République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ibn Khaldoun-Tiaret
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques.

Mémoire de Master

Option : Mathématiques générales
Spécialité :Analyse fonctionnelle et applications

Intitulé :

Sur un problème hyperbolique non linéaire

Présenté par :

∗ ZERROUKI Aicha Elafra, ZEBOUDJ Fatima et REDDA Soumia.

Soutenu le 25/07/2019 devant le jury composé de :

Mr GUEDDA Lahcene	Pr	Président.
Mr. AISSANI Mouloud	MCB	Examinateur.
Mr. DIEB Abdelrazek	MAA	Examinateur.
Mr. MAATOUG Abedelkader	MCA	Rapporteur.

Année universitaire :

2018-2019.

Remerciement

Grâce à **ALLAH** qui nous a éclairé le bon chemin que nous avons mis ce projet au travail, nous le remercions en premier lieu pour la santé, la puissance, et la volonté qu'il nous a accordé.

Il est très difficile d'exprimer en ces quelques lignes toutes notre gratitudes et notre reconnaissances pour Mr **A.Maatoug**, qui a dirigé et encadré notre travail avec patience et itéré, et pour ces conseils qui ont illuminé et illustré notre PFE.

Un grand merci pour Mr **L.Guedda** professeur à l'université IBN KHALDOUN-TIARET qui nous a fait l'honneur de présider notre jury de thèse.

Nous tenons vivement à exprimer sincères remerciements à Mr **M.Aissani** et Mr **A.Dieb** qui nous ont honoré et accepté d'examiner ce travail.

Dont nous somme encore reconnaissantes de l'université IBN KHALDOUN-TIARET de nous avoir fournir un environnement de recherche exceptionnel, et particulièrement la faculté de MATHÉMATIQUE ET INFORMATIQUE, spécialement Mr **A.Larabi**.

On tient à souligner l'importance de l'appui et du soutien de nos parents et nos familles ; nous les remercions vraiment de nous avoir encouragé durant tout notre parcours.

Aussi, on remercie nos collègues, pour leurs supports et leurs idées inspirantes qui mènent à innover et réaliser de tels projets ambitieux.

★ ★ ★

★ *Je dédie ce travail à* ★

Ma chère mère, mon chèr père qui m'ónt toujours soutenu, qui m'ónt aide à affronter les difficultés,

Á tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance et spécialement Mr. M.Messabihi.

Á mes trés chères soeurs et chèr frère.

Á toute ma famille.

Á tous les amies.

Á tous les étudiants d'université Ibn Khaldoun-Tiaret.

Á tous qui aime le bonheur pour tout le monde.

Zerrouki Aicha Elafra

★ Je dédie ce travail à ★

Mes chèrs parents, mes sœurs, mes frères et ma famille source inépuisable du soutien et d'affection inconditionnels.

Á tous mes professeurs durant mes études spécialement Mr M. Messabihi , sans qui sa réalisation n'aurait pu être possible.

Á tous les étudiants de département mathématique, et à tous mes amis.

Et à tous ceux qui y ont contribué d'une manière ou d'une autre.

Zeboudj Fatma

★ Je dédie ce travail à ★

Pour la source de tendresse infinie, pour la plus généreuse femme qui a su m'aider avec son profond amour, pour l'âme de ma vie ··· ma très chère mère.

Pour celui qui m'a éclairer le sentier de ma réussite et de mon bonheur en se dévouant sans avarice pour m'aider à défier les obstacles, pour la gentillesse elle même ··· pour mon très cher père.

A mon frère et mes sœurs pour leur soutien et leur amour fraternel.

A monsieur Tari Mohamed Larbi, un très cher professeur.

A tous ceux qui me sont chers, qui m'ont toujours témoigné tant de patience, de gentillesse et d'humeur, mes amies.

