

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département des Mathématiques



Spécialité : Mathématiques Appliquée
Option : Analyse Fonctionnelle Et Application

Présenté en vue d'obtenir le diplôme de MASTER

Présenté par :

Nouna Souad

Bouziane Nassima Lamia

Tarfaya Omar

Sujet de mémoire

Application de la Méthode défférence finie aux EDPs fractionnaires

Devant le jury composé de :

Mr : Larabi Abderrahmane

MCA

Président

Mr : Hallouz Ahmed

MCB

Examineur

Mr : Benia Kheireddine

MAA

Encadreur

Promotion : 2019 / 2020

Remerciements

*Nous tenons tout d'abord à remercier
Dieu le tout puissant et
miséricordieux qui nous donné la force et la patience
d'accomplir ce
modeste travail.*

*En second lieu nous tenons à remercier notre encadreur
Benia Kheireddine pour ses précieux conseils et son aide
durant tout la
période du travail .*

*Nos vifs remerciements vont également aux membre du jury
Mr.Halouz Ahmed et **Mr.Larabi Abderrahmane** et
pour l'intérêt
qu'ils ont portés à notre recherche en acceptant d'examiner
notre travail et
de l'enrichir par leurs proposition .*

*Nos remerciement vont aussi à l'endroit de nos enseignants
de la faculté
de Mathématiques et Informatique de l'université de Tiare, et
en
particulier au chef de portement de
Mathématique **Mr.Larabi Abderrahmane** les ses
collègues pour leurs aides , soutient moral et encouragement .
Enfin, nous tenons également à remercier toutes les
personnes qui ont
participées de prés ou de loin la réalisation de ce travail .*

Dédicase

*Merci Allah (mon dieu) de m'avoir donne la capacité
d'écrire et de
Réfléchir, la force d'y croire , la patience d'aller jusqu'au bout
du rêve et
le bonheur de lever mes mains vers le ciel :*

ya kayome

*je dédie ce modeste travail à celle m'a donne la vie ,le
symbole de
tendresse , qui*

*S'est sacrifiée pour mon bonheur et ma mère "**Fatiha**"
A mon père "**AEK**", école de mon enfance ,qui a été mon
ombre durant toutes les
années des études , et qui aveillé tout au long de ma vie
à m'encourager, à me donner l'aide et à me protégé .
Que dieu les gardes et les protégé .*

***A mon adorables sœurs :** Sabrine , Rania , Racha.*

***A mon frère :** Ridha , Amine , Mostapha.*

***A mon mes familles et leurs enfants :** Nouna, Besbase.*

***A mes amies :** Yacine , Amina , Taiabe, Radhia*

***A tous** ceux qui me sont chères.*

***A tous** ceux qui m'aiment.*

***A tous** ceux que j'aime.*

Nouna Souad

Dédicace

je dédie ce mémoire
A mes chère parents,
pour tout leur sacrifices,
leur tendresse, leur soutiens et leurs priers.
Tout au long de mes études
A tout mes chère frère et sœur et mes amies.
Pour leur encouragement paraments
A tout ma famille pour leur soutiens tout au long
de parcours universitaire .

Tarfaya Omar

Dédicace

*A mes parents : Youcef , Djamila
Pour vos mains qui ont tant travaillées,
Pour votre cœur qui m'a tant donné
Pour votre sourire qui m'attendait,
Pour vos yeux qui furent parfois mouillés,
Pour vous qui m'avez tant aimé.*

A mes frères : Farouk , Hamza , Mustapha .

A mes sœurs : Ibtissem , Amian , Bouchra , Ismahane .

*A mes amies : avec lesquelles j'ai vécu de beaux moments
au cours de mon cursus universitaire Loubna , Bassma ,
Houria , Zineb , Sara , Hayet , Hbibba , Amina ,*

A mon binôme : Nouna Souda ainsi qu'à toute sa famille

A tous ceux qui me connaissent de près ou de loin.

A toute ma famille.

Que Dieu les protège

Bouzaiane Nassima Lamia

Table des matières

Introduction	3
1 Préliminaire	6
1.1 Espaces fonctionnels	7
1.1.1 Espace de fonction intégrable	7
1.1.2 Espace des fonctions continues et absolument continues	7
1.2 Les fonctions spéciales	8
1.2.1 Fonction Gamma	8
1.2.2 Fonction Bêta	9
1.2.3 Fonction Mittag-Leffler	9
1.3 Approximation de la solution de l'équation de la chaleur en dimension 1 par différences finies	10
1.3.1 Principe de la méthode : le problème aux limites d'ordre 2 en di- mension 1	10
1.3.1.1 Approximations des dérivées d'une fonction régulière	10
1.3.1.2 Approximation de (1) par différences finies	12
2 Éléments de Calcul Fractionnaire	14
2.1 Intégrale fractionnaire	15
2.1.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$	15
2.1.2 L'intégrale de Riemann-Liouville	15
2.2 Dérivée fractionnaire	19
2.2.1 La dérivation fractionnaire au sens de de Riemann-Liouville	19
2.2.2 La dérivation fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov	20
2.2.3 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo	21
2.2.4 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville	22
2.2.5 Relation entre l'approche Riemann-Liouville et celle de Caputo	22
2.2.6 Propriétés générales des dérivées fractionnaires	23
2.2.7 Lemmes fondamentaux	23
2.3 Les équations aux dérivées partielles fractionnaires	24
2.3.1 Dérivée fractionnaire partielle	25
2.3.1.1 Intégrale fractionnaire partielle de Riemann-Liouville	25
2.3.1.2 Dérivée fractionnaire partielle de Riemann-Liouville	25
2.3.1.3 Dérivée fractionnaire partielle de Grünwald-Letnikov	26
2.3.1.4 Dérivée fractionnaire partielle de Caputo	26

3	Méthode des Différence finies cas fractionnaire et application	28
3.1	Différences finies fractionnaires	29
3.1.1	Les schémas de Grünwald	29
3.1.2	Les schémas L_1 et L_2	30
3.2	Application	33
3.2.1	Équation d'advection-dispersion fractionnaire	33
3.2.1.1	Résolution numérique du problème	33
3.2.2	Équation de diffusion fractionnaire	39
3.2.2.1	Résolution numérique du problème	39
	Conclusion	50

Introduction

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{ième} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. Quand Leibniz a annoncé dans une lettre à L'hôpital la présentation de la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction f est $\frac{d^n f}{dt^n}$, L'hôpital a répondu :
Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = 1/2$?

Cette lettre de L'hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que L'hôpital a demandé spécifiquement pour $n = 1/2$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20^{ième} siècle, inclut :

P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A.K. Grünwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912) S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Levy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945) E.R. Amour (1938-1996), A. Erdélyi (1939-1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949)[8].

Cependant, cette théorie peut être considérée comme un sujet nouveau aussi, depuis seulement un peu plus de trente années elle a été objet de conférences spécialisées. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur les calculs fractionnaires et ses applications à l'université de New Haven en juin 1974, et il a édité les débats. Pour la première monographie le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974 après une collaboration commune, commenté en 1968. Pour quoi était d'intérêt ?

Le calcul différentiel fournit un outil puissant pour expliquer et modéliser des processus dynamiques dans de nombreux domaines des sciences appliquées. Mais les expériences et la réalité nous enseignent qu'il y a beaucoup de systèmes complexes dans la nature avec une dynamique différente, tels le transport de contaminants chimiques dans l'eau autour de rochers, la diffusion atmosphérique de la pollution, la dynamique des matériaux viscoélastiques comme les polymères, le processus de diffusion cellulaire, la transmission de signaux par l'intermédiaire de champs magnétiques intenses, l'effet de la spéculation sur la rentabilité des stocks sur les marchés financiers, le trafic réseau et bien d'autres. Dans les cas mentionnés, les processus ont un comportement complexe macroscopique, qui fait que les dérivées classiques ne peuvent exprimer leur dynamique.

La notion de dérivation fractionnaire qui paraissait une question de mathématiques pures devint alors d'un intérêt certain pour la modélisation de tels processus [20],[21], un exemple simple de mécanique des fluides montre comment la dérivée d'ordre un demi apparaît tout simplement quand on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne. La dérivation fractionnaire est liée à la modélisation mécanique des gommages et des caoutchoucs, et toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations passées et dont le comportement est dit viscoélastique [1].

En 1768, Leonhard Euler publia la méthode d'Euler pour la résolution des équations différentielles. La convergence de cette méthode ne sera démontrée par Augustin Louis Cauchy qu'en 1824. Bien que cette méthode fonctionne, elle ne sera qu'anecdotique à l'époque.

En 1855, John Couch Adams écrit une lettre à F. Bashforth dans laquelle il mentionne les méthodes multiples. Pour augmenter la précision de la méthode d'Euler sans en augmenter le nombre de pas, Carl Runge publie la première méthode de Runge-Kutta en 1895, ce travail sera complété en 1905 par Martin Kutta. Il introduira alors la, très utilisée et répandue, méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4 pour les intimes) [3]. De son côté, Vilhelm Bjerkness avait proposé en 1904 une équation concernant l'atmosphère. Richardson, qui avait déjà publié sa méthode d'extrapolation en 1910, tenta de démontrer que le calcul permettait d'effectuer des précisions météorologiques. Sa méthode fut publiée en 1922, à l'aide de formulaires standardisés, pour accélérer le calcul en divisant le travail (il pose alors les bases du parallélisme mathématique), il avait estimé que 64000 personnes étaient nécessaires pour que le calcul soit terminé à temps pour prévoir les phénomènes météorologiques. Un essai sur les précisions, mais sans tout le personnel, donna des résultats très décevants. Richardson utilisait en effet un maillage beaucoup trop grossier puis

qu'il avait découpé la Terre en rectangles de 230km (latitude) par 200km (longitude) [2] :

En 1928, Richard Courant, Kurt Friedrichs et Hans Lewy publient un article concernant les conditions permettant d'assurer la stabilité numérique d'une méthode et ainsi d'éviter la propagation des erreurs. Ces conditions portent le nom de leurs découvreurs : les conditions CFL.

Elles sont fréquemment utilisées, notamment sur les équations hyperboliques. Elles imposent généralement un maillage assez fin [6].

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivant :

Dans le premier chapitre nous donnons les définitions et les notations qui seront utilisés dans la suite du travail.

Dans Le deuxième chapitre nous donnons les définitions les plus utilisées des, dérivées, intégrales et opérateurs fractionnaires ainsi que leurs propriétés.

Dans le troisième chapitre nous allons présenter quelques schémas de différences finies dans le cas fractionnaire et nous donnons deux exemples d'application de ces schémas. En, cette thèse est clôturée par une bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans cette partie, nous présentons un préliminaire dans lequel rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle qui représentent un outil indispensable dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espace de fonction intégrable

Définition 1.1.1 Soit $\Omega = [0, T]$, ($0 < T < +\infty$) un intervalle fini de \mathbb{R} et $1 \leq p \leq +\infty$.

1. Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonction f réelles sur Ω telle que f est sommable et

$$\int_0^T |f(t)|^p dt < \infty.$$

2. Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est espace des fonction mesurable f bornées presque partout (p.p) sur Ω .

Théorème 1.1.2 Soit $\Omega = [0, T]$, ($0 < T < +\infty$) un intervalle fini de \mathbb{R} .

1. Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left(\int_0^T |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

2. L'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 : |f(t)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

1.1.2 Espace des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.1.3 [5] Soit $\Omega = [0, T]$, ($0 < T < +\infty$) un intervalle fini de \mathbb{R} et $n \in \mathbb{N}$.

On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_{C(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \max_{t \in \Omega} |f^{(k)}(t)|, n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \sup_{t \in \Omega} |f(t)|.$$

Définition 1.1.4 [5] Soit $\Omega = [0, T]$, ($0 < T < +\infty$) un intervalle fini de \mathbb{R} .

On désigne par $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables, c'est-à-dire :

$$AC(\Omega) = \left\{ f / \exists \varphi \in L^1(\Omega) : f(t) = c + \int_0^t \varphi(s) ds \right\},$$

et on appelle $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions absolument continues sur Ω .

