REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse Fonctionnelle Et Équations différentiel

Mémoire de Fin d'Etudes

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

Mesure de non compacité et applications aux équations différentielles

Présenté par

***SALMI HABIBA**
***SEMNAOUI MIMOUNA**
***ZOUDJI LOUBNA**

soutenue devant le Jury composé de

***ZENTAR OUALID**	**MAB**	**Président**
***MOHAMED ZIANE**	**MCA**	**Encadreur**
***SOUID MOHAMMED SAID**	**MCA**	**Examinateur**

Promotion : **2018 \ 2019**

★ *Remerciement* ★

★ Louanges A Dieu Tout puissant pour m'avoir donné
la foi et la force d'accomplir ce modeste travail. Prière et Salut
soientsur Notre Cher Prophète "Mohamed" et sur sa famille et ses
fidèles compagnons.

★ Je tiens à remercier le professeur Ziane Mohamed pour
la bienveillance avec laquelle il a encadré cette mémoir.
Ses orientations et précieux conseils m'ont permis de réaliser ce travail.
je tiens à lui exprimer ma gratitude .

★ Je tiens à remercier également le Zentar Oualid qui m'a fait
l'honneur de présider le jury, qu'il trouve ici l'expression de mon respect.

★ Je remercie le Souid Mohammed Said d'accepter d'être membres du jury .

★ En fin je tiens à rendre hommage à mes parent et ma famille
qui m'ont soutenue et encouragée,je tiens aussi à remercier tous
ceux et celles qui de près ou de loin ont contribué
à l'accomplissement de ce travail.

★ ★ ★

*______________ *Je dédie ce travail à* ______________*

✓A mes parents, qui sont la grain de mon existence et la source de ma réussite, pour leurs encouragements et leurs sacrifices, à mes frères et mes sœurs. Je vous remercie pour votre confiance, votre soutien. Je ne sais comment vous remercier pour tout ce que je vous dois.

✓ A toi mon épouse pour ton réconfort, ta compréhension, ton soutien moral surtout dans les moments difficiles durant cette thèse, de m'avoir poussé et encouragé à aller au delà de mes capacités et surtout d'avoir été présente à chaque fois que j'ai eu besoin de toi et surtout je te remercie pour tes sacrifices et ta patience.

✓ A toute ma famille. A mes chers amis.

Salmi Habiba

*_______________ *Je dédie ce travail à* _______________*

✓ Au nom du Dieu, et que dieu bénisse le prophète

Mohamed et sa famille et ses compagnons.

✓ Je dédie ce modeste travail en signe de respect,

reconnaissances à

Ma chère mère.

Mon père.

Mes chers frères Nadhir, Djamel, Mohamed, Fayssal, .

Ma chère grand-mère.

✓ Tous les membres de ma Famille.

✓ Tous les éléments de ma promotion et mes camarades.

___________________ *Semnaoui Mimouna* ___________________

*________________ *Je dédie ce travail à* ________________*

✓ Merci Allah (mon dieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rève et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire "AL hamdo li ALLAH"

✓ Je dédie ce travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui c'est sacrfiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère.

✓ A mon père"Mohamed", et qui veillé tout au long de ma vie à encouragement.

✓ A ma adorable sœur Amina et son épouse Bouelem Mes frères Abde El rahmen, Khaled.

______________________ *Zoudji Loubna* ______________________

Table des matières

INTRODUCTION

Plusieurs phénomènes peuvent être modélisés par des modéles continus en temps qui sont généralement régis par des équations différentielles, des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Les équations différentielles à retard modélisent un phénomène systématique avec l'information précédente connue d'aprés sont évolution au cours du temps.

Notre objectif est double :

D'une part, découvrir les méthodes topologique à savoir le point fixe et l'approximation appliquées à la résolution des équations différentielles non linéaires.

D'autre part, essayer du bien comprendre le rôle de la mesure de non compacité dans l'existence des points fixes ainsi que la convergence de certain schémas d'approximation de la solution.

Le travail est subdivisé en quatre chapitres. Dans le première chapitre, nous rappelons quelques définitions et résultats d'analyse fonctionnel ainsi que le calcul fractionnaire.

Au chapitre 2, on introduit la notion de la mesure de non-compacité (en abrégé MNC), qui sera utilisée dans la suite.

Le chapitre 3 est une étude quantitative au probléme de Cauchy dans un espace de Banach de dimension infini.

Dans le chapitre 4, on établit l'existence d'une solution pour une équation diiférentielle fonctionnelle d'ordre fractionnaire dans un espace de Banach par un schéma de type Tonelli.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Espaces Fonctionnels

Définition 1.1. *Soit X un espace de Banach. Pour $1 \leq p < \infty$ et $J \in [a,b]$, on note $L^p(J,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions f de J à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f soit mesurable*

$$\int_J |f(t)|^p dt < +\infty.$$

• *Les espaces $L^p(J,\mathbb{R})$ sont appelés aussi les espaces de Lebesgue.*

• *pour $p = \infty, L^\infty(J,\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions mesurables f bornée presque par tout (en abrégé p.p)sur J.*

Théorème 1.1. *[3]*

• *pour $1 \leq p < \infty$ l'espace $L^p([0,T],\mathbb{R})$ est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int_0^T |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

• *L'espace $L^\infty([0,T])$ est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|f\|_{L^\infty} := inf\left\{M \geq 0 : |f(t)| \leq M \quad p.p \ sur \ [0,T]\right\}$$

1.2 Notations et définitions

On considère dans tout ce paragraphe que X et Y sont deux espaces de Banach munis des normes $\|\cdot\|_X$ et$\|\cdot\|_X$ respectivement, K un compact de X et $C(K,Y)$ l'espace des fonctions continues muni de la norme de la convergence uniforme :

$$\|f\| = \sup_{x\in K} \|f(x)\|_Y.$$

l'intégrale de Bochner est une généralisation de l'intégrale de Lebesgue pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

Théorème 1.2. *Soit $f : E \to X$ une application fortement mesurable f est Bochner-intégrale si et seulement si $t \to \|f(t)\|$ est intégrable.*
On désigne par $L^1(J,X)$ l'espace des fonctions Bochner intégrale muni de la norme

$$\|y\|_{L^1} = \int_J \|y(t)\|ds.$$

Définition 1.2. *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, une application $f : J \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,*
f est dite de Carathédory si

i) $t \to f(t,y)$ est mesurable pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

ii) $y \to f(t,y)$ est continue presque pour tout $t \in J$ si de plus, f est dite L^p Carathéodory si :

(a) f est carathéodory

(b) $\forall r > 0,\ \exists \phi_r \in L^p(I)$ tele que $|f(t,y)| \leq \phi(t)$ par $|y| \leq r, \quad p.p \quad t \in J$.

Définition 1.3. *On désigne par $C(J,X)$ l'espace des fonctions $f : J \to X$ continues sur J à valeur dans X, muni de la norme de la convergence uniforme :*

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in J} \|f(t)\| \ \ pourtout \ \ f \in C(J,X).$$

- *$(C(J,X), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.*

Définition 1.4. *Soit M un sous ensemble de $C(K,Y)$. On dit que une famille de fonctions M est équicontinue si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u, v \in k : \ \ \|u - v\|_x < \|\delta\| \Longrightarrow \|f(u) - f(v)\|_y < \varepsilon, \ \ \forall f \in M.$$

Définition 1.5. *Soit M un sous ensemble de$C(k, y)$. On dit que M est uniformément borné s'il existe une constante $c > 0$ telle que :*

$$\|f\|_\infty \leq c, \quad \forall f \in M.$$

Définition 1.6. *Soit f une application définie sur X à valeurs dans Y.*

- *On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout ensemble borné de X en un ensemble relativement compact dans Y.*
- *f est dit compact si $f(x)$ est relativement compact dans Y.*

1.2.1 Théorème d'Ascoli-Arzéla

Ce théorème est connu pour son nombre considérable d'applications dans l'analyse non linéaire par exemple la compacité de certains opérateurs. Il caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues.

Théorème 1.3. *Soient E un espace compact et Y un espace de Banach. Une partie $M \subset C(E, Y)$ est relativement compact si et seulement si :*

(1) M est uniformément bornée.

(2) M est équicontinue.

(3) pour tout $x \in E$, l'ensemble $M(x)$ définit par :

$$M(x) = \{f(x), f \in M\}.$$

est relativement compact dans Y.

1.3 Dérivation fractionnaire

1.3.1 Théorie de Riemann-Liouville

Nous allons définir d'abord l'intégrale de Riemann-Liouville. On peut commencer par examiner une formule (unique) qui donne des primitives successive d'une fonction continue par exemple :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue. Une primitive de f est donnée par :

$$(I_a^1 f)(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{1.1}$$

Pour une primitive seconde on aura :

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x \left(\int_a^s f(t)dt \right) ds. \tag{1.2}$$

Le théorème de Fubini nous ramène cette intégrale double à une intégrale simple

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x (x-t) f(t)dt. \tag{1.3}$$

Puis une itération donne

$$(I_a^n f)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt. \tag{1.4}$$

Définition 1.7. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale de Riemann-Liouville de f l'intégrale suivante :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \tag{1.5}$$

où α est un réel (où même complexe) convenablement choisi.
On remarque que la formule (1.5) est (du moins formellement) une généralisation de la n-ième primitive avec un ordre de "primitivation" α non entier. Voyons un exemple :

Exemple 1.3.1. *Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$. Alors*

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\beta dt. \tag{1.6}$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $t = a + (x-a)\tau$, d'où

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta dt = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha}. \tag{1.7}$$

après utilisation de l'intégrale eulérienne de première espèce (la fonction bêta d'Euler). On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$ où on a

$$I_a^1 (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} (x-a)^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1} (x-a)^{\beta+1}.$$

à cause de la relation bien connue $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Proposition 1.1. *Soit* $f \in C^n([a,b))$*. Pour* x *fixé, l'application* $\alpha \to (I_a^\alpha f)(x)$ *définie pour* $Re\alpha > 0$ *est holomorphe et se prolonge analytiquement au domaine* $Re\alpha > -n$.

