MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR & DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE IBN KHALDOUN
FACULTE DES MATEMATIQUES ET INFORMATIQUE
TIARET

BP 78 TIARET, 14000–ALGERIE- TEL/FAX 046-20-88-45

Mémoire

Pour obtenir le Diplôme de master

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnel et équations différentielles

Intitulée

Estimations non paramétrique de la fonction de risque par la méthode de noyau

***Présentée par*:**

Neki Slimane

Nehdi djillali

Bouzidi Houari

Soutenue le 15/10/2020

Devant le jury composé de :

Mr Halim Benali	***Maitre de conférences B***	***Président***
Mr Abderrahmane Arabie	***Maitre de conférences A***	***Examinateur***
Mr Daoudi Hamza	***Maitre de conférences B***	***Encadreur***

Remérciements

Nous remercions Dieu d'abord et avant tout à la fin d'un tel travail et tous ceux qui, plus ou moins directement, ont contribué à le rendre possible.

Nous tenons à remercier vivement tout d'abord notre encadreur, monsieur le docteur **Hamza Daoudi** pour tout le temps qu'ils m'ont consacré et pour sa patience, son suivie et ses conseils durant l'évolution de ce travail.

Que le docteur **Halim Benali** trouve ici l'expression de nos remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à cet mémoire. Je le remercie chaleuresement d'avoir accepté d'être le président du jury de ce travail.

Je voudrais également remercier Monsieur le docteur **Abderrahmane Arabie** pour avoir accepter d'examiner cet mémoire.

Finalement, nos plus vifs remerciement s'adressent à tout personne qui a contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Cette thèse est dédiée à toute ma famille...
et mes meilleurs amis...

Résumé

L'estimation de la fonction de risque à un grand intérêt en statistique. En effet, elle est utilisée dans l'analyse de risque ou pour l'étude des phénomènes de survie. L'objectif de ce travail est d'étudier les propriétes asymptotiques de l'éstimateur non paramétrique de la fonction de risque par la methode noyau, lorsque les données sont indépendantes identiquement distribuées.

Mots clés La fonction de risque, phénomènes de survie, non paramétrique, la methode noyau .

Abstract

The estimation of the risk function is of great interest in statistics. Indeed, it is used in risk analysis or for the study of survival phenomena. The objective of this work is to study the asymptotic properties of the nonparametric estimator of the risk function by the kernel method, when the data are independent identically distributed.

Key words The risk function, survival phenomena, nonparametric, the kernel method.

Table des matières

Introduction

Souvent en statistique à partir d'une suite des variables aléatoires nous cherchons à estimer la densité de probabilité avec des méthodes paramétriques tel que la méthode de maximum de vraisemblance, ou des méthodes non paramétriques.
Le principe d'estimation non paramétrique est de laisser les données elle mêmes,donc au lieu de supposer une loi paramétrique et d'utiliser un échantillon pour estimer les différentes paramétrés, on utilise directement l'échantillon comme estimateur de la densité.
La méthode d'estimation non paramétrique la plus simple est celle de l'histogramme qui était introduit par John Graunt en 1962, un problème vient du fait que l'histogramme donne une fonction qui nest pas continue.
La méthode d'estimation non paramétrique du noyaux fut introduit par Rosenblatt en 1956, puis amélioré par Parzen(1962). Mais ces estimateurs connaissent quelques inconvénients, parmi lesquels les problèmes de support. Le premier cas celui des effets de bords dans l'estimateur de la densité à support bornée, comme les noyaux symétriques assignent des poids à l'extérieur du support de la densité.
Récemment, Certain auteurs ont proposé dans le cas d'une densité à support bornée , l'utilisation de noyaux dont le support coïncide avec celui de la densité estimée , ceci a efficacement résout le problème des effets de bords puisque les noyaux utilisées sont généralement asymétriques, et peuvent changer la forme selon la position du point d'estimation.
Cet memoire est divisé en troi chapitres, Dans le premier chapitre on aborde la théorie moderne du calcul des probabilités en donnant la définition mathématique d'un espace de probabilités, nous avons essayé de faire appel aux

notions de la théorie de la mesure, qui reste malgré tout essentielle pour une approche rigoureuse du calcul des probabilités. Nous avons introduit la notion de probabilité conditionnelle ainsi que la notion d'indépendance pour les événements qui reste une notion propre à la théorie de la probabilité.
Dans le chapitre deux nous allons présenter l'estimation non paramétrique par la methode de noyau et l'estimation de la fonction de risque par cette methode.
Le troisième on s'interesse à étudier étudier les propriétes asymptotiques de l'éstimateur à noyau : le biais ponctuel, la variance ponctuelle et l'erreur quadratique moyenne(MSE) et on termine par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Rappel sur théorie des probabilités

1.1 Espace probabilisable

1.1.1 Espace échantillon

Définition 1.1 *On appelle expérience aléatoire ou épreuve, toute expérience dont le résultat est régi par le hasard l'orsqu'on répète l'expérience dans les mêmes conditions.*

Exemple 1.1 *Donnons quelques exemples simples d'expériences aléatoires :*

1. *le jet d'une pièce de monnaie et l'observation de la face supérieure.*
2. *Le jet d'un dé à six faces et l'observation de la face supérieure.*
3. *L'extraction d'une carte d'un jeu de 32 cartes.*
4. *La mesure de la durée de vie d'une batterie de téléphone portable.*
5. *La détermination du nombre de personnes arrivant à un guichet dans une période donnée.*

Définition 1.2 *On appelle l'ensemble des tous les résultats possibles d'une experience aleatoire espace échantillon ou espace des épreuves. On le note* Ω.

