $t_1, t_2 \in J,\ t_1 < t_2$ et soit $u \in B_\rho$ alors :

$$\begin{aligned}|N(u)(t_1) - N(u)(t_2)| &\leq \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}]g(s)ds\right| \\ &+ \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}[(t_2-s)^{\alpha-1}g(s)ds\right| \\ &\leq \frac{M_1}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2^\alpha - t_1^\alpha + 2(t_2-t_1)^\alpha).\end{aligned}$$

Donc, $\|N(u)(t_1) - N(u)(t_2)\|_\infty \to 0$, quand $t_1 \to t_2$.

En conséquence de Étape1 à Étape 3 avec le théorème d'Ascoli-Arzéla, on résult que

$N : C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$ est complètement continu.

Étape 4 : Estimations à priori.

Nous montrons maintenant qu'il existe un ensemble ouvert $U \subseteq C(J,\mathbb{R})$, avec $u \neq \lambda N(u)$, pour $\lambda \in (0,1)$ et $u = \lambda N(u)$ pour certains $0 < \lambda < 1$. Donc, pour tout $t \in J$ on a

$u(t) = \lambda \frac{c}{a+b} + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s)ds + \frac{\lambda b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s)ds.$

$$|(u)(t)| \leq \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|g(s)|ds + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|g(s)|ds. \tag{4.9}$$

Aditionellement,

$$\begin{aligned}
|g(t)| &= |f(t,u(t),g(t))| \\
&\leq p(t) + q(t)|u(t)| + r(t)|g(t)| \\
&\leq p^* + q^*|u(t)| + r^*|g(t)|
\end{aligned}$$

Donc

$$|g(t)| \leq \frac{1}{1-r^*}(p^* + q^*|u(t)|).$$

Par conséquent ,

$$\begin{aligned}
|u(t)| \leq\ & \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{p^*T^\alpha}{(1-r^*)\Gamma(\alpha+1)}\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) \\
&+ \frac{q^*}{(1-r^*)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|u(s)|ds \\
&+ \frac{|b|q^*}{(1-r^*)|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|u(s)|ds \\
\leq\ & \frac{|c|}{|a+b|}\frac{p^*T^\alpha}{(1-r^*)\Gamma(\alpha+1)}\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) + \frac{q^*\|u\|_\infty}{(1-r^*)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\
&+ \frac{|b|q^*\|u\|_\infty}{(1-r^*)|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds \\
\leq\ & \frac{|c|}{|a+b|}\frac{p^*T^\alpha}{(1-r^*)\Gamma(\alpha+1)}\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) + \frac{q^*T^\alpha}{(1-r^*)\Gamma(\alpha+1)}\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)\|u\|_\infty.
\end{aligned}$$

Alors, $\forall t \in J$ on a :

$$\|u\|_\infty \leq \frac{|c|}{|a+b|}\frac{p^*T^\alpha}{(1-r^*)\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)+\frac{q^*T^\alpha}{(1-r^*)\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)\|u\|_\infty.$$

Alors, $\forall t \in J$,

$$\|u\|_\infty \left[1-\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)q^*M\right] \leq \frac{|c|}{|a+b|}+\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)p^*M.$$

par conséquent,

$$\|u\|_\infty \leq \frac{\dfrac{|c|}{|a+b|}+\left(1+\dfrac{|b|}{|a+b|}\right)p^*M}{1-\left(1+\dfrac{|b|}{|a+b|}\right)q^*M} := \overline{M}. \tag{4.10}$$

Soit

$$U = \{u \in C(J,\mathbb{R}) : \|u\|_\infty < \overline{M}+1\}.$$

Par notre choix de U il n'y a pas $u \in \partial U$ telque $u = \lambda N(u)$ pour $\lambda \in (0,1)$. Conséquence du théorème de Learay-Schauder, nous déduisons que N a uén point fixe u dans $\overline{U}$ qui est une solution du problème(4.1)-(4.1).

Exemple 4.2.1. *Considérons le problème au limites suivant :*

$$^cD^{\frac{1}{2}}y(t) = \frac{1}{10e^{t+2}\left(1+|y(t)|+|^cD^{\frac{1}{2}}y(t)|\right)}, \ J=[0,1], \tag{4.11}$$

$$y(0)+y(1)=0. \tag{4.12}$$

Soit

$$f(t,u,v) = \frac{1}{10e^{t+2}(1+|u|+|v|)}, t \in J, \ u, \ v \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que la fonction f est continue.