Démonstration *:Il est facile de montrer que l'application en question est bien définie et holomorphe pour* $Re\alpha > 0$*. Montrons l'existence du prolongement analytique. Dans(1.5) procédons par une intégration par partie,*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t) d\left[\frac{-(x-t)^\alpha}{\alpha}\right] = \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^\alpha f'(t) dt. \quad (1.8)$$

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{(x-a^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + (I_a^{\alpha+1} f')(x);. \quad (1.9)$$

Il est clair que le membre de droite de l'égalité précédente est holomorphe dans le domaine Re $\alpha > -1$*. A présent le résultat finale découle d'une simple itération de (1.9) :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+1+j)} f^{(j)}(a) + (I_a^{\alpha+n} f^{(n)})(x). \quad (1.10)$$

formule qui constitue l'expression du prolongement analytique.
Voici des identités qui serviront beaucoup par la suite.

Proposition 1.2. *Soit* $f \in C^0([a,b))$*. Pour* α, β *complexes tels que* $Re(\alpha) > 0$ *et* $Re(\beta) > 0$ *on a*

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f. \quad (1.11)$$

Et pour $Re(\alpha) > 1$ *On a*

$$\frac{d}{dx} I_a^\alpha f = I_a^{\alpha-1}. \quad (1.12)$$

Démonstration : la démonstration s'obtient par calcul direct en utilisant la fonction bêta d'Euler. En effet :

$$\begin{aligned}
[I_a^\alpha(I_a^\beta)](x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-s)^{\alpha-1}(I_a^\beta f)(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_a^s (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}f(t)dtds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)\left[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}ds\right]dt.
\end{aligned}$$

A présent On pose $s = t + (x-t)\tau$. ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1} &= (x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau \\
&= (x-t)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire le résultat annoncé. la deuxième identité se justifie par les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre et l'utilisation de l'équation fondamentale de la fonction gamma d'Euler :

$$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1).$$

Dans la formule (1.9), qui est valable pour Re$\alpha > -1$, posons $\alpha = 0$. On obtient

$$(I_a^0 f)(x) = f(a) + (I_a^1 f')(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt = f(x). \tag{1.13}$$

ceci montre que pour les fonctions C^1 du moins on a $I_a^0 = f$. En fait cette identité demeure valable pour les fonctions continues.

Exemple 1.3.2. *Montrer que si $f \in C^0([a,b])$ alors $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}(I_a^\alpha f) = f(x)$.*
Si on procède de la même façon pour $\alpha = -1$ On aura (ne pas oublier que $\frac{1}{\Gamma(0)} = 0$) :

$$(I_a^{-1} f)(x) = f'(a) + (I_a^1 f'')(x) = f'(a) + \int_a^x f''(t)dt = f'(x) \tag{1.14}$$

et donc, au moins sur les fonctions C^2, $(I_a^{-1}f)(x)f'(x)$ c'est-à-dire $I_a^{-1} = \frac{d}{dx}$. Et d'une manière générale $I_a^{-n} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n$. Ceci montre que sur un espace convenable de fonctions les opérateurs de "primitivation" et de "dérivation" d'ordre entier font partie d'une même famille d'opérateurs. les I_a^α. De là on peut accepter la proposition d'une définition de la dérivation on entière comme $I_a^{-\alpha}$

pour $\alpha > 0$. Cette définition ne sera adoptée avec de légères modifications que bien longtemps après (Riemann et Liouville) par Caputo .
Il est important de noter que l'identité (1.11) n'est pas valable en dehors des hypothèses imposées à α et β. Il suffit de le voir sur l'exemple suivant :

$$[I_a^1(I_a^{-1}f)](x) = \left[I_a^1\left(\frac{d}{dx}f\right)\right](x) = f(x) - f(a) \neq (I_a^0 f)(x) + f(x)$$

où f est de classe C^1. On remarque aussi que l'identité (1.11) nous dit que les opérateurs I_a^α et I_a^β commutent pour $Re(\alpha) > 0$ et $Re\ (\beta) > 0$, chose qui n'est pas vraie sinon.

Définition 1.8. *Soit $\alpha\ \in]m-1,\ m[$ avec $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On appel dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par*

$$({}^{RL}D_a^\alpha f)(x) = (\frac{d}{dx})^m[(I_a^{m-\alpha}f)(x)]. \tag{1.15}$$

Exemple 1.3.3. *Reprenons l'exemple de la fonction $f(x) = (x-a)^\beta$. On aura*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_a^\alpha(x-a)^\beta &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(x-a)^{\beta+m-\alpha}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

où nous avons utilisé la formule

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m(x-a)^\lambda = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1)(x-a)^{\lambda-m} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1_m)}(x-a)^{\lambda-m}.$$

Il est clair que la formule de dérivation (1.16) se réduit pour $\alpha = 1$ à

$${}^{RL}D_a^1(x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1} = \beta(x-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dx}(x-a)^\beta.$$

Dans l'exemple précédent si on prend $\beta = 0$ on obtient le résultat "troublant" suivant :

$${}^{RL}D_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.$$

c'est-à-dire que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est plus nulle ! Ceci n'est pas vraiment un handicap pour développer la théorie comme nous le verrons plus loin.

Lemme 1.1. *Soit $\alpha \in]m-1, m]$ et f une fonction vérifiant ${}^{RL}D_a^\alpha f = 0$ (appartenant au noyau de l'opérateur ${}^{RL}D_a^\alpha$). Alors*

$$f(x) = \sum_{m-1}^{j=0} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)}(x-a)^{j+\alpha-m} \tag{1.17}$$

où les c_j sont des constantes quelconques.

Démonstration : Partons de ${}^{RL}D_a^\alpha f = \left(\frac{d}{dx}\right)^m [I_a^{m-\alpha} f](x) = 0$, alors on a d'abord

$$[I_a^{m-\alpha} f](x) = \sum_{m-1}^{j=0} c_j (x-a)^j$$

et par application de I_a^α on obtient

$$[I_a^m f](x) = \sum_{m-1}^{j=0} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)}(x-a)^{j+\alpha}$$

ensuite par dérivation (classique) le résultat.

Proposition 1.3. *L'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville ${}^{RL}D_a^\alpha$ possède les propriétés suivantes :*

1. *c'est un opérateur linéaire.*
2. *En générale ${}^{RL}D_a^\alpha$ o ${}^{RL}D_a^\beta \neq^{RL} D_a^\beta$ o ${}^{RL}D_a^\alpha$ et aussi $\neq^{RL} D_a^{\alpha+\beta}$.*
3. $\lim_{\alpha \to m-1^+} {}^{RL}D_a^\alpha f = f^{(m-1)}$ *et* $\lim_{\alpha \to m^-} {}^{RL}D_a^\alpha = f^{(m)}$
4. ${}^{RL}D_a^\alpha$ *o* $I_a^\alpha = id$
5. $[(I_a^\alpha \text{ o } {}^{RL}D_a^\alpha) f](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m_1} \frac{(x-a)^{j-m+\alpha}}{\Gamma(j-m+\alpha+1)} \left\{ \lim_{x \to a^+} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^j I^{m-\alpha} f \right](x) \right\}$

Démonstration : Pour la linéarité c'est une simple vérification. Pour le deuxième point un contre-exemple suffit (considérer $\alpha = 1/2, \beta = 1$ et $f(x) = x$), mais ce qu'il faut retenir c'est que certains automatismes" de la dérivation d'ordre entier ne sont plus valables. Montrons la deuxième égalité de la propriété 3. Partons de l'hypothèse que f est de classe C^m, alors on peut écrire :

$$f(x) = [I_a^m f^{(m)}](x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^j(a)$$

et donc

$$\begin{aligned}
[I_a^{m-\alpha} f](x) &= [I_a^{m-\alpha}(I_a^m f^{(m)})](x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} I_a^{m-\alpha}(x-a)^j \\
&= [I^{2m-\alpha} f^{(m)}](x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)(a)}}{\Gamma(j+1+m-\alpha)}(x-a)^{j+m-\alpha}
\end{aligned}$$

d'après l'identité (1.11) et le résultat de l'exemple (1.3.1). Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha})f](x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m [I_a^{m-\alpha} f](x) \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left\{ [I^{2m-\alpha} f^{(m)}](x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1+m-\alpha)}(x-a)^{j+m-\alpha} \right\} \\
&= [I^{m-\alpha} f^{(m)}](x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)(a)}}{\Gamma(j+1-\alpha)}(x-a)^{j-\alpha}
\end{aligned}$$

grâce à l'identité (1.12). Alors d'une part

$$\lim_{\alpha \to m^-} [I_a^{m-\alpha} f^{(m)}](x) = [I_a^0 f^{(m)}](x) = f^{(m)}(x)$$

puisque l'intégrale Riemann-Liouville est holomorphe en α donc continue ; d'autre part la somme est nulle puisque chaque terme $\dfrac{1}{\Gamma(j+1-m)}$ est nul (voir les propriétés de la fonction Γ). La première égalité dans la propriété 3 est laissée au lecteur en guise d'exercice (Subtile)ainsi que la propriété 4.

Pour la dernière propriété on démarre, grâce à la propriété 4, avec

$$({}^{RL}D_a^{\alpha} \; o \; I_a^{\alpha} \; o \; {}^{RL}D_a^{\alpha})f =^{RL} D_a^{\alpha} f$$

qui donne

$$^{RL}D_a^{\alpha}[(I^{\alpha}\ o\ ^{RL}D_a^{\alpha})f - f] = 0$$

Maintenant à partir du lemme caractérisant le noyau de $^{RL}D_a^{\alpha}$ on aura

$$[(I_a^{\alpha}\ o\ ^{RL}D_a^{\alpha})f](x) - f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j(f) \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)}(x-a)^{j+\alpha-m}$$

Par application aux deux membres de $I_a^{m-\alpha}$ On obtient

$$[(I_a^m o^{RL}D_a^{\alpha})f](x) - [I_a^{m-\alpha}f](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j(f)(x-a)^j$$

Or si $0 \leq j \leq m-1$ alors

$$\lim_{x \to a+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j [I_a^m g](x) = \lim_{x \to a+} [I_a^{m-j}f](x) = 0$$

et aussi

$$\lim_{x \to a+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j (x-a)^k = \begin{cases} j! & si\ \ k = j \\ 0 & sinon \end{cases}$$

d'où

$$j!c_j(f) = -\lim_{x \longleftrightarrow a+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j [I_a^{m-\alpha}f](x)$$

c'est-à-dire le résultat annoncé.

