REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse Fonctionnelle Et Application

Mémoire de Fin d'Etudes

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

Quelques Théorèmes du point fixe et leurs applications

Présenté par

*** BOUALAOUI CHERIFA**
*** CHEKOURI FATIHA**
*** MEGHARBI KHADIDJA**

soutenue devant le Jury composé de

***SOUID MOHAMMED SAID**	**MCA**	**Président**
***BENDAOUD ABED SID AHMED**	**MCB**	**Examinateur**
***MOKHTARI MOKHTAR**	**MCA**	**Encadreur**

Promotion : **2018 \ 2019**

Remerciements

Mon premier remerciement va à Allah.
A réalisation de ce travail n'est pas seulement le fruit de nos propres effort mais aussi les efforts de biens de personnes à qui nous exprimons nos vifs remerciements.
Nous exprimons nos remerciements a tous les professeurs d'appartement de mathématique d'IBN KHALDOUN-TIARET qui ont contribué a notre étude et formation plus spécialement Mr mokhtari mokhtar qui a accepter de diriger ce travail et nous promulguer des critiques et conseils constructifs .
Nous remercions aussi beaucoup tous les amis qui nous donnant des conseils au cours de notre voyage de nos études effectuées. Notre reconnaissances va également a notre famille et qui nous ont tant soutenus au cours de toutes nos études . Nous ne pouvons pas aussi clôturer sans toute personne qui de prés ou de loin aurait contribué a la réalisation de travail trouve ici de notre profonde gratitude.

Dédicace

C'est avec un grand plaisir que je dédie ce travail à :
Mes parents qui m'ont encouragé tout le long de mes études.
ma très chère grand-mère que j'aime énormément.
A mes chers frères (Mohammed, Rachid, Ibrahim, Abd elhadi, Fathi).
A mes chères sœurs(karima, Mariya).
Mes cousins(es),
mes meilleurs amis.
A toute la famille Megharbi .
Tous mes enseignants et toute la promotion mathématique(2018 - 2019).

Khadidja

Dédicace

C'est avec un grand plaisir que je dédie ce travail à :
Mes parents qui m'ont encouragé tout le long de mes études.
ma très chère grand-mère que j'aime énormément.
A mes chers frères (Mohammed, Khaled, Hamid, Bachir).
A mes chères sœurs.
Mes cousins(es)(sofiane),
mes meilleurs amis.
A toute la famille Chekouri.
Tous mes enseignants et toute la promotion mathématique (2018 - 2019).

Fatiha

Dédicace

C'est avec un grand plaisir que je dédie ce travail à :
Mes parents qui m'ont encouragé tout le long de mes études.
ma très chère grand-mère que j'aime énormément.
A mes chers frères (Ahmed, Abd el malek).
A mes chères sœurs(Malika, Fatima el zahra).
Mes cousins(es)(Sofia, Khaled, Noura,Abed),
mes meilleurs amis (Hamza,Asma,Mimouna,Fatima,Mokhtaria,Mbarka,Om el kheir,Nasira,Bakhta,Kha
A toute la famille Boualaoui .
Tous mes enseignants et toute la promotion mathématique(2018 - 2019).

Cherifa

Table des matières

1 préliminaires **11**

1.1 Espace métrique 11
1.2 Sous-ensemble ouvert 12
1.3 Sous-ensemble fermé 12
1.4 Adhérence d'un sous ensemble 12
1.5 Voisinages 13
1.6 Suite de Cauchy 13
1.7 Espace métrique complet 13
1.8 Espace de Banach 13
1.9 Espace de Hilbert 14
1.10 Application Lipschitzienne 14
1.10.1 Application contractive 15
1.11 Compacité 15
1.11.1 Applications compactes 16
1.12 Convexité 17
1.13 La fonction Gamma : 17
1.14 l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville 18
1.15 Dérivée fractionnaire de Caputo 18

2 Quelque résultats de la théorie du point fixe **20**

2.1 Théorème du point fixe du type de Banach 20

2.2 Théorème du point fixe de type Brouwer-Schauder 23
2.2.1 Théorème du point fixe de type Brouwer 23
2.2.2 Le Théorème de Schauder 27
2.3 Théorème du point fixe de Kranoselskii 29
2.4 Théorèmes du point fixe pour des applications non-expansives 31
2.5 Alternative non linéaire de Leray -Schauder pour des application contractantes 34

3 Applications 39
3.1 Equation différentielle fractionnaire 39
3.1.1 Étude de l'existence et l'unicité de solutions d'une équation différentielle fractionnaire 39
3.1.2 Présentation du problème 40
3.1.3 Préliminaires 40
3.1.4 Résultat d'existence et d'unicité 45
3.2 Application sur le théorème du point fixe pour les applications non-expansives 49
3.3 Application sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder pour les applications contractantes 52
3.3.1 Problème de Dirichlet homogène d'ordre deux 52

Notations

- $\overline{A}$ est l'adhérence de A .
- $diam(A)$ diamètre de l'ensemble (A).
- $B(a, r)$ est la boule ouverte de centre a et de rayon r .
- I est l'application identité
- $C([a, b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$
- $C^1([a, b])$ l'espace des fonctions continues et dérivable sur $[a, b]$
- $I_a^\alpha f$ l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f.
- ${}^cD^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α.

L'objectif

L'objectif de ce mémoire est l'ètude de quelques théorèmes du point fixe et leurs application dans des espaces mètriques où bien de Banach car elle est fourni les nécessaires outils pour avoir l'existence des solutions dans divers types d'équations et nombreux problèmes non linéaire. Parmi ces théoèmes le théorème du point fixe de Banach qui affirme qu'une contraction définie dans un espace métrique complet admet un unique point fixe comme limite d'une suite itérè. Contrairement les autres théoèmes comme (Brouwer, Shauder, kranoselskii)assurent seulement l'existence sans indiquer comment les déterminer. La théoriè du point fixe est fondamentale en mathématique et surtout en analyse, de nombreux problème intervenant en physique, chimie, biologie sont modélieés par des systèmes d'équations différentielles ou des équation intégrales. Ces système peuvent s'écrire sous forme d'équations abstraite f(x)=x ou f est définie d'un ensemble dans lui même. De plus plusieurs problèmes pour certains applications non linéaire se ramène dè cette théorie.

Introduction

L'histoire des points fixes sur les espaces métriques à commencé par les travaux de Banach publie en "1922". Il a établi l'existence et l'unicité du point fixe d'une contraction dans un espace métrique complet par suite à appliqué son théorème connu sous le nom principe de l'application contractante à la résolution des équations intégrales mais puisque cette théorie est plus large les recherches mathématiques ont pris déférente direction en s'inspirant du principe de Banach, elles sont basées sur :

1. l'etude d'existence et d'unicité du point fixe
2. la construction d'un algorithme pour le calcul
3. la convergence et la stabilité de cet algorithme en question .

après Banach, Brouwer à donner un résultat de topologie algébrique concernant le théorème du point fixe sous forme plus simple ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui même dans un convexe compact dans un espace euclidien dans lui même aussi. En suite en 1930 Schauder établi une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe, compact admet un point fixe qui n'est pas nécessairement unique. De plus on a présenté l'extension la plus naturelle d'une contraction nous observons d'une part que les contractions et les applications contractantes les isométries sont des applications non expansive d'autre part dans un espace métrique où Banach où bien de Hilbert toute application non expansive admet au moins un point fixe. on a vue la section de l'alternative non linéaire de Leray-shauder pour des applications contractantes qui est basée sur l'existence du point fixe la dernière elle est invariant par homotopie. En 1955 et pour la première fois Krasnoselskii à élaboré sont théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractante est l'autre compact admet un point fixe.Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires. Ce mémoire est réparti en trois chapitres :

- Le premier chapitre est consacré a quelques définitions concernant les espaces métriques, compacts et de Banach aussi la convexité d'un ensemble.

