République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulair
Ministère de l'**E**nseignement **S**upérieur et de
La **R**echerche **S**cientifique
Université Ibn Khaldoun – Tiaret –

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département des MATHEMATIQUES

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

DOMAINE : Mathématiques et Informatique

FILIERE : Mathématiques

SPECIALITE: Analyse Fonctionnelle et Equation Différentielle

Présenté par

Bouzara Malika

Matmour Kheira

Melaab Sana

Yekhtar Bariza

SUJET DU MEMOIRE :

Topologie algébrique et calcule du groupe fondamentale

Soutenu le 03 /07/2019 Devant Le Jury Composé de :

Mr : M.tayeb, MAA	Président
Mr : B.Mohammed, MAA	Encadreur
Mr : Z.Ismail, MAA	Examinateur

Année Universitaire : 2018/2019

Remerciement

★ J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu ALLAH qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier tout d'abord **Mr Mahrouz Tayeb** professeur à l'université de Ibn Khaldoun-Tiaret de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury

Je remercie également **Mr Zitouni Ismail** professeur à l'université de Ibn Khaldoun-Tiaret examinateur pour l'honneur qu'il nous avons accordé en acceptant de juger notre travail intitulé **Topologie algébrique et calcule du groupe fondamentale**.

Je remercie également mon encadreur **Mr Benhabi Mohammed** pour nous avoir dirigé tout le long de notre travail, ses critiques et ces conseils c'était précieux pour nous.

Et en fin j'adresse mes sincère remerciements à les parents, les amis et à tous qui sont contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.

★ ★ ★

Table des matières

Introduction Générale

La géométrie de situation «Analysis Situs» il s'agit de l'ancien nom donné à la topologie algébrique, choisi par Poincaré comme titre de son mémoire principal, datant de 1895. Contentons-nous de quelques indications succinctes sur l'origine de ce nom latin. Au moins deux innovations majeures en mathématiques ont marqué la fin 16 ème siècle et le début du 17 ème. D'une part, Viète invente en quelque sorte l'algèbre, en utilisant des lettres, comme x,y,... pour représenter des nombres variables. Il appelle ce nouveau domaine « l'analyse spécieuse ». D'autre part, Descartes invente les coordonnées qui portent son nom. Un point est décrit par deux nombres (x, y) et une courbe s'identifie à son équation : c'est le début de la géométrie algébrique. Vers 1670, Leibniz est profondément marqué par ces deux changements de points de vue, unifiant des parties différentes des mathématiques. Il rêve de faire la même chose avec des « formes » sans donner vraiment de sens à ce mot, mais que nous pourrions comprendre aujourd'hui comme « un espace topologique à homéomorphisme près ». Leibniz ne parviendra pas à grand-chose dans ce sujet mais il baptisera « Analysis Situs » cette nouvelle science, c'est Poincaré qui réalisera le rêve de Leibniz (même si, bien sûr, un certain nombre d'autres mathématiciens ont préparé le terrain avant Poincaré : Euler, Gauss, Cauchy, Riemann, Möbius, Listing, Betti, etc.).
Poincaré a souligné l'importance de la recherche dans les termes simples suivants :

- Henri Poincaré était très sensible à ce qu'on appellerait aujourd'hui la « diffusion des mathématiques ». Très souvent il accompagnait ses articles difficiles par d'autres articles destinés à un public plus large. Ses quatre livres de philosophie des sciences ont eu un succès incroyable. Sur cet aspect, nous recommandons l'article de L. Rollet intitulé Henri Poincaré - Vulgarisation scientifique et philosophie des sciences.

- En ce qui concerne la topologie algébrique, voici le début d'une conférence de Henri Poincaré, publiée dans son livre Dernières pensées, et intitulée Pourquoi l'espace a trois dimensions.
- Les géomètres distinguent d'ordinaire deux sortes de géométries, qu'ils qualifient la première de métrique et la seconde de projective.
- La géométrie métrique est fondée sur la notion de distance . Deux figures y sont regardées comme équivalentes, lorsqu'elles sont « égales » au sens que les mathématiciens donnent à ce mot.
- La géométrie projective est fondée sur la notion de ligne droite. Pour que deux figures y soient considérées comme équivalentes, il n'est pas nécessaire qu'elles soient égales, il suffit qu'on puisse passer de l'une à l'autre par une transformation projective, c'est-à-dire que l'une soit la perspective de l'autre.

Un des buts de la topologie algébrique est de fournir des outils algébriques pour l'étude des espaces topologiques. Étant donnés deux espaces topologiques X et Y, on s'intéresse à l'existence d'un homéomorphisme entre ces espaces, de sorte qu'à deux espaces homéomorphes soient associées deux structures isomorphes. il s'agit d'étudier des foncteurs depuis la catégorie des espaces topologiques sur une catégorie algébrique, comme les catégories de groupes, algèbres, groupoïdes, etc.
Parmi les invariants,

- Le groupe fondamental d'un espace topologique X en un point x c'est l'ensemble des classes d'homotopies des lacets de X de base x, la loi de composition interne étant la concaténation des lacets ;
- Les groupes d'homotopie supérieure d'un espace topologique X en un point x

.

- Les groupes d'homologie ou de cohomologie d'un espace topologique X .
- Les classes caractéristiques d'un fibré vectoriel réel, complexe, euclidien ou hermitien.

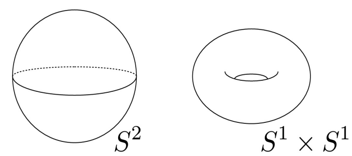
Si on n'arrive pas à trouver un homéomorphisme, comment peut-on procéder pour montrer que les espaces topologiques considérés ne sont pas homéomorphes ? Une des possibilités serait de trouver un invariant qui distingue ces deux espaces topologiques, c'est-à-dire, une application qui associe à tout espace topologique un élément d'un certain ensemble telle que cette application associe le même élément de l'ensemble à tous les espaces topologiques homéomorphes et prend des valeurs différentes sur X et Y.

Ainsi que la topologie algébrique est la construction et l'étude de foncteurs de la catégorie des espaces topologiques à valeurs dans celle des groupes (ou des modules sur un anneau). Le but est de classer (ou au moins comprendre), par exemple à homéomorphisme près, les espaces topologiques (au moins dans certaines familles) en leur associant des invariants de nature algébrique (nombres entiers, groupes, anneaux, etc).

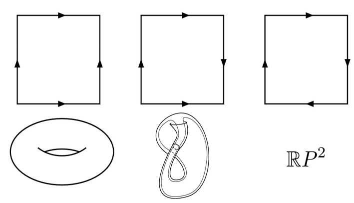
Pour cette raison l'algébrique est «au service» de la topologie.

Une grande partie du travail sera consacrée aux groupes (d'homotopie et d'homologie) qui, dans beaucoup de cas, permettent de distinguer des espaces topologiques.

Les groupes d'homotopie et les groupes d'homologie jouent un rôle extrêmement important en topologie algébrique et peuvent être utilisés dans l'étude de différents problèmes topologiques fondamentaux. Parmi ces problèmes, on peut mentionner, par exemple, celui de prolongement et celui de relèvement. Intuitivement, les variétés topologiques sont des espaces topologiques qui localement ressemblent à $\mathbb{R}^n$ pour la dimension 1 La seule variété connexe et compacte (à homéomorphisme près) est le cercle S^1, Les variétés connexes et compactes de dimension 2 sont appelés surfaces topologiques. Il y a une infinité de surfaces topologiques (même considérées à homéomorphisme près). Des exemples de surfaces topologiques sont fournis par la sphère S^2 et le tore $S^1 \times S^1$.



Les surfaces topologiques peuvent être décrites par une procédure d'identification (recollement) des côtés d'un polygone.
La figure suivante :



présente trois possibilités pour un recollement des côtés opposés d'un carré. Les flèches indiquent la façon de recoller deux côtés opposés. Par exemple, deux flèches de même direction sur deux côtés verticaux indiquent que ces côtés sont identifiés à l'aide d'une translation horizontale ; deux flèches de directions opposées sur deux côtés verticaux indiquent que ces côtés sont identifiés à l'aide de la symétrie centrale par rapport au centre du carré. Le premier recollement donne le tore, le deuxième produit la bouteille de **Klein**, et le troisième mène au plan projectif réel.
On peut également considérer des sphères avec plusieurs anses. Ces surfaces peuvent aussi être construites à l'aide de la procédure de recollement, mais on utilise des

polygones plus compliqués qu'un carré

historiques sur l'homotopie et l'homologie Nous concluons cette introduction en donnant une idée de l'origine historique de la notion d'homotopie et d'homologie. Les vrais débuts de l'homotopie et l'homologie peuvent être attribués à Henri.Poincaré, quand la topologie algébrique s'appelait sur les notions de «connexité», il a mis en évidence le concept de «bord», qui joue un rôle central en homologie.

Par contre l'homotopie est une déformation continue entre deux applications, notamment entre les chemins à extrémités fixées et en particulier les lacets. Cette notion topologique permet de définir des invariants algébriques utilisés pour classifier les applications continues entre espaces topologiques, dans le cadre de la topologie algébrique. L'homotopie induit une relation d'équivalence sur les applications continues, compatible avec la composition, qui mène à la définition de l'équivalence d'homotopie entre espaces topologiques.

L'homotopie fournit des informations sur la nature topologique d'un espace. Une bande circulaire d'un plan ne peut être équivalente, au sens de l'homéomorphisme, à un disque. Dans un disque, tout lacet est homotope à un point. Dans une bande circulaire, ce n'est pas le cas. Cette remarque est source de démonstrations, comme celles du théorème de d'Alembert-Gauss, du point fixe de Brouwer, de Borsuk-Ulam ou encore celle du théorème du sandwich au jambon qui précise par exemple que, trois solides mesurables et de mesures finies de l'espace usuel étant donnés, il existe un plan qui sépare chacun des solides en deux parties de mesures égales.

La connexité est un invariant topologique, au sens que l'image d'un espace connexe par une application continue est connexe (et donc si deux espaces topologiques n'ont pas le même nombre de composantes connexes, alors ils ne sont pas homéomorphes). Nous verrons d'ailleurs en le chapitre 3 que le 0-ème groupe d'homologie $H_0(X)$ d'un espace topologique X est le groupe abélien libre engendré par l'ensemble des composantes connexes par arcs de X. L'information apportée par $H_0(X)$ est donc essentiellement celle d'un nombre, le cardinal de l'ensemble des composantes connexes par arcs de X. Nous porterons une grande attention à un exemple important d'une telle construction $H(X)$: il s'agit des groupes (abéliens) d'homologie. Cette introduction n'est pas le lieu de donner une définition (qui, nous le verrons, n'est pas si facile). Contentons-nous d'un exemple. Si X est un tore de dimension 2, alors $H_1(X)$ sera le groupe abélien Z_2. Pourquoi ce 2 ? Simplement parce qu'on peut découper le tore le long d'un méridien et d'un parallèle, sans déconnecter le tore en plusieurs morceaux. Si X est une sphère de dimension 2, $H_1(X) = 0$, « parce que » toute courbe fermée simple tracée sur la sphère la découpe en deux morceaux.

Parfois cet outil algébrique est trop faible et ne permet pas de retrouver la topologie, mais parfois il est très puissant. Pour ne donner qu'un seul exemple, historiquement important, Poincaré associe un groupe, appelé groupe fondamental et noté ?1(X) ?1(X), à tout espace topologique connexe par arcs. Dans son dernier mémoire, consacré aux variétés de dimension 3, il formule la fameuse « conjecture de Poincaré » dont il dit qu'« elle l'entraînerait trop loin ». Il avait raison puisqu'elle ne fut démontrée qu'un siècle plus tard par Perelman. Voici cette conjecture, maintenant théorème, qui illustre le fonctionnement de la topologie algébrique , « Une variété compacte de dimension 3 dont le groupe fondamental est trivial est homéomorphe à la sphère de dimension 3. »

L'objectif de travail :

Ce mémoire se compose en trois chapitres. Dans **le premier Chapitre** nous avons mentionné les notions sur l'espace topologique, nous donnons les définition et quelque propositions (les ensembles fermes et ouverts, fermeture , intérieur, extérieur et frontière) que nous utilisons dans les autres chapitres, et dans la dernière section nous avons étudiés l'espace connexe. **Le deuxième chapitre** nous avons commencé par définir l'homotopie, et on a trois sections dans ce chapitre, nous avons étudiés les propriétés de chemins homotopes dans le première section, le groupe fondamentale dans le deuxième section , et le revêtement dans le dernière section et on achevé par le théorème de Van Kampen.

Pour **Le troisième chapitre** Nous avons mentionné l'homologie, et on a trois section, dans le première section nous avons étudiés le langage des catégories et foncteurs, complexes et homologie dans la deuxième section, et homologie singulière dans la troisième section.

L'objectif de tout cela est de calculer le groupe fondamentale par l'homotopie ceci est fait par deux méthode. Première méthode par les lacets et nous utilisons le théorème de van kampen, deuxième méthode par les revêtement, les groupe d'homotopie précédemment mentionnés sont faciles à définir, mais sont souvent difficiles à calculer. Pour résoudre ce problème nous utilisant les groupes d'homologie appliqués par le théorème d'excision, ils sont plus difficiles à définir, mais ils sont plus faciles à calculer.

Notations

τ	$Une\ famille\ de\ parties\ d'espace\ topologique.$
(X, τ)	$Couple\ d'un\ espace\ topologique.$
$\mathring{A}$	$L'intrieur.$
$\bar{\mathrm{A}}$	$L'adhrence.$
$ext(A)$	$L'extrieure\ de\ A.$
X/A	$Espace\ quotient\ de\ X\ par\ A.$
C_x	$La\ composante\ connexe\ de\ x.$
$f \sim g$	$f\ homotope\ \ g.$
h_t	$La\ restriction\ de\ l'homotopie.$
$[.]$	$Classe\ d'homotopie.$
$C(X, Y)$	$L'ensemble\ des\ applications\ continues\ entre\ X\ et\ Y.$
$\pi(X, Y)$	$L'ensemble\ des\ classes\ d'homotopie\ des\ applications\ entre\ X\ et\ Y.$
Id	$Identit.$
$\pi_1(X, x_0)$	$Le\ groupe\ fondamentale\ de\ X\ de\ base\ x_0.$
$\Omega_1(X, x_0)$	$L'ensemble\ des\ lacets\ de\ base\ x_0\ dans\ X.$

f_*	*Morphisme induite par* f.
pr	*Projection.*
S^1	*Cercle.*
exp	*Application exponentielle.*
$\tilde{\gamma}$	*Relvement de* γ.
$p\vert_V$	*La quotient* p *par* V.
Aut	*Automorphisme.*
$\tilde{X}$	*Topologie induite.*
$Ob(C)$	$D'objet\ de\ C.$
$Mor(X, Y)$	*Morphisme de* X *dans* Y.
Imf	$Image\ d'une\ application.$
$\ker f$	$Noyau\ d'un\ homomorphisme.$
$C_*(X, R)$	*Complexe de chaine de* X.
Z_i	*Module des cycles de degr* i.
B_i	*Module des bords de degr* i.
$H_i(C)$	*Homologie.*
Δ^n	*Simplexe standard.*
$\partial\Delta^n$	*Bord du simplexe standard.*
d_i	*Diffrentiel du complexe.*
$H_n(X)$	$Les\ groupes\ d'homologie\ singulire\ de\ X.$
σ	*Simplexe singulire.*
$\bigoplus$	*La somme directe.*
$C_*(X, A, R)$	*Complexe de chaine relative.*
$H_*(X, A, R)$	*Homologie relative.*

Chapitre 1

Notions sur les espaces topologiques

Dans ce chapitre, nous présentons les notions de base de la topologie.

