REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématiques
Option : Analyse Fonctionnelle Et Équations Différentielles
Mémoire de Fin d'Etudes

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Intitulé

Théorèmes du point fixe et applications aux équations différentielles

Présenté par
✓**Bentoumi Nour Elhouda**
✓**Bouzar Laalia**
✓**Fradj Nacira**
✓**Routal Nacira**

soutenue le 25/07/2019 devant le Jury constitué de

Mr.K.MAAZOUZ	**Pr**	**Président.**
Mr. K.BENIA	**MAA**	**Examinateur.**
Mr.A.OUARDANI	**MCB**	**Rapporteur.**

Promotion : **2018 \ 2019**

★ *Remerciement* ★

★ Tout d'abord nous remercions ALLAH le tout miséricordieux qui nous a donné la force et Le courage pour réaliser ce travail.

★ Le grand merci à notre promoteur Mr.Ouardani A pour ses conseils et son aide et qui a mis à disposition tous les nécessaires pour réaliser ce mémoire.

★ Nous voudrons remercier en deuxième lieu les membres de jury Mr. B.Halim pour le grand honneur qu'il nous fait en présidant le jury de notre soutenance, Mr. k.Benia pour l'honneur qu'il nous fait d'avoir accepter l'examen de notre travail.

★ Nous remercions également toute l'équipe pédagogique de l'Université Ibn Khaldoun -Tiaret-spécialement département de mathématique pour leur encadrement durant notre cursus universitaires.

★ Enfin Nous tenons à remercier toutes les personnes qui nous ont conseillé lors de la rédaction de ce mémoire : Nos familles, nos amis, nos professeurs, et nos camarades de promotion.

★ ★ ★

*__________ *Je dédie ce travail à* __________*

A mon père, mon premier encadrant, depuis ma naissance.

A ma mère qui ma donné un grand soutien tout le long de mes étude

A mes frères et ma chère sœur «Ouiam »

Pour leurs soutiens moral infinis et leurs aides incessantes et leurs conseils précieux tout au long de mes études

A mes grands parents qui je souhaite une bonne santé

A tout les membres familles

A mes chers amies

A mes collègues dans ce travail

tous ceux que j'aime et qui m'aime,j'espère que nous garde les belles souvenirs

__________ *Bentoumi Nour Elhouda* __________

*___________ *Je dédie ce travail à* ___________*

Mes chers parents,pour tous leurs sacrifices,leur amour,leur tendresse,leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A Mes chères sœurs et frères pour leurs encouragements permanents,et leur soutien moral,

Ma grande famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

A Mes chers amies surtout Nour elhouda

A mes collègues dans ce travail

________________ *Bouzar Laalia* ________________

*__________ *Je dédie ce travail à* __________*

A mes chers parents qui étaient toujours attentifs,affectueux et compréhensifs qui m'ont soutenu durant les années de mes études , à qui je témoigne toute ma gratitude .

A mes chers fréres :Hamza et Rabeh,Boudaoud et sa femme Djamila.

A ma belle soeur Djamila et leurs fiancie Bachir.

A mes collègues dans ce travail

Et Je remercie également tout ceux qui ont apporté leur aide de prés ou de loin de ce travail et finalememt pour la promotion.

________________ *Fradj Nacira* ________________

*——— *Je dédie ce travail à* ———*

A mes parents, qui sont la graine de mon existence

et la source de ma réusite,pour leurs

encouragements et leurs sacrifices.

A mes frères et mes soeurs.Je vous remercie pour

votre confiance,votre soutien.

A tout mes enseignants.

A toute ma famille .

A tout mes collégues .

——— *Routal Nacira* ———

INTRODUCTION

DAns ce mémoire, on a aborder quelques théorèmes du point fixe et applications aux équations différentielles.

Ces théorèmes représentent d'importants outils mathématiques de base pour montrer l'éxistence et l'unicité de solutions et trés utilisées dans l'analyse non linéaire appliquée aux équations différentielles ordinaires [8, 10, 6].

La théorie du point fixe est basée sur le théorème du point fixe qui à la formulation génèrale suivante :

$T : X \to X$, tel que X un espace de Banach et T une application (ou bien un opérateur) vérifiant certaines hypothèses (continuité, compacité, contraction), alors il existe $x \in X$, tel que $Tx = x$ c'est-à-dire : T admet un point fixe.

Ce mémoire est composé en trois chapitres comme suit :

Chapitre 1 : Nous rappelons quelques définitions et notions de l'analyse fonctionnelle qui nous seront indispensables à la compréhention de la suite de ce mémoire.

Chapitre 2 : Nous présentons des théorèmes principales du point fixe dans les deux espaces métriques et topologiques .

Un de ces théorèmes est le théorème de l'application -contractante prouvé par Ba-

nach dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même qui assure l'éxistence d'un unique point fixe .
Ensuite le théorème du point fixe de Schauder qui est au fait une extension de celui de théorème de Brouwer en dimension infinie est plus topologiques et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe qui n'est pas nécessairement unique .

Chapitre 3 : Nous sommes intéressé dans dernier chapitre aborder quelques applications des théorèmes cites ci-dessus aux équations différentielles .

On commence par application de Schauder et ensuite application de Problème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaires et étant donnée une condition initiale (t_0, x_0) et équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad (t, x(t)) \in U.$$

Une autre application de théorème de Picard est la démonstration du théorème d'inversion locale.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre nous rappelons quelques notions nécessaires de l'analyse fonctionnelle et des définitions qui nous seront indispensables á la compréhension de la suite de ce mémoire.

1.1 Espace métrique :

Définition 1.1. *Soit X un ensemble non-vide. On dit qu'une application*

$$\begin{aligned} d:\ X \times X &\longrightarrow \mathbb{R}+ \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y), \end{aligned}$$

*d est une **distance** sur X si elle vérifie les trois axiomes suivants :*

1. *séparation : $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.*
2. *symétrie : pour tout $x, y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$.*
3. *inégalité triangulaire : pour tout $x, y, z \in X,\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.*

*On appelle **espace métrique** tout couple (X, d) où $X \neq \emptyset$ est un espace vectoriel et d est une distance.*

Exemple 1.1.1. *L'application suivante :*

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}+$$
$$(x, y) \longmapsto d(x, y) = \mid x - y \mid,$$

définie une distance, appellée distance usuelle sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1.2. *Soit* X *un ensemble et* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}+$ *une application définie par :*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & si\ x = y \\ 1, & si\ x \neq y \end{cases}$$

est une distance (la distance discrète), le couple (X, d) *est appellé espace métrique discrèt.*

1.2 Suite de Cauchy :

On dit que la suite $(x_n)_n$ dans l'espace métrique (X, d) est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0, \quad \text{tel que} \quad \forall n, m > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

on écrit alors

$$d(x_n, x_m) \to 0, \quad \text{quand} \quad n, m \to \infty.$$

1.3 Espace métrique complet :

On dit que (X, d) est un espace métrique complet, si toute suite de Cauchy de X converge dans X.