- Le deuxième chapitre nous présentons quelques théorèmes du point fixe de Banach, Brouwer et celui de Schauder et Krasnoselskii et nous abordons le théorème du point fixe pour des application non-expansive et l'alternative non linéaire de Leray-Shauder pour des application contractantes.

- Le dernier chapitre nous intéressons a l'étude d'existence et d'unicité de solution pour une équation différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions intégrales aux limites , nous avons vu aussi quelques définitions concernant le calcul fractionnaire comme la dérivé et l'intégrale fractionnaire aux sens de caputo.

Nos résultat sont basées sur l'application de deux théorèmes du point fixe de Banach et de Krasnoselskii. puis dans l'application sur l'alternative non linéaire de Leray-Schaulder pour les applications contractantes on commence par une présentation de problème de Dirichlet homogène d'ordre deux. De plus on a appliqué le théorème concernant les application non expansive.

Chapitre 1

préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et résultats préliminaires nous utiliserons dans la suite du mémoire.

1.1 Espace métrique

Définition 1.1. *une distance(métrique) sur un ensemble* $E \neq \varnothing$*, est une application* $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant :*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\forall x, y \in E$
2. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in E$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in E$

Définition 1.2. *Un espace métrique est un couple* (E, d) *où* E *est un ensemble et* d *est une distance.*

Définition 1.3. *(Boule) Soit* (X, d) *un espace métrique, a un point de*

X et $r > 0$, on définit la boule (ouverte) de centre a et rayon r par :

$$B(a, r) = \{x \in X : d(a, x) < r\}$$

1.2 Sous-ensemble ouvert

Définition 1.4. *Le sous ensemble U de l'espace métrique (X, d) est dit ouvert si :*

$$\forall x \in U, \exists r > 0 \qquad telque \qquad B(x, r) \subset U$$

1.3 Sous-ensemble fermé

Définition 1.5. *Le sous ensemble F de l'espace métrique (X, d) est dit fermé si son complémentaire C_X^F est ouvert.*

1.4 Adhérence d'un sous ensemble

Définition 1.6. *Soit $A \subset X$, un sous-ensemble de l'espace métrique X on définit l'adhérence $\overline{A}$ de A par :*

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \varnothing\}$$

Proposition 1.1.

1. *A est fermé $\Rightarrow A = \overline{A}$*
2. *$\overline{A} = \{x \in X : \exists$ une suite $(x_n)_n \subset A$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x\}$*

1.5 Voisinages

Définition 1.7. *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $a \in X$*.*
On dit que $V \subset X$ *est un voisinages de* a *dans* X *s'il existe un ouvert* $U \subset X$ *tel que* $a \in U \subset V$*.*

1.6 Suite de Cauchy

Définition 1.8. *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite suite de Cauchy dans* E *si :*
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in N : \forall n > n_0, \forall m > n_0, \; \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

Définition 1.9. *On dit qu'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* E *converge vers* $\ell \in E$ *si :* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, \; \|x_n - l\| < \varepsilon$

Remarques 1.1.

- *Toute suite convergente est de Cauchy.*
- *Toute suite de Cauchy est bornée.*

1.7 Espace métrique complet

Définition 1.10. *L'espace métrique* (X, d) *est dit complet si toute suite de Cauchy dans* X *converge dans* X*.*

1.8 Espace de Banach

Définition 1.11. *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet*

1.9 Espace de Hilbert

Définition 1.12. *On appelle produit scalaire sur l'espace vectoriel* E *toute forme bilinéaire, symétrique non dégénérie, définie positive autrement dit, toute application* φ *de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant :*

1. $\forall (x, y) \in E^2, \varphi : (x, y) \to \varphi(x, y)$ *est linéaire.*

2. $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$

3. $\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

4. $\forall x \in E \backslash \{0\}, \varphi(x, x) > 0.$

Définition 1.13. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel* H *muni d'un produit* $\langle u, v \rangle$ *scalaire et qui est complet pour la norme*
$\|u\| = \langle u, v \rangle^{\frac{1}{2}}$

1.10 Application Lipschitzienne

Définition 1.14. *Soient* $(X, d_x) et (Y, d_y)$ *deux espaces métriques et* $f : X \to Y$ *une application. On dit que* f *est Lipschitzienne s'il existe* $k \geq 0$ *telle que :*

$$\forall x, y \in X, d_y(f(x), f(y)) \leq k d_x(x, y). \tag{1.1}$$

1. *Le plus petit réel k qui vérifie (1.1)est appelé constante de Lipschitz.*
2. *Si $k \in [0, 1[$, application f est dite contractante.*
3. *Si $k = 1$, l'application f est dite non-expansive.*

1.10.1 Application contractive

Définition 1.15. *Soit (X, d) un espace métrique, l'application $f : X \to X$ est dite contractive si :*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \; \forall x, y \in X avec \; x \neq y$$

1.11 Compacité

Définition 1.16. *soient E un ensemble quelconque et A une partie de E. Un recouvrement de A est une famille $(B_i)_{i \in I}$ Des parties de E vérifiant :*

$$A \subset \bigcup_{i \in I} B_i$$

Définition 1.17. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé. On dit que E est relativement compact si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des partie de E dans le diamètre est inférieure à ε.*

Corollaire 1.1. *Soit $(E, \|.\|)$ est un espace vectorielle normé sur $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ de dimension fini. Les parties relativement compactes de E sont les parties bornées.*

Définition 1.18.

1. *Un espace normé* $(E, \|.\|)$ *est dit compact s'il est relativement compact et complet.*
2. *Une partie* A *d'un espace normé* $(E, \|.\|)$ *est dite compacte si le sous-espace normé* $(A, \|.\|_A)$ *est complet.*

Théorème 1.1. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectorielle normé sur* $\mathbb{R}$ *où* $\mathbb{C}$ *de dimension fini. Alors les parties compactes de* E *sont les parties fermées et bornées de* E.