pour tout $u, v, \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}$ *et* $t \in [0,1]$,

$$|f(t,u,v) - f(t,\overline{u},\overline{v})| \leq \frac{1}{10e^2}(|u-\overline{u}| + |v-\overline{v}|).$$

par $K = L = \frac{1}{10e^2}$. *Alors, la condition*

$$\frac{KT^\alpha}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right) = \frac{3}{2(10e^2-1)\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{3}{((10e^2-1)\sqrt{\pi}} < 1$$

est satisfait pour $a = b = T = 1, c = 0$, *et* $\alpha = \frac{1}{2}$. *On déduit par le théorème de contraction du Banach que le problème (4.11)-(4.12)admet une unique solution dans* J.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a présenté quelques résultats en théorie du point fixe dans des espaces de Banach, et on a appliqué quelques théorèmes du point fixe (principe de contraction de Banach qui garantit l'existence et l'unicité de solution, Schauder et Leray-Shauder et assurent l'existence de solution) sur quelques équations intégrales d'ordre Fractionnaires de type Fredholm, Volterra et de Urysohn.
À chaque fois il y a intérêt à réduire l'étude de l'existence et l'unicité de solutions d'un problème initial ou aux limites à des conditions locales ou non locales à la résolution d'une équation intégrale.

Bibliographie

[1] Abbas, S., Benchohra, M., Graef, J.R., and Henderson, J., (2018), Implicit Fractional Differential and Integral Equations : Existence and Stability, De Gruyter, Berlin. [

[2] : R. Agarwal, A. Meeha,D.O'Regan, Fixed point Theory and Applications, Combrige University Press, 2004.

[3] :Ravi P. Agarwal and Donal O'Regan, Problems For Differential, Difference and Integral Equatios Kluwer Academic Publisher 2001.

[4] :H. Aman, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in order Banach spaces, SIAM Rev.18(1976)620-709.

[5] A. Ardjouni and A. Djoudi, Existence and uniqueness of solutions for nonlinear implicit Caputo-Hadamard fractional differential equations with nonlocal conditions, Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl. 3 (2019), 46–52.

[6] : T.A. Burton, G. Mackey, Continuity, compactness, fixed points and integral equations, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 14 (2002).

[7] : Brezis H. Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris, 1992.

[8] :C. Corduneanu, Integral Equations and Applications University Press, Cambridge 1991.

[9] :Curtain, R.F. and Pritchard, A.J.Functional Analyssi in Moderan Applied Mathematics Academic press. 1977.

[10] :S. Djebali, Degré topologique : théorie et application aux EDO-EDP, Cours policopié, Département de Mathématiquesn ENS-Kouba, Alger, (2006).

[11] :J. Dugundji and A. Granas, Fixed point Theory, VolI, Monografie Matematyzne, (PWN), Warsaw, 1982.

[12] : N. Dunford and J.Schwars, Linear Operators, Part I :General Theory, John Wiley & Sons, New York, 1958.

[13] :G. Emmanuele, Anexistence theorem for Hammerstein integral equations, Portu-galiae Mathematica, Vol.51 Fax.4, 1994.

[14] :A. Fryszkowski, Fixed Point Theory for Decomposoble Sets. Topological Fixed Point Theory and Its Application, 2. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.

[15] A. Jawahdou, A. Karoui, Monotonic solutions of nonlinear integral equations of fractional order, Cand. Appl. Math. Quarter, 18, (2010), 41-57.

[16] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V. Amsterdam, 2006.

[17] :R. P. Kanwal, linear Integral Equations : Theory and applications. Academic Press 1971.

[18] : A. Karaoui, On the existence of continuous solutions of nonlinear integral equations, Département de Mathématique, Faculté des Sciences de Bizerte, Jarzouna7021, Tunisia, 2005, pages[300-305].

[19] : A. Karaoui, Existence and approximate solutions of some nonlinear integral equations, Archive, Inequal, Appl. 2005, pages[569-581].

[20] : A. Karaoui, A.Jawahdou, H, Ben Aouicha, Weighted L^p-solutions on unbounded intervals of nonlinear integral equations of the Hamerstein and Urysohn types, 2010, pages[1-22].

[21] :M. krasnov, A. Kisselev, G.Makarenko, Equation intégrales Ed. mir, 1977.

[22] : D. O'Regan, Y.Je Cho, and Yu-Qing Chen, Topological Degree Theory and Applications, Volume 10, by Taylor et Francis Group,LLC, 2006.

[23] :R.Precup, Methods in Nonlinear Integral Equations, Springer, New York, 2002.

[24] : R. Precup, Methods in Nonlinear Integral Equations, Springer-Science +Business Media, 2002.

[25] : D.R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge University Press, New York, 1980.

[26] : F. G TRICOMI, Integral equations. University press, Combridge, 1957.

[27] :H.Ye, J. Gao,and Y.Ding, A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 328(2007), 1075-1081.
[