Remarque 1.1 *Les espaces échantillons correspondent aux experiencs aléatoires citees dans l'exemple precedent sont respectivement :* Ω_1 = *pile, face,*

Ω_2 = *1, 2, 3, 4, 5, 6*
Ω_3 = *l'ensembles des 32 carte,* $\Omega_4 = [0, +\infty[$, Ω_5 = *N.*

1.1.2 Algèbre-Tribu

Définition 1.3 *Soit Ω un espace échantillon, une algèbre $\mathcal{A}$ sur Ω est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant :*

i $\Omega \in \mathcal{A}$

ii $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

iii $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Définition 1.4 *Soit Ω un espace échantillon, une tribu ou une σ-algebre $\mathcal{F}$ sur Ω est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ verifiant :*

i $\Omega \in \mathcal{A}$

ii $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

iii *Si $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ alors :*

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{F}$$

Exemple 1.2 *Soient Ω un espace échantillon, $A \in \mathcal{P}$, alors :*

- *$\mathcal{A}_{\prime} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une algèbre sur Ω appelee l'algèbre triviale sur Ω.*
- *$\mathcal{P}$ est une algèbre sur Ω , elle est appelée l'algèbre grossiere sur Ω .*
- *Soit $A \subset \Omega$, posons : $\sigma(A)\{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$. Il est clair que $\sigma(A)$ est une algèbre sur Ω , elle est appelee l'algebre engendree pas A.*
- *Posons $\Omega = \{a, b, c\}$ et $A = \{\emptyset, \Omega, a, b, a, c, c\}$ alors A n'est pas une algèbre sur Ω puisque $\{a, c\} = \{b\} \ni \mathcal{A}$*

Remarque 1.2 *Il n'est pas difficile de voir que :*

- *Une tribu est forcément une algèbre mais la réciproque est fausse en général.*
- *Une algèbre (et à fortiori une tribu) contient toujours l'ensemble vide.*
- *Une algèbre est stable par intersection finie.*
- *Une tribu est stable par intersection infinie dénombrable.*
- *La réunion de deux algèbres (resp. de deux tribus) n'est pas une algèbre (resp. une tribu) en général.*

Cependant on a le résultat suivant :

Proposition 1.1 *L'intersection de deux algebres (resp. de deux tribus) est une algebre (resp. une tribu).*

Définition 1.5 *Soient Ω un espace echantillon, $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω. Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est appele espace probabilisable ou espace mesurable.*

1.2 Espace de probabilité

Dans tout ce qui suit $(\Omega, \mathcal{F})$ designe un espace probabilisable.

Définition 1.6 *Soient $A, B, A_1, A_2, ...A_n$ des elements de $\mathcal{F}$.*

a *On dit que $AetB$ sont incompatibles ou disjoints si $A \cap B = \emptyset$*

b *On dit que $A_1, A_2, ...A_n$ sont deux a deux incompatibles si pour tout $1 \leq i \neq j \leq n : A_i \cap B_i = \emptyset$*

c *On dit que $A_1, A_2, ...A_n$ forment une partition de Ω, s'ils sont deux a deux incompatibles et si :*

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$$

Nous pouvons à présent donner la définition d'une probabilité :

Définition 1.7 *On appelle probabilite, toute application* $\mathbb{P} : \Omega \to [0,1]$ *verifiant les deux proprietes suivantes :*

i $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

ii σ*-additivite : Pour toute famille* $A_k, k \geq 1$ *d'éléments de* $\mathcal{F}$ *deux a deux incompatibles, on a :*

$$\mathbb{P}(\cup_{k\geq 1} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Remarque 1.3 *Cette definition merite quelques explications :*

1. *La première condition est assez naturelle puisque par definition,* Ω *est l'ensemble de tous les resultats possibles.*
2. *La condition de* σ*-additivite est aussi naturelle, en effet si on considere le jet d'un de equilibre, la probabilite d'avoir un 2 ou un 4 est 2/6 = 1/6+1/6 donc la somme des probabilites d'avoir un 2 et un 4.*
3. *De cette definition, on peut comprendre l'utilité de la notion de tribu, introduite dans la definition 2.4, ainsi la tribu peut etre consideree comme le domaine de definition d'une probabilite* $\mathbb{P}$. *En effet dans cette dernière définition on peut parler de* $\mathbb{P}(A_n)$ *puisque* $A_n \in \mathcal{F}$, *mais on ne pouvait pas écrire* $\mathbb{P}(\cup_{n\geq 1} A_n)$ *si* $\mathcal{F}$ *n'était pas une tribu. (à méditer)*
4. *On peut se demander pourquoi ne pas definir une probabilite* $\mathbb{P}$. *sur* $\surd(\Omega)$. *tout simplement ? La reponse est que lorsque* Ω *est un ensemble fini, la tribu* $\mathcal{F}$ *sera souvent* $\surd(\Omega)$, *mais lorsque* Ω *est un ensemble infini, ceci n'est pas possible en general, ces considerations sont purement theoriques et sortent du cadre de ce polycopie.*

Remarque 1.4 *Il faut bien noter que pour la condition de* σ*-additivite exigée dans la definition précédente, on demande que les ensembles* $\{A_k, k \geq 1\}$, *soient deux à deux incompatibles, en effet si cette condition n'est pas verifiée, l'équation (2.1), peut ne pas être satisfaite, pour le voir il suffit de considérer* *l'éxperience aléatoire qui consiste a jeter un dé équilibre et à observer la face superieure. Soient :*

A : "avoir un chiffre pair"
B : "avoir un chiffre supérieur ou égale a 3".