1.11.1 Applications compactes

Définition 1.19. *Soient* E *un espace de Banach et* $\Omega \subset E$, $f : E \to E$ *une application.*

a. *On dit que* f *est compacte si* $f(\Omega)$ *est compact*
b. *L'application* f *est dite totalement bornée si* $f(A)$ *est relativement compacte pour tout sous ensemble bornée* A *de* E
c. *L'application* f *est dite complètement continue si* f *est continue et totalement bornée.*

Remarques 1.2. *Toute application continue et compacte est complètement continue. La réciproque est vraie si* Ω *est borné.*

1.12 Convexité

Définition 1.20. *On dit que* $C \subset E$ *est un ensemble convexe si :*
$\forall t \in [0,1],\ \forall (a,b) \in C^2,\ t \times a + (1-t) \times b \in C$

Théorème 1.2. *Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques avec* Y *complet.*
Alors l'ensemble $C_b(X,Y)$ *est complet pour la distance uniforme*

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X}\{d_Y(f(x), g(x))\}$$

$C_b(X,Y)$ *est l'ensemble des fonctions continues et bornées de* X *dans* Y*.*

1.13 La fonction Gamma :

Définition 1.21. *L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler* $\Gamma(z)$*, qui est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, z > 0$$

avec $\Gamma(1) = 1$*,* $\Gamma(0^+) = +\infty$*,* $\Gamma(z)$ *est une fonction strictement décroissante pour* $0 < z \leq 1$*.*

1.14 l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.22. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. l'intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de f est définie par la formule suivante :*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

Où α est un nombre réel positif.

1.15 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.23. *Soient $\alpha \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n - 1 \leq \alpha < n$ et f une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n} f \in [a, b]$.*
La dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo est définie par :

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^n(\tau) d\tau \\ &= I^{n-\alpha} \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) \end{aligned}$$

Définition 1.24. *Un espace uniformément convexe est un espace de Banach ou seulement selon les auteurs, un espace vectoriel normé tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ pour lequel, pour tout couple (x, y) de vecteurs $(\|x\| \leq 1$ et $\|y\| \leq 1$ $\|x - y\| \geq \varepsilon) \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$. ou encore pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ pour lequel, pour tout couple (x, y) de vecteurs*

$$\|x-y\| \geq \varepsilon \max(\|x\|, \|y\|) \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq (1-\eta) \max(\|x\|, \|y\|).$$

Chapitre 2

Quelque résultats de la théorie du point fixe

2.1 Théorème du point fixe du type de Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe, Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui même.

Théorème 2.1. *:(Théorème du point fixe de Banach) [8]*
Soit (E, d) *un espace métrique complet et soit* $T : E \to E$ *une application contractante avec la constante de contraction* k *alors* T *a un unique pointe fixe* $x \in E$. *De plus nous avons la propriété suivante qui est importante :*
si $x_0 \in E$ *et* $x_n = Tx_{n-1}$ *tel que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$
et $d(x_n, x) \leq k^n(1-k)^{-1}d(x_1, x_0), n \geq 1$ x *étant le point fixe de* T.

Preuve :

<u>L'existence :</u> soit $y \in E$. Considérons la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ donnée par :

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_n = T(x_{n-1}), n \geq 1 \end{cases}$$

on doit prouver que(x_n)est une suite de Cauchy dans E. pour $m < n$, on utilise l'inégalité triangulaire :

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

puisque T est une contraction, on a :

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(Tx_{p-1}, Tx_p) \leq kd(x_{p-1}, x_p)$$

pour $p \geq 1$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq (k^m + k^{m+1} + \cdots + k^{n-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m(1 + k + \cdots + k^{n-m-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m(1-k)^{-1}d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

on déduit que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E

que est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers x dans E par ailleurs puisque

T est continue, on a :

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T(x_{n-1}) = \left(T \lim_{n\to\infty} x_{n-1} = Tx\right).$$

Donc x est un point fixe de T (i.e.$Tx = x$)

<u>L'unicité :</u> supposons $x = Tx\ et\ y = Ty$ alors :

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

ce qui implique que $d(x, y) = 0$ i.e. $x = y$ (puisque $k < 1$)

Remarques 2.1. *Les hypothèses du théorème du point fixe de Banach sont réellement nécessaire si nous en négligeons seulement une, alors il se peut que le point fixe n'existe pas.*

Exemple 2.1.1.

1. *si I n'est pas stable par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $I = [0,1]$. On a I est fermé dans $\mathbb{R}$ donc il est complet (car $\mathbb{R}$ est complet).De plus $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$, ce qui implique que $\max_{x\in I} \mid f'(x) \mid < 1$, donc f est contractante sur $[0,1]$. Mais I n'est pas stable par$f$ car $f([0,1]) = [1, \sqrt{2}]$.*
   les conditions suffisantes du théorème de Banach ne sont pas toutes remplies. On vérifie, par l'absurde, que f n'admet pas un point fixe.
2. *Si f n' est pas contractante : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $I = [0, +\infty[$. On a $f([0, +\infty[) \subset [0, +\infty[$ et I est un fermé dans $\mathbb{R}$. Alors I*

est complet (fermé dans un complet est complet). Mais f n'est pas contractante, car $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} \mid f'(x) \mid = 1$ *donc f n'est pas contractante.*

3. Si E n'est pas complet : $T(x) = \dfrac{\sin x}{2}$ *sur E*

On a $T(]0, \frac{\pi}{4}]) =]0, \frac{\sqrt{2}}{4}] \subset]0, \frac{\pi}{4}]$ *et* $\sup\limits_{x\in E} \mid T' \mid = \frac{1}{2} < 1$, *alors T est contractante. Mais T n'admet pas un point fixe car E n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc E n'est pas complet.*

2.2 Théorème du point fixe de type Brouwer-Schauder

Dans cette partie, nous allons actuellement présentés les théorèmes du point fixe pour une application continue dans les espaces de Banach en dimension finie et infinie. En particulier, nous présentons les théorèmes de Brouwer, Schauder.

2.2.1 Théorème du point fixe de type Brouwer

Le Théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de la topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Il existe plusieurs formes de ce théorème selon le contexte d'utilisation. Ce théorème donne l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie.

Théorème 2.2. *Soit K une partie non vide, compacte et convexe de* $\mathbb{R}^n$

et $f : K \to K$ une fonction continue. Il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$f(x) = x$.

Preuve :

Si f est continue de $[a, b]$ dans lui même, la fonction
$g \mapsto f(x) - x$ est continue, et prend en a la valeur $f(a) - a \geq 0$ et en b la valeur $f(b) - b \leq 0$. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de f. De même dans le plan, Les parties compactes et convexes sont les disques fermés ou bien les boules fermées, la forme du théorème de Brouwer prend la forme suivante

Exemple 2.2.1. *(Théorème de Brouwer en dimension 1) L'intervalle $[0, 1]$ possède le point fixe considérons une fonction continue*
$f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ *puisque* $f([0, 1]) \subset [0, 1]$
nous avons :$f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$.
Si $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 1$
nous définissons une fonction continue

$$\begin{aligned} g : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - x \end{aligned}$$

puisque $f([0, 1]) \subset [0, 1]$
nous avons : $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1.f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 1$.

Puisque g continue et que $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$, nous pouvons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Ceci nous garantit l'existence d'un point $a \in [0,1]$
tel que $g(a) = 0$ donc aussi $f(a) = a$

Contre Exemple :
la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + 1$$

est continue,mais n'a pas un point fixe.

