REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE IBN KHALDOUN

TIARET

Faculté des Mathématiques et d'Informatique

Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse Fonctionnelle Et Équations différentielle

Mémoire de Fin d'Etudes

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

Sur le problème d' Ambrosetti-Prodi

Présenté par

***AOUISSI KADDA**

***HALLOUZ ABDELHAMID**

soutenue devant le Jury composé de

***Mr.ZIANE MOHAMED**	**MCA**	**Président**
***Mr.DIEB ABDELRAZEK**	**MAA**	**Encadreur**
***Mr.MAATOUK ABDELKADER**	**MCA**	**Examinateur**

Promotion : **2018 \ 2019**

Remerciement

On remercie tout d'abord ALLAH tout puissant de nous avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce travail.

En tout premier lieu, nous tenons à remercier respectivement notre chère encadreur Mr. Dieb Abdelrezak pour son aide, ses remarques, ses encouragements et ses précieux conseils.

Nos remerciements vont à Mr.Ziane.M et Mr.Maatouk.A d'avoir acceptés d'être notre jury et pour leur disponibilité, leurs suggestions et recommandations.

Nous tenons à remercier tous les enseignants qui ont participé à notre formation tout au long universitaire.

Enfin, on oublie jamais toutes les personnes qui nous aident le long de ce cursus.

★ ★ ★

*________ *On dédie ce travail à* ________*

✓ Nous même où on touche tous nos éfforts, notre volonté et notre amour au mathématique où nous réalisons l'un de nos grands buts, et on récolte le fruit de notre longue carrière scolaire.

✓ Nos parents qui sont grâce à eux que nous avons vécu ce succès .

✓ Toute la famille, nos frères, nos sœurs, nos cousins et nos cousines,. . .

✓ Nos amis qui nous encouragent à touts moments"Lamia et Khadidja".

✓ Et en fin à toute personne qui voulait voir notre succès.

______ *Aouissi-Kadda, Hallouz-Abdelhamid* ______

Notations et Conventions

$(\cdot,\cdot)$:Produit scalaire.

H : Espace de Hilbert.

$H^{'}$: Espace dual d'un espace de Hilbert.

B_E : La boule unite de l'espace E.

S_n : L'ensemble des matrices réelles carré symétrique.

T^* : L'opérateur adjoint.

$\sigma(T)$: Spectre de l'operateur T.

$VP(T)$: L'ensemble des valeurs propres de T.

P_k : projection sur un convexe fermé K.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$: croché dualité.

$\mathcal{L}(E,F)$: Espace des opérateurs linéaires continue de E dans F.

$A^{\perp}$: Orthogonal de A.

$w \subset\subset \Omega$: ouvert w fortement inclus dans Ω c'est-à-dire $\overline{w}$ compact et $\overline{w} \subset \Omega$.

$p.p$: presque par tout.

$suppf$: support de la fonction f.

$\partial\Omega$: frontière de l'ouvert Ω.

w^+ : la partie positive de la fonction w.

w^- : la partie négative de la fonction w.

$\rightharpoonup$: convergence faible.

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = grad\ u.$

Table des matières

INTRODUCTION

DAns ce mémoire on s'intéresse a l'étude de quelque problèmes elliptique semi -linéaire , la non- linéarité est « demi-linéaire « à l'infini. Notre objectif est de comprendre l'interaction entre la première valeur propre du problème et la non-linéarité.

Afin de démontrer un résultat de non existence, existence et de multiplicité de solution. Pour ce faire nous utilisons quelques méthodes hilbertiennes a savoir, la version non- linéaire du théorème de Stampacchia et l'analyse spectrale quelque estimations importante.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante,

Dans le premier chapitre nous rappelons les espaces de Hilbert, les espaces de Sobolev et quelque résultat de la théorie de mesure.

Le deuxième sera consacré à l'analyse spectrale des opérateurs auto-adjoint compact, nous donnons quelques propriétés de son spectre, et nous énonçons le théorème spectral.

Le dernier chapitre est dédiée a l'étude d'un problème célèbre du a Ambrosetti-Prodi, nous commençons l'étude spectral d'une classe d'opérateur elliptique de type divergence, une caractérisation de la première valeur propre et donne quelque estimation sur la fonction propre associe. En fin nous démentons le théorème d'Ambrosetti-Prodi.

Chapitre 1

Préléminaire

Certaines notions seront ennoncées le long de ce chapitre sans démonstration, le lecteur curieux peut trouver satisfaction dans **[3], [2], [8]**.

1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1. *[3] Soit H un espace vectorièl sur $\mathbb{R}$, f une application de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, On dit que f est un produit scalaire si et selement si :*

1. *Pour tout u, v et $w \in H$, $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$*

$$f(u, \lambda v + \alpha w) = \lambda f(u, v) + \alpha f(u, w).$$

2. $f(u, v) = f(v, u)$ *(symetrique).*
3. $f(u, u) \geq 0$ *et* $f(u, u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0 \quad \forall u \in H$ *(Définie positive).*

Le produit scalaire sera noté $(\cdot, \cdot)$

Définition 1.2. *Soit H un espace vectoriel et $(\cdot, \cdot)$ un produit scalaire défini de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$.*
On appelle espace préhilbertien tout couple $(H, (\cdot, \cdot))$.

Théorème 1.1. *"L'inégalité de Cauchy-Shwartz"*
Soit H un espace préhilbertien,alors :

$$| (u,v) | \leq (u,u)^{\frac{1}{2}} (v,v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in H \tag{1.1}$$

Théorème 1.2. *Soit H un espace préhilbertien, l'application*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \quad & H \to \mathbb{R}^+ \\ & x \to \|x\| = \sqrt{(x,x)} \end{aligned} \tag{1.2}$$

est une norme sur H.

Définition 1.3. *Un espace de Hilbert est un espace vectorièl H muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ et complet pour la norme associée au produit scalaire*

Dans toute la suit H désigne un espace de Hilbert.

Exemple :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, μ une mesure positive sur $\mathbb{R}^n$, et

$$L^2(\Omega, d\mu) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \ mesurable / \int_\Omega |f^2| d\mu < \infty \right\}$$

muni du produit scalaire $(u,v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)} d\mu$ est un espace de Hilbert.
On particulier si μ est la mesure de comptage on obtient l'espace

$$l^2 = \left\{ x = (x_n) \subset \mathbb{R}, \ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

muni du produit scalaire $(x_n, y_n) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i . \overline{y_i}$ est un espace de Hilbert.

1.1.1 Orthogonalité

Définition 1.4. *Soient $x, y \in H$ et $A, B \subset H$. on dit que*

1. $x \perp y$, *si* $(x, y) = 0$.
2. $x \perp A$, *si* $(x, y) = 0, \quad \forall y \in A$.
3. $A \perp B$, *si* $(x, y) = 0, \quad \forall x \in A, \ \forall y \in B$.

Proposition 1.1. *Soit A un sous espace véctorièl fermé d' un espace de Hilbert H on a*

$$A \oplus A^{\perp} = H$$

1.1.2 Base orthonormal

Définition 1.5. *Soit $(e_j)_{j\geq 0}$ une suite d'element de H, on dit que la famille $(e_j)_{j\geq 0}$ est orthonormé si et selement si $\forall n, m \in \mathbb{N}$*

$$(e_n, e_m) = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m. \end{cases} \tag{1.3}$$

Exemple :
La suite des éléments

$$e_k = (\overbrace{0, \cdots, 0}^{k-1}, 1, 0, \cdots), \qquad k = 1, 2, \cdots$$

est orthonormée dans l^2.