1.3.2 Théorie de Caputo

Nous avons vu plus haut que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]m-1, m[$ s'obtient par une régularisation (application de $I_a^{m-\alpha}$) suivie d'une dérivation classique d'ordre m. La dérivée de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.

Définition 1.9. *Soit* $]\alpha \in m-1, m[$ *et* $f \in C^m([a,b))$. *On appelle dérivée de* f *au sens de Caputo* *la fonction définie par*

$$({}^{c}D_a^{\alpha} f)(x) = (I_a^{m-\alpha} f^{(m)})(x) \tag{1.18}$$

La dérivée de Caputo permet de rattraper certaines "anomalies" que nous avons rencontré dans le cas de Riemann-Liouville. En voici la première :

$${}^{c}D_a^{\alpha} 1 = 0$$

i.e, la dérivée de Caputo d'une constante est nulle.

Exemple 1.3.4. *On a pour la dérivée d'une puissance*

$${}^{c}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)}(x-a)^{\beta-\alpha} \tag{1.19}$$

En effet, d'abord

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)}(x-a)^{\beta-m} \tag{1.20}$$

et

$$I_a^{m-\alpha}(x-a)^{\beta-m} = \frac{\Gamma(\beta+1-m)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

Le résultat en découle immédiatement. On remarque que les formules (1.16) et (1.19) sont identiques. Mais ceci n'est qu'une apparence car si β est un entier inférieur à m la formule (1.20) donne zéro et par suite (1.19) est nulle à son tour, alors que (1.16) n'est pas nulle. En fait elles sont identiques pour β non entier.

Nous allons d'abord établir le lien entre la dérivée au sens de Caputo et la dérivée au sens de Riemann-Liouville. partons de la formule (1.10) donnant le prolongement analytique de l'intégrale de Riemann-Liouville où on a remplacé n par m et α par $m-\alpha$:

$$(I_a^{m-\alpha} f)(x) = (I_a^{2m-\alpha} f^{(m)})(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{m-\alpha+j}}{\Gamma(m-\alpha+1+j)} f^{(j)}(a)$$

appliquons ensuite $\left(\frac{d}{dx}\right)^m$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m (I_a^{m-\alpha} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m (I_a^{2m-\alpha} f^{(m)})(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{-\alpha+j}}{\Gamma(-\alpha+1+j)} f^{(j)}(a).$$

et comme $\left(\frac{d}{dx}\right)^m I_a^{2m-\alpha} = I_a^{m-\alpha}$ *par (1.12), On obtient*

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m (I_a^{m-\alpha} f)(x) = (I_a^{m-\alpha} f^{(m)})(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{-\alpha+j}}{\Gamma(-\alpha+1+j)} f^{(j)}(a).$$

On reconnait les expressions des dérivée de Caputo et de Riemann-Liouville i.e ,

$$({}^{RL}D_a^{\alpha})(x) = ({}^{c}D_a^{\alpha} f)(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{-\alpha+j}}{\Gamma(-\alpha+1+j)} f^{(j)}(a). \tag{1.21}$$

Cette dernière relation peut aussi s'écrire

$${}^{c}D_a^{\alpha} f = {}^{RL} D_a^{\alpha} \left[f - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \right].$$

qui signifie en gros que la dérivation de Caputo est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de f. La relation (1.21) permet d'obtenir aisément les résultat suivants :

Proposition 1.4. *On a*

1. ${}^cD_a^\alpha[I_a^\alpha f] = f$

2. *Si* ${}^cD_a^\alpha f = 0$ *alors* $f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j(x-a)^j$

3. $I_a^\alpha[{}^cD_a^\alpha f](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)$

La démonstration est laissée au lecteur. Il ne faut pas que le lecteur (quand il fera) perde de vue que l'application de la dérivée de Caputo d'ordre $\alpha \in]m-1, m[$ *suppose que la fonction* f *est de classe* C^m*. La dernière relation de la proposition précédente nous permettra par la suite d'étudier des équations différentielles fractionnaires(au sens de Caputo) avec des conditions initiales classiques, c'est-à-dire des dérivées entières au point* a*, chose qui n'est pas possible de la dérivation au sens de Riemann-Liouville. Un des "défauts" de la dérivée de Caputo est qu'elle ne constitue pas une bonne interpolation entre les dérivées entières comme ce faut pour Riemann-Liouville. En effet On a*

$$\lim_{\alpha \to m^-} ({}^cD_a^\alpha f)(x) = f^{(m)}(x)$$

mais par contre

$$\lim_{\alpha \to m-1^+} ({}^cD_a^\alpha f)(x) \neq f^{(m-1)}(x)$$

Un bon exercice consiste à découvrir la valeur de cette limite !Voici un lemme utile.

Lemme 1.2. *Soit* f *continue sur* $[a,b]$ *et* $\alpha > 0$*, alors*

$$\lim_{x \to a+} (I_a^\alpha f)(x) = 0$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} |(I_a^\alpha f)(x))| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)| dt \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (x-t)^\alpha \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Comme conséquence regardons comment devient la propriété 5 de la proposition (1.3) si $0 < \alpha < 1$ et f continue :

$$\begin{aligned} [(I_a^\alpha \ o \ {}^{RL}D_a^\alpha) f](x) &= f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \lim_{x \to a^+} [I_a^{1-\alpha} f](x) \right\} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Corollaire 1.1. *Si* $0 < \alpha < 1$ *et* f *de classe* C^1 *alors*

$$(I_a^\alpha \ o \ {}^{RL}D_a^\alpha) f = f \ \ et \ \ ({}^c D_a^\alpha \ o \ I_a^\alpha) f) = f$$

c'est-à-dire que les dérivations au sens de Riemann-Liouville et Caputo respectivement constituent l'inverse à droite et à gauche de l'opérateur de Riemann-Liouville(au moins sur les fonctions de classe C^1*). En voici un autre corollaire intéressant.*

Corollaire 1.2. *Si* $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ *et* f *de classe* C^1 *alors*

$$({}^c D_a^\alpha \ o \ {}^c D_a^\beta) f = ^c D_a^{\alpha+\beta} f = ({}^c D_a^\beta \ o \ {}^c D_a^\alpha) f$$

Démonstration : *Il est facile de voir que*

$$\begin{aligned}
\left({}^cD_a^{\alpha}\ o\ {}^cD_a^{\beta}\right)f &= (I_a^{1-\alpha}\ o\ \frac{d}{dx}\ o\ I_a^{1-\beta}\ o\ \frac{d}{dx})f \\
&= \left(I_a^{1-\alpha-\beta}\ o\ I_a^{\beta}\ o\ \frac{d}{dx}I_a^{\beta}\ o\ \frac{d}{dx}\ o\ I_a^{1-\beta}\ o\ \frac{d}{dx}\right)f \\
&= \left(I_a^{1-\alpha-\beta}\ o\ {}^cD_a^{1-\beta}\ o\ I_a^{1-\beta}\ o\ \frac{d}{dx}\right)f \\
&= \left(I_a^{1-\alpha-\beta}\ o\ \frac{d}{dx}\right) \\
&={}^c\ D_a^{\alpha+\beta}f
\end{aligned}$$

La commutativité résulte de la commutativité de l'addition des réels.

Chapitre 2

Mesure de non compacité

L'idée de définir une mesure de non compacité pour des parties bornées d'un espace de Banach X quelconque est dûe à Kuratowski [**7**], l'extension de cette théorie pour des opérateurs est dûe essentiellement à G. Darbo [4] et N.B. Sadovski [8]. Ces auteurs définissent une classe générale d'opérateurs complètement-continus.

Dans ce chapitre nous introduisons la notion de la mesure de non compacité et les opérateurs condensés, il est constitué de définitions, de propriétés et de résultats auxiliaires qui seront utilisés dans les démonstrations.

Nous donnerons quelques formules qui permettent de mesurer directement les parties bornées dans certains espaces fonctionnels.

2.1 Définitions et Résultats

X étant un espace de Banach, $\overline{co}(\Omega)$ est la fermeture de l'enveloppe convexe de Ω. $\overline{B}$ désigne la boule fermé de centre 0 et de rayon 1.

Définition 2.1. *[7] Soit X un espace de Banach et $M \in \mathcal{P}_b(X)$. La mesure de non-compacité de Kuratowski est une application $\alpha : \mathcal{P}_b(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par*

$$\alpha(M) = \inf\{\epsilon > 0 : M \, \textit{admet un recouvrement fini par des ensembles de diamètre } \leq \epsilon\},$$

où

$$diam(M) = \begin{cases} \sup\limits_{(x,y)\in M^2} d(x,y), & si\ M \neq \emptyset, \\ 0, & si\ M = \emptyset. \end{cases}$$

Définition 2.2. *Soit X un espace de Banach et $M \in \mathcal{P}_b(X)$. La mesure de non-compacité de Hausdorff est une application $\chi : \mathcal{P}_b(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par*

$$\chi(M) = \inf\{\epsilon > 0 : M\, admet\ un\ \epsilon - réseau\}.$$

On rappelle que M admet un ϵ-réseau s'il existe un ensemble fini A tel que

$$M \subset A + \epsilon\overline{B} = \{a + \epsilon b,\ a \in A, b \in \overline{B}\}.$$

Par conséquent

$$\chi(M) = \inf\{\epsilon > 0 : M \text{ admet un recouvrement fini par des boules de rayon } \leq \epsilon\}.$$

Théorème 2.1. *[2, 1] Soit $\alpha : \mathcal{P}_b(X) \to \mathbb{R}_+$ la mesure de non compacité (en abrégé MNC) au sens de Kuratowski. Alors*

(i) $\alpha(M) = 0$ *si et seulement si* $\overline{M}$ *est compact.*

(ii) α *est une semi norme.*

(iii) $M_1 \subset M_2$ *entraine* $\alpha(M_1) \leq \alpha(M_2)$.

(iv) $\alpha(M_1 \cup M_2) = \max\{\alpha(M_1), \alpha(M_2)\}$.

(v) $\alpha(\overline{co}M) = \alpha(M)$.

Le théorème suivant affirme que les MNCs de Kuratowski et de Hausdorff sont équivalentes.