1.1 Espaces Topologiques

1.1.1 Ensembles fermes, ouverts

Définition 1.1. *[5] Soit X un ensemble non vide. Une famille τ de parties de X est une topologie sur X si est seulement si vérifier les conditions suivantes :*

1. *X et $\emptyset$ appartiennent à τ.*
2. *La réunion d'une famille quelconque de parties de τ appartient à τ.*
3. *L'intersection de deux parties quelconques de τ appartient àτ.*

***Remarque** :*

- *Les éléments de τ sont appelées des élément ouvert.*
- *Le couple (X, τ) est appelé un espace topologique.*

Définition 1.2. *Soit X un espace topologique. Un sous-ensemble M de X est un ensemble fermé si seulement si son complémentaire M^c est un ensemble ouvert.*

***Remarque** : Une partie de X peut être ni fermée ni ouverte de même une partie de X peut ouverte et fermée à la fois.*

Définition 1.3. *Dans espace topologique X un sous-ensemble A est ouvert si seulement si son complémentaire est fermé*

Proposition 1.1. *La famille M des ensembles fermés de X possède les propriétés suivantes :*

1. *X et $\emptyset$ sont des ensembles fermés.*
2. *L'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermés.*
3. *La réunion de deux fermés quelconque est fermé.*

Preuve :

1. $\emptyset = C_X^X, X = C_X^{\emptyset}$.
2. Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de fermés

$$\cap_{i\in I} M_i = \cap_{i\in I} C_X^{A_i} = C_X^{\cup_{i\in I} A_i}$$

   est un fermés car $\cup_{i\in I} A_i$ est un ouvert.
3. $\cup_{i=1}^n M_i = \cup_{i=1}^n C_X^{A_i} = C_X^{\cap_{i=1}^n A_i}$ est fermé car $\cap_{i=1}^n A_i$ est ouvert.

Lemme : Si $(\phi_i)_{i\in I}$est une famille de topologie sur A alors $\phi = \cap_{i\in I}\phi_i$ est une topologie sur X.

Preuve : On a $X, \emptyset \in \phi_i$,$\forall$ i donc $X, \emptyset \in \phi$ si $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille d'élément de ϕ alors pour tout $i \in I$ et tout $\alpha \in A$ on a $\Omega_\alpha \in \phi_i$ et donc $\cup_{\alpha\in A}\Omega_\alpha \in \phi_i$ pour tout $i \in I$,D'où $\cup_{\alpha\in A}\Omega_\alpha \in \phi$ de même ϕ est stable par l'intersection finie.

1.1.2 Fermeture ou Adhérence

Définition 1.4. .

- *Dans un espace topologique X, On dit qu'un point x est Adhérent à un l'ensemble A si tout voisinage de x rencontre A.*
- *L'ensemble des points Adhérents à A est appelé L'adhérence ou Fermeture de A est noté par $\bar{A}$ c'est le plus petit ensemble fermé contenant A.*

Proposition 1.2. *Soit $\bar{A}$ l'adhérence, Alors :*

- *i) $\bar{A}$ est fermé.*
- *ii) Si F est fermé et contient A, alors $A \subset \bar{A} \subset F$.*
- *iii) A est fermé si seulement si $A = \bar{A}$.*

- A dense dans $\mathbb{R}$ si $\bar{A} = \mathbb{R}$.

- A est ouvert si est le complémentaire d'une partie fermé dans $\mathbb{R}$.

Preuve :

- i) $\bar{\text{A}}$ est fermé (par définition).
- ii) $A \subset \bar{\text{A}}$ et $A \subset F$ comme $\bar{\text{A}}$ est le plus petit ensemble fermé contenant A, Alors $A \subset \bar{\text{A}} \subset F$.
- iii) $\bar{\text{A}}$ est fermé par définition, Donc si $A = \bar{\text{A}}$ alors A est fermé, Réciproquement, Si A est fermé, Alors $\bar{\text{A}} \subset A$ (car $\bar{\text{A}}$est le plus petit fermé qui contient A) et on a par définition $A \subset \bar{\text{A}}$, donc $A = \bar{\text{A}}$.

1.1.3 Intérieure

Définition 1.5. *[5] Dans un espace topologique X, on dit qu'un point x est intérieur à un ensemble A si ce dernier est un voisinage de x .*
L'ensemble des points intérieur à A est appelé l'intérieur de A, c'est le plus grand ensemble ouvert contenu dans A est noté $\mathring{A}$ ou A^o.

1.1.4 Extérieure

Définition 1.6. *[5] L'extérieure de A noté ext(A), est l'intérieur du complémentaire de A int(A^c).*

1.1.5 Frontière

Définition 1.7. .

1. *On dit qu'un point x est un point frontière d'un ensemble A s'il est à la fois adhérent à A et A^c*

2. *L'ensemble des points frontière de A est appelée la frontière de A, c'est un ensemble fermé et est défini par l'intersection des adhérences de A et de A^c.*

Proposition 1.3. *Soit A est une partie se X. L'adhérence, l'intérieure, la frontière et l'extérieur de A vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$A = \bar{A}$ si seulement si A est fermé .*
2. *$A = \mathring{A}$ si seulement si A est ouvert.*
3. $\overline{X/A} = X/\mathring{A}$.
4. $ext(A) = \overset{\circ}{\widehat{(X/A)}} = X/\bar{A}$.
5. *fr(A)est fermé de X et $fr(A) = X/(\mathring{A} \cup ext(A))$.*
6. *$ext(A) \cap \mathring{A} = \phi$ et donc pour tout partie A de X, X est la réunion disjoint de A, de ext(A) et de fr(A).*

Preuve :

1. $\bar{A}$ est fermé par définition donc si $A = \bar{A}$, Alors A est fermé réciproquement si A est fermé alors $\bar{A} \subset A$ (car $\bar{A}$ est le plus petit fermé qui contient A), comme on a toujours $A \subset \bar{A}$ par définition de A on obtient $A = \bar{A}$.

2. $\mathring{A}$ est ouvert par définition donc si $A = \mathring{A}$ alors A est ouvert réciproquement si A est ouvert alors $A \subset \mathring{A}$ (car$\mathring{A}$ le plus grand ouvert qui contient A), Comme on a toujours $\mathring{A} \subset A$ (par définition)on a obtient $A = \mathring{A}$.
3. On a $\mathring{A} \subset A$ donc $X/A \subset X/\mathring{A}$ or $X/\mathring{A}$ est un fermé et $\overline{X/A}$ est le plus petit fermé de X contenant X/A donc $(X/\mathring{A}) \supset \overline{X/A} \supset X/A$ réciproquement, comme $X/(\overline{X/A})$est un ouvert de X contenu dans A, on a $\mathring{A} \supset X/(\overline{X/A})$ donc $X/\mathring{A} \subset (\overline{X/A})$ on en déduit l'égalité.
4. Soit $Y = X/A$ alors d'après l'égalité (3), on a $\overline{X/Y} = X/Y^o$, d'où $\overline{X/(X/A)} = X/\overset{\circ}{\widehat{(\mathrm{X/A})}}$ c'est-a -dire $\bar{\mathrm{A}} = X/\overset{\circ}{\widehat{(\mathrm{X/A})}}$, ce dont on déduit $\mathrm{X}/\bar{\mathrm{A}} = \overset{\circ}{\widehat{(\mathrm{X/A})}}$.
5. $fr(A) = \bar{\mathrm{A}} \cap \overline{X/A}$ donc fr(A)est fermé et $X/fr(A) = (X/\bar{\mathrm{A}}) \cup X/(\overline{X/A})$ d'où $X/fr(A) = \overset{\circ}{\widehat{(\mathrm{X/A})}} \cup (\mathrm{X}/\overset{\circ}{\widehat{(\mathrm{X/A})}}) = ext(A) \cup \mathring{A}$.
6. Comme $\mathring{A} \subset A$ et $ext(A) \subset (X/A)$ on a $\mathring{A} \cup ext(A) = \phi$, La dernière assertion découle alors de (5).

1.2 Espace Connexe

Définition 1.8. *[5] Soit X un espace topologique, Soient O_1 et O_2 deux ouverts, F_1 et F_2 deux fermés, on dit que X est un espace connexe si et seulement si vérifier les propriétés suivantes :*

- *i) X et $\emptyset$ sont les seuls parties ouverts et fermés de X.*
- *ii) Il n'existe pas de couple (O_1, O_2) d'ouverts non vides de X qui sont disjoints et de réunion égale à X.*
- *iii) Il n'existe pas de couple (F_1, F_2) de fermés non vides de X qui sont disjoints et de réunion égale à X.*

Proposition 1.4. *Soient (X, τ) un espace topologique et $A \subset X$. Si A est connexe et $A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est connexe.*

Preuve : Soit $f : B \to \{0, 1\}$ une application continue. Comme A est connexe et que f est continue sur A, on obtient que f est constante sur A. Comme f est continue sur B, L'ensemble $\{x \in B, f(x) \in f(A)\}$ est un fermé de B contenant A. Donc f est constante sur l'adhérence de A dans B qui est $B\cap$ $\bar{\mathrm{A}}$=B. On en déduit que f est constante sur B.

Proposition 1.5. *Soient (X, τ) un espace topologique, $I = [0, 1]$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X. On suppose que :*

i) Chaque A_i est connexe.

ii) Il existe un $i_0 \in I$ telle que $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, $\forall i \in I$ alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.

Preuve : Fixons un point $a \in \bigcap_{i\in I} A_i$

Si $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \{0, 1\}$ est une application continue, alors $f_{|A_i}$ est continue, et donc constante par connexité de A_i. Comme $a \in A_i$ pour tout $i \in I$, on a $f(x) = f(a)$ pour tout $x \in A_i$.

On en déduit que f est constante égale à $f(a)$ sur $\bigcup_{i\in I} A_i$.

Proposition 1.6. *Soient A, B deux parties connexes de X telles que $\bar{A}\cap B \neq \emptyset$. Alors $A \cup B$ est connexe.*

Preuve : On pose $C = A\cup(\bar{\mathrm{A}}\cap B)$. Donc $A \subset C \subset \bar{\mathrm{A}}$.

Alors C est connexe et $C\cap B \neq \emptyset$. D'après le proposition président $C\cup B$ est connexe.

Mais $C \cup B = A \cup B\cup(\bar{\mathrm{A}}\cap B) = A \cup B$. Donc $A \cup B$ est connexe.

1.2.1 composant connexe

Définition 1.9. *[5] Soit $x \in X$ point d'un espace topologique. La composante connexe de x est $C_x = \cup\{A; Aconnexe, Acontientx\}$.*

Une partie A de X est une composante connexe s'il existe un x telle que $A = C_x$.

1.2.2 Connexité par arcs

Définition 1.10. *[5] Soit X un espace topologique. On dit que X est connexe par arcs si et seulement si pour tout couple (a, b) de points de X, il existe un chemin continue reliant a et b dans X, c'est-à-dire il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \to X$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.*

Proposition 1.7. *Un espace connexe par arcs est connexe.*

Preuve : Soit X connexe par arcs. On fixe un $a \in X$. Pour chaque $x \in X$, soit $f_x \in C([a_x, b_x], X)$ telle que

$$f_x(a_x) = a \qquad et \qquad f_x(b_x) = x.$$

Alors $A_x = f_x(I_x)$ est un connexe de X.
De plus, on a $A_x \cap A_a \neq \emptyset$. Il s'ensuit que $\bigcup_{x \in X} A_x$ est connexe. par ailleurs, on a $x \in A_x$, $x \in X$
Donc $\bigcup_{x \in X} A_x = X$.

1.2.3 Simplement Connexe

Définition 1.11. *Soit X un espace topologique et A une partie de X. On dit que A est simplement connexe de X si et seulement si A est la muni topologie induite par celle de X est connexe.*

Chapitre 2

Homotopie

Le but du chapitre 2 est de calculer le groupe fondamentale par le théorème de Van Kampen. pour avoir cette dernier résultat, il faut quelques propriétés qui sont utiles après. Dans ce chapitre on va étudié l'homotopie qui détermine les classes d'équivalences d'espace topologique sous une relation d'équivalence de la topologie algébrique. On a commencer par la définition d'homotopie et les espaces contractiles, après une première section est réserver pour les propriétés des chemins homotopes qui contienne la définition du chemin constant, inverse, composé et la composition de n chemins et par suite on termine par les classes d'équivalences des chemins homotopes . La deuxième section s'intéresse au définition du groupe fondamentale qui contienne deux sous section, application continue et groupe fondamentale et les propriétés du groupe fondamentale , et on termine la première sou-section par dire que le groupe fondamentale d'une équivalence homotope est un isomorphisme de groupe et la deuxième sou-section par les rétractes et produit et même le groupe fondamentale du cercle.

Une première résulta est le théorème de Van Kampen faible. La dernière partie du chapitre étudie les Homéomorphisme locaux, revêtement, homéomorphisme de revêtement, relèvement des applications, revêtement et groupe fondamentales, les résultats fondamentales de relèvement des applications, les deux types de revêtement et bien sur en achève le chapitre par la version complète du théorème de Van Kampen qui été publier 1933 dans American journal of mathématic qu'il s'intéresse à d'écrire le groupe fondamentale de deux variétés.

Définition 2.1. *[4] Soient X, Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ deux applications continues et $I = [0,1]$.*
On appelle une homotopie entre f et g une application continue

$$H : X \times I \to Y$$

telle que

$$H(x,0) = f(x) \qquad et \qquad H(x,1) = g(x)$$

pour tout point $x \in X$.
S'il existe une telle homotopie entre f et g, on dira que ces applications sont homotopes, on peut le noter $f \sim g$.
Pour tout $x \in X$ et $t \in I$, on pose $H(x,t) = h_t(x)$. Cette notation symbolise un point de vue important sur H pour chaque $t \in I$ fixé, on a une application $x \mapsto h_t(x)$, et l'homotopie H peut être considérée comme famille d'applications $h_t : X \to Y$ indexées par $t \in I$. Pour tout $t \in I$ Chaque application h_t est continue(h_t est une restriction de l'homotopie H sur la fibre $X \times \{t\} \subset X \times I$).