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

Redda Soumia

Table des matières

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude d'un problème hyperbolique semi linéaire intervenant en mécanique quantique relativiste. Le but de ce travail est de reprendre, avec un peu de détails la technique de résolution d'équations aux dérivées partielles, dite de **Faedo-Galarkin**, présentée par **J. L. Lions** dans [4]. Cette technique consiste à approcher le problème initial, qui est en dimension infinie, par des problèmes en dimensions finies ; plus au moins simples à résoudre. La solution du problème initial est obtenue par passage à la limite en utilisant des résultats de compacité, à savoir de critère de compacité faible $*$ et le théorème de compacité de **Rellich-Kondrachov**.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres et une annexe.
Dans le premier chapitre, on rappelle certaines notions classiques, telles que la topologie faible, la topologie faible $*$, les injections compactes et certaines propriétés des espaces réflexifs ou séparables.
Dans le deuxième chapitre, nous rappelons les espaces de **Sobolev** d'ordre entier, les espaces de **Lebesgue** des fonctions vectorielles et les distributions à valeurs vectorielles et leurs propriétés.
Le dernier chapitre est consacré à un résultat d'existence pour notre problème semi linéaire, obtenu par application de la méthode de **Faedo-Galarkin**.
L'annexe rappelle le théorème de **Péano**, certaines inégalités classiques et une version du lemme de **Gronwall**.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans cette partie on rappelle les notions de base nécessaires à l'étude de notre problème.

1.1 Topologie faible et Topologie faible $*$

1.1.1 Topologie faible

Soit $E^{'}$ le dual topologique d'un espace de **Banach** E et soit $f \in E^{'}$. On désigne par $\phi_f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f décrit $E^{'}$ on obtient une famille $(\phi_f)_{f \in E'}$ d'applications de E dans $\mathbb{R}$.
$\langle f, x \rangle$ étant le crochet de dualité entre $f \in E^{'}$ et $x \in E$. i.e $\langle f, x \rangle = f(x)$.

Définition 1.1. *([1]) On appelle topologie faible sur E et on note $\sigma(E, E^{'})$ la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications linéaires $(\phi_f)_{f \in E'}$.*

Notation. Étant donnés une suite (x_n) de E et $x \in E$, la convergence de x_n vers x pour la topologie faible $\sigma(E, E^{'})$ est désignée par $x_n \rightharpoonup x$ et la convergence de x_n vers x pour la topologie forte est désignée par $x_n \to x$.

Proposition 1.1. *([1]) Soit (x_n) une suite de E et $x \in E$. On a les assertions suivantes :*

1. $(x_n \rightharpoonup x) \Leftrightarrow \big(\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle, \quad \forall f \in E^{'}\big)$.
2. $(x_n \to x) \Rightarrow (x_n \rightharpoonup x)$ *(i.e La convergence forte $\Rightarrow$ la convergence faible)*

1.1.2 Topologie faible $*$

Soit $E^{'}$ le dual topologique d'un espace de **Banach** E (muni de la norme duale)

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} |\langle f, x\rangle|,$$

et soit $E^{''}$ son bidual, i.e le dual de $E^{'}$, muni de la norme

$$\|\xi\| = \sup_{\substack{f\in E^{'} \\ \|f\|\leq 1}} |\langle \xi, f\rangle|.$$

On a l' **injection canonique** $J : E \to E^{''}$ qui fait correspondre à chaque $x \in E$ fixé l'application $f \mapsto \langle f, x\rangle$ de $E^{'}$ dans $\mathbb{R}$, qui est bien une forme linéaire continue sur $E^{'}$, i.e. un élément de $E^{''}$ noté J_x. On a donc :

$$\langle J_x, f\rangle_{E^{''},E^{'}} = \langle f, x\rangle_{E^{'},E}, \quad \forall x \in E, \quad \forall f \in E^{'}.$$

Il est clair que J est linéaire et que J est une isométrie. i.e $\|J_x\|_{E^{''}} = \|x\|_E$, pour tout $x \in E$. En effet :

$$\|J_x\| = \sup_{\|f\|\leq 1} |\langle J_x, f\rangle| = \sup_{\|f\|\leq 1} |\langle f, x\rangle|,$$

et d'après un corollaire du théoréme de **Hahn-Banach** (Voir [1], corollaire I.4), on a

$$\sup_{\|f\|\leq 1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|.$$

A l'aide de l'isométrie J, l'espace E est toujours identifié à un sous-espace topologique de $E^{''}$. Cela permet de définir une topologie sur $E^{'}$ plus faible que la topologie faible $\sigma(E^{'}, E^{''})$: La topologie faible $*$, que l'on note $\sigma(E^{'}, E)$.
Pour chaque $x \in E$, on définit l'application $\phi_x : E^{'} \to \mathbb{R}$ par
$\phi_x(f) = \langle f, x\rangle, \forall f \in E^{'}$.
Lorsque x parcourt E on obtient une famille $(\phi_x)_{x\in E}$ d'applications de $E^{'}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.2. *([1]) On appelle topologie faible $*$ sur $E^{'}$ et on note $\sigma(E^{'}, E)$ la topologie la moins fine sur $E^{'}$ rendant continues toutes les applications $(\phi_x)_{x\in E}$.*