Théorème 2.2. *Les mesures de non compacité de Kuratowski et de Hausdorff sont liées par l'inégalité*

$$\chi(M) \leq \alpha(M) \leq 2\chi(M).$$

Proposition 2.1. *(Kuratowski 1930 [7]).*
Soit X un espace de Banach, pour toute suite décroissante de fermés, bornés (non vides) A_n tel que $\lim_{n\to+\infty} \alpha(A_n) = 0$. on a

$$A = \bigcap_{n\geq 1} A_n, \quad \textit{est un compact non vide.}$$

Preuve Soit $x_n \in A_n$ pour tout $n \geq 1$, puisque la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante on a

$$\alpha(\{x_n : n \geq 1\}) \leq \alpha(\{x_n : n \geq k\}) \leq \alpha(A_k) \to 0$$

lorsque $k \to +\infty$. Donc $\{x_n : n \geq 1\}$ est relativement compact.

D'autre part ; si $x_n \to \overline{x}$ alors $\overline{x} \in A_n$ (car les A_n sont fermés) pour tout $n \geq 1$, par conséquent $\overline{x} \in A$.

Finalement ; nous avons

$$\alpha(A) \leq \alpha(A_n) \longrightarrow 0, \quad n \to +\infty.$$

D'où la compacité de A.

Définition 2.3. *Soient X, Y deux espaces de Banach, $f : X \longrightarrow Y$ une application continue.*

(a) On dit que f est une k-contraction (d'ensemble) s'il existe $k \in [0, 1]$ tel que

$$\alpha(f(A)) \leq k\alpha(A), \quad \forall A \in \mathcal{P}_b(X).$$

(b) Elle est appelée k-contraction stricte si $0 \leq k < 1$.

(c) On dit que f est condensée si : pour tout $A \in \mathcal{P}_b(X)$ avec $\alpha(A) \neq 0$, on a

$$\alpha(f(A)) \leq \alpha(A).$$

Théorème 2.3. *(G. Darbo 1955 [4]).*
Soit X un espace de Banach, $K \subset X$ fermé, borné, convexe et $f : K \longrightarrow K$ une application continue telle que pour $k \in [0, 1[$ et $A \in \mathcal{P}_b(X)$

$$\alpha(f(A)) \leq k\alpha(A), \quad \textit{pour tout} \quad A \subset K.$$

Alors f admet un point fixe.

Preuve. On considère une suite d'ensembles définis par

$$A_1 = \overline{co}f(K), \quad \text{et} \quad A_n = \overline{co}f(A_{n-1}), \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Alors $(A_n)_n$ est une suite décroissante de fermés, convexes et $C = \bigcap_{n\geq 1} A_n$ est un fermé convexe.

De plus

$$\alpha(A_n) \leq \alpha(f(A_{n-1})) \leq k\alpha(A_{n-1}) \leq ... \leq k^n\alpha(K) \to 0$$

quand $n \longrightarrow +\infty$, par conséquent C est un compact non vide (d'après la proposition 2.1).

D'où f admet un point fixe $x \in C \subset K$ en vertu du théorème de Schauder.

Le théorème 2.3 de Darbo se généralise de la manière suivante

Théorème 2.4. *(N.B. Sadovski 1967 [8]).*
Soit C un ensemble convexe fermé borné d'un espace de Banach X, si f une application condensée envoie C dans lui même. Alors f admet au moins un point fixe.

2.2 Notion générale de la mesure de non-compacité

Définition 2.4. *Soit X un espace de Banach et $(\mathcal{A}, \geq)$ un ensemble partiellement ordonné. Une application $\beta : \mathcal{P}_b(X) \longrightarrow \mathcal{A}$ est dite mesure de non compacité dans X si*

$$\beta(\overline{co}\Omega) = \beta(\Omega); \quad \textit{pour tout } \Omega \in \mathcal{P}_b(X).$$

Remarques 2.1. *Notons que D est est dense dans Ω, alors $\overline{co}D = \overline{co}\Omega$, donc*

$$\beta(D) = \beta(\Omega); \quad \textit{pour tout } \Omega \in \mathcal{P}_b(X).$$

Proposition 2.2. *[1] La mesure de non compacité β est dite :*

(i) *monotone si $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathcal{P}_b(X)$, $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ entraine $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$.*

(ii) *non-singulière si $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$ pour tout $a \in X$, $\Omega \in \mathcal{P}_b(X)$.*

(iii) *semi additive si $\beta(\Omega_0 \cup \Omega_1) = \max\{\beta(\Omega_0), \beta(\Omega_1)\}$ pour tout $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathcal{P}_b(X)$.*

(*iv*) *réelle si* $\mathcal{A} = \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ *et* $\beta(\Omega) < +\infty$ *pour tout borné* $\Omega \in \mathcal{P}_b(X)$.

Si $\mathcal{A}$ *est un cône dans un espace de Banach, nous dirons que*

(*v*) *sous-additive si* $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)\}$, $\forall \Omega_0, \Omega_1 \in \mathcal{P}_b(X)$.

(*vi*) *régulière si* $\beta(\Omega) = 0$ *si et seulement si* $\overline{\Omega}$ *est compact.*

Remarques 2.2. *D'après la proposition 2.1 la mesure de non compacité de Kuratowski est une mesure réelle monotone, non-singulière et régulière.*

2.3 Propriétés

Soit E un espace de Banach $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ des sous-ensembles bornées de E, Notons par ψ la MNC de Kuratowski ou de Hausdorff, la preuve est similaire, donc on a :

1. Régularité : $\psi(\Omega) = 0 \Longleftrightarrow \overline{\Omega}$ est compact

Demonstration : Soit ω bornée de E, montrons que :
$\psi(\Omega) = 0 \Longleftrightarrow \overline{\Omega}$ est compact i.e Ω est relativement compact

1.1 Ω est relativement compact $\Longrightarrow \psi(\Omega) = 0$?
supposons que Ω est relativement compact, montrons que $\psi(\Omega) = 0$:
Ω est relativement compact, E un espace de Banach (E étant complet)
Ω relativement compact $\Longleftrightarrow \Omega$ est pré compact.
Comme Ω est précompact par définition :
$\exists \varepsilon$ -réseaux fini $x_1, x_2, \cdots, x_n$ teleque $\Omega \subset \bigcup B(x_i, \varepsilon)_{i=\overline{1,n}}$ et ceci $\forall \varepsilon > 0$
donc : par la définition de **MNC** au sense de Hausdorff
En déduit que : $\forall \varepsilon > 0$, $\alpha(\Omega) \leq \varepsilon$.
On déduit que : $\alpha(\Omega) = 0$.

1.2 **Inversement**

Supposons que $\psi(\Omega) = 0$, montrons que Ω est relativement compact :

$$\begin{aligned}
\psi(\Omega) &= \inf\{\varepsilon > 0, \Omega \ \textbf{ admet un } \varepsilon\textbf{-réseaux fini}\} \\
&= \inf\{\varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \ \textbf{ un } \varepsilon\textbf{-réseaux}, \Omega \subset \bigcup B(x_i, \varepsilon)_{x_i \in A_\varepsilon}\}
\end{aligned}$$

du fait que $\alpha(\Omega) = 0$, et en utilisant les propriétées caractéristiques du l'inf, on déduit qu'il existe un ε-réseaux fini$(x_1, \cdots, x_n)$ tel que : $\Omega \subset \bigcup B(x_i, \varepsilon)$,

$x_i \in (x_1, x_2, ..., x_n)$

donc : Ω est précompact (par définition).

Comme E est complet, alors, Ω est relativement compact.

2 **Non singulière** : $\psi(\{a\} \bigcup \Omega) = \psi(\Omega)$.

Démonstration :

On sait que $\{a\}$ est relativement compact, donc d'après la propriété précédant (Régularité), on déduit que : $\psi(\{a\}) = 0$.

3 **-La monotonie** : $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \Rightarrow \psi(\Omega_1) \leq \psi(\Omega_2)$

Preuve :

Soit $(\Omega_1^i)_{i \in I}$, I fini un recouvrement de Ω_2 tel que : $diam(\Omega_1^i) \leq d$.

comme$(\Omega_2^i)_{i \in I}$, I fini est un recouvrement de Ω_2, il s'en suit que :

$(\Omega_i^2) i \in I$ est aussi recouvrement de $\Omega_1 (\Omega_1 \subset \Omega_2)$, donc :

$$\psi(\Omega_1) \leq \psi(\Omega_2)$$

4 **-Sous aditivité** : $\psi(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) = \max(\psi(\Omega_1), \psi(\Omega_2))$ (égalité entre 2 réels positive)

preuve :

$$\begin{cases}
\psi(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) & \leq \max(\psi(\Omega_1), \psi(\Omega_2)) \\
\max(\psi(\Omega_1), \psi(\Omega_2)) & \leq \psi(\Omega_1 \bigcup \Omega_2)
\end{cases}$$

posons : $A = \max(\psi(\Omega_1), \psi(\Omega_2))$, en se basant sur la propriété (monotonie) précédente, on déduit :

$$\begin{cases} \Omega_1 \subset \Omega_1 \bigcup \Omega_2 \\ \Omega_2 \subset \Omega_1 \bigcup \Omega_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \psi(\Omega_1) \leq \psi(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) \\ \psi(\Omega_2) \leq \psi(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) \end{cases}$$

donc : $\max(\psi(\Omega_1), \psi(\Omega_2)) \leq \psi(\Omega_{1 \bigcup \Omega_2})$

$A \leq \psi(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) \quad (*)$

Inversement :

on va montrer que : $\psi(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) \leq A = max(\psi(\Omega_1, \Omega_2))$, d'après la propriété caractéristique de l'inf $\forall \varepsilon \geq 0$, on peut trouver un recouvrement :$(\Omega_j^i)_{i=1,2,j=1,n}$ tel que $diam(\Omega_j^i) \leq a + \varepsilon$

mais : $(\Omega_j^i)_{i,j}$ est un recouvrement de Ω_1 et de Ω_2, i,e

$$\begin{cases} \Omega_1 \subset \bigcup \Omega_j^i \\ \Omega_2 \subset \bigcup \Omega_j^i \end{cases}$$

par suit : $(\bigcup \Omega_j^i)_{i,j}$ est un recouvrement de Ω

Donc :

On peut déduire : $\psi(\Omega) = \psi(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) \leq A + \varepsilon$ et ceci $\forall \varepsilon > 0$

par passage à la limite, on déduit que :

$$\psi(\Omega_1 \bigcup \Omega_2) = max(\psi(\Omega_1), \psi(\Omega_2))$$

5 **-semi additivité** :

$\psi(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \psi(\Omega_1) + \psi(\Omega_2)$, montrons par MNC de Kuratowski : $\alpha(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \alpha(\Omega_1) + \alpha(\Omega_2)$?

soit $\{\Omega_1^1, \cdots, \Omega_n^1\}$ un recouvrement de Ω_1, $\{\Omega_1^2, \cdots, \Omega_n^2\}$ un recouvrement de Ω_2

Alors : $\Omega_i^1 + \Omega_j^2$, $i = 1, n, j = 1, m$ forme un recouvrement de $\Omega_1 + \Omega_2$

de plus : $diam(\Omega_i^1 + \Omega_j^2) \leq diam(\Omega_i^1) + diam(\Omega_j^2)$

et par suite :$\alpha(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \alpha(\Omega_1) + \alpha(\Omega_2)$.