Proposition 2.1. *La relation f est homotope à g est une relation d'équivalence dans d'ensembles des applications continues de X dans Y.*
On appelle alors classe d'homotopie d'applications de X dans Y les classes d'équivalences de cette relation.
On dit que deux applications sont homotopes si elle sont la même classe d'homotopie, on la note par $[f]$.

Preuve :

- Cette relation est réflexive : Pour tout application continue
  $f : X \to Y$, $H : (x,t) \to f(x)$ est une homotopie de f à f
- Elle est symétrique : Si H est une homotopie de f à g
  $H' : (x,t) \to H(x, 1-t)$ est une homotopie de g à f
- Elle est enfin transitive : Si H est homotopie de f à g et H' une homotopie de g à g' l'application $H'' : X \times I \to y$ défini par :

$$H''(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ H'(x,2t-1) & \text{pour} \quad 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

  est homotopie de f à g'

Remarque 2.1. *L'ensemble $C(X,Y)$ des applications continues entre X et Y sera partitionné en classes d'équivalences. Ces classes s'appellent les classes d'homotopie des applications de X dans Y. L'ensemble des classes d'homotopie des applications entre X et Y est noté $\pi(X,Y)$.*

Corollaire 2.1. *La relation d'homotopie est compatible avec la composition des applications continues c'est-à-dire*

$$f \sim g \quad \textit{et} \quad f' \sim g'$$

alors

$$f \circ f' \sim g \circ g'$$

.

Définition 2.2. *[4] Deux espaces X et Y ont même type d'homotopie s'il existe une application continue $f : X \to Y$ et une application continue $g : Y \to X$ telle que les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ soient respectivement homotopes aux applications identiques* *de X et de Y c'est-à-dire*

$$g \circ f \sim Id_X \quad et \quad f \circ g \sim Id_Y$$

.

Définition 2.3. *[2] Un espace topologique X est contractile s'il est homotopiquement équivalent à un point c'est-à-dire $Id : X \to Y$ est homotope à une fonction constante.*

Définition 2.4. *[2] Soient X et Y deux espaces topologiques, $I = [0, 1]$, $A \subset X$ un sous-espace topologique, f et g deux applications définie par $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$. On dit que f et g sont homotopes relativement à A s'il existe une homotopie $H : X \times I \to Y$ de f et g telle que $H(a, t) = f(x) = g(x)$ pour tout $a \in A$ et $t \in I$. La relation d'homotopie relativement à A est une relation d'équivalence.*
Les classes d'équivalences de cette relation s'appellent classe de A homotopie des applications de X dans Y.

2.1 Propriétés de chemins homotopes

Définition 2.5. *[2] Soient X un espace topologique, $x, y \in X$. Un chemin dans X est une application continue γ du segment $I = [0, 1]$ dans X.*
On dit dans ces conditions que $x = \gamma(0)$ est l'origine du chemin γ et $y = \gamma(1)$ son extrémité. On dit aussi que γ est un chemin joignant x à y dans X. On note $[\gamma]$ la classe d'homotopie de γ.

Définition 2.6. *[2] Sous les conditions de la définition 2.5, on a*

1. *Pour tout point x de X on désigne par γ_x le chemin constant d'origine et d'extrémité x défini par $\gamma_x = x$ pour tout $x \in X$.*

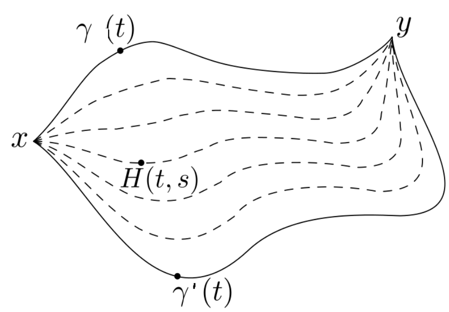
2. *Si $\gamma : I \to X$ est un chemin joignant x à y, on désigne par $\overline{\gamma}$ le chemin d'origine y et d'extrémité x défini par $\overline{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$, $t \in I$. le chemin inverse noté par $\overline{\gamma}$.*

3. *Si γ est un chemin joignant x à y et γ' un chemin joignant y à z, $z \in X$. On désigne par $\gamma\gamma'$ le chemin d'origine x et d'extrémité z défini par*

$$\gamma\gamma'(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \textit{pour} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma'(2t-1) & \textit{pour} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\gamma\gamma'$ est le chemin composé de γ et γ'.

Définition 2.7. *Deux chemin γ et γ' dans X ayant même origine x et même extrémité y sont homotopes si les applications γ et γ' sont homotopes relativement aux extrémités $\{0, 1\}$ du segment $I = [0, 1]$.*



Autrement dit γ et γ' sont homotopes s'il existe une application continue H du carre $I \times I$ dans X ayant les propriétés suivantes :

a) $H(t, 0) = \gamma(t)$ *pour tout* $t \in I$

b) $H(t, 1) = \gamma'(t)$ *pour tout* $t \in I$

c) $H(0, s) = x$ *pour tout* $s \in I$

d) $H(1, s) = y$ *pour tout* $s \in I$

Proposition 2.2. *La relation d'homotopie est une relation d'équivalence dans l'ensemble des chemins joignant x à y, on appelle alors classes d'homotopie de chemins d'origine x et d'extrémité y les classes d'équivalence de cette relation.*

Lemme 2.1. *Soit $\gamma : I \to I$ un chemin dont le point de départ coïncide avec 0 et le point d'arrivée coïncide avec 1. Alors, le chemin est homotope au chemin $Id_I : I \to I$.*

Théorème 2.1. *[2] Soient γ et φ deux chemins homotopes joignant x à y, et soient γ' et φ' deux chemins homotopes joignant y à z, alors :*

- *i) Les chemins inverses $\overline{\gamma}$ et $\overline{\varphi}$ sont homotopes.*
- *ii) Les chemins composés $\gamma\gamma'$ et $\varphi\varphi'$ sont homotopes.*

On peut donc dire que la relation d'homotopie est compatible avec le passage à l'inverse et la composition des chemins.

preuve : Soit $F(respG)$ une homotopie de γ à φ (resp de γ' à φ').
Soit $(s,t) \in I \times I$ l'application $(t,s) \to F(1-t,s)$ est une homotopie de γ' à φ' l'application $H : I \times I \to X$ définie par :

$$H(t,s) = \begin{cases} \text{F(2t,s)} & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ \text{G(2t-1,s)} & \text{pour} \quad 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

Comme F une homotopie de γ à φ et G homotopie de γ' à φ' alors

$$\begin{array}{lll} F(t,0) = \gamma(t) & \text{pour} & t \in I \\ F(t,1) = \varphi(t) & \text{pour} & t \in I \\ \text{F(0,s)}=x & \text{pour} & s \in I \\ \text{F(1,s)}=y & \text{pour} & s \in I \end{array} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} &G(t,0)=\gamma'(t) \quad \text{pour} \quad t\in I \\ &G(t,1)=\varphi'(t) \quad \text{pour} \quad t\in I \\ &\text{G(0,s)}=y \quad \text{pour} \quad s\in I \\ &\text{G(1,s)}=z \quad \text{pour} \quad s\in I \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pour montrons que les chemins composés $\gamma\gamma'$ et $\varphi\varphi'$ sont homotopes il suffit de vérifier :

$$\begin{aligned} &H(t,0)=\gamma\gamma'(t) \quad \text{pour} \quad t\in I \\ &H(t,1)=\varphi\varphi'(t) \quad \text{pour} \quad t\in I \\ &H(0,s)=x \quad \text{pour} \quad s\in I \\ &H(1,s)=z \quad \text{pour} \quad s\in I \end{aligned}$$

D'après (2.1),(2.2) et (2.3) nous trouvons que

$$H(t,0)=\begin{cases} \text{F(2t,0)}=\gamma(t) \\ \text{G(2t-1,0)}=\gamma'(2t-1) \end{cases} =\gamma\gamma'(t)$$

$$H(t,1)=\begin{cases} \text{F(2t,1)}=\varphi(t) \\ \text{G(2t-1,1)}=\varphi'(2t-1) \end{cases} =\varphi\varphi'(t)$$

$$\begin{aligned} &\text{H(0,s)= F(0,s)=x} \\ &\text{H(1,s)= G(1,s)=z} \end{aligned}$$

Donc les chemins composés $\gamma\gamma'$ et $\varphi\varphi'$ sont homotopes.

montrons que $\overline{\gamma}(t)$ et $\overline{\varphi}(t)$ sont homotopes

On a

$$\gamma(1-t)=\overline{\gamma}(t) \quad et \quad \varphi(1-t)=\overline{\varphi}(t)$$

pour $t\in I=[0,1]$ l'application F est homotopie de γ à φ il reste vrais pour $1-t$ on utilisant le changement de variable $1-t$ on trouve :

$$\begin{array}{ll} \gamma \sim \varphi & \Rightarrow \overline{\gamma} \sim \overline{\varphi} \\ F(t,0) = \gamma(t) & \Rightarrow F(1-t,0) = \gamma(1-t) = \overline{\gamma}(t) \\ F(t,1) = \varphi(t) & \Rightarrow F(1-t,1) = \varphi(1-t) = \overline{\varphi}(t) \\ F(0,s) = x & \Rightarrow F(0,1-s) = y \\ F(1,s) = y & \Rightarrow F(1,1-s) = x \end{array}.$$

Nous concluons que $\overline{\gamma}(t)$ et $\overline{\varphi}(t)$ sont homotopes

Théorème 2.2. *[2] Soient γ_1 un chemin joignant x à y, γ_2 un chemin joignant y à z et γ_3 un chemin joignant z à u les chemins $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ et $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ sont homotopes.*

preuve : Soit $(s,t) \in I \times I$, F l'application de $I \times I :\rightarrow X$ définie par :

$$F(t,s) = \begin{cases} \gamma_1(4t/1+s) & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq (1+s)/4 \\ \gamma_2(4t-s-1) & \text{pour} \quad (1+s)/4 \leq t \leq (2+s)/4 \\ \gamma_3(4t-s-2/2-s) & \text{pour} \quad (2+s)/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Pour monter que les chemins $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ et $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ sont homotopes il suffit de vérifiait que

$$\begin{array}{rcl} F(t,0) & = & [(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3](t). \\ F(t,1) & = & [\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)](t). \\ F(0,s) & = & x. \\ F(1,s) & = & u. \end{array}$$

$$F(t,0) = \begin{cases} \gamma_1(4t) & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1/4 \\ \gamma_2(4t-1) & \text{pour} \quad 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_3(2t-1) & \text{pour} \quad 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \gamma_1\gamma_2(2t) & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_3(2t-1) & \text{pour} \quad 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= [(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3](t)$$

$$F(t,1) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(4t-2) & \text{pour} \quad 1/2 \leq t \leq 3/4 \\ \gamma_3(4t-3) & \text{pour} \quad 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$F(t,1) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2(2t-1)) & \text{pour} \quad 1/2 \leq t \leq 3/4 \\ \gamma_3(2(2t-1)-1) & \text{pour} \quad 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2\gamma_3(2t-1) & \text{pour} \quad 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= [\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)](t)$$

$$F(0,s) = \gamma_1(0) = x$$

$$F(1,s) = \gamma_3(1) = u$$

par conséquent F est une homotopie de $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ à $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$

Remarque 2.2. *On pourra dire que la composition des chemins qui n'est pas associative est « homotopiquement associative ».*

On peut généraliser les deux théorèmes précédant par une proposition quand l'admette sans démonstration

Proposition 2.3. *[2] Soit (γ_i), $i = 1, ..., n$ une famille de chemins dans X tels que* *l'origine de γ_{i+1} soit extrémité de (γ_i), $1 \leq i \leq n-1$, et soit*

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = 1$$

une suite croissante de nombres de I. Le chemin γ défini par

$$\gamma(t) = \gamma_i(\frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}) \quad pour \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i$$

est homotope au chemin composé $\gamma_1(\gamma_2(\gamma_3(...)))$. De plus si φ_i, $i = 1, ..., n$, est un chemin homotope à γ_i le chemin φ défini par

$$\varphi(t) = \varphi_i(\frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}) \quad pour \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i$$

est homotope à γ.

Proposition 2.4. *[4] Soit X un espace topologique et $x \in X$, Considérons des chemins γ et γ' dans X tels que $\gamma(1) = x = \gamma(0)$. Alors*

$$[\gamma][\gamma_x] = [\gamma], \quad [\gamma_x][\gamma'] = [\gamma']$$

.

Preuve : Considérons l'application $\varphi : I \to I$ définie par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

et l'application $\varphi' : I \to I$ définie par :

$$\varphi'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

les applications γ et γ' sont continues et pour tout $t \in I$, On a :

$$\gamma\gamma_x(t) = \gamma(\varphi(t)).$$

$$\gamma_x\gamma' = \gamma'(\varphi'(t)).$$

Pour tout $t \in I$ on a

$$\gamma(\varphi(1)) = \begin{cases} \gamma(2) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Donc $\gamma(\varphi(1)) = \gamma(1) = x$

$$\gamma(\varphi'(0)) = \begin{cases} \gamma'(0) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma'(-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Donc $\gamma(\varphi'(0)) = \gamma'(0) = x$

On conséquent

$$[\gamma][\gamma_x] = [\gamma]$$

et

$$[\gamma_x][\gamma'] = [\gamma']$$

Proposition 2.5. *Soit X un espace topologique, et soit γ un chemin dans X. On pose $x = \gamma(0)$ et $y = \gamma(1)$. Alors*

$$[\gamma][\overline{\gamma}] = [\gamma_x], \quad [\overline{\gamma}][\gamma] = [\gamma_y].$$

Preuve : Considérons l'application $\varphi : I \to I$ définie par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2t & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

L'application φ est continue et pour tout $t \in I$, On a

$$\gamma\overline{\gamma}(t) = \gamma(\varphi(t)).$$

$$\overline{\gamma}\gamma(t) = \overline{\gamma}(\varphi(t)).$$

Pour tout $t \in I$ on trouve
$\gamma(\varphi(0)) = \gamma(0) = x$
$\gamma(\varphi(1)) = \gamma(0) = x$
On a $\gamma(1-t) = \overline{\gamma}(t)$, Donc $\overline{\gamma}(\varphi(t)) = \gamma(1-\varphi)$
$\overline{\gamma}(\varphi(0)) = \gamma(1-\varphi(0)) = \gamma(1) = y$
$\overline{\gamma}(\varphi(1)) = \gamma(1-\varphi(1)) = \gamma(1) = y$
Nous conclurons que $[\gamma][\overline{\gamma}] = [\gamma_x]$ et $[\overline{\gamma}][\gamma] = [\gamma_y]$

Théorème 2.3. *[2]Soit γ un chemin joignant x à y les chemins $\gamma\overline{\gamma}$ et $\overline{\gamma}\gamma$ sont respectivement homotopes aux chemins constants γ_x et γ_y.*
On pourra donc dire que $\overline{\gamma}$ est «homotopiquement inverse» de γ.

preuve : Soit F l'application de $I \times I :\to X$ définie par :

$$F(t,s) = \begin{cases} \text{x} & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq s/2 \\ \gamma(2t-s) & \text{pour} \quad s/2 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma(2-2t-s) & \text{pour} \quad 1/2 \leq t \leq (2-s)/2 \\ \text{x} & \text{pour} \quad (2-s)/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$F(t,0) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma(2-2t) & \text{pour} \quad 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= (\gamma\overline{\gamma})(t).$$

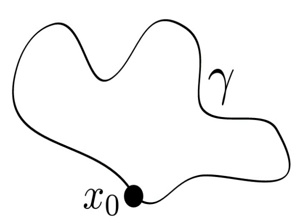
et

$$F(t,1) = F(0,s) = F(1,s) = x.$$

par conséquent F est une homotopie de $\gamma\overline{\gamma}$ à γ_x, On construit de même une homotopie de $\overline{\gamma}\gamma$ à γ_y.