Définition 1.1.5 [5] Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont des dérivées continues sur Ω jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ et telles que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$ c'est-à-dire :

$$AC^n(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, f^{(k)} \in C(\Omega), k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}, f^{(n-1)} \in AC(\Omega) \right\}.$$

En particulier $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$.

Une caractérisation des fonctions de cet espace est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.1.6 Une fonction $f \in AC^n(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}^*$, si et seulement si elle est représentée sous la forme :

$$f(t) = \frac{1}{(n - 1)!} \int_0^t (t - \tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

1.2 Les fonctions spéciales

Dans cette partie, nous présentons les fonctions Gamma, Bêta et Mittag-Leffler . Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses application .

1.2.1 Fonction Gamma

Définition 1.2.1 [13] L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$.

La Fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{où } z \in \mathbb{C} \text{ et } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Propriétés 1.2.2 [3] Nous avons les propriétés suivantes :

1. $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$.

2. $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(-m) = \mp\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. et $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.
4. Si $n \in \mathbb{N}$, on a : $\Gamma(n + 1) = n!$.

1.2.2 Fonction Bêta

Cette fonction joue un rôle important quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 1.2.3 La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombre complexes z et w par :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt \quad \text{Re}(z) > 0, \text{Re}(w) > 0. \quad (1.1)$$

Théorème 1.2.4 [3] La relation entre la fonction Gamma et Bêta donnée par :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z) \cdot \Gamma(w)}{\Gamma(z + w)}, \quad z, w \in \mathbb{C} \text{ avec } \text{Re}(z) > 0 \text{ et } \text{Re}(w) > 0. \quad (1.2)$$

Propriétés 1.2.5 [3] Nous avons les propriétés suivantes :

1. $B(z, w) = B(w, z)$, (symétrique).
2. $zB(z, w+1) = wB(z+1, w)$.
3. $B(z, 1) = \frac{1}{z} \quad z > 0$.
4. On peut prendre aussi la forme d'intégrale

$$B(z, w) = 2 \int_0^1 (\sin \theta)^{2z-1} (\cos \theta)^{2w-1} d\theta.$$

1.2.3 Fonction Mittag-Leffler

la fonction Mittag-Leffler a été présenté par Mittag-Leffler et porte [9],[10], fonction est généralisation directe de la fonction exponentielle .

Définition 1.2.6 (13) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > 0$, on définit Mittag-Leffler par :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (1.3)$$

En particulier, si $\alpha = 1$ nous trouvons la fonction exponentielle

$$E_1(z) = e^z. \quad (1.4)$$

Cette fonction peut être généralisé pour paramétrer comme suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (1.5)$$

1.3 Approximation de la solution de l'équation de la chaleur en dimension 1 par différences finies

La méthode d'approximation de la solution d'une E.D.P par différences finies consiste à approcher la valeur de la solution en un nombre fini de points, appelés points de discrétisation du maillage. Nous allons d'abord décrire la méthode dans un cas simple en dimension 1 avant de nous intéresser aux schémas explicites et implicites pour l'équation de la chaleur [4].

1.3.1 Principe de la méthode : le problème aux limites d'ordre 2 en dimension 1

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} + c(x)u(x) = f(x), & \text{pour } x \in]0, 1[, \\ u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1, \end{cases} \quad (1.6)$$

où f et c sont des fonctions données sur $[0, 1]$ avec $c \geq 0$. Les deux ingrédients principaux d'une approximation par différences finies sont le schéma d'approximation des dérivées et la grille de discrétisation.

1.3.1.1 Approximations des dérivées d'une fonction régulière

Plaçons-nous en dimension 1 pour simplifier. L'idée fondamentale consiste à approcher les dérivées (ou les dérivées partielles en dimension plus grande) de la fonction u en un point x en écrivant

$$\frac{du}{dt}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h},$$

pour un h petit (mais non nul) fixé. Il suffira ensuite de disposer les points de discrétisation régulièrement espacés de h pour pouvoir employer cette approximation en tout point de discrétisation. La qualité de l'approximation précédente dépend fortement de la régularité de la fonction u . Si la fonction u est C^2 sur l'intervalle $[0, 1]$, on déduit aisément du

développement de Taylor

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(\theta).$$

Où $\theta \in]x, x+h[$, l'inégalité

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq Ch,$$

où $C = \sup_{y \in [0,1]} |u''(y)|$, pour tout $0 \leq x \leq 1-h$.

On dit alors que l'approximation :

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \tag{1.7}$$

est consistante d'ordre 1. Si l'erreur est majorée par Ch^p pour $p > 0$ fixé, on dit plus généralement que l'approximation est consistante d'ordre p .

On vérifie facilement que l'approximation :

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}, \tag{1.8}$$

est également consistante d'ordre 1. Il est possible d'obtenir une meilleure approximation de la dérivée première d'une fonction en utilisant un quotient différentiel centré : si la fonction u est C^3 , la formule de Taylor à l'ordre 3 donne

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(\theta_1), \\ u(x-h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(\theta_2), \end{aligned}$$

où $\theta_1 \in]x, x+h[$ et $\theta_2 \in]x-h, x[$. On obtient alors

$$\left| \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x) \right| = \left| \frac{h^2}{6} (u'''(\theta_1) + u'''(\theta_2)) \right| \leq C'h^2,$$

où $C' = \sup_{y \in [0,1]} |u'''(y)|$. L'approximation

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h},$$

est donc consistante d'ordre 2. En ce qui concerne les dérivées secondes, on démontre facilement (exercice!) en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 4, que si u est C^4 au

voisinage de x , l'approximation

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}, \quad (1.9)$$

est consistante d'ordre 2. Plus précisément,

$$\left| \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u''(x) \right| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y \in [0,1]} |u^{(4)}(y)|, \quad (1.10)$$

pour tout $x \in [h, 1-h]$.

Notons

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \\ \tilde{\tilde{u}}(x) &= \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}. \end{aligned}$$

Lemme 1.3.1

$$|u'(x) - \tilde{u}(x)| \leq O(h) \text{ et } |u''(x) - \tilde{\tilde{u}}(x)| \leq O(h^2).$$

1.3.1.2 Approximation de (1) par différences finies

Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. On définit les points de discrétisation du maillage par

$$x_i = ih, \quad i \in \{0, 1, \dots, N+1\}, \quad \text{où } h = \frac{1}{N+1}.$$

Les points $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$ constituent le bord du domaine (les extrémités de l'intervalle de définition de u), et les points x_1, \dots, x_N sont appelés points internes du maillage. On cherche en chacun de ces points une valeur approchée, notée u_i , de $u(x_i)$.

On prend naturellement $u_0 = u(0) = g_0$ et $u_{N+1} = u(1) = g_1$. Pour les sommets internes, on utilise l'approximation (2) de la dérivée seconde décrite plus haut :

$$\begin{cases} -\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + c(x_i)u_i = f(x_i), & \text{pour } i \in \{1, \dots, N\}, \\ u_0 = g_0, \quad u_{N+1} = g_1, \end{cases} \quad (1.11)$$

On observe qu'on obtient N équations servant à déterminer les N inconnues u_1, \dots, u_N . On dit usuellement qu'on a discrétisé le problème par une méthode de différences finies utilisant le schéma à trois points de la dérivée seconde. On note que la connaissance des conditions au bord u_0 et u_{N+1} est nécessaires à la résolution du système, puisqu'elles apparaissent dans (4) lorsque $i = 1$ et $i = N$.

Matriciellement, le problème s'écrit :

$$A_h u_h = b_h, \quad (1.12)$$

où

$$u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}, b_h = \begin{pmatrix} f(x_1) + \frac{g_0}{h^2} \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) + \frac{g_1}{h^2} \end{pmatrix},$$

$$A_h = A_h^{(0)} + \begin{pmatrix} c(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c(x_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c(x_N) \end{pmatrix},$$

$$A_h^{(0)} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

On note que le système ne porte que sur les inconnues u_1, \dots, u_N . En particulier les conditions au bord $u_0 = g_0$ et $u_{N+1} = g_1$ n'apparaissent que dans le vecteur b_h . On note également que les matrices A_h et $A_h^{(0)}$ sont tridiagonales. Pour déterminer la solution discrète u_h , il suffit donc de résoudre le système linéaire tridiagonal (1.7).

La matrice A_h est inversible puisqu'on a :

Proposition 1.3.2 *Supposons $c \geq 0$. La matrice A_h est symétrique définie positive.*

Démonstration : La matrice A_h est clairement symétrique. Soit z un vecteur de \mathbb{R}^N , de composantes z_1, \dots, z_N . On a

$$\begin{aligned} {}^t z A_h z &= {}^t z A_h^{(0)} z + \sum_{i=1}^N c(x_i) z_i^2 \geq {}^t z A_h^{(0)} z \\ &= \frac{z_1^2 + (z_2 - z_1)^2 + \cdots + (z_{N-1} - z_N)^2 + z_N^2}{h}. \end{aligned}$$

Cette quantité est positive, et non nulle si $z \neq 0$ (car au moins l'un des termes au numérateur est non nul).

Chapitre 2

Éléments de Calcul Fractionnaire

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires : l'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et ainsi que la dérivée au sens de Grünwald-Letnikov et Caputo et quelques propriétés.

2.1 Intégrale fractionnaire

2.1.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. la primitive de f est donnée par :

$$\begin{aligned} I_a^1 f(x) &= \int_a^x f(t) dt \\ I_a^2 f(x) &= \int_a^x I_a^1 f(u) du \\ &= \int_a^x \left(\int_a^u f(t) dt \right) du \\ &= \int_a^x \left(\int_t^x du \right) f(t) dt \\ &= \int_a^x (x-t) f(t) dt. \end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned} I_a^3 f(x) &= \int_a^x (I_a^2 f(u)) du \\ &= \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2 f(t) dt. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} I_a^4 f(x) &= \int_a^x (I_a^3 f(u)) du \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} \int_a^x (x-t)^3 f(t) dt. \end{aligned}$$

Pour $n^{\text{ième}}$ itération, on obtient :

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t) dt, \quad (2.1)$$

Qui est la formule recherchée.

On adopte alors la définition suivante :

2.1.2 L'intégrale de Riemann-Liouville

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on appelle l'intégrale Riemann-Liouville d'ordre α de f l'intégral suivant :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt. \quad (2.2)$$

Définition 2.1.1 Si $f \in [a, b]$; $\alpha \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale :

$$I_{a+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t) dt, \quad a \in]-\infty; +\infty[, \quad (2.3)$$

est appelée *intégrale fractionnaire (a gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α* ,

Propriétés 2.1.2 [5], Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

Nous avons :

1. $I_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}$.
2. $I_{a+}^{\alpha} (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}$.

Remarque : intégrale d'une fonction constante de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est donnée par :

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} (x-a)^{\alpha}, \quad f(x) = C \in \mathbb{R}.$$

Théorème 2.1.3 Soient $f \in \mathbb{C}([a, b])$ et $\alpha > 0$, intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (2.3) possède la propriété suivant :

$$I_{a+}^{\alpha} [I_{a+}^{\beta} f(x)] = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x).$$

le prouve de cette Théorème [5].

Exemples d'intégrales d'ordre fractionnaire

Exemple 1 :

Considérons la fonction

$$f(x) = x^{\beta}.$$

En remplaçant dans la définition de l'intégrale de Riemann-Liouville, on obtient :

$$I^{\alpha} x^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\beta} dt.$$

En faisant le changement de variable :

$$u = \frac{t}{x},$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
 I^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} x^{\alpha-1} (xu)^\beta x du \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\beta} \int_0^1 u^\beta (1-u)^{\alpha-1} du \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta},
 \end{aligned}$$

d'où :

$$I^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta},$$

La formule précédente est une généralisation du cas avec $\alpha = 1$.