Théorème de Brouwer en dimension deux

Si $\mathbb{K}$, le domaine de définition de T est d'intérieur vide, c'est un segment. Sinon, $\mathbb{K}$ est semblable à une boule unité fermée.
Le terme se semblable signifie qu'il existe un homéomorphisme φ de la boule unité vers $\mathbb{K}$.
L'équation définissant le point fixe peut encore s'écrire :
Si $h = T \circ \varphi$, $h(x) = x$.
Autrement dit .
on peut supposer que $\mathbb{K}$ est la boule unité fermée.
On peut de plus choisir la norme de manière quelconque.
Si on choisit celle qui associe la valeur absolue de la plus grande coor-

donnée, cela revient à dire que l'on peut choisir pour compact $\mathbb{K}$.
l'ensemble $[-1,1] \times [-1,1]$ sans perte de généralité.
Si l'on définit la fonction F comme suit :

$$\begin{aligned} F : [-1,1] \times [-1,1] &\to [-1,1] \times [-1,1] \\ x &\to F(x) = h(x) - x \end{aligned}$$

Cela revient à montrer que la fonction F atteint le vecteur nul sur $[-1,1] \times [-1,1]$.
Si F_k pour $k = 1, 2$, sont les deux fonctions coordonnées de F, cela revient à montrer l'existence d'un point x_0, tel que F_1 et F_2 admettent toutes deux pour zéro la valeur x_0.
La fonction F_1 est une fonction de $[-1,1] \times [-1,1]$.
dans $[-1,1]$ sur $\{-1\} \times [-1,1]$. elle est positive en revanche sur
$\{-1\} \times [-1,1]$. elle est négative.
Ceci laisse penser que la courbe de niveau 0 est une ligne qui part d'un point $\{-1\} \times [-1,1]$ pour finir sur un point de $\{-1\} \times [-1,1]$.
Le même raisonnement appliquée à F_2 laisse penser que la courbe de niveau 0 est cette fois-ci une ligne qui part d'un point $\{-1\} \times [-1,1]$ pour terminer sur un point de $\{-1\} \times [-1,1]$.
Intuitivement. il semble évident que ces deux lignes de niveaux doivent nécessairement se croiser et ce point de croisement est un point fixe de $T \circ \varphi$

2.2.2 Le Théorème de Schauder

Théorème 2.3. *[9] Soient E un espace de Banach et $\mathbb{K} \subset E$ convexe et compact.*
Alors toute application continue $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ possède un point fixe.

Preuve :
Soit $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ une application continue.comme $\mathbb{K}$ est compact
f est uniformément continue, donc, si on fixe
$\varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in \mathbb{K}$ on ait $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$
dés que $\|x - y\| \leq \delta$, De plus, il existe un ensemble fini des points $x_1, \ldots, x_p \subset \mathbb{K}$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_j recouvrent $\mathbb{K}$, ie

$$\mathbb{K} \subset \bigcup_{1 \leq J \leq P} B(x_{j,\delta})$$

Si on désigne $L := Vect(f(x_j))_{1 \leq j \leq p}$, alors L est de dimension finie, et $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \cap L$ est compact convexe de dimension finie.
pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue
$\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 \qquad si \qquad \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \dfrac{\|x - x_j\|}{\delta} \qquad sinon \end{cases}$$

et on voit que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\sum_{j=1}^{p} \psi_{j(x)} > 0$, et donc on peut définir sur $\mathbb{K}$ les fonction continues positives φ_j par

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \varphi_k(x)}$$

pour lesquels on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{K}$. on pose, alors, pour $x \in \mathbb{K}$, $g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) f(x_j)$. g est continue (car elle est la somme des fonctions continues), et prend ses valeurs dans $\mathbb{K}^*$ (car $g(x)$ est un barycentre des $f(x_j)$).
Donc si on prend la restriction $g : \mathbb{K}^* \to \mathbb{K}^*$, par le théorème (la boule B_n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$), g possède un point fixe $y \in \mathbb{K}^*$. De plus

$$\begin{aligned} f(y) - y = f(y) - g(y) &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j f(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) \left[f(y) - f(x_j) \right] \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\| y - x_j \| < \delta$, et Donc

$$\|f(y)-y\| \leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)\|f(y)-f(x_j)\| \leq \sum_{j=1}^{p} \varepsilon\varphi_j(y) = \varepsilon$$

Donc, pour tout entier m on peut trouver un point $y_m \in \mathbb{K}$ tel que $\|f(y_m) - y_m\| < 2^{-m}$.
Et puisque $\mathbb{K}$ est complet, de la suite $y_m, m \in Z$ on peut extraire une sous-suite y_{m_k} qui converge vers un point $y^* \in \mathbb{K}$. Alors f étant continue. la suite $(f(y_{m_k}))$ converge vers $f(y^*)$, et on conclut que $f(y^*) = y^*$, i.e.y^* est un point fixe de f sur $\mathbb{K}$.

2.3 Théorème du point fixe de Kranoselskii

On a vu précédemment deux théorèmes principaux de la théorie du point fixe à savoir le théorème de Schauder et théorème de l'application contractante de Banach, Kranoselskii a combiné ces deux théorèmes.

Théorème 2.4. *(Théorème du point fixe de Kranoselskii)*
Soit F un ensemble non vide, fermé, et convexe d'un espace de Banach X.T_1 et T_2 sont deux applications de F dans X telles que :

1. $T_1(x) + T_2(y) \in F, \ \forall x, y \in F$.
2. T_1 *est une contraction.*
3. T_2 *est compacte et continue.*

Alors, $T_1 + T_2$ *admet un point fixe dans* F*, autrement dit :*

$$\exists\, x \in F : T_1(x) + T_2(x) = x$$

Preuve :

Supposons que les applications T_1 *et* T_2 satisfont les hypothèses du théorème. En particulier, il existe $k \in [0, 1]$ tel que :

$$\|T_1(x) - T_1(y)\| \leq k\|x - y\| \; avec \; x, y \in F$$

Ceci donne :

$$\|(I - T_1)(x) - (I - T_1)(y)\| \geq \|x - y\| - \|T_1(x) - T_1(y)\|(1 - k)\|kx - yk\|$$

et $\|(I - T_1)(x) - (I - T_1(y)\| \leq \|x - y\| + T_1(x) - T_1(y)\| \leq (1 + k)\|x - y\|$. Par conséquent, $I - T_1 \to F(I - T_1)(F)$ est un homéomorphisme et $(I - T_1)^{-1}$ existe puisque $(I - T_1)(F)$ est continue. De plus on remarque que pour tout $y \in F$, l'équation

$$x = T_1(x) + T_2(y)$$

a une solution unique $x \in F$ selon le théorème du point fixe de Banach. De cette dernière équation nous concluons que $T_2(y) \in (I - T_1)(F)$ pour tout $y \in F$ et que $(I - T_1)^{-1} T_2 : F \to F$ est bien définie comme étant une application continue. Puisque T_2 est une application compacte, il s'ensuit que $(I - T_1)^{-1}T_2 : F \to F$ est aussi une application compacte. Finalement, le théorème du point fixe de Schauder généralisé nous garantit la conclusion du théorème.

Pour plus de détails, nous recommandons toute personne intéressée par les théorèmes du point fixe de parcourir le livre [8] par Smart où des résultats supplémentaires et beaucoup plus de références peuvent être trouvées.

2.4 Théorèmes du point fixe pour des applications non-expansives

Dans cette section, nous présentons l'extension la plus naturelle d'une contraction.