2.2 Groupe Fondamentale

Définition 2.8. *[2] [4] Soit X un espace topologique non vide, et soit $x_0 \in X$ un point. Un lacet de base x_0 est un chemin $\gamma : I \to X$ telle que le point de départ et le point d'arrivé de γ coïncident avec x_0.*
Notons $\Omega_1(X, x_0)$ l'ensemble des lacets de base x_0 dans X, et notons $\pi_1(X, x_0)$ l'ensemble des classes d'homotopie des lacets de base x_0. Le groupe $\pi_1(X, x_0)$ s'appelle le groupe fondamentale de X de base x_0



Proposition 2.6. *Pour tout espace topologique non vide X et pour tout point $x_0 \in X$, l'ensemble $\pi_1(X, x_0)$ muni de l'opération de multiplication de chemin est un groupe.*

Preuve : D'après (le théorème 2.2), l'opération de multiplication sur $\pi_1(X, x_0)$ est associative. Notons γ_{x_0} le lacet constant de base x_0, c'est-à-dire
le chemin $\gamma : I \to X$ tel que $\gamma(t) = x_0$ pour tout $t \in I$, La Proposition (2.3) implique que la classe d'homotopie $\varepsilon = [\gamma_{x_0}]$ de γ_{x_0} vérifie les relations suivantes pour tout

$\alpha \in \pi_1(X, x_0)$:

$$\varepsilon\alpha = \alpha = \alpha\varepsilon.$$

De plus, pour toute classe $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, On peut choisir un représentant γ de α et considérer la classe d'homotopie $[\overline{\gamma}]$ du lacet inverse $\overline{\gamma}$. On pose $\alpha^{-1} = [\overline{\gamma}]$. D'après la proposition (2.4), On a

$$\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon \quad et \quad \alpha^{-1}\alpha = \varepsilon$$

Le groupe $\pi_1(X, x_0)$ s'appelle le groupe fondamental de X de base x_0.

Proposition 2.7. *Soit X un espace topologique non vide, et soit $\gamma : I \to X$ un chemin. On pose $x = \gamma(0)$ et $y = \gamma(1)$. Alors, l'application $F_\gamma : \pi_1(X, y) \to \pi_1(X, x)$ définie par*

$$\alpha \mapsto [\gamma]\alpha[\overline{\gamma}]$$

est isomorphisme.

Preuve : Montrons que F_γ est un morphisme de groupe. Pour deux éléments quelconques α_1 et α_2 de $\pi_1(X, Y)$, on a

$$\begin{aligned}
F_\gamma([\alpha]) &= [\gamma][\alpha][\overline{\gamma}] \\
F_\gamma([\alpha_1][\alpha_2]) &= [\gamma][\alpha_1][\alpha_2][\overline{\gamma}] \\
&= ([\gamma][\alpha_1][\overline{\gamma}])([\gamma][\alpha_2][\overline{\gamma}]) \\
&= F_\gamma([\alpha_1])F_\gamma([\alpha_2]) \\
F_{\gamma'}([\alpha_1]) &= [\gamma'][\alpha_1][\overline{\gamma'}] \\
&= [\gamma'\overline{\gamma}][\gamma][\alpha_1][\overline{\gamma}][\overline{\gamma}\gamma'] \\
&= [\gamma'\overline{\gamma}]F_\gamma([\alpha_1])[\gamma'\overline{\gamma}]^{-1}
\end{aligned}$$

(car $\quad F_{\overline{\gamma}} = (F_\gamma)^{-1}$)

En particulier si $\pi_1(X,x)$ et commutatif l'isomorphisme F_γ de $\pi_1(X,y)$ sur $\pi_1(X,x)$ est indépendant du choix du chemin γ joignant x à y.

Corollaire 2.2. *Soit X un espace topologique non vide et connexe par arcs, et soient x et y deux points de X. Alors, les groupes $\pi_1(X,x)$ et $\pi_1(X,y)$ sont isomorphes.*

Ils sont de plus canoniquement isomorphes si $\pi_1(X,x)$ est commutatif.
Lorsque X est connexe par arcs tous ces groupes fondamentaux sont isomorphes. Bien qu'en générale ces groupes ne soient pas canoniquement isomorphes on parle cependant du groupe fondamental de X, que l'on désigne par $\pi_1(X)$ (sans référence au point de base).
Remarque : Le groupe $\pi_1(X,x)$ est appelé groupe fondamental, ou sous-groupe du groupe de Poincaré ou groupoïde $\pi_1(X)$.

2.2.1 Application Continue et Groupe Fondamentale

Définition 2.9. *[2]Soient X et Y deux espaces topologiques non vide, $x \in X$ et $y \in Y$, et $\alpha \in \pi_1(X,x)$, Soit f une application continue $f : X \to Y$, Si γ est un chemin joignant x à y dans X, $f \circ \gamma$ est un chemin joignant $f(x)$ à $f(y)$ dans Y. La composition $\alpha \mapsto f \circ \gamma$ est alors compatible :*

i) Avec l'homotopie des chemins : si $[\gamma] = [\gamma'][f \circ \gamma] = [f \circ \gamma']$.

ii) Avec la composition des chemins : $f \circ (\gamma\gamma') = (f \circ \gamma)(f \circ \gamma')$.

L'application f induit donc une application $f_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$ telle que

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \gamma].$$

Proposition 2.8. *L'application $f_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$ est un morphisme de groupes.*

Preuve : Soient α_1 et α_2 deux éléments de $\pi_1(X, x)$ et γ et γ' deux chemins des représentation de α_1 et α_2, respectivement, alors

$$\begin{aligned} f_*(\alpha_1\alpha_2) &= [f \circ (\gamma\gamma')] \\ &= [(f \circ \gamma)(f \circ \gamma')] \\ &= f_*(\alpha_1)f_*(\alpha_2). \end{aligned}$$

On dit que f_* est le morphisme induit par f.

Proposition 2.9. *Soient X, Y et Z des espaces topologiques non vides, soit $x \in X$ un point et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications continues. Alors,*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

.

Preuve : Soit $\alpha \in \pi_1(X, x)$ et γ un chemin On a

$$\begin{aligned} (g \circ f)_*(\alpha) &= [(g \circ f) \circ \gamma] \\ &= [(g \circ \gamma)(f \circ \gamma)] \\ &= g_*(\alpha)f_*(\alpha). \end{aligned}$$

De plus, si $Id : X \to X$ est l'identité, alors $Id_x : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x)$ est aussi l'identité.

Théorème 2.4. *[2]Soient X et Y deux espaces topologiques, $f : X \to Y$ une équivalence d'homotopie, alors pour tout $x \in X$, $\pi_1(f) : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ est un isomorphisme de groupe .*

Corollaire 2.3. *Si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme, alors pour tout point*

$x \in X$, le morphisme induit $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ est un isomorphisme de groupes ayant $(f^{-1})_*$ pour inverse.

Preuve : L'application $f^{-1} \circ f$ est l'identité $Id : X \to X$, donc le morphisme $(f^{-1})_* \circ f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x)$ est l'identité. De façon similaire

$$f_* \circ (f^{-1})_* : \pi_1(Y, f(x)) \to \pi_1(Y, f(x))$$

est aussi l'identité.

Proposition 2.10. *Soit X un espace topologique non vide, et soit $x \in X$ un point. Notons C la composante connexe par arcs de X telle que $x \in C$. Alors le morphisme*

$$i_* : \pi_1(C, x) \to \pi_1(X, x).$$

induit par l'inclusion $i : C \hookrightarrow X$ est un isomorphisme.

Preuve : En effet tout lacet de base x dans X est continue dans C, l'homomorphisme i_* est donc surjectif, D'autre part si un lacet γ de base x dans C est homotope dans X au lacet constant γ_x est déjà homotope à γ_x dans C et par suit i_* est injectif.

2.2.2 Calcule du groupe fondamental

Espace simplement connexe

Définition 2.10. *[2]On désigne par pr la projection $t \to \exp(2\pi i t)$ du segment $I = [0, 1]$ sur le cercle S^1et par e le point $pr(0) = pr(1)$ de S^1.*
Soit x un point de X. La correspondance $\widehat{\gamma} : \gamma = pr \circ \widehat{\gamma}$ établit une bijection entre l'ensemble des application continues $\widehat{\gamma}$ de S^1 dans X telles que $\widehat{\gamma}(e) = x$ et l'ensemble des lacets de base x dans X.

Rétractes et produits

Définition 2.11. *[2] Soient Y et Z deux sous-espaces supplémentaires d'un espace topologique X. Alors on appelle projection sur Y parallèlement à Z l'application qui à tout x de X associe l'unique y de Y tel que $x = y + z$ avec z élément de Z.*
Une telle application est aussi appelée projecteur.

Définition 2.12. *[1] Soit X un espace topologique et $A \subset X$ un sous espace. On dit que A est un rétracte de X s'il existe une application continue $r : X \to A$ telle que :*

- *i) $r(x, 0) = x$ pour tout $x \in X$.*

- *ii) $r(x, 1) \in A$ pour tout $x \in X$.*

- *iii) $r(a, t) = a$ pour tout $t \in I$ et $a \in A$.*

L'application **r** *s'appelle une rétraction.*

Lemme 2.2. *Si X est espace simplement connexe et si $Y \subset X$ est un rétracte de X, Y est aussi simplement connexe.*

Lemme 2.3. *Soit X un espace topologique , $A \subset X$, $r : X \to A$ une rétraction et $x \in A$ un point. Notons $i : A \hookrightarrow X$ l'inclusion de A dans X. Alors, le morphisme $r_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(A, x)$ est surjectif et le morphisme $i_* : \pi_1(A, x) \to \pi_1(X, x)$ est injectif.*

Preuve : L'application $r \circ i$ coïncide avec $Id_A : A \to A$. Donc l'application

$$r_* \circ i_* : \pi_1(A, x) \to \pi_1(A, x)$$

est l'identité. par conséquent, r_* est surjectif et i_* est injectif.

Remarque 2.3. *On dit que $A \subset X$ est un rétracte par déformation de X s'il existe une rétraction $r : X \to A$ telle que la composition $i \circ r$ de r et de l'inclusion $i : A \hookrightarrow X$ soit homotope à l'identité $Id_X : X \to X$, cette application s'appelle une rétraction par déformation. Cette notion est intermédiaire entre celle d'homéomorphisme et celle d'équivalence d'homotopie.*
On dit que $r : X \to A$ est une rétraction forte par déformation si $i \circ r$ est homotope à l'identité $Id_X : X \to X$ relativement à A.

Proposition 2.11. *Soient X et Y deux espaces topologiques, pr (resp pr') la projection du produit $X \times Y$ sur X (resp Y) et (x, y) un point de $X \times Y$.*
L'application $(pr)_* \times (pr')_*$ est isomorphisme de $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ sur $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$.

Preuve :
L'homomorphisme $(pr)_* \times (pr')_*$ est surjectif : En effet si γ est un lacet de base x dans X et γ' est un lacet de base y dans Y, $\varphi = \gamma \times \gamma'$ est un lacet de base (x, y) dans $X \times Y$ tel que

$$((pr)_* \times (pr')_*)[\varphi] = ([\gamma], [\gamma'])$$

. Il aussi injectif : Soit en effet γ un lacet de base (x, y) dans $X \times Y$ pour la quel il existe une homotopie H' de $pr \circ \gamma$ à γ_x et une homotopie H' de $pr' \circ \gamma$ à γ_y. L'application $H = H' \times H'$ est alors une homotopie de γ à $\gamma_{(x,y)}$.
On peut remarquer que si i_1 (i_2) désigne l'injection $a \longmapsto (a, y)$ (resp $b \longmapsto (b, y)$) de X (resp Y) dans $X \times Y$, L'application

$$([\gamma], [\gamma']) \longmapsto ((i_1)_*[\gamma])((i_2)_*[\gamma'])$$

est l'isomorphisme inverse de $(pr)_* \times (pr')_*$.

Corollaire 2.4. *Si X et Y sont simplement connexes leur produit $X \times Y$ est aussi simplement connexe.*

Groupe fondamentale de cercle S^1

[2] [4] Rappelons que $pr : \mathbb{R} \to S^1$ désigne la projection $t \longmapsto exp(2\pi i t)$ et que e est le point $pr(0)$ de S^1.
Pour tout entier n on désigne par γ_n le lacet de base e dans S^1 défini par

$$\gamma_n(t) = pr(nt)$$

pour tout $t \in I$ l'application correspondant $\widehat{\gamma} : S^1 \to S^1$ est alors $z \longmapsto z^n$. On représente S^1 comme cercle unité dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.
Notons $\gamma_1 : I \to S^1$ l'application défini par $\gamma_1(t) = \exp(2\pi i t)$, c'est un lacet de base 1 dans S^1, On pose aussi $\gamma_n(t) = \exp(2\pi i n t)$ pour tout entier n on a :

$$[\gamma_n] = [\gamma_1]_n$$

.