Remarques 2.3. *D'après [1] on a*

$$\chi_0(\Omega) \leq \chi(\Omega) \leq 2\chi_0(\Omega). \tag{2.1}$$

2.4 Exemples

Nous présentons quelques formules de MNC dans certains espaces fonctionnels.

Exemple 2.4.1. *([6])*
Soient X un espace de Banach séparable, il existe une suite décroissante de sous-espaces $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $X = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n}$ tel que pour tout ensemble (dénombrable)

$$A = \{x_m : m \in \mathbb{N}\} \subset X.$$

La mesure de non-compacité de Hausdorff est donnée par

$$\beta(A) = \lim_{n\to+\infty} \overline{\lim_{m\to+\infty}} d(x_m, X_n).$$

Exemple 2.4.2. *[9] Soit $C([a,b];\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues définies de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors si $\Omega \in \mathcal{P}_b(C([a,b];\mathbb{R}))$ la MNC de Hausdorff est*

$$\chi(\Omega) = \frac{1}{2} \lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in\Omega} \max_{|t_1-t_2|\leq\delta} |x(t_1) - x(t_2)|.$$

Chapitre 3

Équation différentielle dans un espace de Banach

Théorème 3.1. *Soient a et b sont des nombres réelles positives, $I \subset \mathbb{R}$ avec*
$I = [t_0 - a, t_0 + a]$ et $V = \bar{B}(x_0, b)$ désigne la boule fermé de centre x_0 et de rayon b dans un espace de Banach X. où $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in X$
-f est continue.
-Il existe $\forall K > 0$ telle que $\alpha(f(I \times W)) \leq K\alpha(W)$ W borné de X. Alors il existe une solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} x'(t) =& f(t, x(t)), \\ x(t_0) =& x_0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

définie sur l'intervalle $J = [t_0 - h, t_0 + h]$, où $0 < h \leq min\{a, b/M, 1/k\}$ et $M = \sup\{\|f(t,x)\| \ \ (t,x) \in I \times V\}$

Preuve :

On considère l'équation intégrale suivante

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Il est claire que les solution de l'équation intégrale (4.1) sont des solutions du problème de Cauchy (3.1). Introduisons l'opérateur

$$T : C(J, V) \to C(J, V)$$

définit par

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

pour tout $x \in C(J, V)$ et $t \in J$, on remarque que T est bien définie et $C(J, V)$ est fermé, bornée et convexe sous ensemble de $C(J, X)$, alors on transforme la recherche du solution de problème de Cauchy à la la recherche du solution de l'équation intégrale

$$x = Tx, \qquad x \in C(J, V) \tag{3.2}$$

(I) $T(C(J, V))$ est un sous ensemble bornée et équicontinue de $C(J, X)$. de plus, pour tout $t, t' \in J$ et $x \in C(J, V)$ on a

$$\|Tx(t)\| \leq \|x_0\| + Mh \leq \|x_0\| + b$$

et

$$\begin{aligned} \|Tx(t) - Tx(t')\| &\leq \int_{t}^{t'} \|f(s, x(s))\|ds \\ &\leq M|t - t'| \end{aligned}$$

Soit H est un sous ensemble non précompact de $C(J, V)$.

puisque $T(H)$ est bornée et sous ensemble équicontinue de $C(J, X)$, donc nous avons :

$$\alpha(T(H)) = \sup_{t\in J} \{\alpha(\{Tx(t), x \in H\})\}$$
$$= \sup_{t\in J} \left\{\alpha\left(\left\{x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \;\; x \in H\right\}\right)\right\}$$

IL vient donc :

$$x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \in x_0 + (t - t_0)\{f(s, x(s)) : s \in [t_0, t]\}$$

et donc

$$\alpha(T(H)) \leq \sup_{t\in J} \{\alpha\{x_0 + (t - t_0)(\{f(s, x(s)) : s \in [t_0, t], x \in H\})\}\}$$
$$\leq \sup_{0\leq\lambda\leq h} \{\alpha(x_0 + \lambda(f(J \times H)))\}$$
$$= h\alpha(f(J \times H))$$
$$\leq hK\alpha(H)(\alpha(H))$$

par conséquent T admet au moins un point fixe $\bar{x} \in C(J, V)$

ce point fixe est la solution du problème(3.2).

Remarque :

Si un fonction $f = f_1 + f_2$, ou f_1 satisfait la condition Lipschitz et f_2 est cartographie compact, Alors f satisfait à l'hypothèse du théorème (3.1).

Chapitre 4

Équations défferentiale d'ordre fractionaire dans l'espace de Banach

Introduction :

Nous allons nous intéresse au question d'existence des solutions pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire dans un espace de Banach, l'idée de construire la solution approché par un sechma. La démonstration est basé sur un argument de compacité pour conclure que la sous suite converge vers la solution. Puisque E est un espace de Banach, l'utilisation de la mesure de non compacité est indispensable.

Contre exemple :

Soit$E = c_0$ =$\{z = (z_1, z_2, z_3, ...) : z_n \to 0, n \to \infty\}$
muni de la norme $\|z\| = \sup_{n\geq 1}|z_n|$ et $f(z) = 2(\sqrt{|z_1|}, \sqrt{|_2|}, \sqrt{|z_3|}, \cdots)$
et $z = (z_1, z_2, z_3, \cdots) \in c_0$.
On considère l'équation différentielle d'ordre fractionnaire suivante :

$$ {}_0^cD_t^q x(t) = f(x(t)), x(0) = \varepsilon, t \in (0, t_0]. \tag{4.1}$$

où ${}_0^cD_t^q$ désigne la dérivé fractionnaire au sens de Caputo, $0 < q < 1$,
$\varepsilon = (1, 1/2^2, 1/3^3, \cdots) \in c_0$, $t_0 < \left(\dfrac{\Gamma(1+2)}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$ Il est claire que f est continue, d'après, il existe une constante $k^* = \dfrac{\Gamma(1+q)}{\Gamma(1+q) - 2t_0^q}$, telle que le problème (4.1) admet au moins une solution

$x \in C([0,t_0];c_0)$ et $x(t) = (x_1(t), x_2(t)x_3(t), \cdots) \in c_0$ sur $[0,t_0]$,avec $\sup_{t\in[0,t_0]}\|x(t)\|\leqslant K^*$, on peut conclure que :

$$ {}_0^cD_0^q x_n(t) = 2\sqrt{|x_n(t)|}, x_n(t) = \frac{1}{n^2},\ t \in (0,t_0],\ n = 1,2,3,\cdots \tag{4.2} $$

où $x_n \in C([0,t_0];c_0)$ avec $sup_{t\in[0,t_0]}|x_n(t)|\leq K^*$.

L'équation (4.2), peut être écrite sous la forme suivant :

$$ x_n(t) = \frac{1}{n^2} + 2D_t^{-q}\sqrt{|x_n(t)} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\sqrt{x_n(s)}\,ds,\quad t \in [0,t_0] \tag{4.3} $$

On choisit $(t-s)^{q-1} > 1$ avec $s \in [0,t_0]$,$\forall t \in [0,t_0]$, la relation (4.3) donne

$$ x_n(t) \geq \frac{1}{n^2} + \frac{2}{\Gamma(q)}\int_0^t \sqrt{|y_n(s)|}ds,\ t \in [0,t_0],\ n = 1,2,3,\cdots \tag{4.4} $$

Supposons que $y_0 \in C([0,t_0;C_0])$ est une solution de l'équation intégrale suivante :

$$ y_n(t) = \frac{1}{4n^2} + \frac{2}{\Gamma(q)}\int_0^t \sqrt{|y_n(t)|}ds,\ t \in [o,t_0],\ n = 1,2,3.. \tag{4.5} $$

Alors :

$$ x_n(t) \geq y_n(t),\ t \in [0,t_0],\ n = 1,2,3,\cdots \tag{4.6} $$

On suppose (par absurde) que la relation (4.6) est fausse, alors la continuité de x et y et entraine que $x_n(0) > y_n(0)$, $t_1 \in (0,t_0]$:

$$ x_n(t) = y_n(t_1),\ x_n(t) > y_n,\ t \in [0,t_1) \tag{4.7} $$

Donc les relations (4.4) et (4.7) donne :

$$ \begin{aligned} y_n(t) &= \frac{1}{4n^2} + \frac{2}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1} \sqrt{|y_n(s)|}ds \\ &< \frac{1}{n^2} + \frac{2}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1} \sqrt{|y_n(s)|}ds \\ &< \frac{1}{n^2} + \frac{2}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1} \sqrt{|x_n(s)|}dst \in [o,t_0] \\ &< x_n(t_1),\ n = 1,2,3,\cdots \end{aligned} $$

La dernière inégalité contredit à la relation (4.6), D'où la relation (4.6) est vraie.
comme l'équation intégrale(4.5) est équivalente au problème suivant :

$$y_n'(t) = \frac{2}{\Gamma(q)}\sqrt{|y_n(t)|}, y_n(0) = \frac{1}{4n^2},\ t \in [0, t_0],\ n = 1, 2, 3, \cdots \tag{4.8}$$

et noter $y_n'(t) > 0, t \in [0, t(0)]$ on peut conclure que le problème de Cauchy d'ordre fractionnaire (4.8) est admet une solution continue $y_n(t) = \left(\frac{t}{\Gamma(q)} + \frac{1}{2n}\right)^2, t \in [0, t_0],\ n = 1, 2, 3, \cdots$
avec

$$x_n(t) \geq y_n(t) = \left(\frac{t}{\Gamma(q)} + \frac{1}{2n}\right)^2,\ t \in [0, t_0],\ n = 1, 2, 3\cdots \tag{4.9}$$

par conséquent pour $t \in (0, t_0)$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) \neq 0$ par (4.9), d'où $x_n(t) \notin c_0$
donc c'est la contraction.