Théorème 2.5. *Soient C un ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Banach E et $F : C \to C$ une application non-expansive avec $F(C)$ est compact dans C. Alors F admet un point fixe.*

Preuve :

Soit $x_0 \in C$, pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on définit la suite d'applications

$$F_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) F + \frac{1}{n} x_0$$

comme C est convexe et $x_0 \in C$

Alors $F_n : C \to C$, de plus F_n est contractante.

En effet, $\forall x, y \in C$

$$\begin{aligned}\|F_n(x) - F_n(y)\| &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|F(x) - F(y)\| \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x - y\|\end{aligned}$$

On applique le théorème (2.1) pour chaque F_n (n fixé) et on en déduit qu'il existe un unique point fixe $x_n \in C$ de $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$
Donc

$$x_n = F_n(x_n) = \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) F(x_n) + \tfrac{1}{n} x_0$$

De plus, comme $F(C)$ est un sous ensemble compact de C alors il existe une partie d'entiers S et $u \in C$ tels que $F(x_n) \to u$ quand $n \to +\infty$ dans S

$$x_n = \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) F(x_n) + \tfrac{1}{n} x_0 \to u \text{ quand } n \to +\infty \text{ dans } S$$

Par continuité, $F(x_n) \to F(u)$ quand $n \to +\infty$ dans S, d'où $u = F(u)$.
Le théorème suivant de Browder et Gohde affirme que le résultat du théorème reste valable, si H est un espace de Banach uniformément convexe.

Théorème 2.6. *(théorème de Browder et Gohde)*
Soient E un espace de Banach uniformément convexe, et C un sous ensemble non vide fermé, convexe, borné de E.
Alors toute application non-expansive
$T : C \to C$ admet au moins un point fixe dans C.

Le lemme suivant nous assure qu'on peut toujours approximer une application non-expansive définie sur un ensemble convexe borné d'un espace de Banach par une application contractante.

Lemme 2.1. *Soient C un ensemble convexe, bornée d'un espace de Banach E et $F : C \to C$ une application non-expansive. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une application contractante*

$$F_\varepsilon : C \to C : \forall x \in C, \|F(x) - F_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$$

Théorème 2.7. *Soient C un sous ensemble fermé, bornée et convexe d'un espace de Banach E et $F : C \to C$ une application non-expansive alors :*

$$\inf\{\|x - F(x)\|, x \in C\} = 0.$$

Preuve

Soit F_ε définie comme dans le lemme (2.1), l'application F_ε est contractante et admet un unique point fixe noté
$x_\varepsilon = F_\varepsilon(x_\varepsilon)$

$$\begin{aligned}\|x_\varepsilon - F_\varepsilon(x)\| &= \|F_\varepsilon(x_\varepsilon) - F(x_\varepsilon)\| \\ &= \varepsilon\|z - F(x_\varepsilon)\| \\ &\leq \varepsilon diam(C)\end{aligned}$$

La conclusion se fait à partir de la propriété caractéristique de la borne inférieure.

Théorème 2.8. *Soit C un sous ensemble compact, convexe d'un espace de Banach E et $F : C \to C$ une application non expansive.*
Alors F admet un point fixe dans C.

Preuve :
Évidement la borne inférieure discutée dans le théorème précédent est atteinte.

$$\inf \{\|x - F(x)\|, x \in C\} = 0 \; telque \; \exists x_0 \in C : \|x_0 - F(x_0)\| = 0$$

C'est à dire, $\exists x_0 \in C \ : x_0 = F(x_0)$.

2.5 Alternative non linéaire de Leray -Schauder pour des application contractantes

Dans cette section on va voir que la propriété d'existence du point fixe pour les applications contractantes est invariante par homotopie.
Soit (E, d) un espace métrique complet et U un sous-ensemble ouvert de E.

Définition 2.1. *Soit $F : \overline{U} \to E$ et $G : \overline{U} \to E$ deux application contractantes,ou $\overline{U}$ est la fermeture de l'ouvert U dans E.*

On dit que F et G sont homotopes s'il existe une application
$H : \overline{U} \times [0,1] \to E$ *qui vérifié les propriétés suivantes :*

1. $H(\cdot, 0) = G$ *et* $H(\cdot, 1) = F$.
2. $x \neq H(x,t)$ *pour* $x \in U$ *et* $t \in [0,1]$.
3. *il existe une constante* $\alpha \in [0,1]$ *tellque :*

$$d(H(x,t), H(y,t)) \leq \alpha d(x,y), \forall x, y \in \overline{U} et \in [0,1]$$

4 il existe une constante $M \geq 0$ *tellque :*

$$d(H(x,t), H(x,s)) \leq M|t-s| \ , \ \forall x \in \overline{U} \ et \ t, s \in [0,1]$$

Théorème 2.9. *Soit (E,d) un espace métrique complet et U un ouvert de E, supposons que $F : \overline{U} \to E$ et $G : \overline{U} \to E$ soient deux applications contractantes homotopes et que G admet un point fixes dans $\overline{U}$.*
Alors F admet un point fixe dans $\overline{U}$.

Preuve :

Considérons l'ensemble $A = \{\lambda \in [0,1] : x = H(x, \lambda)\}$
pour un certain $x \in U$ *ou* H est une homotopie entre F et G décrit dans la définition précédente.
Notons que A est non vide, puisque G admet un point fixe $0 \in A$.
Nous allons montrer que A est a la fois ouvert et fermé dans le convexe $[0,1]$, ce qui entraine que $A = [0,1]$
par conséquent, F admet un point fixe.
Nous montrons d'abord que A est fermé dans [0,1] Pour avoir ce résultat,

soit

$$(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \; avec \; \lambda_n \to \lambda \in [0,1] \; quand \; n \to +\infty$$

Montrons que $\lambda \in A$.
Comme $\lambda_n \in A$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors il existe $x_n \in U$ tell que $x_n = H(x_n, \lambda_n)$, alors pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(H(x_n, \lambda_n), H(x_m, \lambda_m)) \\ &\leq d(H(x_n, \lambda_n), H(x_n, \lambda_m)) + d(H(x_n, \lambda_m), H(x_m, \lambda_m)) \\ &\leq M|\lambda_n - \lambda_m| + \alpha d(x_n, x_m) \end{aligned}$$

Ce qui donne que

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{M}{1-\alpha}|\lambda_n - \lambda_m|.$$

Comme $(\lambda_n)_n$ est une suite de Cauchy, alors $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy, et puisque X est complet alors il existe $x \in \overline{U}$ avec $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
De plus $x = H(x, \lambda)$ car

$$d(x_n, H(x, \lambda)) = d(H(x_n, \lambda_n), H(x, \lambda))$$

$$\leq M|\lambda_n - \lambda| + \alpha d(x_n, x).$$

Donc $\lambda \in A$, d'où A est fermé dans [0,1]

Maintenant, nous montrons que A est ouvert dans $[0,1]$.

Soit $\lambda_0 \in A$

Alors il existe $x_0 \in U$ tel que $x_0 = H(x_0, \lambda_0)$.