1.4 Espace vectoriel normé :

Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle norme sur X, une application $\|\cdot\|$ définie par :

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: X &\longrightarrow \mathbb{R}+ \\ x &\longmapsto \| x \|, \end{aligned}$$

qui vérifie

N_1. séparation. $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

N_2. homogénéité positive. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in X : \| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$,

N_3. inégalité triangulaire. $\forall x, y \in X : \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme est appellé **espace vectoriel normé** (e.v.n.).

Soit X un e.v.n. L'application

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R}+ \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = \| x - y \|, \end{aligned}$$

s'appelle la distance induite par la norme.

1.5 Espaces de Banach :

Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

1.6 La convexité

On dit que $C \subset X$ est un ensemble convexe si :

$$\forall t \in [0, 1],\ \forall (a, b) \in C^2, \quad ta + (1 - t)b \in C.$$

1.7 La contraction :

Définition 1.2. *Soit (X, d) un espace métrique, une application $T : X \to X$ est dite :*

1. *Lipschitzienne (ou K-Lipschitzienne) si et seulement s'il existe une constante $K \geq 0$ telle que, pour tout $x, y \in X$ on a :*

$$d(Tx, Ty) \leq K d(x, y).$$

2. *Contraction ou une application contractante si $K < 1$.*
3. *Non expansive si et seulement si $K \leqslant 1$.*
4. *Contractive si et seulement si pour tout $x, y \in X$ on a :*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y).$$

Il est clair que, si T est non expansive, alors elle est Lipschitzienne.

1.8 La convergence uniforme :

Définition 1.3. *Soient X un ensemble (Y, d) un espace métrique et A un sous-ensemble de X. Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction définie sur X et à valeurs dans Y. On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon, \forall x \in A \Rightarrow d\left(f_n(x), f(x)\right) \leq \varepsilon.$$

1.9 Équicontinue :

Définition 1.4. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_n$ est équicontinue si :*

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall y \in I,\ |x - y| < \delta \Rightarrow\ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

1.10 Espaces topologiques :

Soit X un ensemble non vide et soit $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de partie de X.

Définition 1.5. *On appelle τ une topologie sur X toute partie de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant les conditions suivantes :*

1. *$X \in \tau$ et $\varnothing \in \tau$.*
2. *La famille τ est stable pour la réunion quelconque de parties de τ, c'est-à-dire*

$$\forall (U_i)_i \in X \subset \tau, alors \quad \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau.$$

3. *La famille τ est stable pour l'intersection finie de parties de τ, c'est-à-dire*

$$\forall (U_i)_i = 1 \cdot \cdot n \in \tau, alors \quad \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau.$$

- Le couple (X, τ) est appelé un espace topologique.

- On le note souvent par X.

1.10.1 Homéomorphe :

Définition 1.6. *En topologie un homéomorphisme est une application bijective continue d'un espace topologique dans un autre, dont la bijection réciproque est continue. Dans ce cas, les deux espaces topologiques sont dits homéomorphes.*

1.10.2 La rétraction :

Définition 1.7. *On appelle rétraction de l'espace topologique X sur un fermé F de X, tout fonction continue de X dans F qui est l'identité sur F.*

1.10.3 L'enveloppe convexe :

Définition 1.8. *Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$ espace véctoriel E .*
l'enveloppe convexes de A est l'ensemble de tout les combinaisans convexes d'éléments de A.

$$conv\, A = \left\{ x \in E : \; x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \alpha_i, \; p \in \mathbb{N}, \, \alpha_i \in A, \; \lambda_i \in \mathbb{R}_+ ; \; \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \right\}.$$

1.11 les équations différentielles ordinaires :

Soient I un ouvert de $\mathbb{R}$, X un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ et $U_1, U_2, \cdots, U_n$ des ouvert de E. les équations différentielle ordinaire, seront notées en abrégé EDO dans la suite.

Définition 1.9. *Une équation différentielle sur l'espace de Banach x est une équation de la forme*

$$F(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

où n est un entier non nul appelé l'ordre de l'équation, F est une fonction donnée de $(n+2)$ variables supposée régulières sur $I \times U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$, x est la fonction inconnue de I dans l'espace de Banach X et $x, x', x'', \cdots, x^{(n)}$ sont ses dérivées successives. Plus précisément le problème est de trouver un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une fonction $x : t \mapsto x(t)$ dérivable sur cet intervalle jusqu'à l'ordre n et vérifiant l'équation

$$\forall t \in I, \quad F(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0, \tag{1.2}$$

cette équation est de forme très générale, on pratique, on préférera travailler avec *des équations plus particulières dites du type explicite, pour lesquelles il existe une fonction H régulière sur $I \times U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_{n-1}$ tel que*

$$x^{(n)} = H(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n-1)}). \tag{1.3}$$

Exemple 1.11.1.

$$F(t, x, x', x'') = 0,$$

est d'ordre 2.

$$F(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0,$$

est d'ordre n.

1.11.1 Les équations différentielles linéaires :

Définition 1.10. *Une EDO d'ordre n est linéaire si elle est de la forme*

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = g(t), \tag{1.4}$$

avec tous les $x^{(i)}$ de puissanse i et tous les coefficients dépendant au plus de t, si g est nulle, alors l'équation est dite homogène, ou sans second membre. L'équation différentielle suivante

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{(n-1)}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = 0, \tag{1.5}$$

est appelée l'équation différentielle homogène associée.
Si $a_j(t),\ 0 \leq j \leq n$, sont des constants, on parle d'équation différentielle linéaire a coefficients constants.

1.12 Systèmes différentiels linèaires :

Soient I un intrvalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{ij} : I \mapsto \mathbb{R}$, $i, j = 1, \cdots n$ et $f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues sur I. L'objectif est de trouver des fonctions

$$x_1, \cdots, x_n : I \longrightarrow \mathbb{R},$$

de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{1.6}$$

on peut écrire ce systéme sous la forme matricielle suivante :

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t), \tag{1.7}$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

En générale il peut y avoir une infinité de solutions de cette équation.