Proposition 2.12. *Soient $I = [0,1]$, $\gamma : I \to S^1$ un lacet de base 1 dans S^1 et $x_0 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ un point. Il existe un unique chemin $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}$ tel que $\exp \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et $\tilde{\gamma}(0) = x_0$.*

Prouve : L'unicité de $\tilde{\gamma}$ est immédiate : la différence entre deux tels chemins est une application continue de I dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ (muni de la topologie discrète), cette différence est, donc constante (égale à 0, car les points de départ des deux chemins coïncident). Pour construire $\tilde{\gamma}$, considérons un recouvrement ouvert

$$S^1 = (S^1 \setminus \{i\}) \cup (S^1 \setminus \{-i\})$$

de S^1. L'image inverse $\exp^{-1}(S^1 \setminus \{i\})$ est une réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, deux à deux disjoints, tels que la restriction de exp sur chaque intervalle soit un homéomorphisme entre l'intervalle et $S^1 \setminus \{i\}$, l'application inverse peut être décrite à l'aide de la branche appropriée du logarithme complexe. L'affirmation similaire est vraie aussi pour $S^1 \setminus \{-i\}$. Puisque l'intervalle I est compact, il peut être divisé en sous-intervalles par une collection finie de points

$$0 = a_0 < a_1 < ... < a_{k-1} < a_k = 1$$

tels que l'image par γ de tout sous-intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, ..., k-1$, soit entièrement contenue dans (au moins) un des ensembles $S^1 \setminus \{i\}$ et $S^1 \setminus \{-i\}$ (on peut choisir les points $0 = a_0 < a_1 < ... < a_{k-1} < a_k = 1$ de telle façon que la longueur de chaque sous-intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, ..., k-1$, soit plus petit qu'un nombre de Lebesgue du recouvrement ouvert $I = \gamma^{-1}(S^1 \setminus \{i\}) \cup \gamma^{-1}(S^1 \setminus -\{i\})$ de l'intervalle I. On définit l'application $\tilde{\gamma}$ sur $[0, a_j]$ par récurrence sur j. Pour $j = 0$, on a $\tilde{\gamma}(0) = x_0$. Supposons que $\tilde{\gamma}$ est déjà défini sur $[0, a_j]$, où $j = 0, ..., k-1$. On a $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset S^1 \setminus \{i\}$ ou $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset S^1 \setminus \{-i\}$. Supposons, par exemple que $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subset S^1 \setminus \{i\}$ (le deuxième cas est complètement similaire). Soit $V \subset R$ la composante connexe de $\exp^{-1}(S^1 \setminus \{i\})$ telle que $\tilde{\gamma}(a_j) \in V$. La restriction ρ de exp sur V est un homéomorphisme entre V et $S^1 \setminus \{i\}$. Sur l'intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, on considère la composée $\rho^{-1} \circ (\gamma \mid_{[a_j, a_{j+1}]})$, cette application se recolle avec l'application $\tilde{\gamma}$ déjà définie sur $[0, a_j]$ pour donner une application continue $\tilde{\gamma}$ sur $[0, a_{j+1}]$. le chemin $\tilde{\gamma}$ s'appelle relèvement de γ.

Théorème de *VAN KAMPEN* faible

[4] (Le théorème de **van Kampen** est un outil important qui, dans certains cas, permet de calculer le groupe fondamental. Dans cette section, nous considérons une version faible du théorème de **van Kampen**).
Soit X un espace topologique non vide et connexe par arcs,U_1, U_2 deux ouverts. Soit $X = U_1 \cup U_2$ un recouvrement ouvert de X telle que U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ soient non vides et connexe par arcs. Soit $x_0 \in U_1 \cap U_2$, Alors le groupe $\pi_1(X, x_0)$ est engendré

par les images des groupes $\pi_1(U_1, x_0)$ et $\pi_1(U_2, x_0)$ sous les morphismes induits par les inclusions $U_1 \hookrightarrow X$ et $U_2 \hookrightarrow X$ respectivement.

Preuve : Soient X un espace topologique et $I = [0, 1]$, $\gamma : I \to X$ un lacet de base x_0. Comme dans la démonstration de la Proposition (2.11), on divise l'intervalle I en sous-intervalles par une collection finie de points

$$0 = a_0 < a_1 < ... < a_{k-1} < a_k = 1$$

tels que l'image par γ de tout sous-intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, $j = 0, ..., k-1$, soit entièrement contenue dans (au moins) un des ensembles U_1 et U_2, et les images par γ de tous les points aj , $j = 0, ..., k$, appartiennent à $U_1 \cap U_2$.

Pour tout entier j entre 0 et $k-1$, soit $\gamma_j : I \to X$ le chemin obtenu de la restriction de γ sur $[a_j, a_{j+1}]$ par un changement affine de paramètre :

$$\gamma_j(t) = \gamma((a_{j+1} - a_j)t + a_j).$$

De plus, pour tout entier j entre 1 et $k-1$, choisissons un chemin $\delta_j : I \to U_1 \cap U_2$ qui relie x_0 et $\gamma(aj)$. Il reste à remarquer que

$$[\gamma] = [\gamma_0\delta_1^{-1}\delta_1\gamma_1\delta_2^{-1}\delta_2\gamma_2...\delta_{k-1}^{-1}\delta_{k-1}\gamma_{k-1}]$$

et l'image de chaque chemin $\gamma_0\delta_1^{-1}, \delta_1\gamma_1\delta_2^{-1}, ..., \delta_{k-2}\gamma_{k-1}\delta_{k-1}^{-1}, \delta_{k-1}\gamma_{k-1}$ est entièrement contenue dans U_1 ou U_2.

2.3 Revêtement

Homéomorphismes locaux

Définition 2.13. *[2] Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application continue $p : X \to Y$ est une homéomorphisme local si pour tout point x de X et y de Y il existe un voisinage ouvert V de x et un voisinage ouvert U de $y = p(x)$ tels que $p|_V$ soit un homéomorphisme de V sur U. Par conséquent :*

i) Un homéomorphisme local est une application ouverte.

ii) Si $p : X \to Y$ est un homéomorphisme local et si A est un sous-espace de Y, $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ est un homéomorphisme local.
En particulier pour tout point y de Y, $p^{-1}(y)$ est un sous-espace discret de X.

iii) Si $p : X \to Y$ est un homéomorphisme local, X et Y ont les mêmes propriétés topologiques locales (locale connexité, locale connexité par arcs, locale contractibilité...)

iiii) Un revêtement est un homéomorphisme local.

Revêtement

Définition 2.14. *[2] Soit Y un espace topologique, un revêtement de Y est la donné d'un espace topologique X et une application p définie par $p : X \to Y$ continue. Supposons que p est surjective et pour tout point $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert $U \subset Y$ et un espace discret non vide F et un homéomorphisme $\Psi : p^{-1}(U) \to U \times F$ tel que le diagramme soit commutatif.*

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

On dit aussi que $p : X \to Y$ est un revêtement de Y (ou même X) , et on a :

- *Y est la base de revêtement.*
- *X espace totale.*
- *Pr la projection.*
- *$p^{-1}(y)$ la fibre au-dessus du point y de Y.*
- *U un voisinage distingué de y.*
- *Ψ une trivialisation de p au-dessus de U.*

Remarque 2.4. *Un revêtement $p : X \to Y$ est dit connexe (resp simplement connexe, connexe par arcs...) si l'espace total X est connexe (resp simplement connexe, connexe par arcs...)*

Lemme 2.4. *Pour qu'une application continue $p : X \to Y$ soit un revêtement il faut et il suffit que la condition suivant soit satisfait.*
Pour tout point y de Y il existe un voisinage U de y et une famille non vide $(S_i)_{i\in I}$ de section de p au-dessus de U ayant les propriétés suivantes :

- *i) Pour tout $i \in I$ $S_i(U)$ est ouvert de $p^{-1}(U)$.*
- *ii) $S_i(U) \cap S_j(U) = \emptyset$ pour $i \neq j$.*
- *iii) $p^{-1}(U) = \cup_{i\in I} S_i(U)$.*

Proposition 2.13. *Soient X ,Y, X' et Y' des espaces topologiques, $p : X \to Y$ et $p' : X' \to Y'$ des revêtements. Alors $p \times p' : X \times X' \to Y \times Y'$ est aussi un revêtement.*

Preuve : Soit $(x, y) \in Y \times Y'$ un point, on pose $F = p^{-1}(x)$ et $G = p^{-1}(y)$ Considérons un voisinage ouvert $U \subset Y$ de x trivialisant le revêtement p et un voisinage ouvert $U' \subset Y'$ de y trivialisant le revêtement p'. Alors, $U \times U' \subset Y \times Y'$ est un voisinage ouvert de (x, y). De plus, on a des homéomorphismes

$$\Psi : p^{-1}(U) \to U \times F$$

$$\Psi' : p'^{-1}(U') \to U' \times G$$

tels que

$$p \circ \Psi = p|_{p^{-1}(U)} \quad et \quad p' \circ \Psi' = p|_{p'^{-1}(U')}$$

où

$$p : U \times F \to U \quad et \quad p' : U' \times G \to U'$$

Sont les projections, Donc :

$$\Psi \times \Psi' : p^{-1}(U) \times p'^{-1}(U') = (p \times p')^{-1}(U \times U') \to (U \times U') \times (F \times G)$$

est homéomorphisme tel que

$$(p \times p') \circ (\Psi \times \Psi') = (p \times p')|_{(p \times p')^{-1}(U \times U')}.$$

Par conséquent $p \times p'$ est un revêtement

2.3.1 Homomorphismes de revêtements

Définition 2.15. *[2] Soient X,Y,X',Y' des espaces topologiques et $p : X \to Y$, $p' : X' \to Y'$ deux revêtement. Un homomorphisme du revêtement X dans le revêtement X' est couple (H, h) d'applications continues $H : X \to X'$ et $h : Y \to Y'$ telles que $p' \circ H = h \circ p$. Autrement dit que le diagramme est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{H} & X' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ Y & \xrightarrow[h]{} & Y' \end{array}$$

On dit aussi que $H : X \to X'$ est homomorphisme au-dessus de h, et si Y=Y' est Un homomorphisme simple.

Définition 2.16. *Soient X,Y,X',Y' des espaces topologiques et $p : X \to Y$, p' :*

$X' \to Y'$ deux revêtement. Un isomorphisme du revêtement X sur le revêtement X' est un homomorphisme (H, h) de X dans X' pour lequel H et h sont les homéomorphismes.

Le couple (H^{-1}, h_{-1}) est alors un isomorphisme de X' sur X (l'isomorphisme inverse).

2.3.2 Relèvement des Applications

Définition 2.17. *[2] Soient X,Y,Z des espaces topologiques, $p : X \to Y$ et $h : Z \to Y$ deux applications continues un relèvement de h est une application continue $H : Z \to X$ telle que $p \circ H = h$.*

Exemples :

i) Une section $s : Y \to X$ de p est un relèvements de l'application identique de Y.

ii) Soit $p : X \to Y$ et $p' : X' \to Y'$ deux revêtements, et soit h une application continue de Y dans Y'. Un homomorphisme de X dans X' au-dessus de h est un relèvement de l'application $h \circ p : X \to Y'$.

Proposition 2.14. *Soient $p' : X' \to Y'$ un revêtement, $h : Y \to Y'$ une application continue, $p : X \to Y$ le revêtement image réciproque de X par h, et H l'homomorphisme de X dans X' au-dessus de h. La composition $s \mapsto H \circ s$ établit une correspondance biunivoque entre les sections s de p au-dessus de Y et les relèvements $\psi : Y \to X'$ de h.*
En effet si $s : Y \to X$ est un section de p, $H \circ s$ est un relèvement de h, et si $\psi : Y \to X'$ est un relèvement de h, $s : x \mapsto (x, \psi(x))$ est une section de p telle que $H \circ s = \psi$.

2.3.3 Revêtement et Groupe fondamentale

Proposition 2.15. *Soient X,Y deux espaces topologiques , $p : X \to Y$ un revêtement et y un point de Y et $I = [0, 1]$. Pour tout chemin $\gamma : I \to Y$ d'origine y dans Y, et pour tout point $x \in p^{-1}(y)$ il existe un relèvement $\psi : I \to X$ de γ et un seul tel que $\psi(0) = x$.*

Preuve : Soit $q : D \to I$ le revêtement image réciproque de X par $\gamma : I \to Y$, et soit C l'homomorphisme de D dans X au-dessus de γ .
Le revêtement D est trivial, il existe donc une section s de q au-dessus de I telle que $s(0) = (0, x)$. Le chemin $\psi = C \circ s$ est alors un relèvement de γ tel que $\psi(0) = x$.
Enfin puisque I est connexe ce relèvement est unique .

Proposition 2.16. *Soient γ et γ' deux chemins d'origine y dans Y ayant même extrémité, et soient ψ et ψ' leurs relèvements d'origine x, $x \in p^{-1}(y)$. Si γ et γ' sont homotopes alors ψ et ψ' ont même extrémité et sont homotopes.*

Preuve : Soit :

$$\begin{aligned} h \ : \ & I \times I \to Y \\ & (t, s) \mapsto h(t, s) \end{aligned}$$

une homotopie de γ à γ' :
$h(t, 0) = \gamma(t)$, $\qquad h(t, 1) = \gamma'(t)$,
$h(0, s) = y$, $\qquad h(1, s) = \gamma(1) = \gamma'(1)$.
On construit comme dans (proposition 2.14) un relèvement $H : I \times I \to X$ de h tel que $H(0, 0) = x$. On a alors :
$H(t, 0) = \psi(t)$, $\qquad H(t, 1) = \psi'(t)$,
$H(0, s) = x$, $\qquad H(1, s) = \psi(1) = \psi'(1)$.
Par conséquent ψ et ψ' ont même extrémité et sont homotopes.

Proposition 2.17. *Soit* $p : X \to Y$ *un revêtement et soient* $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, *Posons* $y_0 = p(x_0)$. *Alors le morphisme*

$$p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$

induit par p *est injectif.*

preuve : Soit γ un lacet de base x_0 dans X tel que la classe $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ de $[\gamma]$ soit dans le noyau de p_*. Le lacet $p \circ \gamma$ est homotope au lacet constant e_{y_0}. Soit $H : I \times I \to Y$ une homotopie des lacets $p \circ \gamma$ et e_{y_0}. Le lacet est l'unique relèvement de $p \circ \gamma$ tel que le point de départ de relèvement soit x_0. Le relevé $\tilde{H}$ de H tel que $\tilde{H}(0,0) = x_0$ est une homotopie du relevé γ de $p \circ \gamma$ à celui de e_{y_0}, c'est-à-dire, au lacet constant e_{x_0}. Donc, les lacets γ et e_{y_0} sont homotopes.
On dit que le sous-groupe $p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ est le sous-groupe déterminé par x_0. Remarquons que si on choisit un point $x_0 \in p^{-1}(y_0)$ différent de x_0, le sous-groupe déterminé par x_1 ne coïncide pas forcement avec celui déterminé par x_0.

Lemme 2.5. *Soient* $p : X \to Y$ *un revêtement connexe par arcs de* Y, x *un point de* X *et* $y = p(x)$. *Pour que* p *soit un homéomorphisme il faut et il suffit que* p_* *soit un isomorphisme de* $\pi_1(X, x)$ *sur* $\pi_1(Y, y)$.

Théorème de Relèvement des Applications

Théorème 2.5. *[4] Soit* $p : Y \to Z$ *un revêtement, et* X *un espace connexe et localement connexe par arcs et* f *une application continue de* X *dans* Z. *Soient* x_0 *un point de* X, $z_0 = f(x_0)$ *et* y_0 *un point de* $p^{-1}(z_0)$. *Pour qu'il existe un relèvement* $F : X \to Y$ *de* f *tel que* $F(x_0) = y_0$ *il faut et il suffit que l'on ait*

$$f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$$

Ce relèvement est alors unique.