Remarque 1.1. *Il est clair que la topologie $\sigma(E^{'}, E)$ est moins fine que la topologie $\sigma(E^{'}, E^{''})$, car E s'injecte dans $E^{''}$ et en général $E \not\simeq E^{''}$. Ainsi, la topologie $\sigma(E^{'}, E)$ possède moins d'ouverts que la topologie $\sigma(E^{'}, E^{''})$ qui possède moins d'ouverts que la topologie forte de $E^{'}$.*

Notation : Étant données une suite (f_n) de $E^{'}$ et $f \in E^{'}$, la convergence de f_n vers f pour la topologie $\sigma(E^{'}, E)$ (la topologie faible $*$) est désignée par $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

Proposition 1.2. *([1]) Soit (f_n) une suite de $E^{'}$ et $f \in E^{'}$. On a les assertions suivantes :*

1. $\left(f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f\right) \Leftrightarrow (\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \quad \forall x \in E)$.
2. $(f_n \to f) \Rightarrow (f_n \rightharpoonup f) \Rightarrow (f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f)$.
   (i.e La convergence forte $\Rightarrow$ La convergence faible $\Rightarrow$ La convergence faible $*$)

1.2 Injection continue, Injection compacte

Définition 1.3. *([3]) Soient E et F deux espaces de **Banach**. On dit que E s'injecte continûment dans F, s'il existe une application injective $i : E \to F$ linéaire et continue.* i.e. *i est une injection linéaire vérifiant pour un certain $C > 0$:*

$$\forall x \in E, \|i(x)\|_F \le C\|x\|_E.$$

Cette injection est souvent désignée par :

$$E \hookrightarrow F.$$

Cette injection est dite compacte, si de plus i est un opérateur compact. i.e : Toute suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, admet une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $(i(u_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans F.
Dans ce cas l'injection est désignée par :

$$E \hookrightarrow\hookrightarrow F.$$

1.3 Espaces réflexifs, Espaces séparables

1.3.1 Espace réflexif

Définition 1.4. *([1]) Soit E un espace de* ***Banach*** *et soit J l'injection canonique de E dans $E^{''}$ (voir 1.1.2). On dit que E est réflexif, si $J(E) = E^{''}$.*

Lorsque E est réflexif, $E^{''}$ s'identifie implicitement à E à l'aide de l'isomorphisme J.

Proposition 1.3. *([1]) Soit E un espace de Banach réflexif et soit M un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors M muni de la norme induite est réflexif.*

1.3.2 Espace séparable

Définition 1.5. *([1]) Un espace métrique est dit séparable s'il existe un sous-ensemble dénombrable D de E dense dans E.*

Proposition 1.4. *([1]) Soit E un espace métrique séparable et soit F un sous-ensemble de E. Alors F est séparable pour la métrique induite.*

Théorème 1.1. *([1]) Soit E un espace de* ***Banach****, alors*
E réflexif et séparable $\Longleftrightarrow$ E' réflexif et séparable.

Théorème 1.2. *([1]) Soit E un espace de **Banach** séparable et soit (u_n) une suite bornée dans E', alors il existe une sous suite (u_{n_k}) qui converge pour la topologie faible $*$.*

Théorème 1.3. *[5] Soit V un espace vectoriel normé séparable de dimension infinie. Alors, il existe une famille libre dénombrable $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ de V, telle que les combinaisons linéaires finies de $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ soient denses dans V.*
Autrement dit, $\forall m \in \mathbb{N}^*$; $w_1, ..., w_m$ sont linéairement indépendants et $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}^*} V_m$ est dense dans V (où $V_m = \langle w_1, w_2, ..., w_m\rangle$).

Chapitre 2

Quelques rappels sur les espaces fonctionnels

Dans ce chapitre nous rappelons des notions fondamentales liées à quelques espaces fonctionnels et certaines propriétés de ces espaces.