En effet, pour $\alpha = 1$ on obtient :

$$\begin{aligned}
 I^1 x^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} x^{\beta+1} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)} x^{\beta+1} \\
 &= \frac{1}{(\beta+1)} x^{\beta+1}.
 \end{aligned}$$

En particulier, pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et pour $\beta = 0; 1; 2$ on a :

$$\begin{aligned}
 I^{\frac{1}{2}} x^0 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \\
 I^{\frac{1}{2}} x^1 &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}} \\
 I^{\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}.
 \end{aligned}$$

De ce qui précède, on déduit que l'intégrale fractionnaire d'ordre α d'une constante k est donnée par :

$$I^\alpha k = \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha.$$

Exemple 2 :

Soient $\alpha > 0, \beta > -1$ et $f(x) = (x - a)^\beta$, alors :

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} (t - a)^\beta dt. \quad (2.4)$$

En effectuant le changement de variable

$$t = a + (x - a)y, \quad (0 \leq y \leq 1),$$

alors (2.4) devient

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} (t - a)^\beta dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x - a - (x - a)y)^{\alpha-1} [x + (x - a)y - x]^\beta (x - a) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x - a)(1 - y)]^{\alpha-1} (x - a)^{\beta+1} y^\beta dy \\ &= \frac{(x - a)^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - y)^{\alpha-1} y^\beta dy \\ &= \frac{(x - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - y)^{\alpha-1} y^{(\beta+1)-1} dy. \end{aligned}$$

En tenant compte de la fonction beta (1.1) puis de la relation (1.2) arrive à :

$$\begin{aligned} (I_a^\alpha f)(x) &= \frac{(x - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta + 1) \\ &= \frac{(x - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha, \beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(1 + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (x - a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$(I_a^\alpha (t - a)^\beta) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (x - a)^{\alpha+\beta}. \quad (2.5)$$

2.2 Dérivée fractionnaire

2.2.1 La dérivation fractionnaire au sens de de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1 La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville $D_{a+}^{\alpha} f$ d'ordre réel $\alpha > 0$, [5],[13] est définie par :

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} (I_{a+}^{n-\alpha} f(t)) \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \quad (n = [\alpha] + 1, t > a). \quad (2.7)$$

En particulier, quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$, nous obtenons :

$$D_{a+}^0 f(t) = f(t), \quad D_{a+}^n f(t) = f^{(n)}(t), \quad (2.8)$$

où $f^{(n)}(t)$ désigne la dérivée usuelle d'ordre n de $f(t)$.

Si $0 < \alpha < 1$, alors :

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds, \quad (t > a). \quad (2.9)$$

Définition 2.2.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $n-1 \leq \alpha \leq n$, ($n \in \mathbb{N}^*$), on appelle la dérive fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction $f \in C([a, b])$ est :

$$D_a^{\alpha} f(x) = D^n (I_a^{n-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-1-\alpha} f(t) dt. \quad (2.10)$$

La dérivée au sens de Riemann-Liouville à gauche est donnée par (2.10), maintenant nous allons donner la dérivée à droite correspondante :

Pour $f \in C([a, b])$, la dérivée d'ordre α de Riemann-Liouville à droite, est donnée par :

$$D_b^{\alpha} f(x) = -D^n (I_a^{n-\alpha} f)(x) = \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-1-\alpha} f(t) dt. \quad (2.11)$$

Propriétés 2.2.3 Les dérivées de Riemann-Liouville ont les propriétés suivantes [5],[13] :

1. Une propriété importante de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, pour $\alpha > 0$, et $t > a$ est :

$$D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f(t) = f(t). \quad (2.12)$$

Qui signifie que l'opérateur de différentiation fractionnaire de Riemann-Liouville est un

inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville du même ordre.

2. Soient $\alpha \geq 0, m \in \mathbb{N}$ et $D = \frac{d}{dt}$.

Si les deux dérivées fractionnaires $D_{a+}^{\alpha} f(t), D_{a+}^m f(t)$ existent, alors nous avons :

$$D_{a+}^m D_{a+}^{\alpha} f(t) = D_{a+}^{\alpha+m} f(t). \quad (2.13)$$

3. Si la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha, (n-1 \leq \alpha < n)$, d'une fonction $f(t)$ est intégrable, alors

$$I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^n [D_{a+}^{\alpha-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}. \quad (2.14)$$

En général, nous voyons que les dérivées fractionnaires et les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville de même ordre ne commutent pas entre elles.

2.2.2 La dérivation fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

Définition 2.2.4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov d'ordre α d'une fonction f continue sur $[a, b]$ est donnée par :

$${}^{GL}D_a^{\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^{\alpha} f)}{h^{\alpha}} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kf), \quad (2.15)$$

où $\Delta_h^{\alpha} f$ la différence finie d'ordre α et de pas h de la fonction f .

$$\Delta_h^{\alpha} f = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kf),$$

et $\binom{\alpha}{k}$ Les coefficients binomiaux avec des signes alternatifs pour des valeurs positives de α sont définis comme

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}.$$

Pour le calcul des coefficients binomiaux on peut utilisés la relation entre la fonction Gamma d'Euler et la factorielle, définie comme

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{K!(\alpha-K)!} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(K+1)\Gamma(\alpha-K+1)}.$$

Théorème 2.2.5 Si $f \in C^n([a, b])$, $n = [\alpha]$, $\alpha > 0$:

$${}^{GL}D_a^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-1-\alpha} f(t) dt.$$

Propriétés 2.2.6 Il est possible de définir l'intégrale fractionnaire de Grünwald-Letnikov en remplaçant α par $-\alpha$ dans (2.15), nous obtenons alors,

$${}^{GL}I_a^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} f(x-kf), \quad \alpha > 0.$$

2.2.3 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.2.7 [5] Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C([a, b])$.

La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f notée ${}^C D_a^\alpha f$ est définie par :

$${}^C D_a^\alpha f(x) := I^{(n-\alpha)} D^{(n)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha-1} dt. \quad (2.16)$$

Remarque : La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]m-1, m[$

s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre $m-\alpha$ suivie d'une dérivation classique d'ordre m , alors que La dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.

Exemple :

Pour $f(x) = (x-a)^\beta$ avec $\beta \geq 0$, on a

$${}^C D_a^\alpha f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \in 0, 1, 2, \dots, m-1, \\ \frac{\beta+1}{\beta+1-\alpha} (x-a)^{\beta-\alpha} & \text{si } \beta > m-1. \end{cases} \quad (2.17)$$

En particulier, si f est constante sur $[a, b]$, alors :

$${}^C D_a^\alpha f = 0. \quad (2.18)$$

2.2.4 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieure $x = a$.

Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo, par contre par Riemann-Liouville elle est

$$\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.$$

Graphiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann-Liouville), c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m-\alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier m , mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis on intègre d'ordre fractionnaire $(m-\alpha)$.

2.2.5 Relation entre l'approche Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville[5],[14].

Théorème 2.2.8 Soient $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$. Si f possède $(n-1)$ dérivée en a et si $D_a^\alpha f$ existe, alors :

$$({}^C D_a^\alpha f)(x) = D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right], \quad (2.19)$$

presque partout sur $[a, b]$.

Remarque : Le résultat du théorème 2.2.8 signifie que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction f est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de f .

2.2.6 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

Linéarité [13]

La dérivation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t).$$

La règle de Leibniz [13]

En partant de la règle connue de Leibniz pour calculer la dérivée n-ième du produit de deux fonctions $f(t)g(t)$, on a pour tout entier n :

$$\frac{d^n(fg)}{dt^n} = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t). \quad (2.20)$$

Cette formule se généralise en remplaçant l'entier n par un paramètre réel α : dans le membre à droite de (2.20) à la formule :

$$D^\alpha(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t)D^{(\alpha-k)}g(t) + R_n^\alpha(t), \quad n \geq \alpha + 1,$$

où

$$R_n^\alpha(t) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^t f^{(n+1)}(\xi)(\tau-\xi)^n d\xi,$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^\alpha(t) = 0.$$

Si f et g sont continues sur $[a, t]$, la règle de Leibniz pour la dérivation fractionnaire s'écrit sous la forme :

$$D^\alpha(f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t)D^{(\alpha-k)}g(t).$$

D^α désigne la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov ou au sens de Riemann-Liouville.

2.2.7 Lemmes fondamentaux

Lemme 2.2.9 *Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle*

$${}^c D^\alpha h(t) = 0.$$

admet les solutions $h(t) = c_0 + c_1 t^{n^2} + \dots + c_{n-1} t^{n-1}$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 2.2.10 Soit $\alpha > 0$, alors

$$I^{\alpha} {}^c D^{\alpha} h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1},$$

pour $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $n = [\alpha] + 1$.

Preuve : On a par la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo

$${}^c D^{\alpha} h(t) = I^{n-\alpha} h^{(n)}(t),$$

on applique l'opérateur de l'intégrale fractionnaire aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned} I^{\alpha} ({}^c D^{\alpha} h)(t) &= I^{\alpha} I^{n-\alpha} h^{(n)}(t) \\ &= I^n ({}^{RL} D^n h)(t) \\ &= h(t) - \sum_{j=1}^n \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dt} \right)^{n-j} I^{n-n} h(t) \\ &= h(t) - \sum_{j=1}^n \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^{n-j} h(t) \right) (0) \\ &= h(t) - \sum_{j=1}^n \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} h^{(n-j)}(0). \end{aligned}$$

par le changement de variable $k = n - j$ on obtient :

$$\begin{aligned} I^{\alpha} ({}^c D^{\alpha} h)(t) &= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0) t^k}{k!} \\ &= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c'_k t^k}{k!} \\ &= h(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k t^k}{k!}. \end{aligned}$$

2.3 Les équations aux dérivées partielles fractionnaires

Les équations aux dérivées partielles fractionnaires notées (E.D.P.F) sont une généralisation des équations aux dérivées partielles classique (E.D.P).

Comme les dérivées fractionnaires, les E.D.P.F jouent un grand rôle dans la modélisation

des phénomènes réels dont leur présentation est impossible avec les E.D.P classique ou bien quelle est insu sante comme par exemple les phénomènes à mémoires longues.

Dans cette section nous donnons des formules d'intégrales et de dérivées fractionnaires partielles et des exemples d'opérateurs fractionnaires.

2.3.1 Dérivée fractionnaire partielle

Nous donnons ici les formules les plus utilisées de la dérivation fractionnaires partielles

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; posons :

$$\Gamma(\alpha) := (\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)), \quad \frac{\partial}{\partial x} := \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

2.3.1.1 Intégrale fractionnaire partielle de Riemann-Liouville

$$x \in [a, b] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n], \quad a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n.$$

L'intégrale fractionnaire partielle de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha_k \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha_k) > 0$) par rapport à x_k est donnée par :

$$I_{a_k}^{\alpha_k} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha_k)} \int_{a_k}^{x_k} (x_k - t_k)^{\alpha_k - 1} f(x_1, \dots, t_k, \dots, x_n) dt_k. \quad (2.21)$$

2.3.1.2 Dérivée fractionnaire partielle de Riemann-Liouville

$x \in [a, b] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. La dérivée fractionnaire partielle de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha_k \in \mathbb{C}$, ($\text{Re}(\alpha_k) > 0$) par rapport à x_k d'une fonction $f \in C([a_k, b_k])$ est donnée par :

$$D_{a_k, x_k}^{\alpha_k} f(x) := \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{L_k} (I_{a_k}^{L_k - \alpha_k} f)(x) \quad \text{avec } L_k = [\text{Re}(\alpha_k)] + 1, \quad (2.22)$$

$$D_{a_k, x_k}^{\alpha_k} f(x) = \frac{1}{\Gamma(L_k - \alpha_k)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{L_k} \int_{a_k}^{x_k} (x_k - t_k)^{L_k - \alpha_k - 1} f(x_1, \dots, t_k, \dots, x_n) dt_k.$$

La dérivée fractionnaire partielle de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha_k \in \mathbb{C}$, ($\text{Re}(\alpha_k) > 0$) par rapport à x_k d'une fonction $f \in C([a_k, b_k])$ est donnée par :

$$D_{b_k, x_k}^{\alpha_k} f(x) = \frac{-1}{\Gamma(L_k - \alpha_k)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{L_k} \int_{x_k}^{b_k} (x_k - t_k)^{L_k - \alpha_k - 1} f(x_1, \dots, t_k, \dots, x_n) dt_k. \quad (2.23)$$

2.3.1.3 Dérivée fractionnaire partielle de Grünwald-Letnikov

$x \in [a, b] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. La dérivée fractionnaire partielle de Grünwald-Letnikov d'ordre $\alpha_k \in \mathbb{C}$, ($\text{Re}(\alpha_k) > 0$), par rapport à x d'une fonction $f \in C^n([a_k, b_k])$ est donnée par :

$${}^{GL}D_{a_k}^{\alpha_k} f(x) = \sum_{j=0}^{L_k} \frac{\partial^{L_k} f(x_1, \dots, a_k, \dots, x_n)}{\Gamma(j+1-\alpha_k) \partial x_k^{L_k}} \cdot (x_k - a_k)^{j-\alpha_k} + \int_{a_k}^{x_k} \frac{(x_k - t_k)^{\alpha_k-1}}{\Gamma(\alpha_k)} f(x_1, \dots, t_k, \dots, x_n) dt_k, \quad (2.24)$$

avec $x_k > a_k$ et $L_k = [\text{Re}(\alpha_k)] + 1$.