On a $A = \{2,4,6\}, B = \{3,4,5,6\}$, *d'où* $A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$. *Ainsi* $\mathbb{P}(A) = 1/2, \mathbb{P}(B) = 2/3$ *et* $\mathbb{P}(A \cup B) = 5/6$, *par consequent :*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{6} \neq \frac{7}{6} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Définition 1.8 *Si* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est un espace probabilisable,* $\mathbb{P}$ *une probabilite definie sur* $(\Omega, \mathcal{F})$*, alors le triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est appele espace de probabilite.*

Proposition 1.2 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilite,* $A, B \in \mathcal{F}$*, alors :*

1. $\forall E \in \mathcal{F}, 0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1.$
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$
3. $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A).$
4. *Croissance :* $\mathbb{P}$ *est une application croissante :*
$$A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$
5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$

Exemple 1.3 *Soients* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace probabilisable,* $A, B \in \mathcal{F}$ *Peut-on définir une probabilite vérifiant :*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4} et \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}?$$

Solution :
Il suffit de remarquer que $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \mathbb{P}(A)$ ce qui est impossible car $A \cap B \subset A$ et ceci implique d'aprés le quatrième point de la proposition 3.2 que $\mathbb{P}(A \cap B)$ doit être inférieur ou égale a $\mathbb{P}(A$.

Exemple 1.4 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace probabilisable,* $A, B \in \mathcal{F}$. *Peut-on définir une probabilité* $\mathbb{P}$ *verifiant :*
$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{7}{8}$ *et* $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Solution : D'apres la proposition 3.2, on a $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{9}{8} > 1$, ce qui est impossible d'apres la definition d'une probabilité.

Proposition 1.3 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilite,* $A, B \in \mathcal{F}$, *alors :*

- *L'ensemble vide est appelé l'évènement impossible.*
- *Si* $\mathbb{P}(A) = 0$, *on dit que* A *est un évènement presque impossible.*
- Ω *est appele l'évènement certain.*
- *Si* $\mathbb{P}(B) = 1$, *on dit que* B *est un évènement presque certain.*

Dans la définition de la σ-additivité (definition 2.7), on exige que les évènements $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ soient deux a deux incompatibles, pour pouvoir calculer la probabilité de la réunion de plusieurs évènements. Dans le cas ou cette condition n'est pas vérifiée, on a seulement une inégalité, dite inégalité de Boole :

Proposition 1.4 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité,* $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ *une suite d'élements de* $\mathcal{F}$, *alors :*

$$\mathbb{P}(\cup_{k \geq 1} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Une probabilité possède aussi une propriété qui ressemble à la continuité d'une fonction et qui nous sera utile pour la suite :

Proposition 1.5 *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité Si* $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ *est une suite croissante d'éléments de* $\mathcal{F}$*(i.e* $A_n \subset A_{n+1}$*,pour tout* n *. 1),* *alors*

$$\mathbb{P}(\cup_{n\geq 1}A_n) = lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)$$

Si $\{A_k, k \in \mathbb{N}\}$ est une suite décroissante d'élements de $\mathcal{F}$(i.e $A_n \supset A_{n+1}$,pour tout $n \geq 1$, alors

$$\mathbb{P}(\cup_{n\geq 1}A_n) = lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)$$

1.2.1 Le cas équiprobable

Supposons dans ce paragraphe que Ω est un ensemble fini avec $card(\Omega) = n$, on peut l'écrire : $\Omega = w_1, w_2, ..., w_n$. Supposons aussi que tous les évènements $\{w_k\}$. sont équiprobables ou uniformes i. e.

$$\mathbb{P}(\{w_1\}) = \mathbb{P}(\{w_1\}), \mathbb{P}(\{w_2\}), ..., \mathbb{P}(\{w_n\})$$

En utilsant les propriétés de la probabilité $\mathbb{P}$ (définition 2.7), on a par la propiriété de σ-additivite :

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n}\{w_k\}) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\{w_k\}) = n\mathbb{P}(\{w_1\})$$

Par suite

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\}, \mathbb{P}(\{w_k\}) = \frac{1}{n}$$

Soient à présent $1 \leq k \leq n, A \subset \Omega$, avec $card(A) = k$. Dans ce cas on peut écrire $A = \{w_1^{'}, w_2^{'}, ..., w_k^{'}\}$., où chaque $w_k^{'}$ est choisit dans l'ensemble Ω. Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\cup_{j=1}^{k}\{w_k^{'}\}) = \sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}(\{w_k^{'}\}) = k\mathbb{P}(\{w_1^{'}\}) = \frac{k}{n}$$

On a alors prouvé le résultat suivant :

Théorème 1.1 *Dans le cas équiprobable, la probabilité d'un evenement A est donnée par*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}$$

Afin d'illustrer ce résultat, donnons trois exemples :

Exemple 1.5 *On jette deux dés équilibrés, et on observe les faces superieures des deux dés. Notons par A l'évènement :*

A : "la somme des deux chiffres est egale a 5".

Calculer $\mathbb{P}(A)$.

Solution :
Soit Ω l'espace echantillon associe a cette experience aléatoire, ainsi

$$\Omega = \{(x, y)/x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

.