Fixons $\varepsilon > 0$ qui vérifie

$$\varepsilon \leq \frac{(1-\alpha)r}{M}$$

où $r < d(x_0, \partial U)$

ou $d(x_0, \partial U) = \{\inf d(x_0, x), x \in \partial U\}$

Fixons

$$\lambda \in]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[$$

Alors pour $x \in \overline{B(x_0, r)}$

$$\begin{aligned} d(x_0, H(x,\lambda)) &\leq d(H(x_0,\lambda_0)),(H(x,\lambda_0) + d(H(x,\lambda_0), H(x,\lambda)) \\ &\leq \alpha d(x_0, x) + M|\lambda - \lambda_0| \\ &\leq \alpha r + (1-\alpha)r = r. \end{aligned}$$

Alors pour chaque $\lambda \in]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[$, on obtient :

$$H(\cdot, \lambda) : \overline{B(x_0, r)} \to \overline{B(x_0, r)}$$

En appliquant le théorème (2.1), on déduit que $H(\cdot, \lambda)$ admet un point fixe dans $B(x_0, r)$.Donc $\lambda \in A$ pour tout $\lambda \in]\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon[$ c'est à dire A est un voisinage de λ_0.On conclut que A est un ouvert dans $[0,1]$.

Théorème 2.10. *Soient U un sous-ensemble ouvert d'un espace de Ba-*

nach X*.* $u \in U$ *et* $F : \overline{U} \to X$ *une contraction avec* $F(\overline{U})$ *borné .*

Alors l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :

A1. F *admet un point fixe dans* $\overline{U}$

A2. il existe $\lambda \in]0,1[$ *et* $u \in \partial U$ *tel que* $u = \lambda F(u)$ *.*

Chapitre 3

Applications

3.1 Equation différentielle fractionnaire

3.1.1 Étude de l'existence et l'unicité de solutions d'une équation différentielle fractionnaire

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de solutions pour une équation différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions intégrales aux limites.
Nos résultats sont basés sur l'application de deux théorèmes du point fixe.

– Le théorème du point fixe de Banach.
– Le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

3.1.2 Présentation du problème

Nous considérons l'équation différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions intégrales aux limites :

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)),\ t \in J = [0,1] \tag{3.1}$$

$$y(0) = \int_0^1 y(s)ds \tag{3.2}$$

$$y(1) = \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} y(s)ds \tag{3.3}$$

où $^{c}D^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α : $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \beta \leq 1$ et $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue

3.1.3 Préliminaires

Pour l'étude de nos problèmes, nous avons besoin de quelques définitions et propriétés de calcul fractionnaire.[7] [10]

Lemme 3.1. *[10] Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle*

$$^{C}D^{\alpha}h(t) = 0$$

admet une solution

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1} t^{n-1}$$

$c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$ *et* $n = [\alpha] + 1$, ($[\alpha]$ *est la partie entière de* α)

Lemme 3.2. *[10] soit $\alpha > 0$, alors*

$$I^{\alpha C}D^{\alpha}h(t) = h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1}t^{n-1} \tag{3.4}$$

où $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$ et $n = [\alpha] + 1$

Lemme 3.3. *Soit $1 < \alpha \leq 2$ et soit $h : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue .*
Alors, le problème au limites :

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = h(t), t \in J \tag{3.5}$$

$$y(0) = \int_0^1 y(s)ds \tag{3.6}$$

$$y(1) = \int_0^1 (1-s)^{\beta-1}y(s)ds \tag{3.7}$$

admet une solution unique définie par :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\alpha)}\int_s^1 (1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}h(r)dr \right.$$
$$\left. - \frac{(1-s)^{\alpha}}{\gamma_1\Gamma(\alpha)} + \left(\frac{2\gamma_2}{\gamma_1\alpha\Gamma(\alpha)} - \frac{2t}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right)(1-s)^{\alpha}\right] h(s)ds$$

D'où

$$\gamma_1 = \left(1 - \frac{1}{\beta}\right), \gamma_2 = \left(1 - \frac{1}{\beta(\beta+1)}\right)$$

Preuve :

En appliquant le lemme(3.2), le problème (3.5 - 3.7) se réduit à une équation intégrale équivalente :

$$\begin{aligned} y(t) &= I_0^{\alpha} h(t) + c_0 + c_1 t \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + c_0 + c_1 t \end{aligned} \tag{3.8}$$

En appliquant le lemme(3.2), le problème (3.5)-(3.7) se réduit à une équation intégrale pour certaines constantes $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.
En intégrant et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 y(s)ds &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} h(\tau) d\tau \right) ds + c_0 + \frac{c_1}{2} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \int_s^1 ((s-\tau)^{\alpha-1} h(\tau) d\tau) ds + c_0 + \frac{c_1}{2} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\frac{(s-\tau)^{\alpha}}{\alpha} \Big|_{\tau=s}^{\tau=1} \ ) \, h(s) ds + c_0 + \frac{c_1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha}}{\alpha} h(s) ds + c_0 + \frac{c_1}{2} \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{\alpha}}{\alpha \Gamma(\alpha)} h(\tau) d\tau + c_0 + \frac{c_1}{2} \tag{3.9}$$

En appliquant (3.8), on trouve :

$$y(0) = c_0$$

et par (3.9), nous arrivons à

$$y(0) = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} h(\tau)d\tau + c_0 + \frac{c_1}{2}$$

Alors

$$c_1 = -2\int_0^1 \frac{(1-\tau)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} h(\tau)d\tau \tag{3.10}$$

Maintenant, nous opérons (3.7) et (3.8), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-s)^{\beta-1} y(s)ds = {}& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_0^s (1-s)^{\beta-1}(s-r)^{\alpha-1}h(r)drds \\ &+ c_0\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}ds + c_1\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}sds\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}h(s)ds + c_0 + c_1 = {}& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_0^s (1-s)^{\beta-1}(s-r)^{\alpha-1}h(r)drds \\ &+ c_0\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}ds + c_1\int_0^1 (1-s)^{\beta-1}sds\end{aligned}$$

Après la simplifications, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}h(s)ds + c_0 + c_1 = {}& \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_s^1 (1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}h(r)drds \\ &+ \frac{c_0}{\beta} + \frac{c_1}{\beta(\beta+1)}\end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{\beta}\right)c_0+\left(1-\frac{1}{\beta(\beta+1)}\right)c_1 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_s^1(1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}h(r)drds\\ &- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}h(s)ds \qquad (3.11)\end{aligned}$$

Si on pose $\gamma_1=\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$, et$\gamma_2=\left(1-\frac{1}{\beta(\beta+1)}\right)$, alors (3.11) devient :

$$\begin{aligned}\gamma_1c_0+\gamma_2c_1 = &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_0^s(1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}h(r)drds\\ &-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}h(s)ds\end{aligned}$$

En utilisant (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{1}{\gamma_1\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_s^1(1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}h(r)drds-\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}h(s)ds\\ &+ \frac{2\gamma_2}{\gamma_1\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha}h(s)ds \qquad (3.12)\end{aligned}$$

Une combinaison de (3.8), (3.10) et (3.12), nous donne :

$$\begin{aligned}y(t) = &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}h(s)ds+\frac{1}{\gamma_1\mathit{\Gamma}(\alpha)}\int_0^1\int_s^1(1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}h(r)drds\\ &-\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}h(s)ds+\left[\frac{2\gamma_2}{\gamma_1\alpha\Gamma(\alpha)}-\frac{2t}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right]\int_0^1(1-s)^{\alpha}h(s)ds\end{aligned}$$

i.e.