1.1.3 Théorème de Projection

Théorème 1.3. *[3]"Projection sur un convexe fermé"*
Soit $K \subset H$ un convexe fermé non vide. alors pour tout $f \in H$, il existe $u \in K$ unique telque :

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\| \tag{1.4}$$

De plus u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K \quad (f - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K$$

On note $u = P_K f$, Alors l'application $P_K : H \longrightarrow K$ est bien définie. De plus el vérifie les propriétées suivantes .

Proposition 1.2. *Sous les hypothèse du Théorème de projection on a :*

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\| \quad \forall f_1, f_2 \in H$$

Autrement dit P_k est 1-lipschizienne.

Proposition 1.3. *Soit $M \subset H$ un sous-espace vectorièl fermé, soit $f \in H$ alors $u = P_M f$ est caractérisé par :*

$$u \in M$$

$$(f - u, v) = 0 \quad \forall v \in M$$

De plus P_M est un opérateur linéaire.

Théorème 1.4. *"Théorème de représentation de Riesz-Fréchet" Etant donné $\varphi \in H^{'}$ il existe $f \in H$ unique tel que :*

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v), \qquad \forall v \in H$$

De plus on a

$$\|f\|_H = \| \varphi \|_{H'}$$

Où on a noté par H' le dual topologique de H et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualitée

Nous présentons dans la suite quellque resultat qui généralise le Théorème 1.4

1.1.4 Théorème de Stampacchia

Définition 1.6. *On dit qu'une forme bilinéaire* $a(u, v) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *est :*

1. *continue s'il existe une constante* C *tellque :*

$$| a(u, v) | \leq C \|u\|.\|v\|$$

2. *coercive s'il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que :*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$$

Théorème 1.5. *[3] Considérons* $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire continue et coercive, soit* K *un convexe non vide fermé de* H*. Pour toute* $\varphi \in H^{'}$ *il existe* $u \in H$ *unique vérifiant :*

$$a(u, v - u) \geq \varphi(v - u) \qquad \forall v \in K \tag{1.5}$$

Si de plus a est symétrique alors u est caractérisé par

$$\forall v \in K \quad et \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u) = \min_{v \in K}(\frac{1}{2}a(u, v) - \varphi(u)) \tag{1.6}$$

Preuve

Avant d'antamé la démonstration de ce théorème,on rappèlle un Théorème dont role sera crucial dans la suite.

Théorème 1.6. *"Théorème de point fixe de Banach"*
Soit X *un espace métrique complet et soit* $S : X \longrightarrow X$ *une application telle que :*
$\exists k < 1$ *telque :*

$$d(S_{v_1}, S_{v_2}) \leq k d(v_1, v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in X$$

Alors S *admet un point fixe unique,*$u = S(u)$

Revenant a la demonstraion promise, soit $\varphi \in H'$ par le théorème de Riesz-

Fréchet :

$$\exists! f \in H, \varphi(v) = (f, v) \quad \forall v \in H$$

Pour chaque $u \in H$ fixé, l'application $v \longrightarrow a(u, v)$ est un élément de H' en utilisant le théorème de Riesz-Fréchet, une autre fois, il existe un unique élément noté $A(u) \in H$ tel que :

$$a(u, v) = (A(u), v) \quad \forall v \in H$$

En utilisant l'unicité de Au, on montre facilement que A est un opérateur linéaire de H dans H. De plus,

$$\langle Au, u \rangle \quad = a(u, u) \quad \geq \alpha \parallel u \parallel^2 \tag{1.7}$$

$$\parallel Au \parallel^2 \quad = \langle Au, Au \rangle \quad = a(u, Au) \leq C \parallel u \parallel \parallel Au \parallel \tag{1.8}$$

donc

$$\parallel Au \parallel \leq C \parallel u \parallel \tag{1.9}$$

$$\langle Au, u \rangle \geq \alpha \parallel u \parallel^2 \tag{1.10}$$

En effet D'aprés ce qui précedent :

$$\exists! u \in K, \forall v \in K, a(u, v - u) \geq \varphi(v - u)$$

$$\Longleftrightarrow \exists! u \in K, \forall v \in K, (Au, v - u) \geq (f, v - u)$$

$$\Longleftrightarrow \exists! u \in K, \forall v \in K, \forall \rho \geq 0, (\rho f - \rho Au + u - u, v - u) \leq 0$$

Par la caractirisation de la projection, on aura

$$\Longleftrightarrow \exists! u \in K, \forall \rho \geq 0, u = P_k(\rho f - \rho Au + u)$$

Pour tout $v \in K$, on pose $S(v) = P_k(\rho f - \rho Av + v)$.
Montrons que si $\rho \geq 0$ est convenablement choisi, alors S est une contraction, il existe $k < 1$ tel que :

$$\forall v_1, v_2 \in K, \| S(v_1) - S(v_2) \| \leq k \| v_1 - v_2 \|$$

En effet, La projection sur un convexe fermé est 1-Lipschitzienne donc,

$$\| S(v_1) - S(v_2) \|^2 \leq \| \rho A(v_1) - \rho A(v_2) - (v_1 - v_2) \|^2$$

et donc

$$\begin{aligned}
\| S(v_1) - S(v_2) \|^2 &\leq \rho^2 \| A(v_1 - v_2) \|^2 + \| v_1 - v_2 \|^2 - 2(\rho A(v_1 - v_2), v_1 - v_2) \\
&\leq (1 + c\rho^2 - 2\alpha\rho) \| v_1 - v_2 \|^2 \\
&\leq k^2 \| v_1 - v_2 \|^2 .
\end{aligned}$$

Choisissons ρ de sorte que $k^2 = 1 + c^2\rho^2 - 2\alpha\rho \leq 1$ (prendre $0 \leq \rho \leq \frac{2\alpha}{c^2}$).on déduit que S est contractante sur le sous ensemble complet K, le théorème de point fixe de banach affirme l'existence et l'unicité de u.
Supposons maintenant que a symétrique, alors a un produit scalaire sur H
En utilise le thérorème de représentation de Riesz , on sait qu'il existe un unique $g \in H$ tel que :

$$\varphi(v) = a(g, v) \qquad \forall v \in H$$

$$a(g - u, v - u) \leq 0 \qquad \forall v \in K$$

et par conséquent $u = P_k(g)$, projection dans (H, a). La première assertion du théorème de la projection donne alors :

$$a(g - u, g - u)^{\frac{1}{2}} = \min_{v \in K} a(g - v; g - v)^{\frac{1}{2}}$$

ou encore

$$a(g,g)-2a(g,u)+a(u,u)=\min_{v\in K}(a(g,g)-2a(g,v)+a(v,v)),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}(u,u)-\varphi(u)=\min_{v\in K}(\frac{1}{2}a(v,v)-\varphi(v)) \quad \forall v\in K$$

Théorème 1.7. *[3], [5]"Théorème de Lax-Milgram"*
Soient H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire, continue et coercive sur H et l une forme linéaire continue sur H.
Alors, il existe un unique élément u de H solution du problème

$$l(v)=a(u;v), \quad \forall v\in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$\forall v\in K \ \ et \ \ \frac{1}{2}a(u,u)-\varphi(u)=\min_{v\in K}\left(\frac{1}{2}a(v,v)-\varphi(u)\right)$$

Preuve

On prent $K=H$ dans le Théorème 1.1.4

Théorème 1.8. *[5]"Théorème de Stampacchia version non linéaire"*
Soit H un espace de Hilbert .soit $a : H\times H\to\mathbb{R}$ une forme continue linéaire par rapport à la deuxième variable tel que

1. $\mid a(u_1,v)-a(u_2,v)\mid\leq\beta\|u_1-u_2\|\|v\|, \quad \forall u_1,u_2,v\in H$
2. $a(u_1,u_1-u_2)-a(u_2,u_1-u_2)\geq C\|u_1-u_2\|^2, \quad \forall u_1,u_2\in H$

alors pour tout $\phi\in H'$ il existe unique $u\in H$ tel que $a(u,v)=\phi(v),\forall v\in H$

1.2 Espace de Sobolev

Le rappèlle des deux inégalités suivantes est du a leur infleunce sur la demonstration de certaines inégalités qui serent ennoncé ulterierement

Théorème 1.9. *"Inégalité de Young"*
Soient a,b deux réelles strictement positive et $p, q \geq 1$*,*
tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*,alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Théorème 1.10. *[3]"Inégalité de Holder"*
$\forall f \in L^p(\Omega), \forall g \in L^q(\Omega), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
Alors :$f.g \in L^1(\Omega)$

$$\| f.g \|_{L^1(\Omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)} . \| g \|_{L^q(\Omega)}$$

Aprés ce brèf préambule nous rappelons la définition et quellque resultat nécéssaire des espaces de Sobolev.