2.3.1.4 Dérivée fractionnaire partielle de Caputo

$x \in [a, b] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$. La dérivée fractionnaire partielle de Caputo à gauche d'ordre $\alpha > 0$, par rapport à t d'une fonction $f \in C^{n+1}([0, T])$ est donnée par :

$${}^c D_{0,t}^{\alpha} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{\partial^n u(x, \tau)}{\partial \tau^n} d\tau. \quad (2.25)$$

Exemple d'opérateur différentiel fractionnaire et d' E.D.P fractionnaire opérateur de Riesz

Soit $n-1 < \alpha \leq n$, $x \in [a, b]$, l'opérateur de la dérivée fractionnaire partielle de Riesz est :

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} u(x, t) = -C_\alpha (D_a^\alpha + D_b^\alpha) u(x, t), \quad (2.26)$$

avec : $C_\alpha = \frac{1}{2} \cdot \cos(\frac{\pi\alpha}{2})$, $\alpha \neq 1$.

D_a^α c'est l'opérateur de dérivée partielle fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, donnée par (2.10).

D_b^α c'est l'opérateur de dérivée partielle fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, donnée par (2.11).

Exemple d' E.D.P fractionnaire

Comme exemple d'une E.D.P fractionnaire nous avons choisi l'exemple d'équation d'advection-dispersion [19].

L'équation d'advection-dispersion fractionnaire est utilisée dans l'hydrologie souterraine pour modéliser le transport des traceurs passifs portés par l'écoulement de fluide dans un milieu poreux [19] et le transport de solutés dans un matériau de sous-sol [7], [11].

Soit l'équation d'advection-dispersion fractionnaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} + d \cdot \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \quad , \quad 1 < \alpha \leq 2. \quad (2.27)$$

Où $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$ est un opérateur de Riesz donné par (2.26), u est la concentration de soluté, $v \geq 0$ et $d \geq 0$ représentent le de dispersion, et la vitesse moyenne fluide .

Chapitre 3

Méthode des Différence finies cas fractionnaire et application

Dans ce chapitre nous allons présenter la méthode des différences finies dans le cas fractionnaire en donnant quelques schémas pour $0 < \alpha < 1$ et $1 < \alpha < 2$, avec application à quelques exemples d' E.D.Ps fractionnaires.

3.1 Différences finies fractionnaires

Pour le cas fractionnaire, nous définissons les schémas L_n , pour $n = 1, 2$ et le schéma de Grünwald en se basant sur [18],[20] et [12] .

Ces algorithmes sont conçus pour approcher :

$$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}, \alpha \in (n-1, n), n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Soient $(N+1)$ points uniformément espacés dans l'intervalle $[0, x]$, $h = \frac{x}{N}$, nous voulons calculer $\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$, $\alpha \in (0, 2)$, $x \in \mathbb{R}$, notons :

$$f_j = f\left(x - j\frac{x}{N}\right), j = 0, \dots, N.$$

3.1.1 Les schémas de Grünwald

$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$ est donnée aux sens de Riemann-Liouville.

Ces schémas sont basés sur la formule de dérivation de Grünwald-Letnikov.

Pour α fixé entre $(0, 1)$, nous avons l'algorithme standard de Grünwald :

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \lim_{N \rightarrow \infty} (x/N)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} f\left(x - j\frac{x}{N}\right).$$

En considérant :

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} &\approx \left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}\right) = (x/N)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} f\left(x - j\frac{x}{N}\right) \\ &= (x/N)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)} f_j. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Nous pouvons écrire (3.1) sous la forme :

$$\left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}\right) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j f_j, \quad (3.2)$$

$$\text{avec : } c_j = h^{-\alpha} w_j, \quad w_j = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)}, \quad (3.3)$$

$$f_j = f\left(x - j\frac{x}{N}\right), \quad (3.4)$$

et, w_j vérifie la formule de récurrence suivante :

$$w_0 = 1, w_j = \left(1 - \frac{1 + \alpha}{j}\right) w_{j-1}, j = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Pour $\alpha \in (1, 2)$, le schéma de Grünwald s'écrit :

$$\begin{aligned} {}_{GL}D^\alpha f(x) &\approx (x/N)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N+1} w_j f\left(x - (j-1)\frac{x}{N}\right), \\ {}_{GL}D^\alpha f(x) &\approx \left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}\right) = (x/N)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N+1} w_j f_{N-j+1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Lemme 3.1.1

$$|{}_{GL}D^\alpha f(x) - \left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}\right)| \leq O(h).$$

Preuve : La démonstration de ce lemme est donnée dans [15].

3.1.2 Les schémas L_1 et L_2

Dans cette procédure nous nous basons sur la définition de Caputo de dérivation (i.e $\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$ est donné au sens de Caputo).

Si la dérivée est donnée aux sens de Riemann-Liouville, il faudra passer par la relation entre la dérivée de Caputo et celle de Riemann-Liouville et il faut approcher la dérivée de Caputo par ces formules.

Pour $\alpha \in (0, 1)$ $\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$ au sens de Caputo s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{f'(x-t)}{t^\alpha} dt \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{f(x-jh) - f(x-(j+1)h)}{h} \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{dt}{t^\alpha} \\ &= \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_j - f_{j+1}] [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] = \left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}\right)_{L_1}. \end{aligned}$$

Le schéma L_1 peut être donné par la forme suivante :

$$\left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right)_{L_1} = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_{N-j} - f_{N-1-j}] [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}]. \quad (3.7)$$

Lemme 3.1.2

$$\left| \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} - \left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right)_{L_1} \right| \leq O(h).$$

Preuve : Cette démonstration est basée sur le (lemme 1.3.1)

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{f'(x-t)}{t^\alpha} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{f(x-jh) - f(x-(j+1)h)}{h} + O(h) \right] \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{dt}{t^\alpha} \\ &= \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_j - f_{j+1}] [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] + \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} O(h) \sum_{j=0}^{N-1} \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{dt}{t^\alpha} \\ &= \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_j - f_{j+1}] [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] + \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} O(h) \sum_{j=0}^{N-1} [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] \\ &= \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_j - f_{j+1}] [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] + \frac{N^{1-\alpha} h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} O(h) \\ &= \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_j - f_{j+1}] [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] + O(h) = \left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right)_{L_1} + O(h). \end{aligned}$$

Pour $\alpha \in (1, 2)$, le schéma L_2 est alors donné par :

$$\left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right)_{L_2} = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}] [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}]. \quad (3.8)$$

Le schéma L_2 peut être donné par la formule suivante :

$$\left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right)_{L_2} = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_{N-j-1} - 2f_{N-j} + f_{N-j+1}] [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}]. \quad (3.9)$$

Remarque : Les algorithmes considérés n'utilisent pas tous $(N+1)$ valeurs de f ; l'algorithme de Grünwald pour $0 < \alpha < 1$ emploie seulement N données, f_N n'est pas

utilisé, d'autre part l'algorithme de Grünwald pour $1 < \alpha < 2$ les algorithmes L_2 nécessite $(N + 2)$ points.

Lemme 3.1.3

$$\left| \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} - \left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right)_{L_2} \right| \leq O(h).$$

Preuve : La démonstration de ce lemme est basée sur (lemme 1.3.1)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right)_{L_2} &= \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [f_{N-j-1} - 2f_{N-j} + f_{N-j+1}] [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] \\ &= \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{\partial^2 f(x-jh)}{\partial x^2} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] + O(h^2) \right] \\ &= \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial^2 f(x-jh)}{\partial x^2} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] + \frac{h^{2-\alpha} N^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} O(h^2) \\ &= \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial^2 f(x-jh)}{\partial x^2} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] + O(h^2). \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{f''(x-t)}{t^{\alpha-1}} dt \\ &= \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] f''(x-z_j), \end{aligned}$$

avec $z_j \in [jh, (1+j)h]$.

Donc nous allons avoir :

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} - \left(\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right)_{L_2} \right| &= \left| \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] \left[f''(x-z_j) - \frac{\partial^2 f(x-jh)}{\partial x^2} \right] + O(h^2) \right| \\ &\leq \left| \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{N-1} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] O(h) + O(h^2) \right| \\ &= \left| \frac{h^{2-\alpha} N^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} O(h) + O(h^2) \right| = O(h) + O(h^2) \\ &= O(h). \end{aligned}$$

3.2 Application

Dans cette section nous donnons deux exemples d' E.D.P fractionnaire et nous appliquons les schémas numériques L_1, L_2 , le schéma de Grünewald [17]

Dans la résolution numérique des E.D.P.s fractionnaires par le méthode des différences finies nous cherchons à calculer une solution approchée en un nombre fini de points (x_i, t_k) du domaine espace-temps $[0, L] \times [0, T]$.

Nous nous limitons au cas le plus simple du maillage régulier.

Soient N, M deux entiers fixés, posons :

$$\begin{aligned} x_i = hi, \quad i = 0, \dots, M; \quad h = \frac{L}{M}, \quad \text{avec } x_0 = 0, x_M = L. \\ t_k = \tau k, \quad k = 0, \dots, N; \quad \tau = \frac{T}{N}, \quad \text{avec } t_0 = 0, t_N = T. \end{aligned}$$

Les points (x_i, t_k) sont alors les points d'intersection d'une grille régulière en espace-temps. L'approximation par différences finies consiste alors à chercher une approximation, notée u_i^k , de $u(x_i, t_k)$.

3.2.1 Équation d'advection-dispersion fractionnaire

Comme première application nous considérons l'équation d'advection-dispersion donnée par (2.27) soumise à des conditions aux limites.