Par suite $card(\Omega) = 6 \times 6 = 36$. De plus les deux des sont équilibrés, donc chaque élément (x, y) de Ω a la même probabilité d'apparaître. On est par conséquent dans un cas équiprobable. D'autre part $A = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

Le théorème 2.6 donne :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{4}{\Omega}$$

Exemple 1.6 *On forme un nombre de 4 chiffres choisis au hasard dans l'ensemble* $\{1, 2, ..., 9\}$. *Quelle est la probabilités que le nombre soit pair ?*

Solution : Notons le nombre choisis par abcd et soit Ω l'espace échantillon associe a cette experience aleatoire, ainsi $\Omega = \{abcd/a, b, c, d \in \{1, 2, ...9\}\}$. D'ou $card(\Omega) = 9\times9\times9\times9 = \frac{9}{4}$. A présent, introduisons l'évènement B : "le nombre choisis est pair". Puisque le nombre est choisi au hasard, on est dans un cas équiprobable. D'autre part le nombre *abcd* est pair si et seulement si $d \in \{2, 4, 6, 8\}$, donc $card(B) = 9 \times 9 \times 9 \times 4$. On a par le théorème

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{9^3 \times 4}{9^4} = \frac{4}{9}$$

Exemple 1.7 *Une urne contient 10 boules : 3 noires, 4 blanches et 3 rouges. On tire de cette urne 3 boules. calculer la probabilité des évènements suivants :*

- *A : "Avoir exactemeent 3 boules blanches".*
- *B : "Avoir une boule de chaque couleur".*
- *C : "Avoir au moins une boule rouge".*

Solution :
Dans cet exemple on n'attache pas d'importance a l'ordre d'apparition des boules, on forme donc un sous ensemble compose de trois boules choisis dans un ensemnble de 10 boules. Par consequent $card(\Omega) = C_3^{10}$.

- Pour le premier evenement, on veut 3 boules blanches, pour realiser cet évenement, on doit choisir nos 3 boules parmi les 4 boules blanches, on a donc $card(A) = C_3^4$. Ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^4}{C_3^{10}}$$

- Pour l'évènement B, on veut avoir une boule de chaque couleur, donc on a 3 choix pour la noire, 4 pour la blanches et 3 pour la rouges, ainsi $card(B) = 3 \times 4 \times 3 = 36$. Donc

$$\mathbb{P}(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{36}{C_3^{10}}$$

- Enfin pour le dernier évènement, même si on peut calculer $\mathbb{P}(C)$ directement, il est préférable de calculer d'abord $\mathbb{P}(\overline{C})$ qui est plus simple. En effet, on a $\overline{C}$: "Ne pas avoir de boule rouge", mais il y a 7 boules qui ne sont pas de couleur rouge, d'où $card(\overline{C}) = C_3^7$. Par conséquent

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(\overline{C}) = 1 - \frac{\overline{C}}{card(\Omega)} = 1 - \frac{C_3^7}{C_3^{10}}$$

1.3 Probabilité conditionnelle

Soient$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$un espace de probabilité, $A \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$.

Définition 1.9 *Pour $A \in \mathcal{F}$, on désigne par $\mathbb{P}(A/B)$ la probabilité de A sachant B, elle est définie par :*

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Remarque 1.5 *Soient A, B deux évènements de Ω, $\mathbb{P}(A/B)$ se lit la probabilité de A sachant B ou la probabilité conditionnelle de A par rapport à B.*

La probabilité condionnelle par rapport a un évènement permet d'introduire une nouvelle probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$, en effet :

Remarque 1.6 *L'application $\mathbb{P}(./B)$ definie de $\mathcal{F}$ vers $[0, 1]$ par*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

est une probabilite sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Remarque 1.7 *Soient $C, D \in \mathcal{F}$. Cette proposition signifie en particulier que :*

a $\mathbb{P}(\Omega/B) = 1$.
b $\mathbb{P}(C \cup D/B) = \mathbb{P}(C/B) + \mathbb{P}(D/B) - \mathbb{P}(C \cap D/B)$.
c *Si* C *et* D *sont incompatibles, alors* $\mathbb{P}(C \cup D/B) = \mathbb{P}(C/B) + \mathbb{P}(D/B)$.
d $\mathbb{P}(\overline{C}/B) = 1 - \mathbb{P}(C/B)$.

Exemple 1.8 *On jette successivement deux dés équilibres. calculer la probabilité des événements suivants :*

1. *A : "La somme des chiffres sur les deux des est un nombre pair".*
2. *B : "La somme des chiffres sur les deux dés est un nombre pair sachant que le premier dé a donne le chiffre 5".*

Solution : Dans cet exemple $\Omega = \{(x, y)/x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. D'autre part, la somme de deux chiffres est paire si et seulement si les deux chiffres sont pairs ou impairs, d'où

$$A = \{(x, y)/x, y \in \{1, 3, 5\}\} \cup \{(x, y)/x, y \in \{2, 4, 6\}\}$$

Par consequent, $card(A) = 9 + 9 = 18$ et on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Pour le second évènement introduisons l'évènement C : "le premier de a donne le chiffre 5" On a ainsi $A \cap C = \{(5, y)/y \in \{1, 3, 5\}\}$ et on a $card(A \cap C) = 3$. Donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A/C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{3/36}{3/6} = \frac{1}{6}$$

.

Remarque 1.8 *Dans cet exemple, on a calculé dans les deux questions la probabilité que la somme des deux chiffres obtenus soit paire, mais à la différence de la première question où on n'avait aucune information, dans la deuxièmme question on savait que le premier dé a ramené le chiffre 5, ce qui explique la différence dans les résultats obtenus, et le fait que la probabilité calculée dans le second cas est plus petite que celle calculée au premier cas*

Exemple 1.9 *On jette deux pièces de monnaie équilibrés. Calculer :*

1. *La probabilité que les deux pièces ramènent pile, sachant que la première a ramené pile.*
2. *La probabilité que les deux pièces ramènent face, sachant qu'au moins l'une d'entre elle a ramené face.*

Solution : Pour $i \in \{1, 2\}$, posons : A_i : "La ieme piece a ramene pile"

1. On cherche $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2/A_1)$. On a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2/A_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_1) = \frac{1/2 \times 1/2}{1/2} = \frac{1}{2}$$

2. On cherche $\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2/\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2)$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2/\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap (\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2))}{\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2)}{1 - \mathbb{P}(\overline{A_1 \cap A_2})} \\
&= \frac{1/2 \times 1/2}{1 - (1/2 \times 1/2)} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Remarque 1.9 *Soient $A, C \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(A) > 0 et \mathbb{P}(A \cap B) > 0$ D'apres la définition de la probabilité conditionnelle, on a*

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

d'où

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A/B)\mathbb{P}(B)$$

De même

$$\mathbb{P}(C/A \cap B) = \frac{\mathbb{P}(C \cap A \cap B)}{\mathbb{P}(A \cap B)}$$

ainsi

$$\mathbb{P}(C \cap A \cap B) = \mathbb{P}(C/A \cap B)\mathbb{P}(A \cap B)$$

En combinant cette dernière équation avec (2.11), on obtient

$$\mathbb{P}(C \cap A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(C/A \cap B)$$

En faisant un raisonnement par récurrence, on peut généraliser cette dernière formule à n évènements.