Définition 1.7. *[7] Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $1 \leq i \leq n$*,une fonction* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *a une i-éme dérivée faible dans* $L^1_{loc}(\Omega)$ *s'il existe* $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$*, telle que pour tout* $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ *on ait*

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)\ dx = -\int_\Omega f_i(x)\varphi(x)\ dx$$

Cela revient à dire que la i-ème dérivée au sens des distributions de u apprtient à $L^1_{loc}(\Omega)$
Si f_i *est donnée par la relation ci-dessus,on posera*

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$$

Lorseque $\alpha \in \mathbb{N}^n$*,on note* $\mid \alpha \mid = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots\cdots + \alpha_n$ *la longuer de* α *et on note* $\partial^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} \cdots\cdots\cdots \partial_n^{\alpha_n}$ *dans la suite* $\partial^\alpha u$ *designe la dérivée faible d'une fonction* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$

Définition 1.8. *Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est definie par :*

$$W^{m,p} := \{u \in L^p(\Omega)/\forall\alpha \in \mathbb{N}^n, \mid \alpha \mid \leq m, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

L'espace $L^p(\Omega)$ étant muni de la norme $\| u \|_{L^p(\Omega)} = \| u \|_p$
(ou pour $1 \leq p \leq \infty$, on note $\| u \|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega \mid u(x) \mid^p dx$)
On muni l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ de la norme

$$\| u \|_{m,p} = \| u \|_{W^{m,p}(\Omega)} = \| u \|_{m,p,(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \| \partial^\alpha u \|^p_p \right)^{\frac{1}{p}}$$

1.2.1 L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné ou non et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$

Définition 1.9. *[3] L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est définie par :*

$$W^{1,p} = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g_1, \cdots, g_n \in L^p(\Omega) \ \ telque : \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \ \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1 \cdots n \right\}$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

Proposition 1.4. *L'espase $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de :*

1. *Banach pour $1 \leq p \leq \infty$*
2. *Réflexif pour $1 < p < \infty$*
3. *Séparable pour $1 \leq p < \infty$*

En particulier, L'espace H^1 est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire

$$(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v.$$

Théorème 1.11. *[7]"Frédrichs"*
Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$ Alors il existe une suite(u_n) de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$u_n|_\Omega \longrightarrow u \quad dans \quad L^p(\Omega)$$

$$\nabla u_n|_w \longrightarrow \nabla u|_w \quad dans \quad L^p(w) \;\; pourtout \;\; w \subset\subset \Omega$$

La notion $w \subset\subset \Omega$ signifie que w est un ouvert telque $\bar{w} \subset \Omega$ et $\bar{w}$ est un compact.

Proposition 1.5. *[3] soit $u \in L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ les proposition suivantes sont equivalentes*

1. $u \in W^{1,p}(\Omega)$
2. $\exists C \geq 0, tq :| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} | \leq C \parallel \varphi \parallel_{L^{p'}} \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \;\; \forall i = \overline{1 \cdot \cdot n}$
3. $\exists C \geq 0, \forall \omega \subset\subset \Omega, \forall \; h \; tq :| \; h \; | \leq dist(\omega, C)$ *on a* $:\parallel \tau_h u - u \parallel \leq C \parallel h \parallel$
   de plus,on peut prendre $C = \parallel \nabla u \parallel_{L^p(\Omega)}$ *dans 1 et 2*

1.2.2 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.10. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$,l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}$ est définie par :*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) / u = 0 \; sur \; \partial\Omega \;\; au \; sens \; des \; traces \right\}$$

En particulier pour $p = 2$ on note

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$$

Qu'est un espace de Hilbert

1.2.3 Inégalité de Sobolev

Théorème 1.12. *[3], [7]"Sobolev, Gagliardo, Nirenberg"*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, soit $1 \leq p < n$, on definit $p^* = \frac{np}{n-p}$ ou de façon équivalente par

$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ *alors :*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$$

De plus, il existe une constante $C = C(p, n)$ *telle que :*

$$\| u \|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \| \nabla u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

1.2.4 Inégalité de Poincaré

Théorème 1.13. *soit* Ω *un ouvert borné be* $\mathbb{R}^n$*.Alors il existe une constante* $C(\Omega, p) > 0$ *tel que :*

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Corollaire 1.1. *Soit* Ω *un ouvert borné.*
Alors $\| u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ *est equivalente a* $\| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}$.

Preuve

C'est une application directe du théorème d'isomorphisme de Banach.

1.2.5 Injections Sobolev

Théorème 1.14. *[3] soit* $1 \leq p \leq \infty$ *on a :*

1. $1 \leq p < n$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{P^*}(\Omega)$ *ou* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$
2. $p = n$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty[$
3. $p > n$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$

avec injections continues
De plus, si $p > N$ *on a pour tout* $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$| u(x) - u(y) | \leq C \| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} | x - y |^\alpha \quad p.p \ \forall x, y \in \Omega$$

avec $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ *et* C *une constante qui dépend de* p*,* N *et* Ω *En particulier,*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$$

Théorème 1.15. *[3], [7]"Rellich-Kondrachov"*
On suppose que Ω un ouvert borné de classe C^1, on a :

1. *si* $p < n$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, p^*[$ *ou* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$
2. *si* $p = N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, +\infty[$
3. *si* $> N$ *alors* $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$

avec injections compactes

1.2.6 L'espace Dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.11. *[3] On désigne par* $W_0^{-1,p'}(\Omega)$ *l'espace dual de* $W_0^{1,p}(\Omega)$,$1 \leq p < \infty$ *et par* $H^{-1}(\Omega)$ *le dual de* $H_0^1(\Omega)$

Remarques 1.1. *On identifie* $L^2(\Omega)$ *et son dual ,mais on'édentifie par* $H_0^1(\Omega)$ *et son dual.On a le schéma suivant :*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

avec injections continues et denses.

Vu le lien entre les espaces de Sobolev et les espaces de Lebsegue entien a ennoncé deux Théorèmes qui aurons une place non négligable dans les chapitres suivant.

1.3 Quellque resultat de la théorie de mesure

Théorème 1.16. *[3]"Théorème de la convergence dominé de Lebesgue"*
Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonction de* L^1*.on suppose que*

1. $f_n \longrightarrow f$ *p.p dans* Ω
2. *il exist une fonction* $g \in L^1$ *telle que pour chaque n,* $\mid f_n(x) \mid \leq g(x)$ *p.p sur* Ω

Alors $f \in L^1$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$

Lemme 1.1. *[3]"Lemme de Fatou"*
Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonction de* L^1 *telle que*

1. *pour chaque* n, $f_n(x) \geq 0$ *p.p sur* Ω
2. $\sup \int_\Omega f_n < \infty$

Pour chaque $x \in \Omega$ *on pose* $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \inf f_n(x)$
Alors $f \in L^1$ *et*

$$\int_\Omega f dx \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_\Omega f_n(x)dx$$

A la fin de ce chapitre et, comme le context le nécéssite, on ennonce un opérateur et deux fonctions de valeur singulier qui sont la fonction de carathédory, l'opérateur de superposition de Nemitski et la fonction de trancature.