Soient $t_0 \in I$ et $X(t_0) \in \mathbb{R}^n$ données

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Le but est de trouver X une solution de l'équation (1.7) satisfaisants à la condition initiale (1.8). Autrement dit, existe-il X une fonction dérivable définie sur I a valeur dans $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + F(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

pour tout $t \in I$.

Définition 1.11. *le systémes* (1.7) *est dit homogène si* $F = 0$ *c'est-à-dire :*

$$X'(t) = A(t)X(t).$$

Définition 1.12. *Le système* (1.7) *est dit non homogène si* $F \neq 0$ *c'est-à-dire :*

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t).$$

1.12.1 Problème de Cauchy :

Un problème de Cauchy est un problème constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution vérifiant une certaine condition initiale. Cette condition peut prendre plusieurs formes selon la nature de l'équation différentielle.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction.

Définition 1.13. *Étant donnée une équation différentielle du premier ordre sous la forme suivante :*

$$x'(t) = f(t, x),$$

pour $(t, x(t)) \in U$, *et un point* $(t_0, x_0) \in U$ *le problème de Cauchy correspondant consiste à chercher des solution* $x = x(t)$, *tell que* $x(t_0) = x_0$. *On note le problème de Cauchy de la forme suivante*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad (t, x(t)) \in U \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \tag{1.10}$$

Définition 1.14. *Une solution du problème de Cauchy* (1.10) *sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ avec la condition initiale* $(t_0; x_0) \in U$ *et* $t_0 \in I$ *est une fonction dérivable* $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que :*

- *pour tout* $t \in I,\ (t, x(t)) \in U,$
- *pour tout* $t \in I,\ x'(t) = f(t, x(t)),$
- $x(t_0) = x_0$

Théorème 1.1. *Une fonction* $x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une solution du problème de Cauchy* (1.10) *si et seulement si :*

1. *La fonction x est continue et* $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ (t, x(t)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}.$
2. *La solution x du problème de Cauchy est appelée l'intégrale du problème*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

1.12.2 Cylindre de sécurité :

On dit que cylindre de sécurité pour l'équation si toute solution $x : I \to \mathbb{R}^n$ du problème de cauchy $x(t_0) = x_0$ avec $I \subset [t_0 - h, t_0 + h]$ reste contenue dans $\bar{B}(x_0, r_0)$ avec h :longueur,t :temps et $t_0 \geq h$

$h \leq min(t_0, \frac{r_0}{M})$ et $M = \sup\limits_{(t,x)\in C_0} \|f(t, x)\|$

Chapitre 2

Théorème du point fixe

Dans ce chapitre on fait un rappel sur la théorie du point fixe, on commencera par le théorème de principe de contraction de Banach dans un espace métrique et on pourra ainsi aborder successivement le théorème du point fixe de Brouwer valable en dimension finie puis le théorème de Schauder qui en est la généralisation en dimension infinie dans un espace topologique.

2.1 Théorème du point fixe dans un espace métrique

2.1.1 Théorème du point fixe de Banach

Théorème 2.1. *Soit T une contraction dans un espace de Banach X, alors T admet un unique point fixe.*

2.1.2 Généralisation du théorème de Banach

Théorème 2.2. *Soit T une application dans un espace de Banach X, tel que T^n est une contraction dans X pour quelque entier positive n, alors T admet un unique point fixe.*

$$(T^n = \underbrace{T \circ T \circ .... \circ T}_{nfois}.)$$

Preuve :

Le théorème du point fixe de Banach implique qu'il existe un unique point fixe pour T^n cet éléments nomé x_0.

Maintenant on note que :

$$\|T(x_0) - x_0\| = \|T^n(T(x_0)) - T^n(x_0)\| \leq c\|T(x_0) - x_0\|,$$

implique que $T(x_0) = x_0$ comme point fixe pour $0 < c < 1$, l'unicité est clair comme point fixe pour T est aussi un point fixe pour T^n.

Théorème 2.3. *Soit F un sous ensemble fermé dans un espace de Banach et soit $T : F \to F$ une application contractante, alors*

a. l'équation $Tx = x$, a une seule solution unique.

b. la solution unique x peut être obtenir par la limite de la suite $(x_n)_n$ de F définie par $x_n = Tx_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots$, où x_0 est un arbitraire de F.
$x = \lim\limits_{n\to\infty} T^n(x_0)$.

2.1.3 Théorème de Picard

Théorème 2.4. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application contractante, alors :*

1. *T possède un unique point fixe x.*
2. *pour tout $x_0 \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(x_0) = x$.*

Preuve :

Existence : Soit $x_0 \in X$ et $(x_n)_n$ la suite associe, on a :

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n),$$

on va montrer par récurrence sur n que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1), \tag{2.1}$$

pour $n = 0$

$$d(x_0, x_1) \leq k^0 d(x_0, x_1),$$

supposons que la condition est vraie pour n et montrons pour $n+1$,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(T(x_n), T(x_{n+1})) &\leq kd(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq k(k^n d(x_0, x_1)) \\ &\leq k^{n+1} d(x_0, x_1), \end{aligned}$$

d'où. (2.1) est vérifiée.
Montrons que $(x_n)_n$ est de Cauchy. Soient $p, q \in \mathbb{N}, \forall q > p$,

$$\begin{aligned} d((x_p), (x_q)) &\leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_q) \\ &\leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + \cdots + d(x_{q-1}, x_q) \\ &\leq k^p d(x_0, x_1) + k^{p+1} d(x_0, x_1) + \cdots + k^{q-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq d(x_0, x_1)[k^p + k^{p+1} + \cdots + k^{q-1}] \\ &= d(x_0, x_1) \frac{k^p - k^q}{1 - k} \\ &\leq \frac{d(x_0, x_1)}{1 - k} k^p. \end{aligned}$$

Ainsi pour $q > p,\ p \geq 0$,

$$d(x_p, x_q) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1 - k} k^p < \varepsilon.$$

Ceci montre que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans (X, d) et comme X est un espace complet, alors il existe $x \in X$ tel que

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = x.$$

Existence du point fixe : On montre que $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ est un point fixe de T. On a

$$x_{n+1} = Tx_n; \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} Tx_n \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

$x = T \lim_{n\to\infty} x_n$ (car T est continue,)
$x = Tx$ d'où x est un point fixe de T.