Remarque 1.10 *Cette proposition est souvent utilisée lorsqu'on veut calculer la probabilité de l'intersection de plusieurs évènements obtenus en répétant une expérience aléatoire plusieurs fois, et lorsque l'espace échantillon change à chaque répétition. Nous proposons un exemple simple pour illustrer cela :*

Exemple 1.10 *Une urne contient une boule blanche et une boule noire, on tire des boules de cette urne jusqu'à ce que la noire appraisse. A chaque fois qu'une boule blanche est tirée, on la remet dans l'urne avec une autre boule blanche. Calculer la probabilité que la boule noire n'apparaisse pas au cours des cinq premiers tirages.*

Solution :
Pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, posons : B_i : "la boule tiree au ième tirage est blanche"

B : " la boule noire n'apparaisse pas au cours des cinq premiers tirages."
Il est facile de voir que :

$$B = \cap_{i=1}^{5} B_i$$

En appliquant la proposition précédente, on a n'apparaisse pas au cours des cinq premiers tirages.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{5} B_i) \\
&= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_1/B_2)...\mathbb{P}(B_5/B_1 \cap B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

1.4 Théorème de Bayes

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ une partition de Ω, $A \in \mathcal{F}$ et supposons que $\mathbb{P}(A) > 0$ et que $\mathbb{P}(A_k) > 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$ Soit $1 \leq k \leq n$, on a par les equations (2.11) :

$$\mathbb{P}(A \cap A_k) = \mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_k/A)\mathbb{P}(A)$$

Par conséquent

$$\mathbb{P}(A_k/A) = \frac{\mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(A)} =$$

En faisant appel à la formule des probabilités totales dans cette dernière égalité, on obtient :

Théorème 1.2 *Soient* $A_1, A_2, ..., A_n$ *un systeme complet de* $\Omega, A \in \mathcal{F}$ *avec* $\mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{P}(A_k) > 0$ *pour tout* $1 \leq k \leq n$. *Alors*

$$\mathbb{P}(A_k/A) = \frac{\mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A/A_k)\mathbb{P}(A_k)}$$

Remarque 1.11 *La formule de Bayes est appelée aussi la formule des causes, en effet la quantité $\mathbb{P}(A_k/A)$ donne la probabilité que l'évènement A s'est réalisé à travers A_k ou " à cause" de A_k.*

Exemple 1.11 *On effectue un test dans un grand élevage de bovins pour dépister une maladie. Ce test a permis de déceler 1.8*

1. *Quelle est la probabilité qu'un animal choisis au hasard dans cet élevage soit atteint de cette maladie.*
2. *L'animal choisi est atteint de cette maladie, quelle est la probabilité qu'il soit un mâle.*

Solution :
Introduisons les évènements suivants :

- A : "L'animal choisi est atteint de cette maladie".
- M : "L'animal choisi est un mâle".

Pour la première question, on cherche $\mathbb{P}(A)$. On a par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A/M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(A/M)\mathbb{P}(M)\\ &= (0.018)(0.35) + (0.012)(0.65)\\ &= 0.0141.\end{aligned}$$

Pour la deuxièmme question on cherche $\mathbb{P}(M/A)$. On a par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(M/A) = \frac{\mathbb{P}(A/M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{(0.018)(0.35)}{0.0141} = 0.4468.$$

1.5 Indépendance des événements

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. un espace de probabilite, $A, B \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$.

Définition 1.10 *On dit que les évènements A et B sont indépendants si :*

$$\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$$

Remarque 1.12 *Soient A et B deux evenements de Ω : - Intuitivement, A et B sont independants si la realisation de B n'influe pas sur la relisation de A et vice versa.*
- Si A et B sont independants et si $\mathbb{P}(A) > 0$, alors il n'est pas difficile de voir qu'on a aussi :

$$\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$$

Une conséquence importante de la définition est :

Théorème 1.3 *Deux évènements Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si :*

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Remarque 1.13 *On peut prendre l'équation (2.15) comme définition pour l'indépendance de deux évènements, dans ce cas on est pas obligé de supposer que la probabilité de l'un des deux évènements est strictement positive.*

Exemple 1.12 *On jette une pièce de monnaie deux fois de suites et on considère les évènements :*

- *A : "On obtient pile au premier jet"*
- *B : "On obtient le même résultat dans les deux jets"*
- *C : "On obtient pile dans les deux jets"*

Pour cette expérience on a $\Omega = \{(x, y)/x, y \in \{pile, face\}\}$, ainsi $card(\Omega) = 4$. D'autre part :

$$A = \{(pile, pile), (pile, face)\}, B = \{(pile, pile), (face, face)\},$$

$$C = \{(pile, pile)\}, A \cap B = \{(pile, pile)\}, A \cap C = \{(pile, pile)\},$$

d'où

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}$$

. Par suite

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

. Ainsi A et B sont independants. Mais

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$

ce qui montre que A et C ne sont pas independants.