Définition 1.12. *"Une fonction Carathésdory"*
Soit une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite carathésdory :*

1. $\cdot \longrightarrow f(\cdot, y)$ *est mesurable par rapport à la premier variable.*
2. $\cdot \longrightarrow f(t, \cdot)$ *est continue par rapport à la deuxième variable.*

Théorème 1.17. *[5]"Théorème de Nemitski"*
soit $p, q \geq 1$,*soit* $f(t, x) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction Carathédory,telle qu'il existe une fonction positive* $a \in L^q(\Omega)$ *et une constante* $b > 0$ *de sort que*

$$|f(x, t)| \leq a(x) + b|t|^{\frac{p}{q}}.$$

Alors l'opérateur

$$\begin{aligned} \Phi : \quad & L^p(\Omega) \to L^q(\Omega) \\ & u(x) \to f(x, u(x)) \end{aligned} \tag{1.11}$$

est continue.

Définition 1.13. *"Fonction de Troncature"*
Soit $k > 0$,on definie les fonctions de troncature T_k et G_k pour la manière suivant

$$T_k = \begin{cases} -k, & s \leq -k \\ s, & \mid s \mid \leq k \\ k, & s \geq k \end{cases} \tag{1.12}$$

et

$$G_k(s) = s - T_k(s)$$

les fonctions T_k et G_k vérifiant les propriétées suivantes :

1. $u = T_k(u) + G_k(u)$
2. $T_k(u).G_k(u) = 0$

Chapitre 2

Théorie Spectrale

Le long de ce chapitre certaines démonstrastions sont exclu on réfère à [3], [2], [8] pour plus de détails.

2.1 Théorie des opérateurs

2.1.1 Opérateur linéaire borné

Soient E et F deux espaces de Banach.

Définition 2.1. *[2] Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire,on dit que T est borné*[1] *s'il existe $C > 0$ telle que :*

$$\| Tf \|_F \leq C \| f \|_E, \qquad \forall f \in E.$$

Remarques 2.1. *L'espace de ces opérateur sera noté $\mathcal{L}(E, F)$ dans le cas où $F = E$,il sera noté $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$.*

Exemple :

On définit l'opérateur T sur E, $E = C([0, 1])$ par :

1. Dans le cas linéaire la continuité et la bornétude coïnsident

$$Tu(x) = \int_0^x f(t)u(t)dt$$

Où $f(t)$ est une fonction continue sur $[0,1]$.
T est un opérateur borné.

2.1.2 Opérateur compact

Soient E et F deux espaces de Banach.

Définition 2.2. *[2] On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est compact si $T(B_E)$ est ralativement compact pour la topologie forte de f.*

Tout opérateur continue de rang fini est compact.

2.1.3 Opérateur adjoint

Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$.
Identifiant H' et H on peut considérer si $T^* \in \mathcal{L}(H)$.

Définition 2.3. *[2] On dit qu'un opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H)$ adjoint de l'opérateur T si :*

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle \qquad \forall u, v \in H$$

Exemple :
Posons $K = [0,1] \times [0,1]$, On définit l'opérateur T de E dans E, avec $E = L^2(\Omega, \mathbb{C})$ par :

$$Tu(x) = \int_0^x k(x,t)u(t)dt$$

Opérateur intégral a noyau continue.

$k(x,t) \in C(K, \mathbb{C})$.
L'opérateur adjoint de T est $T^*u(x) = \int_0^x \overline{k(x,t)}u(t)dt$

2.1.4 Opérateur Auto-adjoint

Soit H un espace de Hilbert.

Définition 2.4. *[3], [2] On dit qu'un operateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est autouadjoint si $T^* = T$ c'ést-a-dire*

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle \quad \forall u, v \in H$$

Exemple :

Le même exemple cité précédement si on prend $k(x,t) = \overline{k(x,t)}$ l'opérateur T devient auto-adjoint.

2.2 Théorie spectral

2.2.1 Spectre d'un opérateur

Définition 2.5. *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$*

1. *L'ensemble des scalaire λ pour lequelle l'opérateur $I - \lambda T$ est inversible s'appelle la résolvant,noté par :*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (T - \lambda I) \text{ est inversible de } E \text{ sur } E\}$$

   Le spectre de l'opérateur T noté par $\sigma(T)$ est le complémantaire de l'ensemble résolvante $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$

2. *On dite que λ est une valeur propre si*

$$\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$$

   L'ensemble des valeurs propres est noté par $VP(T)$

   Remarques 2.2. $\ker(T - \lambda I)$ *est le sous-espace propre assosié a λ*

Théorème 2.1. *[3] Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ avec $dim E = \infty$.*
Si T est un opérateur auto-adjoint compact, alors on a :

1. *$VP(T) \subset \mathbb{R}$*
2. *$0 \in \sigma(T)$*
3. *$\sigma(T)\backslash\{0\} = VP(T)\backslash\{0\}$*
4. *On a eventuellement l'une des situations suivants :*
   - ou bien $\sigma(T) = \{0\}$
   - ou bien $\sigma(T)\backslash\{0\}$ est fini
   - ou bien $\sigma(T)\backslash\{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Lemme 2.1. *Soient T un opérateur auto-adjoint compact, soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels tous distincts telle que*

$$\lambda_n \to \lambda$$

et

$$\lambda_n \in \sigma(T)\backslash\{0\} \quad \forall n$$

Alors $\lambda = 0$
Par conséquent, tous les points de $\sigma(T)\backslash\{0\}$ sont isolés

2.2.2 Théorème Spectrale

Théorème 2.2. *[5] Soit H un espace de Hilbert séparable, soit T un opérateur linéaire autoadjoint compact. alors H possède une base orthonormale de vecteurs propres de T. De plus, la suite des valeurs propres correspondant λ_n est telle que $\lambda_n \to 0$ quand $n \to 0$*

Chapitre 3

Problème d'Ambrosetti-Prodi

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous concentrer sur le problème des valeurs propres

$$\begin{cases} -div(M(x)\nabla u) = \lambda u, & dans\ \Omega, \\ u = 0, & dans\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

sous les hypothèses suivantes. Ω est un sous-ensemble borné ouverte régulier de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, et $M(x) \in S_n(\mathbb{R})$, avec des coefficients bornées tel qu'il existe $\alpha > 0$ satisfaisant

$$M(x)\xi.\xi \geq \alpha \mid \xi \mid^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Tout d'abord nous allons étudier l'existence des valeurs propres et certaines de leur propriétés de l'opérateur,

$$L(v) = -div(M(x)\nabla v).$$

Plus tard, nous verrons l'application de la théorie spectrale à des équations semi-linéaires.

On présentera un résultat célébre conu sous l'appellation problème d'Ambrosetti-Prodi.