Preuve : La condition est évidemment nécessaire car si $f = p \circ F$ on a $f_* = p_* \circ F_*$. Supposons inversement que l'on ait $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$. Soient $q : D \to X$ le revêtement image réciproque de Y par f, et ϕ l'homomorphisme de D dans Y au-dessus de f. La composante connexe par arcs C du point (x_0, y_0) dans D est un revêtement connexe par arcs de X.
Soit alors γ un lacet de base x_0 dans X. Puisque $Imf_* \subset Imp_*$ il existe un lacet γ de base y_0 dans Y tel que $f \circ \gamma = p \circ \psi$ (proposition 2.15 et 2.16). L' application $\lambda : t \mapsto (\gamma(t), \psi(t))$ est un lacet de base (x_0, y_0) dans C tel que $q \circ \lambda = \gamma$. L'homomorphisme $q_* : \pi_1(C, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0)$ est donc surjectif.
Par conséquent (proposition 2.17 et lemme 2.5) $q|_C$ est un homéomorphisme de C sur Z et $F = \phi \circ (q|_C)^{-1}$ est un relèvement de f tel que $F(x_0) = y_0$.

2.3.4 Classification des revêtements

Nous avons utilisé un revêtement, l'objectif de cette section est d'en étudier la théorie. Nous concentrons donc sur certains types de revêtement. ceci permettra d'en faire une classification partielle, à l'aide de la théorie des catégories.

Revêtements galoisiens

Définition 2.18. *[2] Soient X est un espace topologique, Y un espace topologique localement connexe et l'application $p : X \to Y$ est dit un revêtement galoisien, ou régulier, ou normale, si le groupe $Aut(X)$ opère transitivement sur les fibres de X. Pour rappel, un automorphisme de p est une application continue $\phi : X \to X$ telle que $p \circ \phi = p$ et on notera $Aut(X)$ l'ensemble des automorphisme de p.*

Proposition 2.18. *Soit $p : X \to Y$ un revêtement connexe. Le groupe $Aut(X)$ opère proprement discontinument sur X.*

Preuve : Montrons que l'opération de $Aut(X)$ sur X est proprement discontinue. Soient x un point de X, $y = p(x)$ pour tout $y \in Y$, V un voisinage de y trivialisant le revêtement $(p^{-1}(V) \cong V \times F)$ et enfin U un voisinage de x tel que $p|_U$ soit un homéomorphisme de U sur V. Si $g \in Aut(X)$, $g.U$ est un des ouverts $V \times \{f\}$, donc $g.U \cap U$ est vide ou égal à U. Si $g.U = U$, $g.x \in U$, mais x est le seul point de U dont l'image par p est y, donc $g.x = x$. que l'opération était libre, on a $g = Id$.

Revêtement universel

[2] Soit Y un espace connexe, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe si tout point $y \in Y$ admet un voisinage U telle que l'application par l'inclusion $\pi_1(U, y) \to \pi_1(Y, y)$ est triviale.

Définition 2.19. *Un revêtement universel d'un espace Y est un revêtement galoisien $p : X \to Y$ tel que tout revêtement de Y soit isomorphe à un revêtement associé à X.*

Proposition 2.19. *Soit Y connexe et semi-localement connexe. Alors il existe un revêtement $p : X \to Y$ avec $\pi_1(X) = 1$.*

Preuve : Soit

$$\tilde{X} = \{\gamma : [0,1] \to Y \quad telque \quad \gamma(0) = x_0\}$$

pour un certain x_0 fixé. On donne à $\tilde{X}$ la topologie induite de la topologie sur l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ vers Y. Ensuite, disons que $\gamma \equiv \gamma'$ si $\gamma(1) = \gamma'(1)$ et si $\overline{\gamma}\gamma'$ est trivial dans le groupe fondamentale $\pi_1(Y, y_0)$. On peut considérer avec la topologie quotient.

$$X = \tilde{X} / \equiv$$

2.3.5 Théorème de *Van KAMPEN*

[4] Soit X un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs. On suppose que X est recouvert par deux ouvert U_1 et U_2 qui sont connexe par arcs et semi -localement simplement connexe. On suppose aussi que l'intersection $U_1 \cap U_2$ est non vide,Connexe par arcs et semi-localement simplement connexe et on choisit un point de base $x_0 \in U_1 \cap U_2$. D'après le Théorème de *Van KAMPEN* faible le groupe fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ est engendré par les images $\pi_1(U_1, x_0)$ et $\pi_1(U_2, x_0)$ par les morphisme induits par les inclusions $in_1 : U_1 \hookrightarrow X$ et $in_1 : U_2 \hookrightarrow X$ respectivement. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[r, "(i_1)_*"] \arrow[d, "(i_2)_*"'] & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "(in_1)_*"] \\
\pi_1(U_2, x_0) \arrow[r, "(in_2)_*"'] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

où $i_1 : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_1$ et $i_2 : U_1 \cap U_2 \hookrightarrow U_2$ sont des inclusions.

les groupes d'homotopie supérieure

Comme pour les groupes d'homotopie supérieure, on a construit dans les sections précédente le groupe fondamental, ou premier groupe d'homotopie. Cependant, il ne permet pas de différencier tout les espaces non équivalents topologiquement. On peut par exemple montrer que S^2 a un groupe fondamental trivial tout comme $\mathbb{R}^2$. Pour différencier de tels espaces, on introduit les groupes d'homotopie supérieurs, au lieu de travailler avec des chemins $I \to X$, on utilise des surfaces $I^2 \to X$, puis des volumes etc. Mais ce n'était pas notre travail dans notre mémoire.

Chapitre 3

Homologie

Dans ce chapitre nous introduisons deux définitions simples, catégories et foncteurs. Ces notions générales nous fournissent un langage commode et concis pour exprimer certaines propriétés des invariants algébriques. Et dans la deuxième section on étudie complexe et homologie qui contient deux sous sections : simplexe singulières et complexe de chaines. Et la troisième section c'est l'homologie singulière qui contient trois sous sections : suites exactes de modules, longue suite d'homologie et l'homologie singulière et les outils de calculs. Et la quatrième section c'est l'homologie relative qui contient le groupe d'homologie relative, et la deuxième sous section c'est suite exacte longue d'homologie relative et homologie réduite, la dernier sous section contienne le théorème d'excision qui sera utile en topologie algébrique sur l'homologie relative. À tout espace topologique X, Les groupes d'homotopie précédemment étudiés sont faciles à définir, mais sont souvent difficiles à calculer (c'est, par exemple, le cas de groupes d'homotopie des sphères). Les groupes d'homologie sont plus difficiles à définir, mais ils sont plus faciles à calculer. Une autre différence réside dans le fait que les groupes d'homologie $H_n(X) = \ker \partial_n / Im\partial_{n+1}$ est défini pour les espaces topologiques non pointés.

3.1 Le langage des catégories et foncteurs

Définition 3.1. *[3] Soient X et Y deux espaces topologiques, une catégorie C est constituée de :*

1. *Une classe $ob(C)$ d'objet de C.*
2. *Pour tout couple (X, Y) d'objets de C d'un ensemble noté $Mor(X, Y)$ donc les éléments sont appelés morphismes de X dans Y de C (avec la notation $f : X \to Y$ pour $f \in Mor(X, Y))$) .*
3. *Une loi de composition des morphisme c'est-à-dire pour chaque triple d'objets (X, Y, Z) une application*

$$Mor(X, Y) \times Mor(Y, Z) \to Mor(X, Z)$$

appelée composition et notée par $(f, g) \to g \circ f$

Vérifiant les propriétés suivantes :

a) ***Associative*** *: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ pour tout f,g,h dans les morphismes.*

b) ***Élément neutre*** *: Pour chaque objet X il existe un élément I_X dans $Mor(X, X)$ tel que pour tout $f \in Mor(X, Y)$ et $g \in Mor(Y, X)$.*

Un tel élément neutre I_X est unique. Un morphisme $f \in Mor(X, Y)$ est appelé un isomorphisme s'il existe un morphisme $g \in Mor(Y, X)$ tel que

$$g \circ f = I_X \quad et \quad f \circ g = I_Y$$

Remarque 3.1. *Deux objets sont isomorphes s'il existe un isomorphisme entre eux. « Être isomorphe à » est une relation d'équivalence sur tout ensemble d'objets d'une catégorie.*

Exemples 3.1.1. *1. Ens : La catégorie des ensembles. Les morphismes sont les applications, la composition est la composition des applications.*

2. *Grp : La catégorie des groupes. Les morphismes sont les morphismes de groupes.*
3. *Top : La catégorie des espaces topologiques. Les morphismes sont les applications continues.*
4. *Mod($\mathbb{R}$) : La catégorie des R-modules à gauche, $\mathbb{R}$ étant un anneau. Les morphismes sont les applications linéaires.*
5. *Comp($\mathbb{R}$) : La catégorie des complexes de $\mathbb{R}$-modules.*
6. *Ab : La catégorie des groupes abéliens, est une sous-catégorie pleine de Grp.*

Remarque 3.2. *Une catégorie C est dite petite si $ob(C)$ est un ensemble.*

Définition 3.2. *[3] Un foncteur (covariant) F d'une catégorie C vers une catégorie C', $F : C \to C'$ est défini par*

a) Pour tout objet X de C d'un objet $F(X)$ de C'.

b) Pour tout couple d'objets (X, Y) de C et tout $f \in Mor(X, Y)$, d'un $F(f) \in Mor(F(X), F(Y))$ tel que

1. *Pour tout objet X de C, on a $F(I_X) = I_{F(X)}$.*
2. *$\forall f \in Mor(X, Y)$, $\forall g \in Mor(Y, Z)$, On a $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.*

Théorème 3.1. *[6]Soient $F : C \to C'$ un foncteur, et X,Y des objets de C. Si X et Y sont isomorphes, alors $F(X)$ et $F(Y)$ sont isomorphes.*

Preuve : Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$, tel que

$$g \circ f = I_X \quad et \quad f \circ g = I_Y$$

Alors

$$I_{F(Y)} = F(I_Y) = F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

et

$$I_{F(X)} = F(I_X) = F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

Donc $F(X)$ et $F(Y)$ sont isomorphes.

Définition 3.3. *[3]Deux catégories C et C' sont dite isomorphes s'il existe deux foncteurs $F : C \to C'$ et $G : C' \to C$ tels que*

$$F \circ G = I_{C'} \quad et \quad G \circ F = I_C$$

On dit alors que F et G sont des isomorphismes de catégories.

3.2 Complexes et homologie

[1] Dans ce paragraphe, R désigne un anneau quelconque. Les $R-modules$ sont implicitement des $R-modules$ à gauche.

Définition 3.4. *Un complexe C_* de $R-modules$ est un diagramme de $R-modules$ de la forme suivante :*

$$... \xrightarrow{d_{i+2}} C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} ... \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} ...$$

Où les applications d_i $R-linaires$ vérifiant $d_i \circ d_{i+1} = 0$ pour tout i dans $\mathbb{Z}$, on les appelles les différentielles du complexe, et C_i est le $R-module$ des éléments de degré i du complexe.

Définition 3.5. *[1] Soit C un complexe de $R-modules$. Pour tout $i \in Z$ on introduit les $R-modules$ suivants :*

- *Le $R-module$ Z_i des cycles de degré i*

$$Z_i = \ker d_i \subset C_i.$$

- *Le $R-$module B_i des bords de degré i*

$$B_i = Imd_{i+1} \subset Z_i.$$

- *Le $R-$module d'homologie $H_i(C)$ de degré i*

$$H_i(C) = Z_i/B_i.$$

3.2.1 Simplexes singuliers

Définition 3.6. *[6] Notons $(e_0...e_n)$ la base canonique de R^{n+1}.*

- *Le $n-$simplexe standard est l'espace topologique $\triangle^n :=< e_0...e_n >$*
- *Le $n-$simplexe $< e_0, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n >$ est noté $\partial_i \triangle^n$. On l'appelle la $i-$éme face de $\triangle^n$.*
- *Pour $0 \leq i \leq n$, il existe une unique application affine $d^i : \triangle^{n-1} \to \triangle^n$ telle que*

$$d^i(e_k) = \begin{cases} e_k & si\ k \leq i-1 \\ e_{k+1} & si\ k \geq i+1 \end{cases}$$

Cette application d^i induit un isomorphisme affine de $\triangle^{n-1}$ sur $\partial_i \triangle^n$.

Définition 3.7. *[1] Soit X un espace topologique. Un $n-$simplexe singulier de X est une application continue*

$$\sigma : \triangle^n \to X$$

Une $n-$chaîne singulière dans X est une combinaison finie formelle

$$\sum_{i=0}^{n} k_i \sigma_i$$

de $n-$simplexes singuliers σ_i avec des coefficients entiers k_i.

On note $C_n(X)$ l'ensemble des $n-$chaînes singulières dans X.

Définition 3.8. *[1] Pour tout entier $n \geqslant 1$, le morphisme de bord ∂_n (noté aussi simplement ∂) est le morphisme*

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

définie de la façon suivante :

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ \partial_i \triangle^n)$$

Remarque :

- Les $0-simplexes$ singuliers de X peuvent être identifiés avec les points de X.
- Les $1-simplexes$ singuliers de X sont les chemins. Pour tout $1-simplexe$ singulier σ dans X, le bord $\partial\sigma$ est $\sigma(0,1) - \sigma(1,0)$.
- Si σ est un $2-simplexe$ singulier de X, alors

$$\begin{aligned}
\partial_2(\sigma) &= \sum_{i=0}^{2} (-1)^i (\sigma \circ \partial_i \triangle^2) \\
&= \sigma \circ \partial_0 \triangle^2 - \sigma \circ \partial_1 \triangle^2 + \sigma \circ \partial_2 \triangle^2 \\
&= (\sigma \circ \triangle_{((0,1,0)(0,0,1))}) - (\sigma \circ \triangle_{((1,0,0)(0,0,1))}) + (\sigma \circ \triangle_{((1,0,0)(0,1,0))})
\end{aligned}$$

Définition 3.9. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose*

$$H_n(X) = \ker \partial_n / Im\partial_{n+1}.$$

De plus, on pose $H_0(X) = C_0(X)/Im\partial_1$. Les groupes obtenus $H_n(X)$ s'appellent les groupes d'homologie (singulière) de X. Ces groupes sont aussi notés $H_n(X, R)$ pour souligner que les coefficients des chaînes singulières considérées sont entiers. Par *convention, pour $n < 0$, on pose $H_n(X) = 0$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, les éléments de $Z_n(X) = \ker \partial_n$ sont les $n-$ cycles singuliers de X. Les éléments de $C_0(X)$ sont appelés aussi les $0-$ cycles singuliers de X. Pour tout entier $n \geqslant 0$, les éléments de $B_n(X) = Im\partial_{n+1}$ sont les $n-$ bords singuliers de X. On dit que deux $n-$ cycles singuliers de X sont homologies si leur différence est un $n-$ bord singulier.*

3.2.2 Complexes de chaînes

Définition 3.10. *[1] Un complexe de chaînes (C_*, ∂) est une suite*

$$... \xrightarrow{\partial_{i+2}} C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} ... \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

où C_i est un groupe abélien pour tout entier $i \geqslant 0$ et ∂_i est un morphisme pour tout entier $i \geqslant 0$, tel que $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ pour tout entier $i \geqslant 0$.