En particulier soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} + d \cdot \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} & 1 < \alpha \leq 2, \quad 0 < x < L, \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) = g(x) & \forall x \in]0, L[, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \forall t \in [0, T]. \end{cases} \quad (\text{Q})$$

3.2.1.1 Résolution numérique du problème

Résolution numérique du problème (Q) :

Les valeurs approchées aux points du maillage au bord du domaine et en $t = 0$ sont données par la valeur exacte (donnée) de la fonction u :

$$\begin{aligned} u_0^k = u_M^k = 0, \quad \forall k = 0, \dots, N, \\ u_i^0 = g(x_i) = g_i, \quad \forall i = 0, \dots, M, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_k &= kh, & k \in \overline{0, N}, & & h &= \frac{T}{N}, \\ X_i &= ih, & i \in \overline{0, M}, & & h &= \frac{T}{M}. \end{aligned}$$

Dans le problème (Q) la dérivée par rapport à l'espace est donnée par l'opérateur de Riesz défini par (2.26); nous avons alors :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}(x, t) = \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} ({}_0D_x^\alpha u(x, t) + {}_x D_L^\alpha u(x, t)).$$

Pour approcher l'opérateur de Riesz il faut approcher ${}_0D_x^\alpha u(x, t)$ et ${}_x D_L^\alpha u(x, t)$, avec $0 < \alpha \leq 2$, et pour cela nous utilisons le schéma de Grünwald (3.6) .

$$\begin{aligned} {}_0D_x^\alpha u(x_i, t_{k+1}) &= h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} w_j u(x_{i-j+1}, t_{k+1}) + O(h), \\ {}_x D_L^\alpha u(x_i, t_{k+1}) &= h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} w_j u(x_{i+j+1}, t_{k+1}) + O(h), \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}(x_i, t_{k+1}) \approx \frac{1}{2 \dots \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \left(h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} w_j u(x_{i-j+1}, t_{k+1}) + h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} w_j u(x_{i+j-1}, t_{k+1}) \right) + O(h). \quad (3.10)$$

Dans le problème (Q) les dérivées d'ordre 1 sont approchées par le schéma (1.7) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{k+1}) = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + O(\tau), \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{k+1}) = \frac{u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{h} + O(h). \quad (3.12)$$

En approchant les dérivées dans le problème (Q) par les formules (3.10),(3.11) et (3.12) nous obtenons pour $i = 1, \dots, M - 1, k = 0, \dots, N - 1$:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} = -v \frac{u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{h} + \frac{1}{2 \dots \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \left(d \cdot h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} w_j u_{i-j+1}^{k+1} + d \cdot h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} w_j u_{i+j-1}^{k+1} \right) \quad (3.13)$$

$$u_i^{k+1} - u_i^k = V \cdot (u_i^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}) + B \left[\sum_{j=0}^{i+1} w_j u_{i-j+1}^{k+1} + \sum_{j=0}^{N-i+1} w_j u_{i+j-1}^{k+1} \right]$$

$$V = -\frac{v \cdot \tau}{h} \quad ; \quad B = -\frac{d \cdot \tau}{2 \cdot h^\alpha \cdot \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}.$$

enfin on obtient

$$(1 - V - 2Bw_1)u_i^{k+1} + (V - Bw_2 - Bw_0)u_{i-1}^{k+1} + (-Bw_2 - Bw_0)u_{i+1}^{k+1} - B \left[\sum_{j=3}^{i+1} w_j u_{i-j+1}^{k+1} + \sum_{j=3}^{N-i+1} w_j u_{i+j-1}^{k+1} \right] = u_i^k, \quad (3.14)$$

$$i = 1, \dots, M-1, k = 0, \dots, N-1.$$

Proposition 3.2.1 *Les coefficients $w_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ vérifient les propriétés suivantes :*

$$w_1 = -\beta, w_j \geq 0, j = 0, 2, 3, \dots; \sum_{j=0}^{\infty} w_j = 0.$$

$$\forall n \text{ un entier naturel, } \sum_{j=0}^n w_j < 0.$$

Preuve : La démonstration de cette proposition est donnée dans [15]

Pour monter la stabilité du schéma posons pour $k = 0, 1, 2, \dots, N$ et $i = 0, 1, 2, \dots, M$;

$$v_i^k \text{ la solution approximée (3.14),} \quad (\text{sol approx})$$

et e_i^k l'erreur

$$e_i^k := v_i^k - u_i^k, \quad (\text{error})$$

vérifiant pour $i = 1, \dots, M-1, k = 0, \dots, N-1$:

$$(1 - V - 2Bw_1)e_i^{k+1} + (V - Bw_2 - Bw_0)e_{i-1}^{k+1} + (-Bw_2 - Bw_0)e_{i+1}^{k+1} - B \left[\sum_{j=3}^{i+1} w_j e_{i-j+1}^{k+1} + \sum_{j=3}^{N-i+1} w_j e_{i+j-1}^{k+1} \right] = e_i^k.$$

Posons : $e^k = [e_1^k, \dots, e_{M-1}^k]^T$.

et $|e_l^k| = \|e^k\| = \max_{1 \leq i \leq M-1} |e_i^k|$, pour $k = 0, \dots, N-1$.

Se basant sur la technique donnée en [25], pour montrer la stabilité du schéma donné par

(3.14) il suffit de montrer que $|e_l^k| \leq |e_l^0|$ pour $k = 1, \dots, N-1$. Pour commencer nous

allons monter que :

$$(1 - V - 2Bw_1) + (V - Bw_1 - Bw_0) + (-Bw_2 - Bw_0) - B \left[\sum_{j=3}^{i+1} w_j + \sum_{j=3}^{N-i+1} w_j \right] \geq 1.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} & (1 - V - 2Bw_1 + (V - Bw_2 - Bw_0) + (-Bw_2 - Bw_0) - B \left[\sum_{j=3}^{i+1} w_j + \sum_{j=3}^{N-i+1} w_j \right] \\ & = 1 - B \left[\sum_{j=0}^{i+1} w_j + \sum_{j=0}^{N-i+1} w_j \right]. \end{aligned}$$

Or d'après la proposition 3.2.1, $\sum_{j=0}^n w_j \leq 0$ $n = i + 1$ ou $n = N - i + 1$.

En plus $B \geq 0$. Ce qui implique que : $1 - B \left[\sum_{j=0}^{i+1} w_j + \sum_{j=0}^{N-i+1} w_j \right] > 1$.

et par suite,

Ce qui implique que le schéma numérique défini par (3.14) est stable.

Pour montrer la convergence du schéma donné par (3.14), posons pour $i = 1, 2, \dots, M - 1$,
et $k = 1, \dots, N - 1$

$$\varepsilon_i^k = u(x_i, t_k) - u_i^k,$$

avec $\varepsilon^0 = 0$.

Ce qui nous donne $u_i^k = u(x_i, t_k) - \varepsilon_i^k$, en remplaçant dans (3.13) nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_i, t_{k+1}) - \varepsilon_i^{k+1} - u(x_i, t_k) + \varepsilon_i^k}{\tau} \\ & = -v \frac{u(x_i, t_{k+1}) - \varepsilon_i^{k+1} - u(x_{i-1}, t_{k+1}) + \varepsilon_{i-1}^{k+1}}{h} + d \cdot h^{-\alpha} \left(\sum_{j=0}^{i+1} w_j (u(x_{l-j+1}, t_{k+1}) - \varepsilon_{l-j+1}^{k+1}) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=0}^{N-i+1} w_j (u(x_{l+j-1}, t_{k+1}) - \varepsilon_{l+j-1}^{k+1}) \right). \end{aligned}$$

Avec $i = 1, 2, \dots, M - 1, k = 1, \dots, N - 1$. d'après (3.10), (3.11)e, (3.12) et les
(lemme 1.3.1) et (lemme 3.1.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + O(\tau) - \frac{\varepsilon_i^{k+1} + \varepsilon_i^k}{\tau} & = -v \frac{\partial u}{\partial x} + O(h) - v \frac{\varepsilon_i^{k+1} - \varepsilon_{i-1}^{k+1}}{h} + d \cdot \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + O(h) \\ & \quad - d \cdot h^{-\alpha} \left[\sum_{j=0}^{i+1} w_j \varepsilon_{i-j+1}^{k+1} + \sum_{j=0}^{N-i+1} w_j \varepsilon_{i+j-1}^{k+1} \right], \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, M - 1, k = 1, \dots, N - 1$.

Ce qui entraine :

$$\begin{aligned} & (1 - V - 2Bw_1) \varepsilon_i^{k+1} + (V - Bw_2 - Bw_0) \varepsilon_{i-1}^{k+1} + (-Bw_2 - Bw_0) \varepsilon_{i+1}^{k+1} \\ & - B \left[\sum_{j=3}^{i+1} w_j \varepsilon_{i-j+1}^{k+1} + \sum_{j=3}^{N-i+1} w_j \varepsilon_{i+j-1}^{k+1} \right] \\ & = \varepsilon_i^k + O(\tau + h). \end{aligned}$$

Posons $|\varepsilon_l^k| = \|\varepsilon^k\| = \max_{1 \leq i \leq M-1} |\varepsilon_i^k|$.

En utilisant la proposition 3.2.1 et les résultats de stabilité et que $\varepsilon^0 = 0$, nous obtenons :

$$\|\varepsilon^k\| \leq \|\varepsilon^0\| + O(h + \tau) \leq O(h + \tau), \quad k = 1, \dots, N - 1.$$

Ce qui implique que le schéma numérique défini par (3.14) est convergent. □

Algorithme 1 :

1. Lire les variables : L, T, N, M, f, α .
2. Calcul de h et τ, x et t
3. Calcul de u^0 et B, A .
4. Calcul des w_i
5. Calcul des u^k .
6. Trace de la solution u en fonction de x et t .

Application numérique

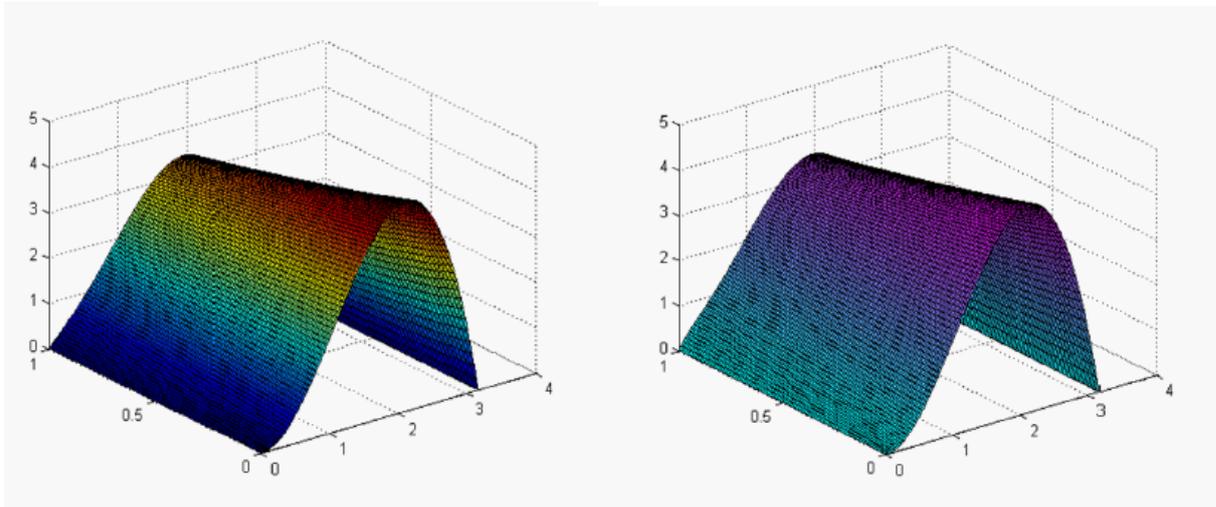
Nous allons considérer le problème (Q) avec $L = \pi; T = 1; g = x^2(\pi - x)$; soit donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} + d \cdot \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} & 1 < \alpha \leq 2, 0 < x < \pi, t \in [0, 1], \\ u(x, 0) = x^2(\pi - x) & \forall x \in]0, \pi[, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \forall t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (\text{Qnum})$$

La solution exacte de ce problème (Qnum) est donnée par :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1} - 4}{n^3} \right] \cdot \sin(nx) \cdot \exp(-n^\alpha \cdot d \cdot t).$$

Dans le cas $\alpha = 1.5$, Le graphe à gauche est le graphe donné par la solution exacte et celui donnée par le schéma numérique est donné à droite :



Maintenant en fixe un $t = 0.2, 0.6, 0.9$ pour $\alpha = 1.5$, $d = 0.25$, $v = 0$ ce qui donne le graphe suivant :

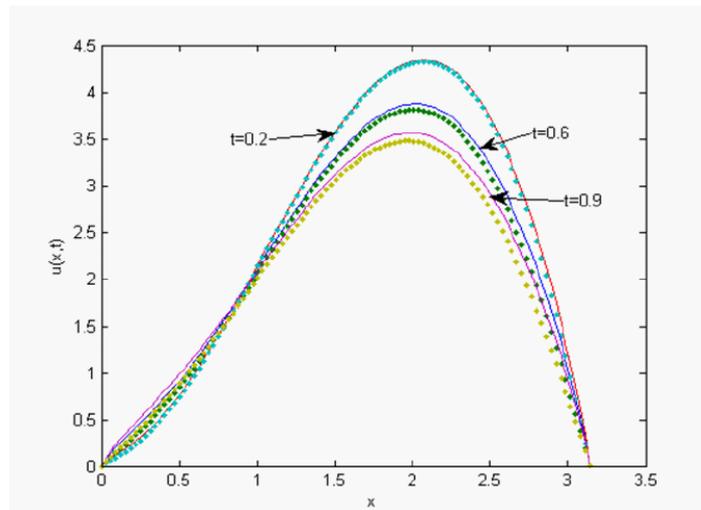


FIGURE 3.1 – La solution exacte est donnée par les pointillées, la solution approchée par une fonction continue .