3.2 Les valeurs propres des opérateurs linéaires elliptiques

Théorème 3.1. *[5] Il existe une base orthonormée* $w_m \in L^2(\Omega)$*et une suite de nombres réels positifs* λ_m *tel que :*

1. $\lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} \lambda_m = +\infty$
2. $\forall m \in \mathbb{N}, w_m$ *est une solution de*

$$\begin{cases} -div(M(x)\nabla u) = \lambda_m u, & dans\ \Omega, \\ u = 0, & dans \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

La preuve de ce théorème est basé sur les propriétés importantes de l'opérateur

$$\begin{aligned} T: \quad L^2(\Omega) &\to L^2(\Omega) \\ f &\to u \end{aligned} \tag{3.3}$$

ou $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution de :

$$-div(M(x)\nabla u) = f \tag{3.4}$$

Lemme 3.1. *Soit l'opérateur T définie par (3.3). Alors T est auto-adjoints compact.*

Preuve

La preuve se divise en deux etapes

Etape 1

Montrons que T est auto-adjoint

le fait que T est bien définie et linéaire est une consequence du Théorème de Lax-Milgram, il rest a montrer que T est auto-adjoint. Posons $U = T(u)\ et\ V = T(v)$ alors

$$\int_\Omega M(x)\nabla U.\nabla\phi = \int_\Omega u\phi \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \tag{3.5}$$

et

$$\int_{\Omega} M(x)\nabla V.\nabla\phi = \int_{\Omega} v\phi \quad \forall\phi \in H_0^1(\Omega) \tag{3.6}$$

Choisissons $\phi = V$ dans (3.5) et $\phi = U$ dans (3.6). La symétrie de M implique que

$$\int_{\Omega} uV = \int_{\Omega} vU$$

C'est-à-dire

$$(T(u), v) = (u, T(v)) \; \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Etape 2

Montrons que T est compact.

Si $T(f) = u$, u est une solution de $\int_{\Omega} M(x)\nabla u.\nabla v = \int_{\Omega} fv$

Donc

$$\alpha \parallel \nabla u \parallel^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_{\Omega} M(x)\nabla u.\nabla u = \int_{\Omega} fu \leq \parallel f \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel u \parallel_{L^2(\Omega)} \leq C \parallel f \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel \nabla u \parallel_{L^2(\Omega)}$$

en utilisant l'ellipticité de M sur le premier membre, et les inégalités de Hölder et de Poincaré sur le second ;

On abouti a :

$$\parallel T(f) \parallel_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C}{\alpha} \parallel f \parallel_{L^2(\Omega)} \qquad \forall f \in L^2(\Omega)$$

Comme l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compact,

Alors T l'est aussi. Revenons au essentielle, prouvons maintenant le théorème (2.2).

Preuve

En utilisant le Lemme (3.1), on peut appliquer le théorème spectral à l'opérateur T défini par (3.4). Il existe donc une base w_n orthonormé de $L^2(\Omega)$,avec

$$\int_{\Omega} | w_n |^2 = 1$$

et une suite μ_n telle que : $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu_n = 0$ avec $T(w_n) = \mu_n w_n$, ce qui veut dire que :

$$\int_\Omega M(x)\nabla w_n.\nabla\phi = \frac{1}{\mu_n}\int_\Omega w_n\phi \qquad \forall\phi \in H_0^1(\Omega)$$

Définition 3.1. *Par les mème notations du théorème précédent,on dira que* $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *est l'ensemble des valeurs propres de* $L(v) = -div(M(x)\nabla v)$ *cela signifie que* $\{\frac{1}{\lambda_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ *est l'ensemble des valeurs propres de*

$$\begin{aligned} T :\ \ & L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \\ & f \to u \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dans tout ce qui suit on ne s'intéressent qu'à λ_1*,la premiere valeur propre de* $L(v) = -div(M(x)\nabla v)$ *;*
Soit :

$$A(v) = \frac{\int_\Omega M(x)\nabla v.\nabla v}{\int_\Omega v^2}$$

Théorème 3.2. *[5] Soit* λ_1 *la plus petite valeur propre de* $L(v) = -div(M(x)\nabla v)$ *;*
Alors :

$$\lambda_1 = \min_{v\in H_0^1(\Omega)} A(v)$$

De plus, chaque fonction u qui minimise A est une fonction propre de L qui correspond à λ_1*.*
En effet, soit u une fonction propre associée àλ_1

$$-div(M(x)\nabla u) = \lambda_1 u$$

Donc :

$$\frac{\int_\Omega M(x)\nabla u\nabla u}{\int_\Omega u^2} = \lambda_1$$

En pend u comme fonction test

Donc

$$A(v) = \lambda_1$$

Remarques 3.1. *L'inégalité de Poincaré, pour $p = 2$ se lit : $\exists C = C(\Omega)$ telleque*

$$\frac{1}{c}\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad , \quad u \in H_0^1(\Omega)$$

Remarques 3.2. *Le théorème (3.2) nous permet de dire que la plus petite valeur propre de l'opérateur $L(v) = -\Delta v$ est égale à la racine carrée de la meilleure constante dans l'inégalité de Poincaré.*

En effet

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \nabla u = \lambda_1 \int_\Omega u^2$$

Par l'inégalité de poincaré et l'ellipticité de M dans le premier membre, on obtient

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq \sqrt{\lambda_1} \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}$$

Avant d'aborder la démonstration du théorème(3.1), prouvons le lemme suivant.

Lemme 3.2. *A(v) admet un minimum sur $H_0^1(\Omega)$*

Preuve

Tout d'abord, nous observons que A est borné inferieurment, soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite minimisante de A, telle que $A(v_n) \to \inf A$, quand $n \to \infty$.

Posons

$$z_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)}}$$

Alors :

$$\|z_n\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$$

il existe donc une sous suite, qu'on notera z_n telle que $z_n \rightharpoonup z$ dans $H_0^1(\Omega)$ et comme l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compact, alors $z_n \longrightarrow z$ fortement dans $L^2(\Omega)$

Par l'ellepticité,

$$0 \leq \int_\Omega M(x)\nabla(z_n - z).\nabla(z_n - z) = \int_\Omega M(x)\nabla z_n.\nabla z_n - 2\int_\Omega M(x)\nabla z_n.\nabla z + \int_\Omega M(x)\nabla z.\nabla z$$

Donc

$$\int_\Omega M(x)\nabla z_n.\nabla z_n \geq 2\int_\Omega M(x)\nabla z_n.z - \int_\Omega M(x)\nabla z.\nabla z \tag{3.8}$$

Par le lemme de Fatou on aura

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega M(x)\nabla z_n.\nabla z_n \geq \int_\Omega M(x)\nabla z.\nabla z \tag{3.9}$$

Comme $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minimisante de A, on aura :

$$\inf A = \lim_{n\to\infty} A(z_n) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\int_\Omega M(x)\nabla z_n.\nabla z_n}{\int_\Omega z^2} \geq \frac{\int_\Omega M(x)\nabla z.\nabla z}{\int_\Omega z^2} = A(z)$$

où nous avons utilisé (3.8) et le fait que $z_n \to z$ dans $L^2(\Omega)$. par conséquent z est un minimum de A. Il suffit de vérifier que $z \neq 0$.

Comme $(z_n)_{n\geq 0}$ est une suite minimisante de A, $A(z_n)$ est une suite bornée,donc il existe une constante positive C tel que

$$\int_\Omega M(x)\nabla z_n.\nabla z_n \leq C\int_\Omega z^2$$

par l'ellipticité de M on a

$$\alpha\int_\Omega \mid \nabla z_n \mid^2 \leq C\int_\Omega z^2$$

Cela implique que

$$1 = \|z_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla z_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq (1 + \frac{C}{\alpha})\|z_n\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$ on a $\|z\|_{L^2(\Omega)} > 0$. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 13

Preuve

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ un minimum de A, c'est-à-dire $A(u) = \inf A$.