4.1 Problème de Cauchy d'ordre fractionnaire

4.1.1 introduction

X est un espace de Banach avec la norme $\|\cdot\|$. soit $J \subset R$. soit $C(J, X)$ est un espace de Banach de la fonction continue sur J dans X.
Soit $r > 0$ et $C = C([-r, 0], X)$ est l'espace des fonctions continues sur $[-r, 0]$ dans X, muni de la norme $\|z\|_* = \sup_{\theta\in[-r,0]}|z(\theta)|$. on considère le problème de Cauchy d'ordre fractionnaire donnée par :

$$\begin{cases} {}_0^cD_t^q x(t) &= f(t, x_t), \quad t \in]0, a[\\ x(0) &= \varphi \in C \end{cases} \tag{4.10}$$

où ${}_0^cD_t^q$ est dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < q < 1$,
$f : [0, a) \times C \to X$ est une fonction donnée, x_t désigne $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ pour $\theta \in [-r, 0]$.
Dans cette partie, on discuter l'existence des solutions le problème (4.10) telle que f satisfait la condition de Carathéodory et la condition de MNC. Alors On donne un exemple pour illustrer les applications de notre résultats abstraits.

Définition 4.1. *Une fonction $x \in C([-r, T], X)$ est dite une solution pour le problème (4.10) sur $[-r, T])$, $T \in (0, a)$ si :*

(i) la fonction $x(t)$ *est absolument continue dans* $[0,T]$ *;*

(ii) $x_0 = \varphi$ *;*

(iii) x *satisfait l'équation (4.10) ;*

4.1.2 Existence de solution

Introduisons les hypothèses suivantes :

(H1) $\forall t \in [0,a)$, la fonction $f(t,.) : c \to X$ est continue et$\forall z \in C$, la fonction $f(.,z) : [0,a) \to X$ est fortement mesurable

(H2) $\forall \tau > 0$,$\exists q_1 \in [0,a)$ et $m_1 \in L^{\frac{1}{q_1}}([0,a),\mathbb{R}^+)$ telle que $|f(t,z)| \leq m_1(t)$ $\forall z \in C$ avec $\|z\|_* \leq \tau$,$\forall t \in [0,a)$

(H3) $\exists q_2 \in (0,q)$ et $m_2 \in L^{\frac{1}{q_2}}([0,a),\mathbb{R}^+)$ tel que $\alpha(f(t,B)) \leq m_2(t)\alpha(B)$, $\forall t \in [0,a) et B$ un élément de C.

Pour démontrer la théorème d'existence sur $[0,\tau]$, on a besoin le lemme suivante :

Lemme 4.1. *On suppose que les hypothèses* $(H1)-(H2)$. $x \in C([-r,T],X)$ *est une solution pour le problème (4.10) sur* $[-r,T]$ *pour* $T \in [0,a]$ *si et seulement si* x *satisfait à l'équation intégrable suivante :*

$$\begin{cases} x(\theta) &= \varphi(\theta), \quad \theta \in [-r,0] \\ x(t) &= \varphi(\theta) + \dfrac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x_s)ds, \quad t \in [0,T] \end{cases} \tag{4.11}$$

Preuve :

Comme x est continue pour chaque $t \in [0,a)$, d'après $H1$, la fonction $f(t,x_t)$ est une fonction mesurable par rapport t, un calcul direct donne $(t-s)^{q-1} \in L^{\frac{1}{1-q_1}}[0,t]$ pour $t \in [0,a)$ et $q_1 \in [0,q)$. Soit

$$b_1 = \frac{q-1}{1-q_1} \in (-1,0), M = \|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,ta)}$$

On utilisant l'inégalité d'Hölder et $(H2)$. pour $t \in (0, a)$,on obtient que

$$\begin{aligned}\int_0^t |(t-s)^{q-1} f(s, x_s)| ds &\leq \left(\int_0^t (t-s) \frac{q-1}{1-q_1} ds \right)^{1-q_1} \|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,t]} \\ &\leq \frac{M}{(1+b_1)^{1-q_1}} a^{(1+b_1)(1-q_1)}.\end{aligned}$$

Ainsi la fonction $|(t-s)^{q-1} f(s, x_s)|$ est un intégrable au sens de Lebesgue par rapport à $s \in [0, t)$ pour chaque $t \in (0, a)$.

D'après le théorème de Bochner, que $(t-s)^{q-1} f(s, x_s)$ est intégrable au sens de Bochner avec $s \in [0, t[, \forall t \in (0, a)$.

Soit $L(\tau, s) = (t-\tau)^{-q} |\tau - s|^{q-1} m_1(s)$. comme $L(\tau, s)$ est une fonction mesurable pas négative sur$D = [0, t] \times [0, t[$, Donc on a :

$$\int_0^t \left(\int_0^t L(\tau, s) ds \right) d\tau = \int_D L(\tau, s) ds d\tau = \int_0^t \left(\int_0^t L(\tau, s) d\tau \right) ds$$

et

$$\begin{aligned}\int_D L(\tau, s) ds d\tau &= \int_0^t \left(\int_0^t L(\tau, s) ds \right) d\tau \\ &= \int_0^t (t-\tau)^{-q} \left(\int_0^t |\tau - s|^{q-1} m_1(s) ds \right) d\tau \\ &= \int_0^t (t-\tau)^{-q} \left(\int_0^\tau (\tau - s)^{q-1} m_1(s) ds \right) d\tau \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{-q} \left(\int_\tau^t (s-\tau)^{q-1} m_1(s) ds \right) d\tau \\ &\leq \frac{2M}{(1+b_1)^{1-q_1}} a^{(1+b_1)(1-q_1)} \int_0^t (t-\tau)^{-q} d\tau \\ &\leq \frac{2M}{(1-q)(1+b_1)^{1-q_1}} a^{(1+b_1)(1-q_1)+1-q}\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$L_1(\tau - s) = (t-\tau)^{-q} (\tau - s)^{q-1} f(s, x_s)$$

est une fonction intégrable au sens de Bochner sur $D = [0, t] \times [0, t]$, On a :

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau L_1(\tau, s) ds = \int_0^t ds \int_s^t L_1(\tau, s) d\tau$$

.

On preuve maintenant que :

$$ {}_0D_t^q({}_0D_t^{-q}f(t,x_t)) = f(t,x_t), \text{pour} t \in (0,T] $$

Où ${}_0D_t^q$ est la dérivation fractionnaire

en plus, on a

$$\begin{aligned}
{}_0D_t^q({}_0D_t^q f(t,x_t)) &= \frac{1}{\Gamma(1-q)\Gamma(q)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-q} \left(\int_0^\tau (\tau-s)^{q-1} f(s,x_s)ds \right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-q)\Gamma(q)} \frac{d}{dt} \int_0^t d\tau \int_0^\tau L_1(\tau,s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-q)\Gamma(q)} \frac{d}{dt} \int_0^t ds \int_s^t L_1(\tau,s)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-q)\Gamma(q)} \frac{d}{dt} \int_0^t f(s,x_s)ds \int_0^t (t-\tau)^{-q}(\tau-s)^{q-1}d\tau \\
&= \frac{d}{dt} \int_0^t f(s,x_s)ds \\
&= f(t,x_t)
\end{aligned}$$

$pour t \in (0,T]$.

si x satisfait la relation (4.11), donc on peut dire que $x(t)$ est absolument continue sur $[0,T]$. D'autre part, pour quelque soit les intervalles ouverts disjoint $(c_i,d_i)_{1\leq i\leq n}$ sur $[0,T]$ avec $\sum_{i=1}^n (d_i - c_i) \to 0$

on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}|x(d_i)-x(c_i)| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(q)}\left|\int_0^{d_i}(d_i-s)^{q-1}f(s,x_s)ds-\int_0^{c_i}(c_i-s)^{q-1}f(s,x_s)ds\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(q)}\left|\int_{c_i}^{d_i}(d_i-s)^{q-1}f(s,x_s)ds\right| \\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(q)}\left|\int_0^{c_i}(d_i-s)^{q-1}f(s,x_s)ds-\int_0^{c_i}(c_i-s)^{q-1}f(s,x_s)ds\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{c_i}^{d_i}(d_i-s)^{q-1}m_1(s)ds \\
&\quad+\textstyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{c_i}((c_i-s)^{q-1}-(d_i-s)^{q-1}m_1(s)ds \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(q)}\left(\int_{c_i}^{d_i}(d_i-s)^{\frac{q-1}{1-q_1}}ds\right)^{1-q_1}\|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,T]} \\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(q)}\left(\int_0^{c_i}(c_i-s)^{\frac{q-1}{1-q_1}}-(d_i-s)^{\frac{q-1}{1-q_1}}ds\right)^{1-q_1}\|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,T]} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{(d_i-c_i)^{(1+b_1)(1-q_1)}}{\Gamma(q)(1+b_1)^{1-q_1}}\|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,T]} \\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\frac{(c_i^{1+b_1}-d_i^{1+b_1}+(d_i-c_i)^{1+b_1})^{1-q_1}}{\Gamma(q)(1+b_1)^{1-q_1}}\|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,T]} \\
&\leq 2\sum_{i=1}^{n}\frac{(d_i-c_i)^{(1+b_1)(1-q_1)}}{\Gamma(q)(1+b_1)^{1-q_1}}\|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,T]}\to 0
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$x(t)$ est absolument continue sur $[0,T]$ qui implique que $x(t)$ est différentiable p.p sur $[0,T]$. selon l'argument au dessus et la définition (4.1) pour $t\in(0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}
{}_0^cD_t^qx(t) &= {}_0^cD_t^q\left(\varphi(0)+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}f(s,x_s)ds\right) \\
&= {}_0^cD_t^q\left(\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}f(s,x_s)ds\right) \\
&= {}_0^cD_t^q({}_0D_t^{-q}f(t,x_t)) \\
&= {}_0D_t^q({}_0D_t^{-q}f(t,x_t))-[({}_0D_t^{-q}f(t,x_t)]_{t=0}\frac{t^{-q}}{\Gamma(1-q)} \\
&= f(t,x_t)-[({}_0D_t^{-q}f(t,x_t)]_{t=0}\frac{t^{-q}}{\Gamma(1-q)}
\end{aligned}$$

comme $(t-s)^{q-1}f(s,x_s)$ est intégrale de Lebesgue tel que $s \in [0,t)\forall t \in (0,T]$, on sait que $[({}_0D_t^{-q}f(t,x_t)]_{t=0} = 0$, ce qui signifie que ${}_0^cD_t^q x(t) = f(t,x_t)$ pour $t \in (0,T]$.
par conséquent $x \in C([-r,T],X)$ est une solution fractionnaire (4.10). Donc x satisfait la relation (4.11) ce qui achève la démonstration.