Unicité du point fixe : Raisonnons par absurde. Supposons qu'il existe x_1 et x_2 tels que $x_2 \neq x_1$.

si x_1 est point fixe, alors $x_1 = Tx_1$,
si x_2 est point fixe, alors $x_2 = Tx_2$.

De plus,

$$d(Tx_1; Tx_2) \leq kd(x_1, x_2) \Leftrightarrow d(x_1, x_2) \leq kd(x_1; x_2),$$

$1 \leq k$, contradiction car $k < 1$. D'où unicité.

Contre exemple : Les exemples suivants montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire.

1. X n'est pas stable par f : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, sur $X = [0,1]$. Or X est fermé dans $\mathbb{R}$, et complet car $\mathbb{R}$ est complet. De plus,

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \Rightarrow \sup_{x\in X}|f'(x)| < 1 \Rightarrow f \text{est contractante.}$$

   Mais f n'a pas de point fixe car $f([0,1]) = [1, \sqrt{2}]$, i.e. X n'est pas stable par f.

2. f n'est pas contractante : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, sur $X = [0, \infty[$.

Or $f : X \to X$, et X est un fermé de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est complet donc X est complet. Mais $\sup\limits_{x \in X} |f'(x)| = 1$ donc f n'est pas contractante.

3. X n'est pas complet : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2}$ sur $X =]0, \dfrac{\pi}{4}]$. Or

$$f(]0, \frac{\pi}{4}]) =]0, \frac{\sqrt{2}}{4}[\subset]0, \frac{\pi}{4}],$$

et $\sup\limits_{x \in X} |f'(x)| = \dfrac{1}{2} < 1$, donc f est contractante.
Mais X n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc pas complet.

2.1.4 Variations sur le Théorème de Picard

Proposition 2.1. *Une application continue $f : C \to C$, avec C compact métrisable telle que pour tout couple de points distincts (x, y) de C, $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, admet un unique point fixe a. De plus, pour tout $x_0 \in C$ la suite $(f^n(x_0))_n$ converge vers a.*

Exemple 2.1.1. *La fonction :*

$$f = [-\pi, \pi] \to [-1, 1],$$

$$x \mapsto \sin x,$$

possède un unique point fixe (en l'occurrence 0).

2.1.5 Théorème (Cauchy Lipschitz)

Théorème 2.5. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, si $f : U \to \mathbb{R}^n$ est continue et localement Lipschitzienne par rapport à x sur U et soient*
$h, r_0 > 0$, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - h, t_0 + h] \times B_f(x_0, r_0)$, le

problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & (t, x(t)) \in U \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad . \tag{2.2}$$

Etant donné $(t_0, x_0) \in U$ *,une solution* $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$*,tel que* $t_0 \in I$ *admet une unique solution* $x : [t_0 - h, t_0 + h] \to U$*. De plus, si on pose*

$$\phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du,$$

il existe $p \in \mathbb{N}$*, tel que la suite* $\phi^p(x)$ *converge uniformément vers la solution exacte.*

Preuve :

On commence par construire un cylindre de sécurité pour C.

Soit V un voisinage de (t_0, x_0) sur lequel f est k-Lipschitzienne par rapport à x, et soient $h_0 > 0$ et $C_0 = [t_0 - h_0, t_0 + h_0] \times B(x_0, r_0) \subset V$ un cylindre. C_0 est un fermé borné de $\mathbb{R}^{n+1}$, donc compact, et en déduit que f est bornée sur C_0.

Soit

$$M = \sup_{(t,x) \in C_0} \parallel f(t, x(t)) \parallel .$$

On pose $h = min(h_0, \frac{r_0}{M})$. On va montrer que

$$C = [t_0 - h, t_0 + h] \times B_f(x_0, r_0),$$

est un cylindre de sécurité pour C.

Soit $x : I = [t_0 - h_0, t_0 + h_0] \to \mathbb{R}^n$, avec $x(t_0) = x_0$ et $x' = f(t, x)$, $\forall t \in I$.

Supposons qu'il existe $\tau \in [t_0, t_0 + h[$ tel que $x(\tau)$ n'appartient pas à $B_f(x_0, r_0)$.

De plus, supposons que $J = \{t \in [t_0, t_0 + h[: x(t) \notin B_f(x_0, r_0)\}$ soit non vide.

On pose $\tau = \inf J$. Alors $\forall t \in [t_0, \tau[$ on a $x(t) \in B_f(x_0, r_0)$, et de plus $d(x_0, x(\tau)) = r_0$. Comme $(t, x(t)) \in C_0$, $\forall t \in [t_0, \tau]$ et $x' = f(t, x)$ on a, par le théorème des accroissements finis,

$$r_0 = \| x_0 - x(\tau) \| = \| x(t_0) - x(\tau) \| \leq | t_0 - \tau | \sup_{t \in [t_0, \tau]} | x'(t) | < Mh \leq r_0.$$

Donc par passage à la limite , on a $x(t) \in B_f(x_0, r_0), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + h] \bigcap I$. De même on montre que $x(t) \in B_f(x_0, r_0), \quad \forall t \in [t_0 - h, t_0] \bigcap I$ et donc $x(t) \in B_f(x_0, r_0), \quad \forall t \in I$.

Dans la suite on travaille avec ce cylindre de sécurité. On remarque que par construction on a $\sup_C | f | = M$ et f est k-Lipschitzienne par rapport à x sur C. On note $F = C^0([t_0 - h, t_0 + h], B(x_0, r_0))$ muni de la distance $d = \| \cdot \|_\infty, \quad \forall x \in F$ on associe $\phi(x)$ comme suit :

$$\phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u)) du.$$

On montre d'abord l'équivalence suivante : x est solution de (2.2) si et seulement si x est un point fixe de ϕ.

($\Leftarrow$) Supposons que x est un point fixe de ϕ. Alors $\forall x \in F$ on a $\phi(x) = x$ d'où $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u)) du$.

Or f est continue sur U donc x est continue sur U.

De plus, x est dérivable sur $[t_0 - h, t_0 + h]$ et sa dérivée égale $f(t, x(t))$, i.e. $x'(t) = f(t, x(t))$. On a aussi

$$x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(u, x(u)) du = x_0.$$

Donc f est solution du problème de Cauchy (2.2).

($\Rightarrow$) Supposons maintenant que x est solution de (2.2).