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds + \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\alpha)}\int_s^1 (1-s)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}h(r)dr \right.$$
$$\left. - \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\gamma_1\Gamma(\alpha)} + \left(\frac{2\gamma_2}{\gamma_1\alpha\Gamma(\alpha)} - \frac{2t}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right)(1-s)^{\alpha}\right] h(s)ds$$

3.1.4 Résultat d'existence et d'unicité

Notre premier résultat d'existence est basé sur le théorème de l'application contractante de Banach.

Théorème 3.1. *Supposons que la fonction $f : [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue et qu'il existe une constante $k>0$ telle que*

$$(H_1) : |f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x-y|, t\in[0,1], x,y\in\mathbb{R}$$

Si $kA<1$, alors le problème aux limites (3.1)-(3.3) admet une solution unique, où

$$A = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{B(\beta,\alpha)}{|\gamma_1|(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+2)} + \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)} \tag{3.13}$$

Preuve :

On définit l'opérateur F, lorsque $t\in[0,1]$ par :

$$\begin{aligned}(Fy)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds + \int_0^1 \left[\frac{1}{\gamma_1\Gamma(\alpha)}\int_s^1 (1-r)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}dr \right. \\ &- \left. \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\gamma_1\Gamma(\alpha)} + \left(\frac{2\gamma_2}{\gamma_1\alpha\Gamma(\alpha)} - \frac{2t}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right)(1-s)^{\alpha}\right] f(s,y(s))ds \end{aligned} \tag{3.14}$$

Posons $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t,0)| = M$ et montrons que $FB_\rho \subset B_\rho$ où

$B_\rho = \{y \in C([0,1],\mathbb{R}) : \|y\| \leq \rho\}$ et $\rho \geq \dfrac{MA}{1-KA}$

Soient $y \in B_\rho, t \in [0,1]$ on a :

$$\begin{aligned}
\|(Fy)(t)\| &\leq \sup_{t\in[0,1]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds \right. \\
&+ \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))drds \\
&+ \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds + \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha} f(s,y(s)) \\
&+ \left. \frac{2t}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha} f(s,y(s))ds \right\} \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(|f(s,y(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)|\right) ds \right. \\
&+ \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \int_s^1 (1-r)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1} \left(|f(s,y(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)|\right) drd \\
&+ \frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \left(|f(s,y(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)|\right) ds \\
&+ \frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha} \left(|f(s,y(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)|\right) ds \\
&+ \left. \frac{2}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha} \left(|f(s,y(s)) - f(s,0)| + |f(s,0)|\right) ds \right\}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

On pose $u = \dfrac{s-r}{1-s}$,i.e, $(1-r) = (1-u)(1-s), dr = (1-s)du$

on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_s^1 (1-r)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}drds &= \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-1}ds\int_0^1 (1-u)^{\beta-1}u^{\alpha-1}du \\ &= \frac{B(\beta,\alpha)}{\alpha+\beta} \qquad (3.16)\end{aligned}$$

Par substitution dans (3.15), et après la simplifications, on trouve :

$$\begin{aligned}\|(Fy)(t)\| &\leq (k_\rho+M)\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{B(\beta,\alpha)}{|\gamma_1|(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+1)}\right. \\ &\quad \left.+\frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+2)}+\frac{2}{\Gamma(\alpha+2)}\right\} \qquad (3.17) \\ &\leq (k_\rho+M)A \leq \rho \qquad (3.18)\end{aligned}$$

C'est-à-dire $FB_\rho \subset B_\rho$

Maintenant, supposons que $x, y \in C([0,1],\mathbb{R})$ et $t \in [0,1]$, alors on obtient :

$$\begin{aligned}
\|(Fx)-(Fy)\| &\leq \sup_{t\in[0,1]}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds\right.\\
&+\frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)}\int_0^1\int_s^1 (1-r)^{\beta-1}(r-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|drds\\
&+\frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))ds\\
&+\frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1|\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds\\
&\left.+\frac{2t}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha}|f(s,x(x))-f(s,y(s))|ds\right\}\\
&\leq k\|x-y\|\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{B(\beta,\alpha)}{|\gamma_1|(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{|\gamma_1|\Gamma(\alpha+1)}\right.\\
&+\frac{2|\gamma_2|}{|\gamma_1\Gamma(\alpha+2)|}\\
&\left.+\frac{2}{\Gamma(\alpha+2)}\right\}\\
&= kA\|x-y\|
\end{aligned}$$

Puisque par hypothèse on a $0 < kA < 1$, alors F est une contraction. En utilisant le principe de l'application contractante de Banach, on déduit que le problème (3.1)-(3.3) admet une solution unique.

Exemple 3.1.1. *Considérons le problème aux limites suivant :*

$$^{C}D^{\frac{4}{3}}y(t) = \frac{1}{t^3+3}\frac{|x|}{2+|x|} + \ln^2(1+t) \tag{3.19}$$

$$y(0) = \int_0^1 y(s)ds \tag{3.20}$$

$$y(1) = \int_0^1 (1-s)^{\frac{-2}{3}} y(s)ds \tag{3.21}$$

Dans cet exemple,$\alpha = \frac{4}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$ *et* $f(t,x) = \frac{1}{t^3}\frac{|x|}{2+|x|} + \ln^2(1+t)$.
On a :

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{1}{t^3+3}\frac{|x|}{2+|x|} - \frac{1}{t^3+3}\frac{|y|}{2+|y|} \\ &= \frac{1}{t^3+3}\left(\frac{|x|}{2+|x|} - \frac{|y|}{2+|y|}\right) \\ &\leq \frac{1}{t^3+3}\left(\frac{|x|-|y|}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{6}|x-y| \end{aligned}$$

Alors, $K = \frac{1}{6}$. *Un calcul simple, nous donne* $KA = 0,65843166\ldots < 1$ *et par le théorème du point fixe de Banach, on déduit que le problème (3.19)-(3.21) admet une solution unique*

3.2 Application sur le théorème du point fixe pour les applications non-expansives

Théorème 3.2. *Soient* X *un espace de Banach uniformément convexe,* f *un élément de* X, *et* $T : X \to X$ *une application non-expansive. Alors l'équation abstraite :*

$$x - Tx = f \tag{3.22}$$

admet une solution x si et seulement si pour tout $x_0 \in X$, la suite itérative de Picard $(x_n)_n$ définie par :

$$x_{n+1} = Tx_n + f, n \in \mathbb{N}$$

est bornée.

Preuve :

Soit application $T_f : X \to X$ définie par

$$T_f(u) = Tu + f.$$

l'élément $u \in X$ est solution de (3.22) si et seulement si u est un point fixe de T_f. Il est clair que T_f est non-expansive. Supposons que T_f admet un point fixe $u \in X$.

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - u\| &= \|Tx_n + f - T_f(u)\| \\
&= \|T_f(x_n) - Tf(u)\| \\
&\leq \|x_n - u\|.
\end{aligned}$$

D'où $(x_n)_n$ est bornée.

Inversement supposons que $(x_n)_n$ est bornée.