Proposition 1.6 *Soient A, B deux evenements de Ω, les proprietes suivantes sont équivalentes :*

- *Les evenements A et B sont independants.*
- *Les evenements $\overline{A}$ et B sont independants.*
- *Les evenements A et $\overline{B}$ sont independants.*
- *Les evenements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont independants.*

En utilisant le theoreme 2.5, on peut généraliser la notion d'independance à plusieurs evenements :

Définition 1.11 *Soient $n \geq 2, A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements d'un espace de probabilite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ sont independants si :*

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{p} A_{k_i}) = \prod_{k=1}^{P} \mathbb{P}(A_{k_i})$$

pour tout $k_1, k_2, ..., k_p \in 1, 2, ..., n.$

Remarque 1.14 *D'après cette définition, pour montrer que n évènemente sont indépendants il faut vérifier que l'équation (2.16) est valide pour toutes les intersections possibles des ces évènements, ainsi trois évènements* A, B *et* C *sont indépendants si*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

et

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Exemple 1.13 *Considerons l'experience aleatoire qui consiste a jeter une piece de monnaie deux fois de suite et d'observer les resultats obtenus. Soient* A, B *et* C *les evenements :*

- A *: " Le resultat du premier jet est pile "*
- B *: " Le resultat du deuxieme jet est pile "*
- C *: " On obtient le meme resultat dans les deux jets "*

Ici $\Omega = \{(x, y), avecx, y \in pile, face\}$, donc $card(\Omega) = 4$. D'autre part $\mathbb{P}(C) =$ La probabilite d'avoir deux fois pile ou deux fois face $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

d'ou

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$$

d' un autre cote
$\mathbb{P}(A \cap B) =$ La probabilite d'avoir pile dans les deux jets
$\mathbb{P}(A \cap C) =$ La probabilite d'avoir pile dans les deux jets
$\mathbb{P}(B \cap C) =$ La probabilite d'avoir pile dans les deux jets.

Par suite

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$

et

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

.

Ainsi

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Par conséquent, les évènements A, B et C ne sont pas indépendants.

Chapitre 2

Estimation non paramétrique par la méthode noyau

2.1 De l'approche paramétrique vers la non paramétrique

Les statistiques non paramétriques sont un domaine des statistiques qui ne reposent pas sur des familles de loi de probabilité paramétriques. Les méthodes non paramétriques pour la régression comprennent les histogrammes, les méthodes d'estimation par noyau, les splines et les décompositions dans des dictionnaires de filtres (par exemple décomposition en ondelettes). Bien que le nom de non paramétriques soit donné à ces méthodes, elles reposent en vérité sur l'estimation de paramètres. La différence avec les méthodes de statistique classique est qu'il s'agit en général d'un très grand nombre de paramètres et que chacun de ces paramètres ne permet pas de décrire la structure générale des données. Pour les méthodes non paramétriques, le nombre de paramètres qui sont estimés croît avec le nombre d'échantillons disponibles, pour les méthodes classiques, ce nombre est décidé à l'avance.

Exemple 2.1 $\star\mathcal{M} = \left\{\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^{+\star}\right\}$, *modèle Qaussien.*
$\star\mathcal{M} = \{\Gamma(\alpha, \beta); (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+*}\}$, *modèle loi Gamma.*
$\star\mathcal{M} = \{f(x; \theta) = h(x) \exp[\eta(\theta)T(x) - A(\theta)]; \theta \in \mathbb{R}^p\}$, *modèle des familles exponentielles.*

Par opposition, en statistique **non paramètrique**, le modèle n'est pas d'écrit par un nombre fini de paramètre. comme par exemple :
$\star$ On s'autorise toutes les distributions possibles, i.e. on ne fait aucune hypothèse sur la forme/nature/type de la distribution des variables aléatoires. $\star$ Le nombre de paramètres du modèle n'est pas fixé et varie (augmente) avec le nombre d'observations.

2.2 La méthode Noyau

2.2.1 Notions de Noyau

Nous définitions maintenant plus généralement la notion d'estimateur à noyau

Définition 2.1 *Soit* $\mathrm{K} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *une fonction intégrable tel que* $\int_R K(u)du = 1$K *est dit noyau. pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *on appelle* $h_n > 0$ *la fenêtre ou paramétré de lissage. et* $\hat{f}(x)$ *d'estimateur ànoyau de la densité de probabilité* f *(estimateur de Parzen -Rozenblatt)[07] définit pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par*

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right)$$

On note $h_n = h$

Définition 2.2 *Un noyau est dit symétrique si, pour tout u dans son ensemble dedéfinition* $K(u) = K(-u), \forall u$ *dans sa domaine de définition. ce qui implique l'égalité suivante :*

$$\int_R uK(u)du = 0$$

De plus, elle est de carré intégrable

$$\int_R K^2(u)du < +\infty$$

et nous avons aussi la variance de K finie

$$\int_R u^2 K(u)du < +\infty$$

2.2.2 Exemples des noyau

Voici quelques exemples de noyaux symétriques les plus utilisés :

Noyaux	Supports	Densités
Biwieght	[-1,1]	$K(u) = \frac{15}{16}\left(1-u^2\right)^2$
Epanechnikov	[-1,1]	$K(u) = \frac{3}{4}\left(1-u^2\right)$
Gaussien	$\mathbb{R}$	$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-u^2/2\right)$
Rectangulaire	[-1,1]	$K(u) = \frac{1}{2}$
Triangulaire	[-1,1]	$K(u) = 1 - \lvert u\rvert 1_{\{\lvert u\rvert\leq 1\}}$

TABLE 2.1 – Exemples des noyaux symétriques

2.3 Estimation de la fonction de risque

Cette paragraphe est consacré à l'estimation non paramétrique de la fonction de risque par la méthode du noyau. Il est présenté en trois section. La première section est consacrée à la définition de la fonction de risque et la deuxième section on va estimer la fonction de densité et on termine par l'estimation de la fonction de répartition.