On a alors $x'(t) = f(t, x(t))$ et $x(t_0) = x_0$. On peut intégrer x_0 par rapport à u car $x'(u) = f(u, x(u))$ et $u \to f(u, x(u))$ est continue sur un segment et donc intégrable sur ce même segment. Alors on obtient :

$$\int_{t_0}^{t} x'(u)du = \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du = [x(u)]_{u=t_0}^{u=t} = x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0.$$

Donc, on a bien

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du = \phi(x)(t),$$

et donc x est un point fixe de ϕ.

On veut appliquer le théorème du point fixe à ϕ^p (pour p bien choisi).

1. On montre d'abord que ϕ est une application de F dans F.

   Pour cela on montre que

   $$\phi(x)(t) \in B_f(x_0, r_0), \quad \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h].$$

   Soit $x \in F$. On remarque que si $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$,

   $$\begin{aligned} \|\phi(x)(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(u, x(u))\| \, du \\ &\leq M \int_{t_0}^{t} du \\ &\leq M \mid t - t_0 \mid \\ &\leq Mh \leq r_0. \end{aligned}$$

   Donc $\forall t \in [t_0 - h, t_0 + h],\ \phi(x)(t) \in B_f(x_0, r_0)$ d'où $\phi(x) \in F$ et on a évidemment la stabilité de F par ϕ^p.

2. On montre maintenant que ϕ^p est contractante. Soient $x, z \in F$. On note $x_p = \phi^p(x)$ et $z_p = \phi^p(z), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$. Par récurrence sur p on montre qu'on a :

   $$\| x_p(t) - z_p(t) \| \leq K^p \frac{\mid t - t_0 \mid^p}{p!} d(x, z). \qquad (H)$$

Initialisation : C'est évident dans le cas $p = 0$.

Généralisation : Supposons que pour un certain entier p quelconque mais fixé on ait (H).

Alors

$$\begin{aligned}
\| x_{p+1}(t) - z_{p+1}(t) \| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} k \| x_p(u) - z_p(u) \| du \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} k.k^p \frac{| u - t_0 |^p}{p!}.d(x,z)du \right| \text{ (par(H))} \\
&\leq \frac{k^{p+1}}{p!} d(x,z) \left| \int_{t_0}^{t} | u - t_0 |_p \, du \right| \\
&= \frac{k^{p+1}}{p!} d(x,z) \left| \left[\frac{| u - t_0 |^{p+1}}{p+1} \right]_{u=t_0}^{u=t} \right| \\
&= k^{p+1} \frac{| t - t_0 |}{(p+1)!} d(x,z),
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

Comme $| t - t_0 | \leq h$

on a

$$d(x_p(t), z_p(t)) \leq k^p \frac{h^p}{p!} d(x,z),$$

donc ϕ est lipschitzienne de rapport $k^p \frac{h^p}{p!}$. Et il existe un $p \in \mathbb{N}^*$, tel que $k^p \frac{h^p}{p!} < 1$, (car $\lim\limits_{p \to \infty} k^p \frac{h^p}{p!} = 0$).

Donc, pour $q \geq p$, ϕ^q est contractante.

Le théorème nous donne la complétude de F.

On déduit du théorème 2.4 que ϕ^p admet un unique point fixe x. De plus

$$\phi^p(\phi(x)) = \phi(\phi^q(x)) = \phi(x),$$

donc $\phi(x)$ est un point fixe de ϕ^q, et par unicité du point fixe de ϕ on a $\phi(x) = x$. Comme les points fixes de ϕ sont des points fixes de ϕ^q en déduit que x est l'unique point fixe de ϕ. Finalement, x est l'unique solution de (2.2).

Exemple : Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante.
Montrer que f admet un point fixe.

- On considère l'ensemble $I = \{x \in [0,1] \quad \text{tel que} \quad f(x) \leq x\}$.
  Alors $I \neq \varnothing$ car $1 \in I$. I est borné donc admet une borne inférieure a.
  Pour $x \in I$, on a alors $x \geq a$ et donc $f(x) \geq f(a)$ car f est croissante, d'où $x \geq f(a)$ pour tout $x \in I$. On en déduit que $f(a)$ est un minorant de I, donc $f(a) \leq a$. On en déduit $f^2(a) \leq f(a)$ et donc que $f(a) \in I$, d'où $a \leq f(a)$ par définition de a.
  Donc $a = f(a)$ est un point fixe de f.

2.2 Théorème du point fixe dans un espace topologique

2.2.1 Théorème du point fixe de Brouwer

Définition 2.1. *On dit qu'un espace topologique X a la propriété du point fixe si toute application continue $T : X \to X$ possède un point fixe.*

Remarque 2.1. *le théorème de Brouwer est le théorèrme du point fixe fondamental en dimension finie qui affirme les théorèmes suivants :*

Théorème 2.6. *Tout application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle même admet un point fixe.*

Théorème 2.7. *Il n'existe pas d'application $f : \bar{B}^m \to S^{m-1}$ continue telle que l'on ait $f|_{S^{m-1}} = Id$.*

(où $\bar{B}^m$ est la boule unité fermé et S^{m-1} est la frontière de cette boule.)

Preuve :
Soit f une telle rétraction, on pose $g(x) = -f(x)$, alors $g \in C^0\left(\bar{B}^m, \bar{B}^m\right)$ admet un point fixe x_0, lequel satisfait donc $x_0 = -f(x_0)$, comme f est á valeurs dans la

sphère unité, $x_0 \in S^{m-1}$, comme f est une rétraction, en déduit que $f(x_0) = x_0$ et donc que $x_0 = 0$ ce qui contredit $\|x_0\| = 1$.

Remarque 2.2. *Théorème de non rétraction continue de la boule et théorème de Brouwer sont deux résultat équivalents.*

La boule unité fermé de $\mathbb{R}^m$ n'est pas le seul ensemble á possèder la proprieté de point fixe.

Corollaire 2.1. *Soit C un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$, toute application continue de C dans C admet au moins un point fixe.*

2.2.2 Théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder est définie sur des espaces vectoriels topologiques de dimension infinie.