Lemme 3.1. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a*

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

Preuve : Soit σ un $(n+1)-$ *simplexe* singulier de X. On a

$$\begin{aligned}
(\partial_n \circ \partial_{n+1})(\sigma) &= \partial_n(\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i(\sigma \circ \partial_i \triangle^{n+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{0 \leq j < i}^{n+1} (-1)^i(-1)^j(\sigma \circ \partial_j \partial_i \triangle^{n+1}) - \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{i \leq j < n+1}^{n+1} (-1)^i(-1)^j(\sigma \circ \partial_i \partial_j \triangle^{n+1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Définition 3.11. *[4] Soit C un complexe de chaînes*

$$... \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} ... \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

Si n est un entier strictement positif, alors le n-ème groupe d'homologie de C est

$$H_n(C) = \ker \partial n / Im\partial_{n+1}$$

de plus, on pose $H_0(C) = C_0/Im\partial_1$.

Définition 3.12. *Soit X un espace topologique et R un anneau. Le complexe $C_*(X, R)$ des chaînes singulières de X est le complexe de R-modules défini de la façon suivante :*

1. *Pour $n < 0$, $C_n(X, R) = 0$.*
2. *Pour $n \geq 0$, $C_n(X, R)$ est le $R-$ module libre engendré par l'ensemble des applications continues $\sigma : \triangle_n \to X$. Ces applications σ s'appellent les simplexes singuliers de l'espace X.*
3. *Pour $n \geq 1$, La différentielle $d_n : C_n(X, R) \to C_{n-1}(X, R)$ est définie en envoyant $\sigma : \triangle_n \to X$ sur la somme :*

$$d_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ d^i).$$

On vérifie que cette définition donne bien un complexe, C'est-à-dire que $d_n \circ d_{n+1} = 0$ (Lemme 3.1).

3.3 Homologie singulière

Définition 3.13. *[1] L'homologie singulière (à coefficients dans $\mathbb{R}$) d'un espace topologique X est l'homologie du complexe $C_*(X, R)$:*

$$H_i(X, R) = H_i(C_*(X, R)).$$

Remarque :

1. $H_i(\emptyset, R) = 0$ pour tout $i \geq 0$.
2. $H_i(\{x\}, R) \simeq \begin{cases} R & si \quad \text{i=0} \\ 0 & sinon \end{cases}$ pour tout $x \in X$.
3. $H_i(X, R) = \bigoplus_\alpha H_i(X_\alpha, R)$ où les X_α sont les composantes connexes par arcs de X.

   En particulier $H_0(X)$ est un R-module libre de base $\pi_0(X)$.

3.3.1 Suites exactes de modules

Définition 3.14. *Soient $f : M \to N$ et $g : N \to P$ des morphismes de R-modules. La suite*

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} p$$

est dite exacte en N si $Ker(g) = Im(f)$. Une suite de morphismes de $R-modules$

$$M_0 \to M_1 \to M_2 \to ... \to M_n \to M_{n+1}$$

est dite exacte si elle est exacte en $M_1, ..., M_n$. Par exemple :

1. *La suite $0 \to M \xrightarrow{f} N$ est exacte (en M) si et seulement si f est injective.*
2. *La suite $M \xrightarrow{f} N \to 0$ est exacte (en N) si et seulement si f est surjective.*
3. *La suite $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} p \to 0$ est exacte si et seulement si f est injective, g est surjective et $Ker(g) = Im(f)$.*

3.3.2 Suite longue d'homologie

Définition 3.15. *Une suite exacte courte de complexes de chaines est donnée par*

$$0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$$

de complexes de chaines C, D, E et de morphismes de complexes de chaines $f : C \to D$, $g : D \to E$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la suit de morphismes de modules.

$$0 \to C_n \xrightarrow{f} D_n \xrightarrow{g} E_n \to 0$$

est exacte.

Proposition 3.1. *[6] Soit*

$$0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$$

une suite exacte de complexe alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la suite suivante est exacte :

$$\cdots \to H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \to \dots$$

.

preuve : On a

$$H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f) = 0.$$

Réciproquement, soit $x \in Z_n(D)$ tel que $H_n(g)([x]) = 0 = [g_n(x)]$, on a donc $g_n(x) = B_n(E)$, il existe $y \in E_{n+1}$ tel que $g_n(x) = d^E_{n+1}(y)$, par surjectivité de g_{n+1} il existe $z \in D_{n+1}$ telle que $y = g_{n+1}(z)$ et donc

$$g_n(x) = d^E_{n+1}(y) = d^E_{n+1}(g_{n+1}(z)) = g_n(d^D_{n+1}(z))$$

et $x - d^D_{n+1}(z) \in \ker(g_n) = Im(f_n)$, il existe donc $c \in C_n$ tel que $x - d^D_{n+1}(z) = f_n(c)$. On a $f_{n-1}(d^C_n(c)) = d^D_n(f_n(c)) = d^D_n(x - d^D - n + 1(z)) = d^D_n(x) - d^D_n(d^D_{n+1}(z)) = 0$. Donc par injectivité de f_{n-1} on a $d^C_n(c) = 0$, et $c \in Z_n(\mathrm{C})$.
Ainsi $[x] = [f_n(c)] = H_n(f)([c])$.

Lemme (lemme des cinq) : Considérons un diagramme commutatif de $R-$*modules*, dont les lignes sont des suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
M_1 & \xrightarrow{h_1} & M_2 & \xrightarrow{h_2} & M_3 & \xrightarrow{h_3} & M_4 & \xrightarrow{h_4} & M_5 \\
\downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\
N_1 & \xrightarrow{g_1} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_5
\end{array}$$

1. Supposons f_1 surjective, f_2 injective, f_4 injective. Alors f_3 est injective.
2. Supposons f_2 surjective, f_4 surjective et f_5 injective. Alors f_3 est surjective.
3. Si f_1,f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

Preuve :

1. Soit $x_3 \in M_3$ tel que $f_3(x_3) = 0$.
   Alors $g_3(f_3(x_3)) = 0 = f_4(h_3(x_3)).f_4$ est injectif donc $h_3(x_3) = 0$.
   Par exactitude en M_3
   $\exists x_2 \in M_2$ tel que $x_3 = h_2(x_2)$.
   On a $0 = f_3(x_3) = f_3(h_3(x_2)) = g_2 f_2(x_2)$, donc par exactitude en N_2
   $\exists y_1 \in N_1$ tel que $f_2(x_2) = g_1(y_1)$.
   Il exista par surjectivité de f_1, $x_1 \in M_1$ tel que $y_1 = f_1(x_1)$, et alors $g_1(y_1) = g_1 f_1(x_1) = f_2 h_1(x_1) = f_2(x_2)$.
   Par injectivité de f_2 on a $h_1(x_1) = x_2$, donc $x_3 = h_2(x_2) = h_2 h_1(x_1) = 0$.
   Donc f_3 est injective.
2. Soit $y_3 \in N_3$. Par surjectivité de f_4, $\exists x_4 \in M_4$ tel que $f_4(x_4) = g_3(y_3)$ et on a $g_4 f_4(x_4) = 0 = f_5 h_4(x_4)$.
   Alors $g_3(y_3) = f_4(x_4) = f_4 h_3(x_3) = g_3 f_3(x_3)$. Donc par exactitude en N_3, $\exists y_2 \in N_2$ tel que $y_3 - f_3(x_3) = g_2(y_2)$.
   Comme f_2 est surjective $\exists x_2 \in M_2$ tel que $y_2 = f_2(x_2)$, d'où $y_3 - f_3(x_3) = g_2 f_2(x_2) = f_3 h_2(x_2)$, et $y_3 = f_3(x_3 + h_2(x_2))$. f_3 est donc surjective.
   La troisième assertion est la combinaison des deux premières.

3.3.3 L'homologie singulière et ses outils de calculs

Homologie singulière des paires d'espaces

Définition 3.16. *Soit R un anneau. Soit X un espace topologique et $A \subset X$. Alors l'inclusion $i : A \hookrightarrow X$ induit un morphisme de complexes de chaînes singulières, injectif en chaque degré :*

$$i_* : C_*(A, R) \to C_*(X, R)$$

Remarque 3.3. *$C_*(A, R)$ un sous-complexe de $C_*(X, R)$.*

Définition 3.17. *Le complexe singulier relatif $C_*(X, A, R)$ est le quotient du complexe $C_*(X, R)$ par le sous-complexe $C_*(A, R)$. L'homologie du complexe $C_*(X, R)$ s'appelle l'homologie relative de la paire (X, A), on le note $H_n(X, A, R)$. On notera souvent plus simplement $C_*(X, A)$ et $H_n(X, A)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau des coefficients R.*

Proposition 3.2. *[1][6] Soient X, Y deux espaces topologiques et $A \subset X$, $B \subset Y$. 1) Soit Une application de paires $f : (X, A) \to (Y, B)$ induit un morphisme de complexes de chaînes d'homologie relative :*

$$\begin{array}{rll} f_* : & C_*(X, A) & \to C_*(Y, B) \\ & [\sum \lambda_i \sigma_i] & \mapsto [\sum \lambda_i f \circ \sigma_i] \end{array}$$

donc des morphismes en homologie relative $H_n(f) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ En particulier, l'homologie singulière relative définit des foncteurs

$$H_n : Top_2 \to R_{Mod}.$$

On a $C_*(X) = C_*(X, \emptyset)$, Donc l'homologie singulière relative généralise l'homologie *singulière :* $H_n(X) = H_n(X, \emptyset)$. *On rappelle que l'on a*

$$H_n(\{x\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad n = 0 \\ 0 & si \quad n > 0 \end{cases}$$

2) Si les X_α *composantes connexes par arcs de* X *on a*

$$H_n(X) \simeq \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$$

3)Si $n = 0$, $H_0(X)$ *est un* $R-$*module libre de base* $\pi_0(X)$.

Preuve : 1) Si $X = \{x\}$ est un espace topologique formé d'un seul point, alors il y a un unique $n-$ *simplexe* d_n de X pour tout entier $n \geq 0$. Donc, dans le complexe de chaînes

$$... \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1}(X) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{d_{n-1}} ... \xrightarrow{d_2} C_1(X) \xrightarrow{d_1} C_0(X) \xrightarrow{d_0} ...$$

tous les groupes sont isomorphes à R. Si $n \geq 1$ est un entier, Le morphisme de bord d_n est donné par

$$\begin{aligned} d_n\sigma_n &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_n \circ \partial_i\triangle^n \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_n \circ \triangle_{(e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_n)} \\ &= (\sum_{i=0}^{n}(-1)^i)\sigma_{n-1} \end{aligned}$$

Donc, cette somme est nulle si n est impair et est égale à d_{n-1} si n est pair. Par conséquent, on obtient le complexe suivant :

$$... \xrightarrow{0} R \xrightarrow{Id} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{Id} ... \xrightarrow{Id} R \xrightarrow{0} R$$

Ainsi, si X est un singleton, alors le groupe $H_0(X)$ est isomorphe à R, et $H_n(X) = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.
2) Soit X un espace topologique connexe par arcs. Montrons que le groupe $H_0(X)$ est isomorphe à R, En effet $H_0(X) = C_0(X)/Imd_1$ et les $0-chanes$ singulières dans X sont des combinaisons finies formelles $\sum_i n_i\sigma_i$, où les $0-simplexes$ singuliers σ peuvent être identifiés avec des points de X.
Choisissons un point $p \in X$. Comme le bord de tout $1-simplexe$ singulier σ de X est de la forme $\sigma(0,1) - \sigma(1,0)$, la somme des coefficients de tout élément de Imd_1 est égale à 0. De plus, tout élément $\sum_i n_i\sigma_i$ de $C_0(X)$ est homologue à $(\sum_i n_i)p$. Par conséquent,$H_0(X) = C_0(X)/Imd_1$ est isomorphe à R.
3) Pour chaque n, on a une bijection

$$\amalg_\alpha C(\triangle^n, X_\alpha) \simeq C(\triangle^n, X)$$

car l'image par une application continue d'un connexe par arcs est contenu dans une composante connexe par arcs. On a donc pour tout n un isomorphisme de groupe

$$\bigoplus_\alpha C_n(X_\alpha) = \bigoplus_\alpha RC(\triangle^n, X_\alpha) \simeq R(\amalg_\alpha C(\triangle^n, X_\alpha)) \simeq RC(\triangle^n, X) = C_n(X)$$

et on obtient un isomorphisme de complexes

$$\bigoplus_\alpha C_*(X_\alpha) \simeq C_*(X).$$

induisant les isomorphismes annoncés entre groupes d'homologie.