Soit $d = diam(\{x_n, n \in \mathbb{N}\})$ et $B_d[x] = \{y \in X : \|x - y\| \leq d\}$, avec $x \in X$ $B_d[x]$ est convexe. En effet : soient $x_0, y_0 \in B_d[x]$ et $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
\|x-(\lambda x_0+(1-\lambda)y_0)\| &= \|\lambda x+(1-\lambda)x-\lambda x_0+(1-\lambda)y_0\| \\
&\leq \lambda\|x-x_0\|+(1-\lambda)\|x-y_0\| \\
&\leq d
\end{aligned}$$

donc $\lambda x_0+(1-\lambda)y_0 \in B_d[x]$. On pose

$$C_n = \bigcap_{i\in I} B_d[x_i] \tag{3.23}$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ ensemble C_n est non vide (car $x_n \in C_n$) et il est convexe. De plus,

$$T_f(Cn) \subset C_{n+1}. \tag{3.24}$$

En effet, soient $u \in C_n$ et $i \geq n+1$

$$\begin{aligned}
\|x_i - T_f(u)\| &= \|Tx_{i-1}+f-T_f(u)\| \\
&= \|T_f(x_{i-1})-T_f(u)\| \\
&\leq \|x_{i-1}-u\| \\
&\leq d
\end{aligned}$$

Donc $T_f(u) \in C_{n+1}$. Soit $C = \overline{U_{n\in\mathbb{N}} C_n}$, puisque la suite d'ensemble $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et C_n est convexe pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, alors C est convexe, borné. Puisque T_f est stable sur C (d'après 3.24), on peut appliquer le théorème de Browder et Gohde pour déduire que T_f admet un point fixe.

3.3 Application sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder pour les applications contractantes

3.3.1 Problème de Dirichlet homogène d'ordre deux

Soit le problème de Dirichlet :

$$P = \begin{cases} y'' & = f(t, y, y'), t \in [0, 1] \\ y(a) & = y(b) = 0 \end{cases}$$

Où $f : [a, b] \times \mathbb{R}^2$ est continue. Nous considérons, pour $\lambda \in [0, 1]$ la famille des problèmes :

$$(P)_\lambda \begin{cases} y'' & = \lambda f(t, y, y'), t \in [a, b] \\ y(a) & = y(b) = 0. \end{cases}$$

On définit l'opérateur

$$F : C^1([a, b], \mathbb{R}) \to C^1([a, b], \mathbb{R})$$
$$y \to F_y(t) = \int_a^b G(t, s) f(s, y(s), y'(s)) ds$$

où la fonction de Green est donnée par :

$$G(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{(t-a)(b-s)}{b-a}, a \leq t \leq s \leq b \\ -\dfrac{(s-a)(b-t)}{b-a}, a \leq s \leq t \leq b \end{cases}$$

Constatons que les points fixes F sont les solutions du problème (P).

Théorème 3.3. *Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application continue, vérifiant :*

$$\begin{cases} \textit{il existe un sous-ensemble} D \subseteq \mathbb{R}^2 \textit{et deux constantes } K_0 \textit{et } K_1 \\ \textit{tels que } |f(t,y,y') - f(t,z,z')| \leq K_0|y-z| + K_1|y'-z'|, \forall t \in [a,b] \times D \end{cases}$$

tel que

$$K_0 \frac{(b-a)^2}{8} + K_1 \frac{(b-a)}{2} < 1. \tag{3.25}$$

Supposons qu'il existe un ensemble ouvert borné de fonction, $U \subset C^1[a,b]$ avec $u \in U$ tel que

$$u \in \overline{U} \quad \textit{implique que tout } (u(t), u'(t)) \in D \quad \textit{pour tout} \quad t \in [a,b] \tag{3.26}$$

et

$$y \textit{ est solution de} (P)_\lambda \textit{ pour certain } \lambda \in]0,1[\textit{implique que } y \notin \partial U \tag{3.27}$$

Alors le problème (P) admet une unique solution dans U.

Preuve :

Soit $X = C^1([a,b], \mathbb{R})$ muni de la norme :
$\|y\| = K_0|y_0| + K_1|y_0'|$ où $|y_0| = \sup\limits_{t\in[a,b])} |y(t)|$ et $|y_0'| = \sup\limits_{t\in[a,b])} |y'(t)|$ L'application $F : \overline{U} \to C^1[a,b]$ est contractante. En effet, d'après les propriétés de la fonction f et la condition (3.26), pour tout y et z dans $\overline{U}$ nous avons

$$\begin{aligned}|(F_y - F_z)(t)| &= \left|\int_a^b G(t,s)[f(s,y(s),y'(s)) - f(s,z(s),z'(s))]ds\right| \\ &\leq \frac{(b-a^2)}{8}\|y-z\|\end{aligned}$$

puisque

$$\max_{t\in[a,b])} \int_a^b |G(t,s)|ds = \max_{t\in[a,b])} \frac{(b-t)(t-a)}{8} = \frac{(b-a)^2}{2}$$

Alors

$$|F_y - F_z| \leq \frac{(b-a)2}{8}\|y-z\|.$$

Ainsi que, pour tout y et z dans $\overline{U}$, nous avons
$|(F_y - F_z)'| \leq \dfrac{(b-a)}{2}\|y-z\|$,
puisque

$$\max_{t\in[a,b])} \int_a^b |G_t(t,s)|ds = \max_{t\in[a,b]} \frac{(b-t)^2(t-a)^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)}{2}$$

Par conséquent,

$$\|F_y - F_z\| \leq \left[K_0 \frac{(b-a)2}{8} + K_1 \frac{(b-a)}{2}\|y-z\|\right] \|y-z\| \forall y, z \in \overline{U} \tag{3.28}$$

En suite, la condition (3.25) entraine la contraction de F.
Finalement, la condition (3.27) entraine que la proposition (A2) dans le théorème(2.10) n'est pas vérifiée.
D'où l'existence et l' unicité d'une solution du problème (P).

Conclusion

Dans ce mèmoire on s'intéresse de l'étude de quelques théorèmes fondamentales du point fixe et leurs applications sous certaines conditions sur l'espace et l'application car elle est fournit les nécessaires outils pour avoir l'existence des solutions dans divers types d'équations et nombreux problèmes non linéaires.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, D. O.Regan and D. R. Sahu, Fixed point theory for lipschitzian-typemapping with applications, Vol 6. Cambridge universityPress Springer, 2000.

[2] R.P.Agarwal ;YongZhou ;YunyunHe .Existence of fractional neutral functional differential equations.Volume 59, Issue 3, February 2010, Pages 1095-1100

[3] J. Demailly, Analyse numérique et équations diférentielles, EDP Sciences, 2006.

[4] J. Dixmier, Topologie générale, collection Puf, presses universitaires de France, Paris(1981).

[5] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier Science B.V.,Amsterdam, 2006.

[6] Manuel Duarte Ortigueira, Fractional Calculus for Scientists and Engineers, Springer Science+Business Media B.V. 2011.

[7] I.Podlubny, Fractional differential equations. Mathematics in science and engineering,vol. 198. New York/London :Springer ;1999.

[8] D.R. Smart, Fixed point theory, Combridge Uni. Press, Combridge 1974

[9] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985

[10] S. Zhang , Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional equations, Elect. J. Diff. Equat. 2006(2006), No. 36 , pp. 1-12.32