Corollaire 2.2. *Soit X un espace de Banach, $k \subset X$ un sous ensemble convexe compact et non vide et soit $T : K \to K$ un opérateur continu, alors T admet au moins un point fixe.*

Théorème 2.8. *Soit X un espace de Banach, $D \subset X$ un ensemble convexe, fermé, borné et non vide, et soit $T : D \to D$ un opérateur continu complet, alors T admet au moins un point fixe.*

Théorème 2.9. *Soit X un espace de Banach C un convexe fermé de X et T une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact, alors T admet un point fixe.*

Lemme 2.1. *Soit X un espace de Banach et A une partie relativement compacte de X alors $\overline{conv}(A)$ est compact.*

Preuve :

(Théorème 2.9) Soit $C' = \overline{conv}T(C)$, il s'agit d'un convexe inclus dans C, en effet $T(C) \subset C$ donc $conv\, T(C) \subset C$ car C est convexe et $\overline{conv}\, T(C) \subset C$ car C est fermé.

De plus C' est compact comme l'enveloppe convexe fermé d'un ensemble relativement compact dans un espace complet d'aprés le lemme 2.1 on applique alors le théorème de Schauder à la restriction de T a C'.

Définition 2.2. *On dit que f admet un ε-point fixe dans C si la condition suivante est satisfaite :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in C : \|f(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

Proposition 2.2. *Soit f une application non-expansive, alors f admet un ε- point fixe dans $B(0,R)$.*

Preuve :

On pose $C = B(0,R)$, soit $r \in]0.1[$, alors l'application rf est une contraction et elle admet un point fixe noté xr dans C.

En effet $\forall x, y \in C$, on a

$$\|rf(x) - rf(y)\| = r\|f(x) - f(y)\| \leq r\|x - y\|,$$

(car f est non-expansive),

ce qui entraine que

$$0 \leq \|f(xr) - xr\| = \|f(xr) - rf(xr)\| = (1-r)\|f(xr)\| \leq (1-r)R,$$

par passage à la limite lorsque $r \to 1^-$ on obtient que f admet un ε- point fixe.

2.2.3 Le principe de Leray-Schauder

Théorème 2.10. *Soit X un espace de Banach $k \subset X$ un sous ensemble convexe et fermé $U \subset K$ un ensemble borneé ouvert dans K et $Q_0 \in U$ un éléments fixe, supposons que l'opérateur $T : \bar{U} \to K$ est continu, complet et satisfait la condition de limite*

$$Q \neq (1-\lambda)Q_0 + \lambda T(Q), \quad \textit{pour tout} \quad Q \in \partial U, \quad \lambda \in (0.1),$$

alors T admet au moins un point fixe dans $\bar{U}$.

2.2.4 Théorème de Cauchy-Arzela-Peano

Théorème 2.11. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ est une application continue.*
soit $C = [t_0 - h, t_0 + h] \times \bar{B}(x_0, r_0)$ un cylindre de sécurité avec $h \leq min(h_0, \frac{r_0}{M})$ pour l'équation $x'(t) = f(t, x(t))$, alors il existe une solution avec condition initiale $x'(t_0) = x_0$ sur $[t_0 - h, t_0 + h]$.

Exemple 2.2.1. – *Montrer le théorème de Cauchy-Peano en utilisant le théorème de Schauder.*
– *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(t_0, x_0) \in I \times U$ et $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ une application continue.*

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{c}$$

Le but est de montrer que (c) admet une solution locale. On remarque que (c) est équivalent à

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,$$

car f est continue.

On va se placer sur un cylindre de sécurité : soit $r, M > 0$ tels que $\bar{B}(x_0, r) \subset U$, $J = [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}] \subset I$ et $\sup\limits_{(t,x) \in J \times B(x_0, r)} \| f(t, x) \| \leq M$.
On note :

$A = [x : J \to \bar{B}(x_0, r) \quad M$-lipschitzienne telle que $\quad x(t_0) = x_0]$ et on définit l'opérateur T sur A par :

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,$$

Ainsi montrer que T admet un point fixe. On commence par montrer que T est bien défini, pour $x \in A$ et $t \in J$, on a

$$\|Tx(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \right\| \leq M \mid t - t_0 \mid < r,$$

et pour $t_1, t_2 \in J$,

$$\| Tx(t_2) - Tx(t_1) \| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))ds \right\| \leq M \mid t_2 - t_1 \mid,$$

donc T est bien défini.

A est bien convexe, fermé et on montre par le théorème d'Ascoli que A est compact. En effet, pour $t \in J, \quad x(t) \quad$ tel que $\quad x \in A \subset \bar{B}(x_0, r)$ donc A est ponctuellement borné (en dimension finie) et pour $x \in A$,

$$\| x(t_1) - x(t_2) \| \leq M \mid t_1 - t_2 \mid,$$

donc A est bien équicontinue. Montrons que T est continu pour appliquer le théorème de Schauder. Soit $x, y \in A$ et $\varepsilon > 0$, alors f est uniformément continue sur $J \times \bar{B}(x_0, r)$ donc il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\| x - y \|_\infty < \eta \Rightarrow \| f(t, x(t)) - f(t, x(t)) \| < \varepsilon.$$

D'où, pour $\| x - y \|_\infty < \eta$,

$$\| Tx(t) - Ty(t) \| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| \, ds < \varepsilon \frac{M}{r},$$

donc T est continu. Finalement, A est un convexe fermé non vide, T est continu de A dans A et A est compact donc $T(A)$ l'est aussi, on peut donc appliquer le théorème de Schauder qui donne l'existence d'un point fixe pour T.

Chapitre 3

Des applications du point fixe aux équations différentielles

On donne quelques applications de théorème du point fixe aux équations différentielles.

3.1 Application de théorème de Schauder

Théorème 3.1. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$,Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ une application continue, alors si $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$ sont donnés, le problème suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{p}$$

admet au moins une solution x de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un certain intervalle dans I de la forme $[t_0 - h, t_0 + h]$, avec $h > 0$

Preuve :

Cylindre de sécurite.

Comme I et Ω sont des ouverts, il existe $C_0 = [t_0 - h, t_0 + h] \times \bar{B}(y_0, r_0)$ un cylindre inclus dans $I \times \Omega$, C_0 est compact donc f est bornée sur C_0 par une constante M.