3.3.4 Homologie relative

Définition 3.18. *Une paire d'espaces topologiques est un couple* (X, A) *avec* X *un espace topologique et* A *un sous-espace de* X*. Un morphisme de paires d'espaces topologiques* $(X, A) \to (X', A')$ *est une application continue* $f : X \to X'$ *telle que* $f(A) \subset A'$*. Deux morphismes de paires* f*,* $g : (X, A) \to (X', A')$ *sont homotopes s'il existe une homotopie* $h : X \times I \to X'$ *entre* $f : X \to X'$ *et* $g : X \to X'$ *telle que* $h(A \times I) \subset A'$*. Deux paires d'espaces topologiques* (X, A)*,* (X', A') *ont même type d'homotopie de paires s'il existe des morphismes de paires* $f : (X, A) \to (X', A')$ *et* $g : (X', A') \to (X, A)$ *tels que* $f \circ g$ *soit homotope à* $Id : (X', A') \to (X', A')$ *et* $g \circ f$ *soit homotope à* $Id : (X, A) \to (X, A)$*. Les paires d'espaces topologiques et leurs morphismes (avec la composition des applications) forment une catégorie. Nous identifions* X *et* $(X, \emptyset)$*. Si* $f : (X, A) \to (X', A')$ *est un morphisme de paires, nous noterons encore* $f : X \to X'$ *et* $f : A \to A'$ *les applications induites. Soit* (X, A) *une paire d'espaces topologiques. Le module* $C_i(A)$ *s'identifie avec le sous-module de* $C_i(X)$ *de base l'ensemble des* $i-$ *simplexes singuliers de* X *à valeurs dans* A*. Clairement, le bord* $\partial : C_i(X) \to C_{i-1}(X)$ *envoie alors* $C_i(A)$ *dans* $C_{i-1}(A)$*. De plus, si* $f : (X, A) \to (X', A')$ *est un morphisme de paires, alors* $f_i : C_i(X) \to C_i(X')$ *envoie* $C_i(A)$ *dans* $C_i(A')$*.*

Homologie réduite

Définition 3.19. *Les groupes* $H_i(X, \{x\})$ *sont appelés groupes d'homologie réduite, on les note* $\widetilde{H}_i(X)$*. Décrivons comment construire le morphisme « de bord »* δ *dans la suite exacte longue d'homologie relative. Un cycle dans* $C_i(X, A)$ *peut être représenté par une chaîne* $\alpha \in C_i(X)$ *dont le bord* $\partial\alpha$ *est contenu dans* $C_{i-1}(A)$*. La classe de* $\partial\alpha$ *dans* $H_{i-1}(A)$ *ne dépend que de la classe de* α *modulo* $C_i(A)$*. On définit donc* δ *comme étant le morphisme qui associe à chaque cycle dans* $C_i(X, A)$ *la classe* *d'homologie de son bord dans* $C_{i-1}(A)$*. La démonstration du théorème d'excision est en fait purement algébrique, elle résulte des lemmes suivantes qui signe l'acte de naissance de l'algèbre homologique et qui est démontrée ici.*

Lemme 3.2. *Si* $C \to C' \to C''$ *est une suite exacte courte de complexes, il existe une suite exacte longue*

$$\ldots \to H_i(C) \to H_i(C') \to H_i(C'') \to H_{i-1}(C) \to \ldots \to H_0(C') \to H_0(C'') \to 0.$$

des groupes d'homologie de ces complexes. En autre, si (X, A) *et* (Y, B) *sont deux paires telles qu'il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} C(A) & \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(X, A) \\ \alpha\big\downarrow & & \beta\big\downarrow & & \gamma\big\downarrow \\ C(B) & \longrightarrow & C(Y) & \longrightarrow & C(Y, B) \end{array}$$

induit, par exemple, par une application $f : (X, A) \to (Y, B)$ *alors le diagramme de la suite exacte longue induit en homologie est lui aussi commutatif.*

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots H_i(A) & \longrightarrow & H_i(X) & \longrightarrow & H_i(X, A) & \longrightarrow & H_{i-1}(A) \ldots \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \ldots H_i(B) & \longrightarrow & H_i(Y) & \longrightarrow & H_i(Y, B) & \longrightarrow & H_{i-1}(B) \ldots \end{array}$$

Là encore, le résultat découle d'une propriété purement algébrique.

Lemme 3.3. *Soit*

$$\begin{array}{ccccc} C & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C'' \\ \alpha\big\downarrow & & \beta\big\downarrow & & \gamma\big\downarrow \\ D & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & D'' \end{array}$$

un diagramme commutatif de complexes de chaînes dont les lignes sont des suites exactes (courtes). Alors, le diagramme de suites exactes longues induit en homologie est commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots H_i(C) & \longrightarrow & H_i(C') & \longrightarrow & H_i(C'') & \longrightarrow & H_{i-1}(C)\dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots H_i(D) & \longrightarrow & H_i(D') & \longrightarrow & H_i(D'') & \longrightarrow & H_{i-1}(D)\dots \end{array}$$

3.3.5 Groupe d'homologie relative

Définition 3.20. *Les groupes d'homologie relative d'une paire (X, A) sont les groupes d'homologie du complexe de chaines relatives $C_*(X, A)$, on les note $H_i(X, A)$.*

3.3.6 Suite exacte longue d'homologie relative

Définition 3.21. *Soient X un espace topologique et A un sous-espace topologique de X. Pour tout paire (X, A), il existe pour tout $i \in \mathbb{Z}$ un morphisme*

$$\sigma : H_i(X, A) \to H_{i-1}(A)$$

tels que la suite infinie

$$... \to H_i(A) \to H_i(X) \to H_i(X, A) \xrightarrow{\sigma} H_{i-1}(A) \to ... \to H_0(X) \to H_0(X, A) \to 0$$

soit exacte. Les applications $H_i(A) \to H_i(X)$ et $H_i(X) \to H_i(X, A)$ sont les applications naturelles induite par les morphismes de complexe $C_i(A) \to C_i(X)$ et $C_i(X) \to C_i(X, A)$

Soit $x \in X$. La suite exacte longue précédent permet de prouver que les groupes $H_i(X, \{x\})$ et $H_i(X)$ sont isomorphes pour tout $i > 0$. En degré 0, si (X_α) est la famille des composantes connexes par arcs de X, on a

$$H_0(X) = \bigoplus_{\alpha} \mathbb{R} \ \textit{et}\ H_0(X, \{x\}) = \bigoplus_{\alpha \neq \alpha_0} \mathbb{R}$$

où $x \in X_{\alpha_0}$. En effet, pour $i > 2$, on obtient

$$0 \to H_i(X) \to H_i(X, \{x\}) \to 0$$

et le résultat est immédiat. En outre, l'application $H_0(\{x\}) \to H_0(X)$ est injective, il vient donc

$$0 \to H_1(X) \to H_1(X, \{x\}) \xrightarrow{0} \mathbb{R} \to H_0(X) \to H_0(X, \{x\}) \to 0$$

ce qui permet de conclure.

Théorème 3.2 (Théorème des petites chaînes)**.** *[9]Soient X un espace topologique et $U = (U_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X dont les intérieurs recouvrent X :*

$$X = \bigcup_{i\in I} \mathring{U}_i$$

Nous construisons un complexe de chaînes, appelé complexe des chaînes $U-$petites, de la manière suivante. Pour tout $n \in N$, le module $C_n(U)$ est le sous-module (libre) de $C_n(X)$ engendré par les $n-$simplexes singuliers d'image contenue dans l'un des U_i. Le morphisme de bord $\partial : C_n(U) \to C_{n-1}(U)$ est la restriction du morphisme $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$, qui envoie bien chaînes $U-$petites sur chaînes $U-$petites. Notons $H_n(U)$ le $n-$ème groupe d'homologie du complexe des chaînes $U-$petites. La suite des inclusions $(C_n(U) \to C_n(X))_{n\in N}$ est un morphisme de complexes de chaînes.

Ce morphisme de complexes de chaînes induit un isomorphisme en homologie

$$H_n(U) \simeq H_n(X)$$

Preuve : L'idée est de construire un opérateur qui transforme une $n-$chaîne en une $n-$chaîne $U - petite$, par subdivisions barycentriques des $n - simplexes$ standards. Nous allons définir un morphisme de complexes de chaînes $(Sd = Sd_n : C_n(X) \to C_n(X))_{n \in N}$ appelé opérateur de subdivision, qui est fonctoriel, c'est-à-dire que si $f : X \to A$ est une application continue tel que A un sous-espace de X, alors le diagramme suivante est commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{Sd} & C_n(X) \\ {\scriptstyle f_n}\downarrow & & {\scriptstyle f_n}\downarrow \\ C_n(A) & \xrightarrow{Sd} & C_n(A) \end{array}$$

3.4 Théorème de d'excision

[1] [9]Soient X un espace topologique et des sous-espaces topologique A et B tel que $B \subset X$, et $\overline{B} \subset \mathring{A}$. L'inclusion des paires d'espaces topologiques $(X/B, A/B) \to (X, A)$ induit un isomorphisme en homologie pour tout $n \in N$

$$H_n(X/B, A/B) \simeq H_n(X, A).$$

Preuve : Posons $U = \{X/B, A\}$. Comme $\overline{B} \subset \mathring{A}$, l'espace X est réunion des intérieurs de X/B et de A. Nous pouvons donc appliquer le théorème des petites chaînes, l'inclusion $u : C_*(U) \to C_*(X)$ induit un isomorphisme en homologie.
Rappelons que si E et F sont deux sous-modules d'un module G, alors l'inclusion $E \to E + F$ induit un isomorphisme

$$E/(E \cap F) \simeq (E + F)/F.$$

Comme $C_*(u) = C_*(X/B) + C_*(A)$, il vient

$$\begin{aligned} C_*(u)/C_*(A) \simeq C_*(X/B)/(C_*(X/B) \cap C_*(A)) &= C_*(X/B)/C_*(A/B) \\ &= C_*(X/B, A/B). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc un morphisme de suites exactes courtes de complexes de chaines

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_*(A) \arrow[r] \arrow[d, "Id"'] & C_*(U) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & C_*(X/B, A/B) \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_*(A) \arrow[r] & C_*(X) \arrow[r] & C_*(X, A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Où g est l'application induite par l'inclusion $(X/B, A/B) \to (X, A)$, et f le morphisme de complexes de chaînes obtenu comme composition de la projection $C_*(B) \to C_*(B)/C_*(A)$ avec l'isomorphisme $C_*(B)/C_*(A) \simeq C_*(X/B, A/B)$ défini ci-dessus. La commutativité du diagramme ci-dessus est immédiate.

Le diagramme suivant est commutatif, et ses lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd} H_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & H_n(U) \arrow[r] \arrow[d, "u_*"] & H_n(X/B, A/B) \arrow[r] \arrow[d, "g_*"] & H_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & H_{n-1}(U) \arrow[d, "u_*"] \\ H_n(A) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X, A) \arrow[r] & H_{n-1}(A) \arrow[r] & H_{n-1}(X) \end{tikzcd}$$

Comme les première, seconde, quatrième et cinquième flèches verticales sont des isomorphismes, il découle du lemme des cinq que la troisième flèche verticale est aussi un isomorphisme, ce qui démontre le résultat.

Conclusion Générale et perspectives

L'objective de notre travail est ce calcul le groupe fondamentale d'un espace topologique quelconque en appliquant le théorème de Van Kampen, c'est-à-dire ou associe quelque chose algébrique à quelque chose topologique. en fait se groupe est fondamentale en de hors de la topologie, se groupe fondamentale relativement à l'homotopie est facile à défini mais difficile à calculer pour cela on à introduise l'homologie qui sert à facilité le calcule du groupe fondamentale.
Enfin, le sujet de la topologie algébrique est très large et pour l'étendre davantage, on peut le voir comme un homotopie cellulaire, homologie cellulaire, théorème de Brower, théorème de jourdan,

Annexes

Nous appelons ici un ensemble de notions topologiques dont nous avons besoin dans les chapitres mentionnés dans cette mémoire

Topologie Induite

Définition 3.22. *Soit (X, τ) un espace topologique et A une partie de X. On appelle topologie induite par (X, τ) sur A la topologie $\tau_A = \{U \cap A; U \in \tau\}$.*
Autrement dit,La topologie induite par X sur A est la topologie sur A dont les ouverts sont les intersections des ouverts de X avec A. De même façon, Les fermés pour la topologie induite de X sur A sont les intersections de fermés de X avec A.

partie dense

Définition 3.23. *Soit (X, τ) un espace topologique et D une partie de X. D est dite dense dans X si et seulement si $\bar{D}$=X.*

Voisinage

Définition 3.24. *Soit (X, τ) un espace topologique et $a \in X$ on dit qu'une partie V de X est un voisinage de a dans X s'il existe un ouvert O de X vérifiant $a \in O \subset V$ on note $V(a)$ l'ensemble des voisinages de a.*

point isolé

Définition 3.25. *Soit* (X, τ) *un espace topologique et* A *une partie non vide de* X, $a \in A$. *On dit que le point* a *est isolé dans* A *s'il existe un voisinage de* a *dans* X *tel que l'intersection de ce voisinage et de* A *soit réduite au singleton* $\{a\}$.

$$\exists V \in \vartheta(a), V \cap A = \{a\}$$

Recouvrement ouvert

Définition 3.26. *Soit* u *une famille de partie d'un espace topologique* (X, τ). *On dit que* u *est un recouvrement ouvert de* X *si* $u \in \tau$ *c'est-à-dire les membres de* u *sont ouverts et* $X = \bigcup_{U \in u} U$.

Homéomorphisme

Définition 3.27. *Soit* X *et* Y *deux espaces topologiques,*$f : X \to Y$ *est un homéomorphisme si et seulement si* f *est continue, bijective et* f^{-1} *est continue. On dit que* X *et* Y *sont homéomorphes si et seulement si il existe un homéomorphisme de* X *sur* Y.

Espace Séparé(ou de Hausdorff)

Définition 3.28. *Soit* (X, τ) *un espace topologique, Soit* V, W *deux ouverts on dit que* (X, τ) *est séparé si et seulement si pour tout points distincts* (x, y) *de* X, *il existe* $V \in \vartheta(x)$ *et* $W \in \vartheta(y)$ *tels que* $V \cap W = \emptyset$.

Anneau

Définition 3.29. *On appelle anneau la donnée d'un ensemble A et de deux lois de composition interne notées $+$ et $\times$ sur A vérifiant les propriétés suivantes :*

- $*$ *$(A, +)$ est un groupe abélien dont le neutre sera noté 0_A ;*
- $*$ *La loi $\times$ est associative : pour tous $a, b, c \in A$, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$;*
- $*$ *La loi $\times$ possède un élément neutre noté 1_A ;*
- $*$ *La loi $\times$ est distributive à gauche et à droite par rapport à la loi $+$, c'est-à-dire que pour tout $a, b, c \in A$, on a*

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \text{ et } (b + c) \times a = b \times a + c \times a.$$

Lorsque la loi $\times$ est commutative, on dit que l'anneau est commutatif.

- $*$ *Dans un anneau A, tous les éléments $a \in A$ n'admettent pas forcément d'inverse pour la loi $\times$. Lorsque c'est le cas, on dit que a est inversible ou que c'est une unité de A, et on note son inverse a^{-1}.*
- $*$ *Si A et B sont deux anneaux, on munit $A \times B$ d'une structure d'anneau en posant $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ et $(a, b) \times (a', b') = (a \times a', b \times b')$.*
- $*$ *Si A est un anneau et B est une partie de A, on dit que B est un sous-anneau de A si, muni des lois induites par A, c'est lui-même un anneau.*

Bibliographie

Bibliographie

[1] A.Touzé, Topologie algébrique, Notes du cours , 2013-2014,

[2] C.Godbillon, ÉLémentes de topologie algébrique, Hermann Paris, 1971.

[3] F.Paulin, C de Magistère-Cours de première année de mastère, 2009, http ://math.u-psud.fr

[4] I.Itenberg, Topologie algébrique, Version préliminaire de ces notes a été préparée par Raphaël Alexandre, 2017-2018.

[5] J.Dieudonné, Éléments D'analyse, Tome 1, Chapitre 3, Gauthier-Villars, 1990.

[6] JB.Campesato, A.Marchand, Groupe fondamental et revêtement, 2011, http ://rimath.saitama-u.ac.jp.

[7] j.Bichon, R.Taillefer, Notes de cours Master 2 Mathématiques, 2013-2014, université Blaise Pascal.

[8] N.Bourbaki, Éléments de mathématique topologie algébrique, chapitre 1 à 4, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016