Théorème 4.1. *Supposant que on a les hypothèses $(H_1),(H_3)$ puis, $\forall\varphi \in C$, ils existes une solution $x \in C([-r,T],X)$ pour le problème (4.10) avec $T \in (0,a)$*
preuve : *soit $K \geq 0$ un réel positif et on choisit $T \in (0,a)$:*

$$\frac{T^{(1+b_1)(1-q_1)}}{\Gamma(q)(1+b_1)^{1-q_1}}\|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,T]} \leq k \tag{4.12}$$

et

$$\frac{T^{(1+b_2)(1-q_2)}}{\Gamma(q)(1+b_2)^{1-q_2}}\|m_2\|_{L^{\frac{1}{q_2}}[0,T]} \leq 1 \tag{4.13}$$

$b_i = \frac{q-1}{1-q_i} \in (-1,0),\ i = 1,2$
on considère l'ensemble B_k définie comme suite

$$B_k = \left\{ x \in C([-r,T],X)\ x_0 = \varphi,\ \sup_{s\in[0,T]} |x(s)-\varphi(0)| \leq K \right\}$$

L'opérateur F est défini sur B_k par :

$$\begin{cases} Fx(\theta) = \varphi(\theta), & \theta \in [-r,\theta] \\ Fx(t) = \varphi(0) + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}f(t,x_s)ds, & t \in [0,T] \end{cases}$$

0u $x \in B_k$, nous prouvons que l'équation de l'opérateur $x = Fx$ a une solution $x \in B_k$, ce qui signifié que x est une solution de problème (4.10).
Premièrement : On observe que pour chaque $y \in B_k$, $(Fy)(t)$ est continue sur $t \in [-r,T]$ et pour $t \in [0,T]$, par (4.12) et l'égalité de Hölder, on a :

$$
\begin{aligned}
|(Fy)(t)-\varphi(0)| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t \left|(t-s)^{q-1}f(s,y_s)\right| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\left(\int_0^t (t-s)^{\frac{q-1}{1-q_1}}ds\right)^{1-q_1}\|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,T]} \\
&\leq \frac{T^{(1+b_1)(1-q_1)}}{\Gamma(q)(1+b_1)^{1-q_1}}\|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,T]} \\
&\leq K
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

ou $b_1 = \frac{q-1}{1-q_1} \in (-1,0)$, ainsi , $\sup_{t\in[0,T]}|(Fy(t)-\varphi(0)|\leqslant K$, ce qui implique que $F : B_k \to B_k$.
De plus : nous prouvons que F est un opérateur continue sur B_k, soit $\{y^n\} \subseteq B_k$ avec $y^n \to y$ sur B_k, puis par (H_1) et le fait que $y_t^n \to y_t$, $t \in [0,T]$, On a :

$$F(s,y_s^n) \to f(s,y_s) \;\; s\in[0,T] \;\; n\to\infty$$

. Notant que $(t-s)^{q-1}|f(s,y_s^n)-f(s,y_s)|\leqslant (t-s)^{q-1}2m_1(s)$, par le théorème de Lebesgue de convergence dominé $\quad n\to\infty$, on a :

$$|(Fy^n)(t)-(Fy(t))|\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t |(t-s)^{q-1}|f(s,y_s^n)-f(s,y_s)|ds \to 0$$

Donc :$Fy^n \to Fy,,\;\; n\to\infty$, ce qui implique que F est continue $\forall n \geq 1$, on définie une suite $\{x^n : n\geq 1\}$ de la manière suivante :

$$x^n = \begin{cases} \varphi^0(t), & t\in[-r,\frac{T}{n}] \\ \varphi(0)+\frac{1}{I(q)}\int_0^{t-\frac{T}{n}}(t-s)^{q-1}f(s,x_s^n)ds, & t\in[\frac{T}{n},T] \end{cases}$$

ou $\varphi^0 \in C([-r,a),X)$. Dénotes la fonction définir par :

$$\varphi^0(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t\in[-r,0) \\ \varphi(0), & t\in[0,a) \end{cases}$$

en utilisant la méthode similaire que on a fait dans (4.14), on obtient que $x^n \in B_k$,pour tout $n\geq 1$.
Soit $A = \{x^n : n\geq 1\}$, il s'ensuit que l'ensemble A est uniformément bornée,
De plus : nous montrons que l'ensemble A est équicontinue sur $[-r,T]$
Si $-r\leq t_1 < t_2 \leq \frac{T}{n}$. Alors, pour chaque $x^n \in A$, on a
$\lim_{t_1\to t_2}|x^n(t_2)-x^n(t_1)|= \lim_{t_1\to t_2}|\varphi^0(t_2)-\varphi^0(t_1)|= 0$ indépendamment pour $x^n \in A$, ensuite si :

$-r \leq t_1 \leqslant \frac{T}{n} < t_2 \leq T$, alors pour chaque $x^n \in A$, en utilise l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&|x^n(t_2) - x^n(t_1)| \\
&\qquad \leq |\varphi(0) - \varphi^0(t_1)| + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_2 - \dfrac{T}{n}} (t_2 - s)^{q-1} f(s, x^n(s)) ds \\
&\qquad \leq |\varphi(0) - \varphi^0(t_1)| + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_2 - \dfrac{T}{n}} (t_2 - s)^{q-1} m_1(s) ds \\
&\qquad \leq |\varphi(0) - \varphi^0(t_1)| + \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\int_0^{t_2 - \frac{T}{n}} (t_2 - s)^{\frac{q-1}{1-q_1}} ds \right) f(s, x^n(s)) \|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,T]} \\
&\qquad = |\varphi(0) - \varphi^0(t_1)| + \frac{(t_2^{1+b_1} - (\frac{T}{n})^{1-b_1})^{1-q_1}}{\Gamma(q)(1+b_1)^{1-q_1}} \|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,T]}
\end{aligned}$$

Selon la définition de φ^0,et en utilisant que la dernière inégalité , on obtient que $|x^n(t_2) - x^n(t_1)| \to 0$ indépendamment pour $x^n \in A$,$t_1 \to t_2$

Finalement : si $\frac{t}{n} \leq t < t_2 \leq T$ alors :pour chaque $x^n \in A$, en utilisant l'inégalité de Hölder on a :

$$\begin{aligned}
&|x^n(t_2) - x^n(t_1)| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_2-\frac{T}{n}} (t_2-s)^{q-1} f(s,x_s^n)ds - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1-\frac{T}{n}} (t_1-s)^{q-1} f(s,x_s^n)ds \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_{1-\frac{T}{n}}}^{t_2-\frac{T}{n}} (t_2-s)^{q-1} f(s,x_s^n)ds \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1-\frac{T}{n}} (t_2-s)^{q-1} f(s,x_s^n)ds - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1-\frac{T}{n}} (t_1-s)^{q-1} f(s,x_s^n)ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_1-\frac{T}{n}}^{t_1-\frac{T}{n}} (t_2-s)^{q-1} m_1(s)ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1-\frac{T}{n}} ((t_1-s)^{q-1} - (t_2-s)^{q-1}) m_1(s)ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\int_{t_1-\frac{T}{n}}^{t_1-\frac{T}{n}} (t_2-s)^{\frac{q-1}{1-q_1}} ds \right)^{1-q_1} \|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(q)} \left(\int_0^{t_1-\frac{T}{n}} (t_1-s)^{\frac{q-1}{1-q_1}} - (t_2-s)^{\frac{q-1}{1-q_1}} ds \right)^{1-q_1} \|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,T]} \\
&= \frac{((t_2-t_1+\frac{T}{n})^{1+b_1} - (\frac{T}{n})^{1+b_1})^{1-q_1}}{\Gamma(q)(1+b_1)1-q_1} \|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,T]} \\
&\quad + \frac{(t_1^{1+b_1} - (\frac{T}{n})^{1+b_1} - t_2^{1+b_1} + (t_2-t_1+\frac{T}{n})^{1+b_1})^{1-q_1}}{\Gamma(q)(1+b_1)^{1-q_1}} \|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,T]} \\
&2 \leq \frac{((t_2-t_1+\frac{T}{n})^{1+b_1} - (\frac{T}{n})^{1+b_1})^{1-q_1}}{\Gamma(q)(1+b_1)^{1-q_1}} \|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,T]}.
\end{aligned}$$

IL est facile de voir que la dernière inégalité tends vers 0 pour $x^n \in A$, quand $t_1 \to t_2$, ce qui signifier que l'ensemble A est équicontinue.