3.2.2 Équation de diffusion fractionnaire

Un processus de transport fondamental dans la mécanique des fluides environnementale est la diffusion. La diffusion est un phénomène microscopique qui désigne la tendance naturelle d'un système à rendre homogènes les concentrations des espèces chimiques en son sein, et elle est caractérisée par l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t).$$

Une équation de diffusion fractionnaire en temps et espace est la généralisation de l'équation de diffusion classique en remplaçant la dérivée par rapport au temps par une dérivée au sens de Caputo d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ et la dérivée par rapport à l'espace par une dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre $0 < \beta \leq 2$ [22] ce qui donne l'équation suivante :

$$D_t^\alpha T = a \cdot \frac{\partial^\beta T}{\partial x^\beta} + f(x, t). \quad 0 < \alpha \leq 1, 1 < \beta \leq 2$$

Nous considérons le modèle de diffusion fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D_t^\alpha u = a \cdot \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} & 0 < \alpha \leq 1, 1 < \beta \leq 2; 0 < x < L, t \in [0, T] \\ u(x, 0) = f(x) & \forall x \in]0, L[\\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \forall t \in [0, T] \quad 1 < \beta \leq 2, 0 < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (P)$$

On trouve en [23] le théorème qui affirme l'existence et l'unicité de solution pour le problème (P)

les valeurs Si $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ et $a > 0$.

3.2.2.1 Résolution numérique du problème

Résolution numérique de problème (P) :

Les valeurs approchées aux points de maillage au bord du domaine et en $t = 0$ sont données par la valeur exacte (donnée) de la fonction u :

$$\begin{aligned} u_0^k &= u_M^k = 0, \quad \forall k = 0, \dots, N, \\ u_i^0 &= f(x_i) = f_i, \quad \forall i = 0, \dots, M, \end{aligned}$$

Dans le problème (P) la dérivée par rapport au temps est donnée au sens de Caputo avec $0 < \alpha \leq 1$. Nous utilisons le schéma $L_1(3.7)$ ce qui donne :

$$D_t^\alpha u(x_i, t_{k+1}) = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k [u(x_i, t_{k-j+1}) - u(x_i, t_{k-j})] b_j + O(\tau), \quad (3.15)$$

où $b_j = (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}$, $b_0 = 0$ et $k = 1, \dots, N-1$.

Et la dérivée par rapport au temps est donnée au sens de Riemann-Liouville avec $1 < \beta \leq 2$. Nous lui appliquons le schéma de Grünwald (3.6) ce qui donne :

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}(x_i, t_{k+1}) = h^{-\beta} \sum_{j=0}^{i+1} w_j u(x_{i-j+1}, t_{k+1}) + O(h), \quad (3.16)$$

où $w_j = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)}$, $w_0 = 0$ et $i = 1, \dots, M-1$.

En remplaçant les dérivées dans le problème (P) par les formules (3.15) et (3.16) nous obtenons :

$$\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k [u_i^{k-j+1} - u_i^{k-j}] b_j = a \cdot h^{-\beta} \sum_{j=0}^{i+1} w_j u_{i-j+1}^{k+1},$$

avec $i = 1, \dots, M-1$, $k = 0, \dots, N-1$, $a > 0$,

$$\sum_{j=0}^k [u_i^{k-j+1} - u_i^{k-j}] b_j = \mu \sum_{j=0}^{i+1} w_j u_{i-j+1}^{k+1}, \quad (3.17)$$

avec : $\mu = a \cdot \frac{\tau^\alpha}{h^\beta} \Gamma(2-\alpha)$.

Ce qui permet d'obtenir :

$$i^1 = u_i^0 + \mu \sum_{j=0}^{i+1} w_j u_{i-j+1}^1,$$

$$i^{k+1} - \mu \cdot w_1 u_i^{k+1} - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} w_j u_{i-j+1}^{k+1} = u_i^k - \sum_{j=1}^k b_j u_i^{k-j+1} + \sum_{j=1}^k u_i^{k-j} b_j,$$

avec $i = 1, \dots, M-1$, $k = 1, \dots, N-1$. En utilisant le changement d'indice suivant : $j = j-1$ dans le terme à droite, nous obtenons le schéma suivant :

$$(1 - \mu \cdot w_1) u_i^1 - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} w_j u_{i-j+1}^1 = u_i^0,$$

$$(1 - \mu \cdot w_1) u_i^{K+1} - \mu \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} w_{i-j+1} u_j^{K+1} = (1 - b_1) u_i^K + \sum_{K-1}^{i=1} [b_j - b_{j+1}] u^{K-j} + b_k u^0 \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} Au^1 = u^0 \\ Au^{k+1} = (-1)u^k + \sum_{K-1}^{i=1} [b_j - b_{j+1}]u^{K-j} + b_k u^0 \\ u^0 = f^0 \end{cases} \quad (3.19)$$

avec $u^k = [u_1^k, \dots, u_{M-1}^k]^T$, pour $k=1,2,\dots$; $f^k = [f(x_1), \dots, f(x_{M-1})]^T$; et A est une matrice carrée de dimension $(M-1) \times (M-1)$ telle que :

$$A_j \begin{cases} 0, & \text{si } j > i + 1, \\ 1 - \mu \cdot g_1 = 1 + \mu\beta & \text{si } j = i, \\ -\mu \cdot g_{i-j+1} & \text{sinon .} \end{cases} \quad (3.20)$$

Algorithme 2 :

1. Lire les variables : $L, T, N, M, f, \alpha, \beta$.
2. Calcul de h et τ, x et t_- 3. Calcul de u^0 et μ .
4. Calcul des b_k et les w_i
5. Lire la matrice A .
6. Calcul de u^1 et u^2 et les u^k .
7. Trace de la solution u en fonction de x et t .

Application numérique

Nous considérons le problème (P) avec $g = \sin(\pi.x)$, $L = \pi, T = 1$

$$\begin{cases} D_t^\alpha u = \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial^\beta u}{x^\beta} & 0 < \alpha \leq 1, 1 < \beta \leq 2; 0 < x < \pi, t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \sin(\pi.x) & \forall x \in]0, \pi[, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \forall t \in [0, T], \end{cases} \quad (\text{Pnum})$$

$a = \pi^{-2} > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $1 < \beta \leq 2$ ce qui implique que (Pnum) admet une solution unique.

La solution exacte de ce problème avec $0 < \alpha < 1, 1 < \beta < 2$ est donnée en fonction de la fonction de Green fractionnaire et la fonction de Mittag-Leffler et elle est compliquée à programmer les formules des solutions sont données dans [20].

Nous allons donner la solution approcher pour $\alpha=0.5$, $\beta=1.5, 1.8$:

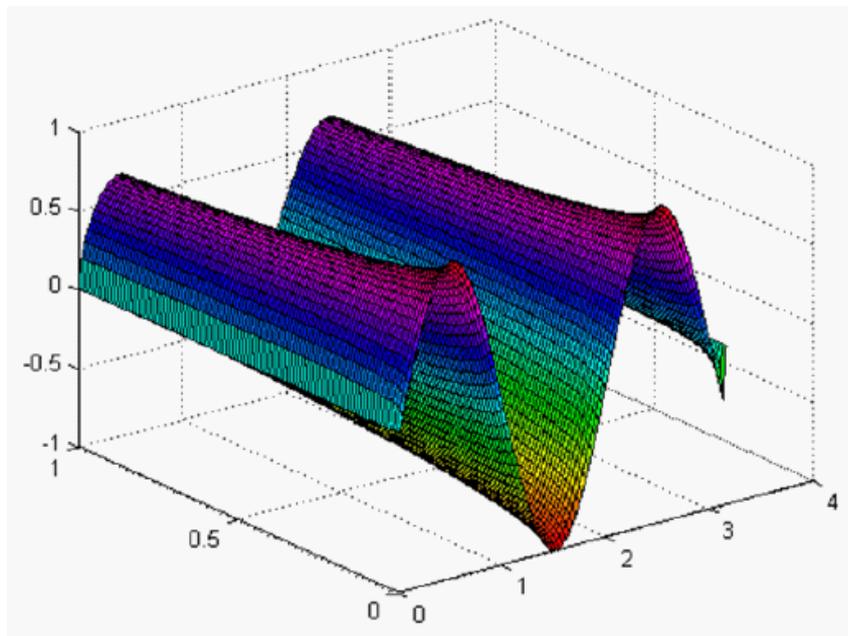


FIGURE 3.2 – Le graphe de la solution $\alpha=0.5$, $\beta=1.5$

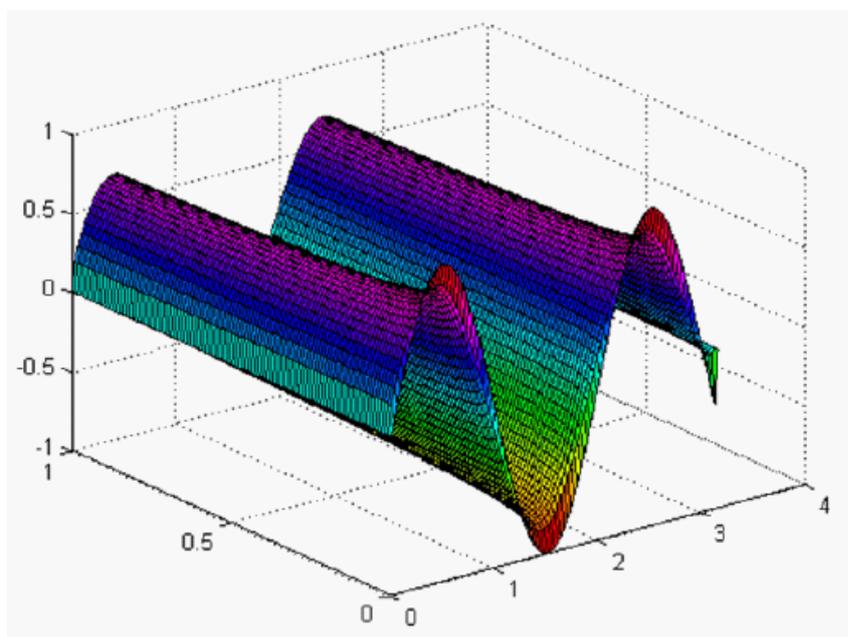
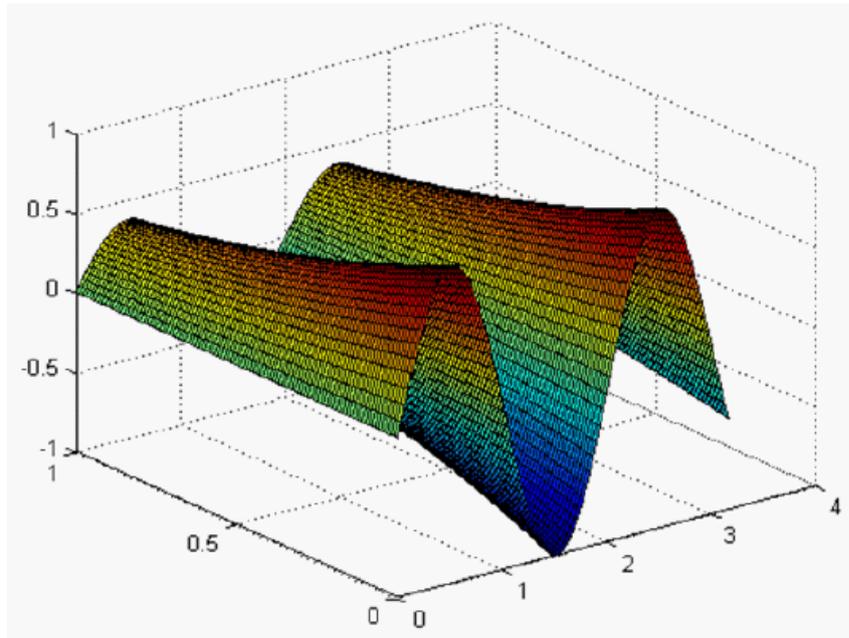