En utilisant le lemme précédent, la fonction $g(t) = A(u+tw)$, où $w \in H_0^1(\Omega)$, atteint son minimum en 0. comme g est differentiable, $g^{'}(0) = 0$, Ce que ce traduit :

$$\int_\Omega M(x)\nabla u.\nabla w = \frac{\int_\Omega M(x)\nabla u.\nabla u}{\int_\Omega u^2}\int_\Omega uw = (\inf A)\int_\Omega uw$$

En d'autres termes, si $u \in H_0^1(\Omega)$ est un minimum de A, alors u est une fonction propre de $L(v) = -div(M(x)\nabla v)$ et

$$\inf A = \frac{\int_\Omega M(x)\nabla u.\nabla u}{\int_\Omega u^2}$$

est la valeur propre correspondante.

Montrons que $\inf A = \lambda_1$. comme λ_1 est la plus petite valeur propre de $L(v) = -div(M(x)\nabla v)$, on a

$$\lambda_1 \leq \inf A$$

Montrons l'inégalité inverse, soit w_1 une fonction propre correspondant à λ_1, nous avons

$$\int_\Omega M(x)\nabla w_1.\nabla v = \lambda_1 \int_\Omega w_1 v, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.10}$$

Posons $v = w_1$ dans (3.10),on obtient

$$\inf A = \inf \frac{\int_\Omega M(x)\nabla v.\nabla v}{\int_\Omega v^2} \leq \frac{\int_\Omega M(x)\nabla w_1.\nabla w_1}{\int_\Omega w_1^2} = \lambda_1.$$

D'ou l'égalité proposé

Corollaire 3.1. *Toute fonction propre w de $L(v) = -div(M(x)\nabla v)$ qui correspond à λ_1 est de signe constant sur Ω*

Preuve

Soit w une fonction propre associé a λ_1, on a :

$$\int_\Omega M(x)\nabla w.\nabla v = \lambda_1 \int_\Omega wv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Posons $v = w_1^+$ on a

$$\lambda_1 = \frac{\int_\Omega M(x)\nabla w_1^+.\nabla w_1^+}{\int_\Omega (w_1^+)^2}, \tag{3.11}$$

Donc, w_1^+ est un minimum pour A. D'après le théorème (3.2), w_1^+ est une fonction propre de $L(v) = -div(M(x)\nabla v)$ associe à λ_1.

Remarques 3.3. *Si λ_1 est la plus petite valeur propre de $L(v)$ alors $\lambda_1 > 0$.*
En effet (3.11) on a

$$\lambda_1 = \frac{\int_\Omega M(x)\nabla w_1^+.\nabla w_1^+}{\int_\Omega (w_1^+)^2} > 0,$$

Ainsi, en utilisant le principe de maximum $\lambda_1 > 0$

Théorème 3.3. *[5] Soit u une fonction propre de $L(v) = -div(M(x)\nabla v)$ associée à une valeur propre λ. alors u est bornée et l'estimation suivante est vérifiée*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\alpha, N)\lambda^{\frac{N}{2}}\|u\|_{L^1(\Omega)}$$

Avant d'aborder la démonstration du théorème précédament cité, on enoncera un lemme qui va nou être utile dans la suite

Lemme 3.3. *Soit $f \in L^1(\Omega)$, on pose $g(k) = \int_\Omega |G_k(f)|$. Alors $g(k)$ est différentiable p.p, et $g'(k) = -mes(A_k)$, avec $A_k = \{|f| > k\}$*

Revenons a la démonstration du théorème 3.3

Preuve

choisissons $G_k(u) = u - T_k(u)$ comme une fonction test

$$\alpha \int_{A_k} |\nabla G_k(u)|^2 \leq \int_{A_k} M(x)\nabla u.\nabla u = \lambda \int_{A_k} uG_k(u)$$

où $A_k = \{| \ u \ |> k\}$ est le support de $G_k(u)$ par l'ellipticité de M. Évaluons maintenant le second membre comme $u = u - k + k$, nous obtenons, par l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}
\lambda \textstyle\int_\Omega uG_k(u) &\leq \lambda \int_{A_k} |G_k(u)|^2 + \lambda \int_{A_k} k|G_k(u)| && (3.12)\\
&\leq \lambda \int_{A_k} |G_k(u)|^2 + \frac{\lambda}{2}[\int_{A_k} |G_k(u)| + k^2 mes(A_k)] && (3.13)\\
&= 3\frac{\lambda}{2} \int_{A_k} |G_k(u)|^2 + k^2 \frac{\lambda}{2} mes(A_k) && (3.14)
\end{aligned}$$

Nous avons donc prouvé que

$$\alpha \int_{A_k} |\nabla G_k(u)|^2 \leq 3\frac{\lambda}{2} \int_{A_k} |G_k(u)|^2 + k^2 \frac{\lambda}{2} mes(A_k) \tag{3.15}$$

Evaluons $\int_{A_k} |G_k(u)|^2$ par Holder on aurra

$$\begin{aligned}
s[\int_{A_k} |G_k(u)|^2]^{\frac{1}{2}} &\leq s[\int_{A_k} |G_k(u)|^{2*}]^{\frac{1}{2*}} \ mes(A_k)^{\frac{1}{N}}\\
&\leq [\int_{A_k} |\nabla G_k(u)|^2]^{\frac{1}{2}} \ mes(A_k)^{\frac{1}{N}}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

L'inégalité (3.15) implique que

$$\alpha \int_{A_k} |\nabla G_k(u)|^2 \leq \frac{3\lambda}{2S^2} mes(A_k)^{\frac{2}{N}} \int_{A_k} |\nabla G_k(u)|^2 + k^2 \frac{\lambda}{2} mes(A_k) \tag{3.17}$$

Considérons maintenant $k \geq k_0$, où $k_0 = k_0(\lambda)$ sachons que

$$\alpha \geq \frac{3\lambda}{S^2} mes(A_{k_0})^{\frac{2}{N}} \tag{3.18}$$

Notons que $k_0 mes(A_{k_0}) \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}$. Par conséquent, dans la suite nous considérerons

$$k \geq k_0 = \left[\frac{3\lambda}{S^2\alpha}\right]^{\frac{2}{N}} \|u\|_{L^1(\Omega)} \tag{3.19}$$

De cette façon

$$\alpha \int_{A_k} |\nabla G_k(u)|^2 \leq k^2 \lambda mes(A_k) \tag{3.20}$$

Les estimations (3.18) et (3.20) mène a

$$\left[\int_{A_k} |G_k(u)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{k}{S}\left[\frac{\lambda mes(A_k)}{\alpha}\right]^{\frac{1}{2}} \; mes(A_k)^{\frac{1}{N}} \tag{3.21}$$

Par l'inégalité de Holder sur le premier membre on a

$$\int_{A_k} |G_k(u)| \leq \left[\int_{A_k} |G_k(u)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \; mes(A_k)^{\frac{1}{2}} \leq mes(A_k)^{1+\frac{1}{N}} k (S^2\alpha)^{-\frac{1}{2}} \lambda^{\frac{1}{2}} \tag{3.22}$$

Posons

$$g(k) = \int_{A_k} |G_k(u)|.$$

En utilisant le lemme(3.3) l'estimation (3.22) est équivalente à

$$S\alpha^{\frac{1}{2}} g(k) \leq [-g^{'}(k)]^{1+\frac{1}{N}} k \lambda^{\frac{1}{2}}$$

Ce qui implique :

$$g^{'}(k) g(k)^{-\frac{N}{N+1}} \lambda^{\frac{N}{2(N+1)}} \leq -k^{-\frac{N}{N+1}} (S\alpha^{\frac{1}{2}})^{\frac{N}{N+1}} \tag{3.23}$$