Soit $h \leq h_0$ et x une solution du problème définie au moins sur $I_0 \subset [t_0-h, t_0+h]$, supposons qu'elle sorte du cylindre

$$C = [t_0 - h, t_0 + h] \times \bar{B}(x_0, r_0),$$

au temps $\tau \in [t_0 - h, t_0 + h]$ alors, par continuité.

$$r_0 = \|x(\tau) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} x'(u)du \right\| \leq hM.$$

Donc si $h \leq min(h_0, \frac{r_0}{M})$ alors toute solution définie sur $I_0 \subset [t_0 - h, t_0 + h]$, reste dans la boule $\bar{B}(x_0, r_0)$. On nommera cylindre de sécurite l'ensemble

$$[t_0 - h, t_0 + h] \times \bar{B}(x_0, r_0).$$

- Application de Schauder : On note :

$$E = \mathcal{C}([t_0 - h, t_0 + h], \mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad C = \mathcal{C}([t_0 - h, t_0 + h], \bar{B}(x_0, r_0)).$$

Alors E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé et C est un convexe fermé non vide, pour $x \in C$, on définie la fonction $\Phi(x)$ sur $[t_0 - h, t_0 + h]$ comme suit :

$$\Phi x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))\, du,$$

par convergence dominée, Φ est continue puis comme $Mh \leq r_0$, on a

$$\Phi : C \to C,$$

supposons que $\Phi(C)$ est relativement compact, alors par le théorème de Schauder, on a l'existence d'un point fixe dans C de Φ, i.e. une solution à notre équation différentielle définie sur $[t_0 - h, t_0 + h]$.
$\Phi(C)$ est relativement compacte, $[t_0 - h, t_0 + h]$ est compact et $\Phi(C)$ est bornée par

r_0 en norme infinie.
Puis si $x \in C$ et $t_1, t_2 \in [t_0 - h, t_0 + h]$ alors :

$$\begin{aligned} \|\Phi x(t_1) - \Phi x(t_2)\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(u, x(u)) du \right\| \\ &\leq M|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

En déduit que les fonctions de $\Phi(C)$ sont M-lipschitzienne sur $[t_0 - h, t_0 + h]$. Donc forment une famille équicontinue.
Le théorème d'Ascoli permet alors de dire que $\Phi(C)$ est relativement compacte.

3.2 Application de contraction de Banach

Théorème 3.2. *Le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f : D \to E$, Dest un domaine de $\mathbb{R} \times E$ avec E un Banach ,alors le problème admet une unique solution $x(t)$ définie sur un certain intervalle $I = [t_0 - h, t_0 + h]$, pour vu que h est choisi tel que :

$$h \leq \min \{r, r\delta, 1/\beta\}.$$

Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach,on définie l'opérateur :

$$N : \mathbb{E} \to \mathbb{E},$$

$$Nx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds,$$

On considère les hypothéses suivantes :

H_1 : *f est continue,*

H_2 : *il existe* $\delta > 0$ *et* $\beta > 0$ *tels que :*

$$\delta = \sup_{(t,x)\in D} |f(t,x)|,$$

et

$$\beta = \sup_{(t,x)\in D} |f_x(t,x)|.$$

H_3 : *De plus la fonction* f *est* β*-lipschitzienne en* x *uniformément par rapport à* $t \in I$*.*

En effet, en utilisant le théorème des accroissements finis il existe $z(t)$ *tel que*

$$f(t,x(t)) - f(t,y(t)) = f_x(t,z(t))[x(t) - y(t)].$$

D'où

$$|f(t,x(t)) - f(t,y(t))| \leq \beta \times \mid [x(t) - y(t)] \mid .$$

Preuve :

Montrons que l'opérateur N vérifie les conditions du théorème de contraction de Banach, la preuve est donnée en deux étapes.

Étape(1). on montre que $N(M) \subset M$, avec $M = B(x_0, r)$, $r > 0$ i.e.

$$\forall x \in M, \quad Nx \in M,$$

soit $x \in M$, pour $t \in I$ on a :

$$Nx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\, ds \Leftrightarrow Nx(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds,$$

alors

$$|Nx(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s,x(s))|ds, \quad \forall t \in I,$$

par passage au sup, on obtient

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in I}|Nx(t)-x_0| &\leq \int_{t_0}^{t} \sup_{t\in I}|f(s,x(s))|ds \\
&\leq \delta|t-t_0| \\
&\leq h.\delta \\
&\leq r,
\end{aligned}$$

par suite $d(Nx, x_0) \leq r$. D'où, $Nx \in M$.

Étape(2). N est une contraction. Soient $x, y \in M$ pour tout $t \in I$ on a :

$$\begin{aligned}
Nx(t) - Ny(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds, \\
&= \int_{t_0}^{t} \left(f(s,x(s)) - f(s,y(s))\right)\,ds,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
|Nx(t)-Ny(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f((s,x(s)) - f(s,y(s))|ds \\
&\leq \beta.h \sup_{t\in I}|x(t)-y(t)|,
\end{aligned}$$

par suite

$$d(Nx, Ny) \leq \beta.h.d(x,y),$$

N est une contraction car $\beta.h < 1$, par suite N admet un unique point fixe x qui correspond a l'unique solution $x(t)$ de l'équation différentielle.

3.3 Application du théorème de Picard :

Théorème 3.3. *(Inversion Locale),soient :*

- *E, F deux espaces de Banach.*
- *$U \subset E$ ouvert.*
- *$f : U \to F$ une application de classe C^1.*

– *$\alpha \in U$ tel que df_α soit continue et inversible*
(et donc df_α^{-1} est continue)

Alors il existe un voisinage ouvert V de α et un voisinage ouvert W de $f(\alpha)$ tel que :

1– *La restriction $f|_V$ de f a V est une bijection de V sur W.*

2– *L'application inverse $g : W \to V$ est continue .*

3– *g est de classe C^1 et $\forall x \in W, dg_{f(x)} = df_x^{-1}$.*

Preuve :

On munit $L_c(E, F)$ de la norme $\|u\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

Quitte a remplacer f par la fonction $x \longmapsto df_z^{-1}[f(\alpha + x) - f(\alpha)]$, on peut se remaner au cas où $\alpha = 0, f(\alpha) = 0$, et $df_0 = df_\alpha = Id_E$ (et donc $E = F$).
Comme f est de classe C^1, il existe $r > 0$ tel que
$B(0, r) \subset U$ et $\|df_z - df_0\| = \|df_z - Id_E\| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in B(0, r)$.
On désigne $u = Id_E - df_x$, donc $df_x = Id_E - u$ avec $\|u\| \leq \frac{1}{2}$.
Alors , df_x est un isomorphisme bicontinu qui vérifie $df_x^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u^n$, et donc

$$\|df_x^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u\|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} = 2.$$

1– On va montrer que la restriction de f à un voisinage ouvert de 0 dans $B(0, r)$ est une bijection sur $B(0, \frac{r}{2})$.
Soit $y \in B(0, \frac{r}{2})$. On considère la fonction h :

$$h : B_f(0, r) \to E$$

$$x \mapsto y + x - f(x),$$

Il est clair que h est de classe C^1, de plus ,$\forall x \in B(0, r)$,
$\|dh_x\| = \|Id_E - df_x\| \leq \frac{1}{2}$.