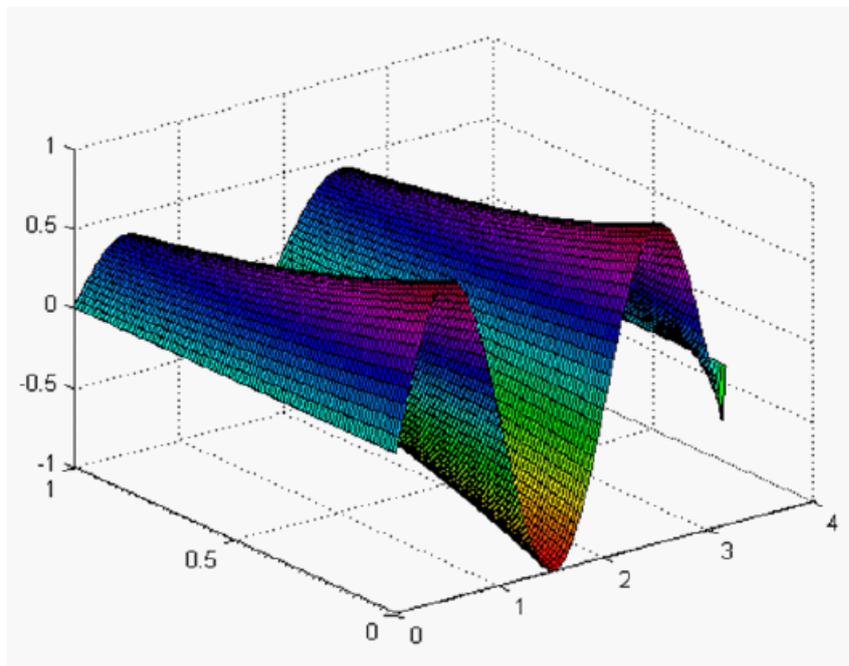
FIGURE 3.3 – Le graphe de la solution $\alpha=0.5$, $\beta=1.8$

Remarque : Les schémas de différences finies dans le cas fractionnaire sont applicable pour l'équation de diffusion fractionnaire avec $\alpha = 1, \beta = 2$, et $u(x, 0) = \sin(\pi.x)$, la formule de la solution classique est donnée par : $u(x, t) = \exp(-t). \sin(\pi.x)$

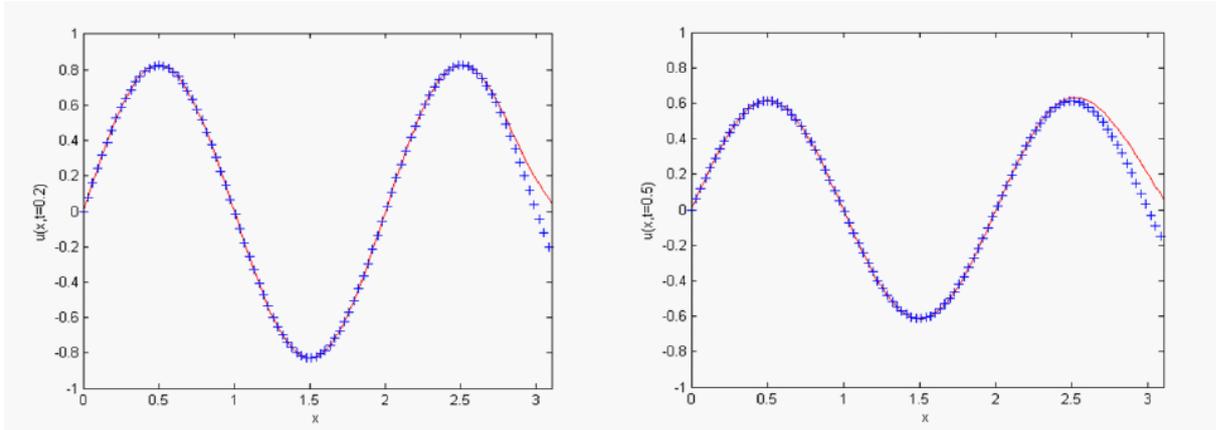
Le graphe donné par la solution exacte est :



Le graphe donné pour le cas classique avec le schéma numérique est :



Maintenant un fixe un t pour $\alpha = 1, \beta = 2$ ce qui donne les graphes suivants :



La solution exacte est donnée par " + " et la solution approchée par une ligne continue. Le premier graphe représente la solution u (exacte en bleu et approchée en rouge) en $t = 0.2$ avec $N = M = 100$; le deuxième représente la solution u en $t = 0.5$ avec $N = M = 100$.

Remarque : Les schémas basés sur la méthode des différences finies donnés précédemment ne sont pas toujours convergents, par exemple dans le cas du problème d'ordre-diffusion fractionnaire.

Équation dans des-diffusion fractionnaire est la généralisation de Équation de diffusion et l'équation dans de avec une dérivée au sens de Caputo par rapport au temps [16].

Elle a une grande importance car elle est utilisée dans plusieurs domaines comme la biologie, la nance, la physique. . .

L'équation d'onde-diffusion fractionnaire dans $1D(x \in \mathbb{R})$ est donnée par

$$D_t^\alpha T = a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 1 < \alpha \leq 2. \quad (3.21)$$

Si $\alpha = 1$, (3.21), est une équation de diffusion classique, et si $\alpha = 2$ c'est une équation d'onde classique.

Nous allons prendre le modèle de conduction de la chaleur par unité de longueur L finie dans un temps finie $t \in [0, T]$ avec une température initiale uniforme et sans source de chaleur ($f \equiv 0$), donc on aura le problème (R) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t^\alpha T = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 1 < \alpha < 2, 0 < x < L, t \in [0, T], \\ T(x, 0) = g(x) = \sin(2.x) \quad \forall x \in]0, L[, \\ \frac{\partial T}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \forall x \in 0, L[, \\ T(0, t) = T(L, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (R)$$

Le théorème suivant affirme l'existence et l'unicité de solution pour le problème (R).

Théorème 3.2.2 : Si $1 < \alpha < 2$, et $a > 0$, alors le problème (R) admet une solution unique.

Propriétés 3.2.3 La preuve de ce théorème est donnée dans [14] Résolution numérique Résolution numérique de problème (R) :

Les valeurs approchées aux points de maillage au bord du domaine et en $t = 0$ sont données par la valeur exacte (donnés) de la fonction T :

$$\begin{aligned} T_0^k = T_M^k = 0, \quad \forall k = 0, \dots, N, \\ T_i^0 = g(x_i) = g_i, \quad \forall i = 0, \dots, M. \end{aligned}$$

Dans le problème (R) la dérivée par rapport à l'espace est approchée par le schéma de différences finies d'ordre deux donné par (1.9),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_i, t_k) &= \frac{1}{h^2} (T(x_{i+1}, t_k) - 2T(x_i, t_k) + T(x_{i-1}, t_k)) \\ &= \frac{1}{h^2} (T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k), \quad i = 1, \dots, M - 1. \end{aligned} \quad (sc1)$$

Maintenant, puisque la dérivée fractionnaire par rapport au temps est donnée par la définition de Caputo et nous avons $1 < \alpha \leq 2$, donc nous allons l'approcher par le schéma L_2 donné par (3.8).

$$D_t^\alpha T(x_i, t_{k+1}) = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^k (T_i^{j-1} - 2T_i^j + T_i^{j+1}) b_j, \quad (sdf2)$$

avec : $b_j = (j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}$, $b_0 = 0$, $k = 1, \dots, N - 1$.

En remplaçant les dérivées dans le problème (R) par les formules (sc1) et (sdf2) nous

obtenons :

$$\frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^k (T_i^{j-1} - 2T_i^j + T_i^{j+1}) b_j = \frac{a}{h^2} (T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}), \quad (3.22)$$

$$a > 0, \quad i=1, \dots, M-1, \quad k=1, \dots, N-1.$$

Posons : $\beta = a\tau^\alpha h^{-2} \Gamma(3-\alpha)$, l'équation (3.22) s'écrit :

$$b_k T_i^{k+1} - \beta (T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}) = 2b_k T_i^k - b_k T_i^{k-1} - \sum_{j=0}^{k-1} (T_i^{j-1} - 2T_i^j + T_i^{j+1}) b_j,$$

$$i = 1, \dots, M-1, \quad k = 1, \dots, N-1,$$

$$-\beta T_{i-1}^{k+1} + (2\beta + b_k) T_i^{k+1} - \beta T_{i+1}^{k+1} = \sum_{j=1}^k 2b_j T_i^j - \sum_{j=1}^k T_i^{j-1} b_j - \sum_{j=1}^{k-1} b_j T_i^{j+1} + 2T_i^0 - T_i^{-1} - T_i^1,$$

$$i = 1, \dots, M-1; \quad k = 1, \dots, N-1,$$

$$T_i^0 = g_i \quad \forall i = 0, \dots, N,$$

$$\frac{T_i^{k-1} - T_i^k}{\tau} = 0 (k=0) \quad \forall i = 0, \dots, N \implies T_i^{-1} = T_i^0 \quad \forall i = 0, \dots, N.$$

Nous calculons le T_i^1 en prenant le cas $k=0$ dans l'équation (3.22) :

$$-\beta T_{i+1}^1 + (2\beta + b_0) T_i^1 - \beta T_{i-1}^1 = 2b_0 T_i^0 - b_0 T^{-1}.$$

Application numérique

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t^\alpha T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 1 < \alpha < 2, \quad 0 < x < L, \quad t \in [0, T], \\ T(x, 0) = \sin(2x) \quad \forall x \in]0, L[, \\ \frac{\partial T}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \forall x \in]0, L[, \\ T(0, t) = T(L, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (\text{Rnum})$$

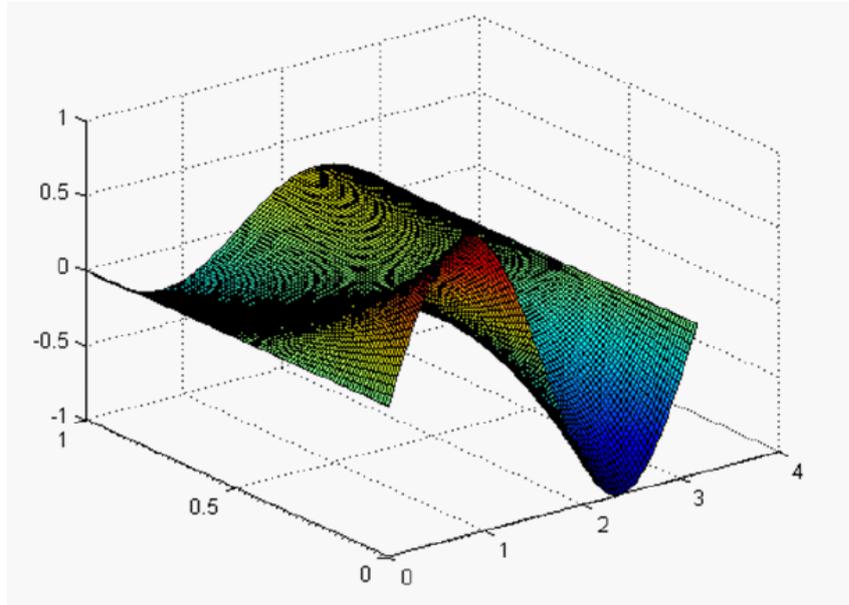
$1 < \alpha < 2, a = 1$, donc d'après le théorème 3.2.2 la solution existe. La solution de ce type de problème est donnée par :