2.3.1 Définition de la fonction de risque

Définition 2.3 *Etant donné une variable aléatoire X a valeurs dans $\mathbb{R}$,de fonction de répartition F et de densité f, la* ***fonction de risque*** *h est définie en tout point t de $\mathbb{R}$, tel que $F(t) < 1$, par :*

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

2.3.2 Estimation de la fonction de densité

Rappelons que la densité de probabilite f est égale a la derivée de la fonction de répartition F (si cette derivée existe) - On peut done écrire

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F_n(x+h) - \hat{F}_n(x-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{P(x-h < X \leq x+h)}{2h} \end{aligned}$$

Un estimateur de f(x) est alors :

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \frac{1}{2h} \frac{P\left(x-h < X_i \leq x+h\right)}{n} \\ &= \frac{1}{2hn} \sum_{i=1}^{n} I\left\{x-h < X_i \leq x+h\right\} \\ &= \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^{n} I\left\{-1 \leq \frac{x-X_i}{h} < +1\right\} \end{aligned}$$

Notons que oet estimateur peut encore s'écrire comme

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} 1_{\{x=h<X_i \leq x+h\}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h} K_0\left(\frac{X_i - x}{h}\right) \end{aligned}$$

Où

$$K_0(y) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } y \in [-1, [1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec $K_0(.)$ La densite de probabilite uniforme sur l'intervalle [1,1] est appelee noyau de Rosenblatt | 07]. Cet estimateur peut etre généralisfe en remplacant la fonction de poids Ko(.) par une fonction de poids plus générale K par exemple une densite de probabilité quelconque (Normale, Gamma, Beta....ete)

2.3.3 Estimation de la fonction de répartition

Supposons que nous observons n variables aleatoires independantes identiquement distribuées (i.i.d) $\mathcal{X}_1, X_2, \ldots, X_n$ de densité de probabilite inconnue f de $\mathbb{R}$ dans $[0, \infty[$, Soit $F(x) = P\left(X_1 \leq x\right)$ la fonct ion de répartition de la loi de X. la fonction de répartition empirique est estimée par :

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1\left(x_i \leq x\right)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \hat{F}_n(x) \overset{P}{\to} F(x) \quad \text{si} \quad n- \to +\infty$$

Roscnblatt (1956) est le premier qui a donné un exemple d'estimateur à partir de $\hat{F}_n(x)$ pour $h > 0$ est petit

$$\hat{f}(x) \simeq \frac{\hat{F}_n(x+h) - \hat{F}_n(x-h)}{2h}$$

Chapitre 3

Etudier les propriétes asymptotiques de l'éstimateur à noyau

Dans cette partie,nous présentons d'estimateur d'une densité de probabilité à noyau symétrique, puis nous donnons les différentes propriétés de cet estimateur tel que le Biais, la Variance et le MSE.

Proposition 3.1 *La fonction $f(x)$ est une densité de probabilité.*

La démonstration : Soit $\hat{f}(x)$ un estimateur non paramétrique à noyau symétrique définit par :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right)$$

$\hat{f}(x)$ vérifie $\int_R \hat{f}(x)dx = 1$ .En effet

$$\begin{aligned}
\int_R \hat{f}(x)dx &= \int_R \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right) dx \\
&= \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} \int_R K\left(\frac{X_i - x}{h_n}\right) dx \\
&= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{X - x}{h}\right) dx
\end{aligned}$$

Car les X_i sont i.i.d

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} K(u)du = 1 \text{ en posent } u = \frac{X-x}{h}$$

3.1 Biais ponctuel

Le biais ponctuel mesure la déférence entre la valeur moyenne de l'estimateur $\hat{f}(x)$ et la la valeur de la fonction inconnue f en un point x. Biais$(\hat{f}(x)) = \mathbb{E}(\hat{f}(x)) - f(x)$

Soit x fixe dans $\mathbb{R}$. Le biais de l'estimateur à noyau présenté dans $\hat{f}(x)$ est :

$$\text{Biais}(\hat{f}(x)) = \frac{h^2}{2} f''(x) \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u)du + 0\left(h^2\right)$$

Les variables aléatoires sont i.i.d nous avons donc :

$$\begin{aligned} 1.E(\hat{f}(x)) &= \frac{1}{nh} E\left(\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)\right) \\ &= \frac{1}{h} E\left(K\left(\frac{X-x}{h}\right)\right) \\ &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{y-x}{h}\right) f(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) f(x+uh)du. \quad \text{en posant} \quad u = \frac{y-x}{h} \end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor de f au voisinage de x on obtient :

$$\begin{gathered} f(x+uh) = f(x) + huf'(x) + \tfrac{(uh)^2 f''(x)}{2} + o\left(h^2u^2\right) \\ E(\hat{f}(x)) = \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} K(u)\left[f(x) + f'(x)uh + \frac{1}{2}f''(x)(uh)^2 + o\left(h^2\right)\right] du \\ = f(x)\textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} K(u)du + hf'(x)\int_{-\infty}^{+\infty} uK(u)du + f''(x)\frac{h^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2K(u)du \end{gathered}$$

Sous les conditions précédents on a :

$$E(\hat{f}(x)) = f(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u)du + o\left(h^2\right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\text{Biais}(\hat{f}(x)) &= E(\hat{f}(x)) - f(x) \\ &= \frac{h^2}{2} f''(x) \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u) du + o\left(h^2\right)\end{aligned}$$