L'ensemble $A(t) = \{x^n(t) : n \geq 1\}$ et $A_t = \{x_t^n : n \geq 1\}$ pour tout $t \in [0,T]$,par la propriété (iv)et(vi) de MNC, pour tout $t \in (0,T]$ fixé et $\delta \in (0,t)$ On a :

$$\alpha(A(t)) \leq \alpha\left(\left\{\frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,x_s^n)ds : n \geq 1\right\}\right) + \alpha\left(\left\{\frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t-\frac{T}{n}}^t (t-s)^{q-1} f(s,x_s^n)ds : n \geq 1\right\}\right)$$

pour tout $\varepsilon > 0$, On peut trouver δ suffisamment petit telle que

$$\frac{\delta^{(1+b_1)(1-q_1)}}{\Gamma(q)(1+b_1)^{1-q_1}} \|m_1\|_{L^{\frac{1}{q_1}}[0,T]} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc : pour chaque $t \in (0,T]$, on peut choisir $N_\delta \geq 1$ tele que $\frac{T}{n} \leq \delta$, pour $n \geq N_\delta$. Alors, on obtien que :

$$\alpha\left(\left\{\tfrac{1}{\Gamma(q)}\int_{t-\frac{T}{n}}^{t}(t-s)^{q-1}f(s,x_s^n)ds : n \geq N_\delta\right\}\right)$$
$$\leq \tfrac{2}{\Gamma(q)}\sup_{n\geqslant N_\delta}\int_{t-\frac{T}{n}}^{t}(t-s)^{q-1}m_1(s)ds$$
$$< \varepsilon$$

pour chaque $t \in (0,T]$, d'où, par les propriétés (iii) et (iv). de MNC, il s'ensuit que :

$$\alpha\left(\left\{\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t-\frac{T}{n}}^{t}(t-s)^{q-1}f(s,x_s^n)ds : n \geq 1\right\}\right) < \varepsilon$$

Alors, on obtient que :

$$\alpha(A(t)) \leqslant \alpha\left(\left\{\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{0}^{t}(t-s)^{q-1}f(s,x_s^n)ds : n \geq 1\right\}\right) + \varepsilon$$

,

pour $t \in (0,T]$, par la propostion $(1,16) et (H3)$, on a que :

$$\begin{aligned}\alpha(A(t)) &\leqslant \tfrac{2}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}\alpha(f(s,A_s))ds+\varepsilon\\ &\leqslant \tfrac{2}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}m_2(s)\alpha(A_s)ds+\varepsilon\end{aligned}$$

ou $t \in (0,T]$.depuit $x^n(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-r,\theta]$, on $\alpha(\{x^n(\theta) : n \geq 1\}) = 0$ pour $\theta \in [-r,0]$. De plus, par la proposition (1.15), pour $s \in [0,T]$ avec $t \in (0,T]$, on déduit que :

$$\alpha(A_s) = \max_{\theta\in[-r,0]}\alpha(\{x_s^n(\theta) : n \geq 1\}) \leq \sup_{s\in[0,t]}\alpha(\{x_s^n(\theta) : n \geq 1\}) = \sup_{s\in[0,t]}\alpha(A(s))$$

puisque ε est arbitraire, on a que :

$$\alpha(A(t)) \leq \frac{2T^{(1+b_2)(1-q_2)}}{\Gamma(q)(1+b_2)^{1-q}}\|m_2\|_{L^{\frac{1}{q_2}}[0,T]}\sup_{s\in[0,t]}\alpha(A(s))$$

ou $t \in (0,T]$ et $b_2 = \frac{q-1}{1-q_2} \in (-1,0)$.

depuit(4.13)et $x_0^n = \varphi$, il faut avoir que $\alpha(A(t)) = 0$ pour chaque $t \in [-r, T]$, alors, par proposition (1.15), on a que $\alpha(A) = \sup\limits_{t\in[-r,T]} \alpha(A(t)) = 0$, donc A est une sous-ensemble relativement compact de B_k, alors, il existe une sous-suite si nécessaire. on peut supposer que la suite $\{x^n\}_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[-r, T]$ vers une fonction continue $x \in B_K$ avec $x(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-r, 0]$
de plus : pour $t \in [0, \frac{T}{n}]$, on a :

$$|(Fx^n)(t) - x^n(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{\frac{T}{n}} (t-s)^{q-1} |f(s, x_s^n)| ds \leq \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{\frac{T}{n}} (t-s)^{q-1} m_1(s) ds$$

et pour $t \in [\frac{T}{n}, T]$, on a :

$$\begin{aligned}
|(Fx^n)(t) - x^n(t)| &= \tfrac{1}{\Gamma(q)} \left| \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x_s^n) ds - \int_0^{t-\frac{T}{n}} (t-s)^{q-1} f(s, x_s^n) ds \right| \\
&= \tfrac{1}{\Gamma(q)} \left| \int_{t-\frac{T}{n}}^t (t-s)^{q-1} f(s, x_s^n) ds \right| \\
&\leq \tfrac{1}{\Gamma(q)} \int_{t-\frac{T}{n}}^t (t-s)^{q-1} m_1(s) ds
\end{aligned}$$

alors, il s'ensuit que :

$$\sup_{t\in[0,T]} |(Fx^n)(t) - x^n(t)| \to 0, \ n \to \infty \tag{4.15}$$

ainsi

$$\sup_{t\in[0,T]} |(Fx)(t) - x(t)| \leq \sup |(Fx)(t) - (Fx^n)(t)| + |(Fx^n)(t) - x^n(t)| + \sup_{t\in[0,T]} |x^n(t) - x(t)|$$

alors, par (4.15) et le fait que F est un opérateur continu. On obtient que $\sup\limits_{t\in[0,T]} |(Fx)(t) - x(t)| = 0$, il s'ensuit que $x(t) = (Fx)(t)$ pour chaque $t \in [0, T]$
donc :

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{pour} t \in [-r, 0] \\ \varphi(0) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f(s, x_s) ds, & \text{pour} t \in [0, T] \end{cases}$$

résoudre le problème (4.10) et cela compléterai la preuve.

Corollaire 4.1. *Supposons que les hypothèses* $(H_1), (H_2), (H_3)$*, alors pour chaque* $\varphi \in C$*, il existe* $T \in (0, a)$ *et une suite des fonctions continus* $x^n : [-r, T] \to X$ *tel que :*

(i) $x^n(t)$ *est absolument continue sur* $[0, T]$ *;*

(ii) $x_0^n = \varphi$ *pour chaque* $n \geq 1$*, et*

(ii) extraire une sous-suite qui étiqueté de la même manière telle que $x^n(t) \to x(t)$ *uniformément sur* $[-r, T]$*, et* $x : [-r, T] \to X$ *est une solution pour le problème fractionnaire(4.10), Nous donnons maintenant un exemple pour illustrer l'application de nos résultats abstraits.*

Exemple 4.1.1. *considérons le système infini de fraction de nos équations différentielles fonctionnelles*

$$\begin{cases} {}_0^cD_t^{\frac{1}{2}} x_n(t) = \frac{1}{nt^{\frac{1}{3}}} x_n^2(t-r) & \text{pour } t \in (0, a) \\ x_n(\theta) = \varphi(\theta) = \frac{\theta}{n} & \text{pour } \theta \in [-r, 0]\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases} \tag{4.16}$$

Soit $E = C_0 = \{(x = x_1, x_2, x_3, \cdots) : x_n \to 0\}$ *avec la norme* $|x| = \sup_{n \geq 1} |x_n|$ *alors le système infinie* (4.16) *peut être considéré comme une IVP fractionnelle de forme* (4.10) *dans* E*, dans cette situation,* $q = \frac{1}{2}$*,* $x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots)$*,* $x_t = x(t-r) = (x_1(t-r), \cdots, x_n(t-r), \cdots)$*,* $\varphi(\theta) = (\theta, \frac{\theta}{2}, \cdots, \frac{\theta}{n}, ...)$ *pour* $\theta \in [-r, \theta] et f = (f_1, \cdots, f_n, \cdots)$*, dans qui*

$$f_n(t, x_t) = \frac{1}{nt^{\frac{1}{3}}} x_n^2(t-r) \tag{4.17}$$

IL est évident que les conditions $H_1 et H_2$ *sont satisfaits. Maintenant, nous vérifions la condition* (H_3) *et l'argument est similaire à la section* $(2, 4)$*.Soit* $t \in (0, a), R > 0$*, donné et* $\{w^{(m)}\}$*, soit tout suite dans* $f(t, B)$*, où* $w^{(m)} = (w^{(m)_1}, \cdots, w^{(m)_{n, \cdots}})$ *et* $B = \{z \in C : \|z\|_* \leq R\}$ *est un ensemble bornée dans* C*, par*(4.17)*, on a :*

$$0 \leq w_n^{(m)} \leq \frac{R^2}{nt^{\frac{1}{3}}}, \quad n, m = 1, 2, 3, \cdots \tag{4.18}$$

donc : $\{w_n^{(m)}\}$ *est borné et par la méthode diagonale, on peut choisir une sous-suite* $\{m_i\} \subset \{m\}$ *telle que*

$$w_n^{(m_i)} \to w_n, \quad i \to \infty, n = 1, 2, 3, ... \tag{4.19}$$

ce qui implique en vertu de(4.18)que

$$0 \leq w_n \leq \frac{R^2}{nt^{\frac{1}{3}}}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{4.20}$$

donc $w = (w_1, \cdots, w_n, \cdots) \in C_0$, *il est facile pour voir* $(4.18) - (4.20)$. *que* $|w^{m_i} - w| = \sup_n |w^{m_i} - w_n| \to 0, i \to \infty$

ainsi, on a prouvé que $f(t, B)$ *est relativement compact dans* C_0 *pour* $t \in [0, a)$, *ce qui signifié que* $f(t, B) = 0$ *pour presque tout* $t \in [0, a)$, *et* B *un ensemble borné donc* C, *à partir de la condition* (H_3) *est satisfait.*

Finalement :forme le théorème (4.1), on peut conclure que le système infini (4.16) a une solution continue.

Bibliographie

[1] : R.R. AKHMEROV, M.I. KAMENSKII, A.S. POTAPOV, A.E. RODKINA :N.B. SADOVSKII, Measures of Noncompactnress and Condensing Operators ,Birkhauser, Basel, 1992.

[2] : J.BANAS ET K. GOEBEL, Measures of Noncompactress in Banach spaces, Marcel Dekker, New York, 1980.

[3] : Brezis H.Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris, 1992.

[4] : G.DARB, Punti uniti in transformatiozioni a codominio non compatto, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 24 (1955), 84-92.

[5] : H. MÖNCH ET GF. VON HARTEN, On the Cauchy problem for ordinary diffrential equations Banach espaces, Arch. Math . (Basel) 32 (1982) 153-160.

[6] : H. MÖNCH. Boundary value problems for nonlinear ordinary diffrential equations of second order in Banach espaces, nonlinear Anal. 4 (1980), 985-999.

[7] : K.KURATOWSKI.Sur les espaces complets. Fund.Math. 15(1930)301-309.

[8] : N.B. Sadovski, A fixed point principal, Funct. Anal. Appl. 1 (1967) 74-76.

[9] : M.KUMENSKII,V. OBUKHOVSKII P. ZECCA, Condensing multivalued Maps and Semilinear Diffrential Inclusions in Banach spaces, Walter de Gruyter Co ; Berlin, 2001.

[10] : R. PRECUP, On the topological transversality principale, Nonlinear Anal. 20(1993) 1-9.