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k E_\alpha \left(-\frac{(k\pi)^2}{L} t^\alpha \right) \cdot \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right),$$

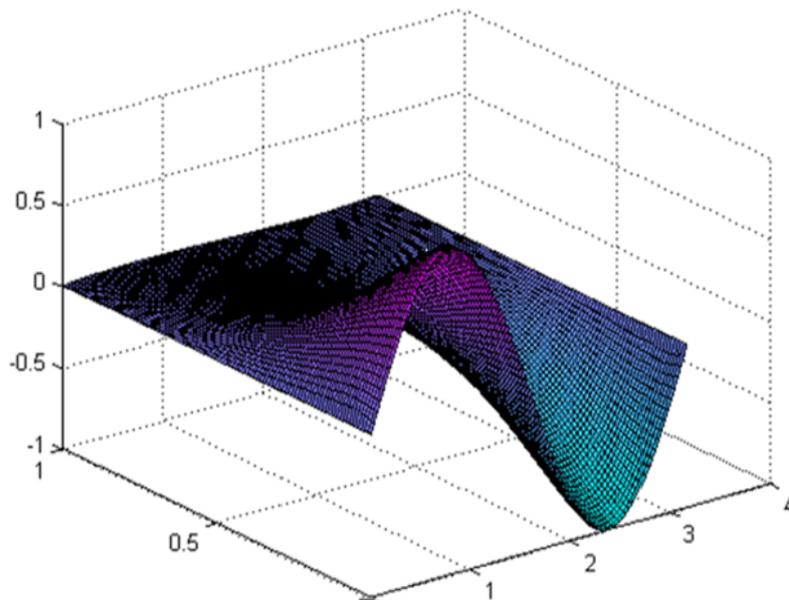
avec: $C_k = \int_0^L \sin(2x) \cdot \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) dx$, et E_α est la fonction de Mittag-Leffler.

Posons $L = \pi, T = 1$.

Pour programmer la solution exacte nous avons utilisé le programme de la fonction de Mittag-Leffler donnée par Podlubny en 2001, ce programme est accessible par le site officiel de Matlab. Le graphe de la solution exacte est donné par :



Le graphe de la solution approché est donné par :



Maintenant pour $t=0.2$, nous obtenons le graphe suivant :

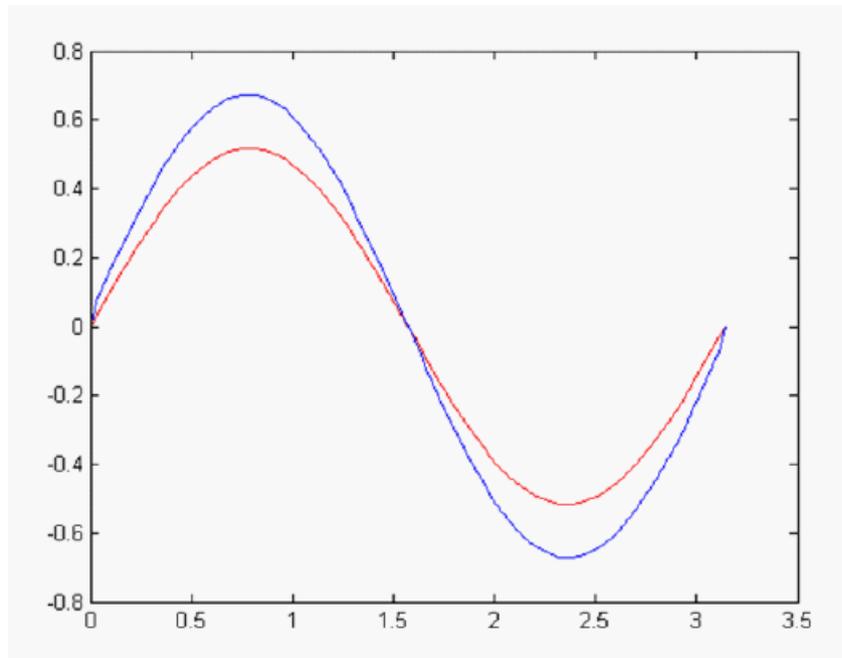


FIGURE 3.4 – la solution exacte est donné par la rouge et la solution approximer et donné par la bleu

Pour $t=0.5$ nous avons :

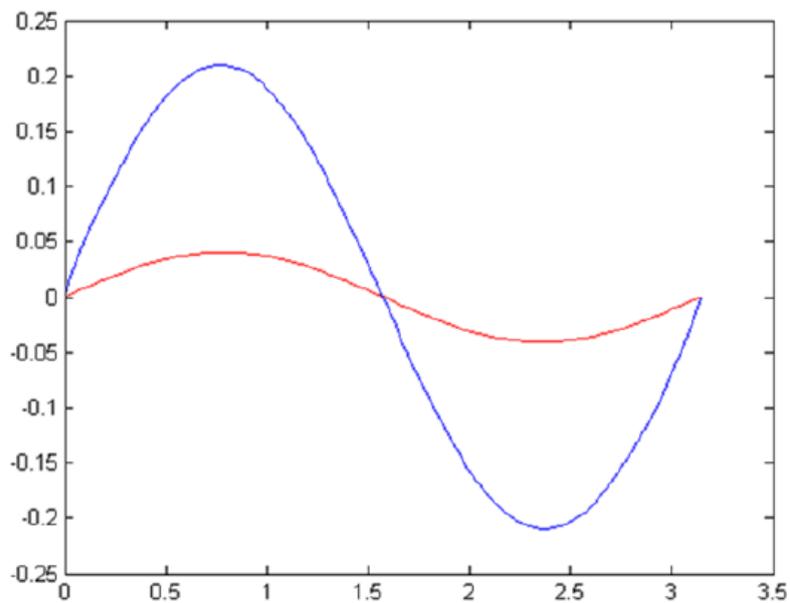


FIGURE 3.5 – la solution exacte est donnée par la ligne rouge et la solution approximer est donnée par la ligne bleu

Pour $t=0.9$ nous avons :

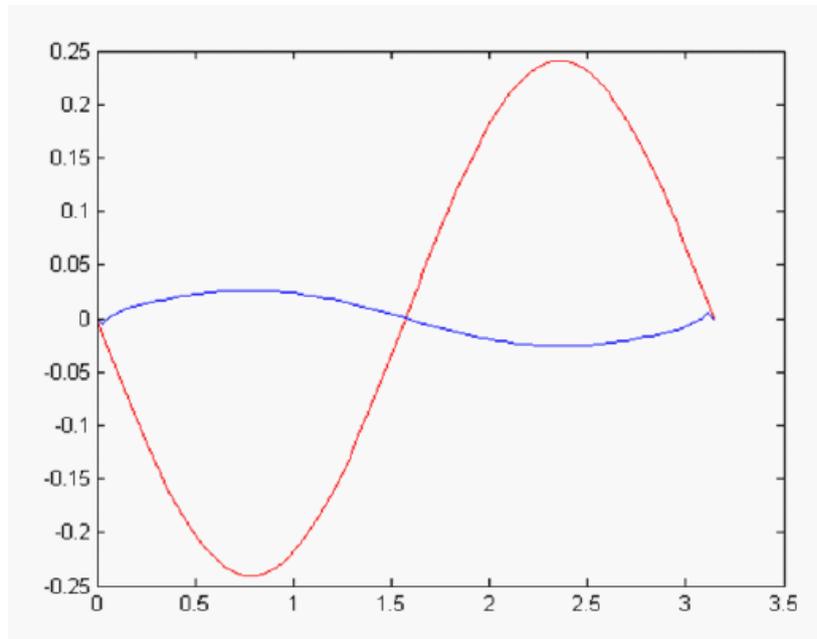


FIGURE 3.6 – la solution exacte est donné par la rouge et la solution approximer et donné par la bleu.

Conclusion De (FIGURE 3.4), (FIGURE 3.5) et (FIGURE 3.6) nous concluons que la méthode dans ce cas diverge et que l'erreur augmente avec le temps.

Conclusion

L'objectif initial de ce travail était d'appliquer une méthode numérique assez simple (méthode des différences finies) à une nouvelle classe de problèmes différentiels (équation aux dérivées partielles fractionnaires) non étudiés pendant mon cursus. Pour cela nous avons proposé de donner un aperçu historique du développement de cette notion. Nous avons donc commencé par faire l'étude des approches les plus utilisées (approche de Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov et celle de Caputo), après cela nous avons donné quelques schémas numériques pour approcher ces définition (les schémas L_1 , L_2 et les schémas de Grünwald), enfin nous avons exposé l'application de ces schémas.

Bibliographie

- [1] M. Caputo. Lainer modelé of dissipation whose Q is almost frequency independent, Part 2, Geophys. J. R. Astr. Soc. Vol. 13, p.529-539, (1967).
- [2] S. M. Choo, S. K. Chung , High-order perturbation différence schème for a convection diffusion problem, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 190(2000) 721-732.
- [3] Erdelyi A, Magnus W, Oberhettinger F and Tricomi F, Higher Transcendental Functions ,Vol,III,Krieger Pub, Melbourne ,Florida,(1981).
- [4] B.Lucquin. Equation aux dérivées partielles et leurs approximation .Ellipse (2004).
- [5] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujllo. THEORY AND APPLICATIONS OF FRACTIONAL Difrential Equation. Elsevier, 2006.
- [6] R. B. Kellogg, A. Tsan, Analysis of some difference approximations for a singularly perturbed problem without turning points, Math. Comp., 32(1978), 1025-1039.
- [7] F. Lui, V. Anh, I. Turner, P. Zhang, Numerical solution of the space Pokker- Planck equation, J. Comput. Appl. Math. 166 (1) (2004) 209-219.
- [8] H. Medjekal, Existence et unicité la solution d'une équation différentielle fractionnaire impulsive de temps infini dans un espace de Banach, Thèse de Doctorat Univ.Badji Mokhtar Annaba, (2015).
- [9] G.M.Mittag-Leffler-Sur La nouvelle fonction $Ea(x)$ C.R.Académie des Sciences .137,554-558(1903).
- [10] G.M.Mittag-Leffler-Sur La représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction homogène .Acta Mathématique .29,101-182(1905).
- [11] S. Momani, Z.Odibat, Numerical solution of the space-time fractional advection-dispersion equation, Numer. Meth. Partial Differ. Equat. 24 (6) (2008) 1416-1429.
- [12] K.B. Oldham and J. Spanier. The Fractional Calculus. Academic Press, York and London (1974).
- [13] I. Podlubny, Fractional Differential Equation, Academic Press, 198 (1999).

-
- [14] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*; Gordon and Breach, Yverdon, (1993).
- [15] M. Meershaert and C. Tadjeran, Finite difference approximation for fractional advection-dispersion equation, *J. Comp. Appl. Math.* 172, (2004), 65-77.
- [16] Yuriy Povstenko, *Linear Fractional Diffusion-Wave Equation for Scientists and Engineers*, Springer, (2010).
- [17] S. Shen and F. Liu, Error analysis of an explicit finite difference approximation for the space fractional diffusion, *ANZIAM J.*, 46 (E), (2005).
- [18] Uchaikin, Vladimir V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers, Volume I Background and Theory*, Springer, (2013).
- [19] Q. Yang, F. Liu, I. Turner, Numerical method for fractional partial differential equation with Riesz space fractional derivatives. *Appl. Math. Modelling* 34 (2010) 200-218.
- [20] G.M. Zaslavsky, A.I. Saichev, Fractional kinetic equation : solution and application, *chaos* 7 (4) (1997) 753-764.
- [21] G.M. Zaslavsky, chaos, Fractional kinetic and anomalous transport, *phy. Rep* 371 (6) (2002) 461-580.
- [22] P. Zhang, F. Liu, V. Anh, I. Turner, A fractional order implicit finite difference approximation for the space-time fractional diffusion, *ANZIAM J.*, 47 (EMAC), (2005).