Donc , d'aprés le théorème des accroissements Finis ,
$\forall x, x' \in B_f(0,r)$, $\|h(x) - h(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$.......(1)
En particulier , pour $x' = 0$, on a : $\|x - f(x)\| = \|h(x) - h(0)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|$, donc
$\forall x \in B(0,r)$, $\|h(x)\| \leq \|y\| + \|x - f(x)\| \leq \|y\| + \frac{1}{2}\|x\| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$ Ainsi h est une fonction de $B_f(0,r)$ dans $B(0,r) \subset B(0,1)$.
Comme de plus h est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne d'aprés le théorème (Picard) ,et d'aprés (1),$\exists! x \in B_f(0,r)$ tel que $h(x) = x$ c'est-a-dire tel que $f(x) = y$.
Comme $x = h(x)$ et que h est à valeurs dans $B(0,r)$, on déduit que $x \in B(0,r)$.
Alors ,pour tout $y \in B_f(0,\frac{r}{2}), \exists! x \in B(0,r)$ tel que $f(x) = y$,
on définit $V = f^{-1}(B(0,r)) \bigcap B(0,r)$. V est un voisinage de 0 car $f(0) = 0$ et f est continue sur $B(0,r)$.
En notant $W = B(0,r)$, on a alors $f_V : V \to W$ est une bijection.
$2-$ On note $g : W \to V$ l'application inverse.
on utilise de nouveau h, cette fois-ci avec $y = 0$, et donc
$\forall x \in U, x = h(x) + f(x)$. alors ,

$$\begin{aligned}\forall x, x' \in B(0,r), \|x - x'\| &\leq \|h(x) - h(x')\| + \|f(x) - f(x')\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x - x'\| + \|f(x) - f(x')\|.\end{aligned}$$

donc, $\|x - x'\| \leq 2\|f(x) - f(x')\|$.
On déduit que :
$\forall y, y' \in W, \|g(y) - g(y')\| \leq 2\|f(g(x)) - f(g(x'))\| = 2\|y - y'\|$.....(2)
g est donc lipschitzienne et par conséquent continue.

$3-$ On fixe $x \in V$ et on pose $y = f(x) \in W$.
Il existe $r' > 0$ tel que $B(y,r') \subset W$, et pour tout $w \in B(0,r)$, on pose

$v = g(y+w) - g(y)$. donc, d'après (2), $\|v\| \leq 2\|w\|$, et

$$\begin{aligned}\Delta(w) =& g(y+w) - g(y) - df_x^{-1}(w)\\ =& v - df_z^{-1}[f(x+v) - f(x)]\\ =& -df_x^{-1}[f(x+v) - f(x) - df_x(v)].\end{aligned}$$

comme $\|df_x^{-1}\| \leq 2,$ *on obtient*

$$\|\Delta(w)\| \leq 2\|f(x+v) - f(x) - df_x(v)\| = 2\|v\|\varepsilon(v),$$

avec $\lim\limits_{v\to\alpha}\varepsilon(v) = 0$. *Donc*

$$\|\Delta(w)\| \leq 4\|w\|\varepsilon(g(y+w) - g(y)) = 4\|w\|\varepsilon'(w).$$

Comme g est continue, $\lim\limits_{w\to 0}\varepsilon'(w) = 0$.
Alors, $\|\Delta(w)\| = 0(\|w\|)$.
Donc, g est différentiable en y et $dg_y = df_x^{-1}$.
Enfin , comme df_x^{-1} est continue (car f est de classe C^1 et que $L \in GL(E) \to L^{-1} \in GL(E)$ est continue), la fonction $dg : y \mapsto dg_y$ est continue .
Ainsi , g est de classe C^1.

CONCLUSION

Le théorème du point fixe est fondamental dans le domaine des applications aux équations différentielles . Nous avons abordé certaines théorèmes (principe de la contraction de Banach est la base de la théorie du point fixe qui assure l'unicité des solutions et le théoreme de Schauder affirme seulement léxistence).
À la fin de ce mémoire, on cite des applications aux équations différentielles ordinaires.

Résumé

Les théorémes du point fixe sont des outils trés importants dans l'analyse fonctionnelle.
On les utilise de manière à de démontrer l'existence des différents types d'équations difféntielles.
Le but de ce éxposé est de faire une étude sur la théorie du point fixe et ses applications, en particulier ses applications aux équations différentielles ordinaires.

Bibliographie

[1] B .Gagui, Résolution des équations intégrales par les méthodes adaptatives, Mémoire de magister université de M'sila 2006.

[2] D.R.Smart, fixed point theorems, Cambridge University Press, (1974).

[3] J-P.Demailly Analyse numérique et équations différentielles ;collection Grenoble Sciences,presses universitaires de Grenoble,Grenoble (1996).

[4] J.Saint Raymond Topologie,calcul différentiel et variable complexe,calvage.

[5] k.Goebel and W.A.Kirk, Topics in metric fixed point theory, Cambridge Univ. Press,1990.

[6] Krasnov, M Receuil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires éd. mir 1981.

[7] L.Debnath and P.Mikusniski,Introduction to Hilberts Spaces with application,Academic press,New York,1990.

[8] Lelièvre, Tony, Equations différentielles ordinaires Notes du cours Modéliser, Simuler, Programmer (MoPSI)(Cours de deuxieme année de l'ENPC, 2007)

[9] M.Nadir, Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila 2004.

[10] L.Pujo - Menjouet Equation Différentielles Ordinaires et Partielles Université claude Bernard, pujo@math.univ-lyon1.fr.

[11] Notes de cours(M-2eq aux dérivées partielles elliptiques Hervé le Drct 2010).

[12] Rf.chambert-loir Adrien Lav Rnt.ENS Runnes,univ de Remes 1 Analyse 1 p79.

[13] R.P.Agarwal, M.Meehan and D.O'Regan, Fixed point theory and application, Cambridge University Press, New York, (2001).

[14] S.Banach,Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs application aux équations intégrales,Fund Math,3(1922),133-181.

[15] S. Abbas and M. Benchohra, Darbour problem for perturbed partial differential equations of fractional order with finite delay, Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 3 (2009), 597-604.