Intégrons sur (k_0, k) on aura

$$g(k)^{\frac{1}{N+1}} \leq g(k_0)^{\frac{1}{N+1}} + (S\alpha^{\frac{1}{2}})^{\frac{N}{N+1}}\lambda^{-\frac{N}{2(N+1)}}[k_0^{\frac{1}{N+1}} - k^{\frac{1}{N+1}}] \tag{3.24}$$

Remarquons que

$$g(k_0) \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}$$

Alors

$$g(k)^{\frac{1}{N+1}} \leq \|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{N+1}} + (S\alpha^{\frac{1}{2}})^{\frac{N}{N+1}}\lambda^{-\frac{N}{2(N+1)}}[k_0^{\frac{1}{N+1}} - k^{\frac{1}{N+1}}]$$

pour $k = \tilde{k}$ avec :

$$\tilde{k} = [\|u\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{N+1}}(S\alpha^{\frac{1}{2}})^{-\frac{N}{N+1}}\lambda^{\frac{N}{2(N+1)}} + k_0^{\frac{1}{N+1}}]^{N+1} \tag{3.25}$$

Le second membre est égal à zéro. Ainsi $g(k) = 0$, si $k \geq \tilde{k}$. Observons que $\tilde{k} \geq k_0$. En utilisant (3.19) on arrive à

$$\tilde{k} \leq C(\alpha, N)\lambda^{\frac{N}{2}}\|u\|_{L^1(\Omega)}$$

Donc

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\alpha, N)\lambda^{\frac{N}{2}}\|u\|_{L^1(\Omega)}$$

D'ou l'inégalité proposé.

3.3 Applications a des equations semi-linéaire

Dans cette section, en utilisant les résultats déja obtenu dans la section précédente nous allons étudier des équations elliptiques semi-linéaires. Plus précisément, nous considérons le problème

$$\begin{cases} -div(M(x)\nabla u) = g(u) + f, & in\ \Omega, \\ u = 0, & in\ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.26}$$

Notre objectif sera de comprendre la structuce de l'ensemble de solution du problème 3.26, pour une classe de nonlinéairité g. Plus précisément nous avons le résultat suivant

Théorème 3.4. *[5] Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction b-Lipschizienne et $g(0) = 0$. On Suppose que*

$$\lim_{s\to-\infty} \frac{g(s)}{s} = a, \qquad \lim_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{s} = b, \quad a < \lambda_1 < b < \lambda_2, \tag{3.27}$$

où λ_1 et λ_2 sont les deux premières valeurs propres de $L(v) = -div(M(x)\nabla v)$. Alors, pour chaque $f \in L^2(\Omega)$, il existe $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tel que :

1. *si $\int_\Omega f\phi_1 > \bar{t}$, le problème 3.26 ne possède pas de solution ;*
2. *si $\int_\Omega f\phi_1 = \bar{t}$, le problème 3.26 possède une solution unique ;*
3. *si $\int_\Omega f\phi_1 < \bar{t}$, le problème 3.26 possède au moins deux solutions.*

Nous utiliserons le résultat suivant.

Lemme 3.4. *[5] En gardant les mêmes hypothèses sur g du théorème (3.4), soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'element de $L^2(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$, quand $n \to +\infty$.*

1. *si $t_n \to +\infty$, alors $\frac{g(t_n u_n)}{t_n} \to bu^+ - au^-$ dans $L^2(\Omega)$.*
2. *si $t_n \to -\infty$,alors $\frac{g(t_n u_n)}{t_n} \to au^+ - bu^-$ dans $L^2(\Omega)$.*

Preuve

Soit

$$\rho_n(x) = \begin{cases} \dfrac{g(t_n u_n(x))}{t_n u_n(x)}, & si \ u_n \neq 0, \\ \qquad 0, & si \ u_n = 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

Nous observons que la suite ρ_n est borné, car g est lipschizienne. Par conséquent $\rho_n(u_n - u) \to 0$ dans $L^2(\Omega)$.

1. Supposons que $t_n \to +\infty$. étudions séparément

$$\Omega_n^- = \{x \in \Omega : u_n(x) < 0\}$$

$$\Omega_n^0 = \{x \in \Omega : u_n(x) = 0\}$$

$$\Omega_n^+ = \{x \in \Omega : u_n(x) > 0\}$$

Soit $x \in \Omega_n^+$ on a

$$\rho_n(x)u_n(x) = \frac{g(t_n u_n(x))}{t_n u_n(x)} u_n(x) \to au = au^+ = au^+ - bu^-,\ car\ u^- = 0\ dans\ \Omega_n^+$$

Soit $x \in \Omega_n^0$ on a

$$\rho_n(x)u_n(x) = \frac{g(t_n u_n(x))}{t_n u_n(x)} u_n(x) \to 0$$

Soit $x \in \Omega_n^-$ on a

$$\rho_n(x)u_n(x) = \frac{g(t_n u_n(x))}{t_n u_n(x)} u_n(x) \to au = au^+ = au^+ - bu^-,\ car\ u^+ = 0\ dans\ \Omega_n^+$$

Donc

$$\rho_n u \to au^+ - bu^-$$

On obtient $\rho_n u \to au^+ - bu^-$ p.p dans Ω on a

$$\rho_n u \to au^+ - bu^-$$

et

$$\rho_n u \leq Cu \quad u \in L^2(\Omega)$$

Donc d'aprés le théorème de Lebesgue $\rho_n u \to au^+ - bu^-$ dans $L^2(\Omega)$ donc $\rho_n u_n \to bu^+ - au^-$ dans $L^2(\Omega)$

2. Le cas où $t_n \to -\infty$ est similaire au cas précédent.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.4

Preuve

soit φ_1 une fonction propre de $L(v) = -div(M(x)\nabla v)$ correspondante à la première valeur propre λ_1, tel que $\|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Nous allons prouver que pour chaque $s \in \mathbb{R}$

il existe une solution unique $z = z_s \in H_0^1(\Omega)$ à

$$\int_\Omega M(x)\nabla(z+s\varphi_1).\nabla w = \int_\Omega g(z+s\varphi_1)w + \int_\Omega fw, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \tag{3.29}$$

La résolution du problème sur $H_0^1(\Omega)$ revien a le résoudre sur $<\phi_1>$ et $<\phi_1>^\perp$ car

$$H_0^1(\Omega) = <\phi_1> \oplus <\phi_1>^\perp$$

Résolution sur $<\phi_1>^\perp$: On a pour $w \in <\phi_1>^\perp$, alors $\int w\phi_1 = 0$
puisque

$$\int_\Omega \nabla\varphi_1.\nabla w = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 w = 0$$

et$\int_\Omega z\varphi_1 = 0$.

$$(3.28) = \int_\Omega M(x)\nabla z.\nabla w = \int_\Omega g(z+s\varphi_1)w + \int_\Omega fw, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \tag{3.30}$$

Sur $<\phi_1>$

$$\lambda_1 s - \int_\Omega g(z+s\varphi_1)\varphi_1 = \int_\Omega f\varphi_1 \tag{3.31}$$

On voit facilement que l'existence des solutions au problème (3.24) est équivaut à l'existence de z et s.