3.2 Variance ponctuelle

Soit x fixe dans $\mathbb{R}$. La variance de l'estimateur $\hat{f}(x)$ est.

$$\operatorname{Var}(\dot{f}(x)) = \tfrac{1}{nh} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u) du + o\left(\tfrac{1}{nh}\right)$$

$$2.\ \operatorname{Var}(\hat{f}(x)) = V\left\{\tfrac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\tfrac{X_i - x}{h}\right)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{n}\left\{\tfrac{1}{h^2} E\left(\left[K\left(\tfrac{X-x}{h}\right)\right]^2\right) - \tfrac{1}{h} E^2\left(K\left(\tfrac{X-x}{h}\right)\right)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{nh} \int_{-\infty}^{+\infty} (K(u))^2 f(x+uh) du - \tfrac{1}{n}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} K(u) f(x+uh) du\right]^2$$

Le terme $\frac{1}{n}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} K(u) f(x+uh) du\right]^2 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ Done

$$\operatorname{Var}(\hat{f}(x)) = \frac{1}{nh} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u) du + o\left(\frac{1}{nh}\right)$$

Ainsi

Biais $(\hat{f}(x)) - \frac{1}{2} f''(x) \mu_2 h^2 + o\left(h^2\right)$ où $\mu_2 = \int K(u) u^2 du$ Var $(\hat{f}(x)) = \frac{1}{nh} f(x) R(K) + o\left(\frac{1}{nh}\right)$ Où $R(K) = \int K^2(u) du$ Pour un h petit le Biais $(\hat{f}(x))$ depend de $f''(x)$ et du moment d'ordre 2 du noyau,le Biais est de signe de $f''(x)$ - Si$h = h_{\mathrm{s}} \rightarrow 0$;quand $n \rightarrow \infty$, alors Biais$(\hat{f}(x)) \rightarrow 0$ - Si$h = h_{\mathrm{m}} \rightarrow 0$ et $nh_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, Alors Var$(\hat{f}(x)) \rightarrow 0$

$$\begin{cases} \text{Si} & h \quad \text{diminue} \quad -(\text{Biais})^2 \\ \text{diminue et la Variance augmente} & \\ \text{Si} & h \quad \text{augmente} \quad -(\text{Biais})^2 \\ \text{augmonte et la Variance diminue} & \end{cases}$$

3.3 Erreur quadratique moyenne(MSE)

L'erreur quadratique moyenne (en anglais "Mean squared Error") est donne par :

$$MSE(x) = \operatorname{var} \hat{f}(x) + Biais^2 \hat{f}(x)$$

Propriétés 3.1

$$\begin{aligned} MSE(x) &= \tfrac{1}{nh} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u)du + o\left(\tfrac{1}{nh}\right) \\ &+ \tfrac{h^4}{4} \left\{f''(x)\right\}^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u)du\right]^2 + o\left(h^4\right) \end{aligned}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} 1..1fSE(x) &= E(f(x) - f(x))^2 \\ &= E(f(x) - E(\hat{f}(x)) + E(\hat{f}(x)) - f(x))^2 \\ &= \mathrm{Var}(\hat{f}(x)) + (\mathrm{Biais}(\hat{f}(x)))^2 \\ &= \frac{1}{nh} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u)du + o\left(\frac{1}{nh}\right) \\ &+ \frac{h^4}{4} \left(f''(x)\right)^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u)du\right]^2 + o\left(h^4\right) \end{aligned}$$

Conclusion et perspectives

Cette contribution est sur l'estimation non paramétrique de la fonction de risque, avec des variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées(i.i.d). Nous avons étudier les propriétes asymptotiques de cet éstimateur non paramétrique.
Dans la continuité de ce travail, cette recherche ouvre la voie à de nouveaux travaux sur le sujet. l'étude du convergence presque complète cet estimateur, avec des variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées(i.i.d). Le cas des variables aléatoires réelles dépendantes identiquement distribuées.

Bibliographie

[1] Barbe. P., and Ledoux. M., *Probabilité*. EDP Sciences. 2007.

[2] Bertsekas. P. and Tsitsiklis. J. N., *Introduction to Probability*. Course. 2000.

[3] Bouezmarni,T.and Scaillet,O , *Consistency of Asymmetric Kernel Density Estimators and Smoothed Histograms with Application to Income Data*. Vol. 21. 390 412, Econometric Theory, 2004.

[4] Boukhari. F., *Probabilités*. Polycopié, Université aboubekr belkaid tlemcen. 2016.

[5] Calot. G., *Cours de calcul des Probabilités*. Dunod. 1982.

[6] Etienne.D., *Estimateur à noyau théorie des valeurs extrêmes*

[7] Francial.G.and Baudin .l.and Dobélé .k. , *Méthode non paramétrique des noyaux associés mixtes et application*

[8] Imen .B. , *Estimation Non-paramétrique par Noyaux Associés et Données de Panel en Marketing*

[9] Jean-Yves. O., *Probabilités*. Tomes 1 et 2. Cassini, 2008.

[10] Parzen.E ., *On estimation of a probability density function and mode.* vol.33, no.3, p. pp. 1065-1076 ,The Annals of Mathematical Statistics , 1962.

[11] Remi.S. , *Estimation de la fonction de répartition*

[12] Rosenblatt.M. , *Remarks on some nonparametric estimates of a density function.*. Vol. 27. 832837,Annals of Mathematical Statistics , 1956.

[13] Song. X ., *Probability density function estimation using gamma kernels.* Vol. 54.471480 ,Annals of the Institute of Statistical Mathematics , 2000.

[14] Velenik. Y., *Probabilités et Statistique.* 2016.

[15] William F., *An introduction to probability theory and its applications.* Vol. 1. 3rd Edition, Wiley series in probabilities and mathematical statistics, 1968.