Etape 1 :Soit $s \in \mathbb{R}$,montrons que(3.29)admet une solution en précedant sur cette etape par le Théorème 6. vérifions ses hypothèses,

On définie

$$a(\psi, w) = \int_\Omega M(x)\nabla\psi.\nabla w - \int_\Omega g(\psi + s\varphi_1)w$$

Soit $w \in <\phi_1>^\perp$ tel que $\int_\Omega w\varphi_1 = 0$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le faite que g est Lipschitzienne ,alors :

$$|a(\psi_1, w) - a(\psi_2, w)| \leq b\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla(\psi_1 - \psi_2)\|_{L^2(\Omega)}$$

De plus, il est facile de voir que

$$a(\psi_1, \psi_1 - \psi_2) - a(\psi_2, \psi_1 - \psi_2) \geq \int_\Omega M(x)\nabla(\psi_1 - \psi_2).\nabla(\psi_1 - \psi_2) - b\int_\Omega |\psi_1 - \psi_2|^2.$$

D'après le théorème (3.2) et l'ellipticité M on déduit que

$$a(\psi_1, \psi_1 - \psi_2) - a(\psi_2, \psi_1 - \psi_2) \geq (1 - \frac{b}{\lambda_2})\alpha\|\nabla(\psi_1 - \psi_2)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

On peut alors utiliser le Théorème (1.8) pour deduire que pour chaque $s \in \mathbb{R}$ il existe une solution unique z_s à un problème (3.29)

Etape 2 Posons :

$$h(s) = \lambda_1 s - \int_\Omega g(z_s + s\varphi_1)\varphi_1 \tag{3.32}$$

prouvons que h est une fonction continue. De toute évidence, il suffit de prouver que le second terme de cette fonction est continue de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Pour ce la,soit (s_n) une suite réelle. De ce qui précede il existe une suite de solution aux problèmes (3.29) uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

En effet :

$$\int_\Omega M(x)\nabla z_{s_n}.\nabla z_{s_n} = \int_\Omega g(z_{s_n} + s_n\varphi_1)z_{s_n} + \int_\Omega f z_{s_n},$$

Par multiplications et divisions par $z_{s_n} + s_n\varphi_1$ sur le second membre côté et par les hypothèses de limite g, nous avons

$$\int_\Omega M(x)\nabla z_{s_n}.\nabla z_{s_n} \leq b\int_\Omega z_{s_n}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega)}\|z_{s_n}\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'après le théorème (3.3) et l'ellipticité de M nous avons

$$\alpha(1 - \frac{b}{\lambda_2})\|\nabla z_{s_n}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|z_{s_n}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par l'inégalité de Poincaré, on deduit que la suite z_{s_n} est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ alors il

exist une sous suite $z_{s'_n}$ qui converge fortemenet vers w dans $L^2(\Omega)$.
Supposons que $s_n \to s_0$ quand $n \to \infty$.La continuité de g implique que :

$$g(z_{s_n} + s_n\varphi_1) \to g(w + s_0\varphi_1)$$

Dans $L^2(\Omega)$.
Nous devons prouver que $w = z_{s_0}$,Supposons que, w est une solution au problème correspondant à s_0. En passant à la limite dans

$$\int_\Omega M(x)\nabla z_{s_n}.\nabla\psi = \int_\Omega g(z_{s_n} + s_n\varphi_1)\psi + \int_\Omega f\psi, \quad \forall\psi : \int_\Omega \psi\varphi_1 = 0$$

on aurra

$$\int_\Omega M(x)w.\nabla\psi = \int_\Omega g(w + s_n\varphi_1)\psi + \int_\Omega f\psi,$$

A partir de l'étape 1 il existe une solution unique au problème $-div(M(x)\nabla z_{s_0}) = g(z_{s_0} + s_0\varphi_1) + f$ et donc nécessairement $w = z_{s_0}$. Par conséquent,il existe une sous suite s_n tq :

$$\int_\Omega g(z_{s_n} + s_n\varphi_1)\varphi_1 \to \int_\Omega g(z_{s_0} + s_0\varphi_1)\varphi_1$$

Argumant par contradiction, il est facile de voir que

$$\int_\Omega g(z_{s_n} + s_n\varphi_1)\varphi_1 \to \int_\Omega g(z_{s_0} + s_0\varphi_1)\varphi_1$$

et non seulement une sous suite. Cela implique que h est une fonction continue.
Etape 3 : Prouvons que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{h(s)}{s} = \lambda_1 - b, \quad \lim_{s\to-\infty} \frac{h(s)}{s} = \lambda_1 - a$$

On a :

$$\frac{h(s)}{s} = \lambda_1 - \int_\Omega \frac{g[s(\frac{z_s}{s} + \varphi_1)]}{s}\varphi_1.$$

il suffit d'étudier le dernier terme. On remarque que z_s est uniformément bornée dans

$H_0^1(\Omega)$ comme nous l'avons déjà fait à l'étape précédente. par conséquent $\frac{z_s}{s} \to 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ quand $s \to \infty$.posons $v_s = \frac{z_s}{s} + \varphi_1$ nous avons que $v_s \to_{s \longrightarrow \infty} \varphi_1$ dans $L^2(\Omega)$.

1. Supposons que $s \to +\infty$. D'après le lemme 5, nous avons

$$\frac{g(sv_s)}{s} \to b\varphi_1^+ - a\varphi_1^-$$

dans $L^2(\Omega)$.comme φ_1 est positive

$$\int_\Omega \frac{g[s(\frac{z_s}{s} + \varphi_1)]}{s}\varphi_1 \to b.$$

2. De la même manière, on peut étudier le cas $s \to -\infty$

Etap 4 : Problème (3.21) est équivalent à $h(s) = \int_\Omega f\varphi_1$. Pour

$$\lambda_1 - b < 0 < \lambda_1 - a$$

en utilisant le résultat de l'étape précédente, on peut dire que h a un maximum. Par conséquent

1. si $\int_\Omega f\varphi_1 < \max_\mathbb{R} h$, le problème (3.18) admet au moins deux solutions
2. si $\int_\Omega f\varphi_1 = \max_\mathbb{R} h$, le problème (3.18) admet au moins un solution
3. si $\int_\Omega f\varphi_1 > \max_\mathbb{R} h$, le problème (3.18) n'admet pas aucun solution

est par suit nous avons démontrer le résultat présédente.

Corollaire 3.2. *soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue b-Lipschitz de telle sorte que $g(0) = 0$ et $-g'' > o$. on Suppose que*

$$\lim_{s \to -\infty} \frac{g(s)}{s} = a, \qquad \lim_{s \to +\infty} \frac{g(s)}{s} = b, \quad a < \lambda_1 < b < \lambda_2,$$

où λ_1 et λ_2 sont les deux premières valeurs propres de $L(v) = -div(M(x)\nabla v)$. Alors, pour chaque $f \in L^2(\Omega)$, il existe $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tel que :

1. *Si $\int_\Omega f\phi_1 > \bar{t}$, le problème 3.26 ne possède pas de solution ;*

2. *Si* $\int_\Omega f\phi_1 = \bar{t}$, *le problème 3.26 possède une solution unique ;*
3. *si* $\int_\Omega f\phi_1 < \bar{t}$, *le problème 3.26 possède exactement deux solutions.*

Bibliographie

[1] A.Ambrosetti, G.Prodi. On the Inversion of Some Differentiable Mappings with Singularities between Banach Spaces. AMPA,1972,V93.1,231-246.

[2] Carlos S.Kubrusly. Elements of Operator Theory. Second Edition,2001.

[3] H.Bresis. Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications. deuxième edition, 1987.

[4] H.R.Dowson. Spectral Theory of Linear Operators Academic Press, London, 1978.

[5] L.Boccardo. Elliptic Partial Differential Equations. De Gruyter Studies in Mathematics,V55,2010.

[6] L.Schwartz. Analyse hilbertienne. Hermann edition,1979.

[7] O.Kavian. Introduction à la Théorie des Points Critiques. Springer edition,1993.

[8] Rudin. Analyse réelle et complexe,cours et exercices. Première edition,1998.

[9] S.Banach. Théorie des opéreteurs linéaire North-Holland,Amsterdam,1987.