2.1 Espaces de Sobolev d'ordres entiers

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

2.1.1 L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $p \in \overline{\mathbb{R}}$ avec, $1 \leq p \leq +\infty$

Définition 2.1. *([1]) L'espace de* ***Sobolev*** $W^{m,p}(\Omega)$ *est défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\alpha| \leq m \text{ , } \exists g_\alpha \in L^p(\Omega)$$
$$\text{tel que } \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Big\}$$

où :

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \textit{ et } D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_n}^{\alpha_n}}.$$

On note $D_w^\alpha u = g_\alpha$, pour dire que g_α est la dérivée faible d'ordre α de u . S'il n'y a pas de confusion, on écrit $D^\alpha u = g_\alpha$.

On pose :

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\| = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p} \quad \textit{pour } 1 \leq p \leq \infty.$$

Ou parfois, par la norme équivalente :

$$\|u\|_{1,p} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{pour } 1 \leq p < \infty.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2},$$

et de la norme associée :

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 2.1. *([1]) L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de **Banach** pour $1 \leq p \leq +\infty$. Il est réflexif pour $1 < p < +\infty$, et séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

Théorème 2.1. ***(Rellich-Kondrachov)**([1])*

On suppose que Ω est un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$.

On a les assertions suivantes :

Si $p < n$, alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega); \quad \forall q \in [1, p^*[, \quad$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

Si $p = n$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega); \quad \forall q \in [1, \infty[.$
Si $p > n$, *alors* $W^{1,p}(\Omega). \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$
Le symbole $\hookrightarrow\hookrightarrow$ *désigne une injection compacte.*

2.1.2 Les espaces $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$

Dans ce paragraphe, nous présentons d'autres espaces de **Sobolev**, qui sont très utiles pour les problèmes avec conditions aux limite de type **Dirichlet**.

Définition 2.2. *([1]) L'espace de* ***Sobolev*** $H_0^1(\Omega)$ *est la fermeture de* $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega)$ est le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent, dans un sens non classique, sur le bord de Ω, puisque tel est le cas des fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. En générale, $H_0^1(\Omega)$ est strictement plus petit que $H^1(\Omega)$.

Définition 2.3. *([1]) L'espace de* ***Sobolev*** $H^{-1}(\Omega)$ *est le dual topologique de* $H_0^1(\Omega)$.

On a :

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \approx \left(L^2(\Omega)\right)' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega),$$

avec injections continues et denses.
Comme $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on peut identifier $H^{-1}(\Omega)$ à un sous espace de distributions sur Ω.
On a le schéma

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.1}$$

On définit maintenant l'espace fonctionnel V par :

$$V = H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega), \text{ où } p > 2.$$

L'espace V est muni de la norme naturelle : $\|u\|_V = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}$.

Proposition 2.2. *([4]) L'espace V est un espace de **Banach** pour la norme $\|.\|_V$, et son dual $V' = H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)$, muni de la norme duale associée à $\|.\|_V$, (avec $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$) .*

Proposition 2.3. *L'espace V est séparable et réflexif.*

Preuve : Soit l'application $\mathcal{I}$ définit par :

$$\mathcal{I} : V \to L^p(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \cdots \times L^2(\Omega)$$

$$v \mapsto (v, \partial v/\partial x_1, \cdots, \partial v/\partial x_n), \text{(les dérivées sont au sens faible)}$$

•Il est clair que l'application $\mathcal{I}$ est linéaire et injective.
•On a :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{I}(v)\|_{L^p(\Omega)\times L^2(\Omega)\times\cdots\times L^2(\Omega)} &= \|(v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial v}{\partial x_n})\|_{L^p(\Omega)\times L^2(\Omega)\times....\times L^2(\Omega)} \\
&= \|v\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right) \right\|_{L^2(\Omega)\times\cdots\times L^2(\Omega)} \\
&= \|v\|_{L^p(\Omega)} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)}} \\
&= \|v\|_{L^p(\Omega)} + \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|v\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Or $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$ (Voir A.3, on choisit sur V la norme équivalente $\|v\|_{1,V} = \|v\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$), alors

$$\|\mathcal{I}(v)\|_{L^p(\Omega)\times L^2(\Omega)\times\cdots\times L^2(\Omega)} = \|v\|_{1,V}.$$

Ce qui montre que l'application $\mathcal{I}$ est une isométrie, alors on peut identifier V et $\mathcal{I}(V)$ algébriquement et topologiquement et noter $V \approx \mathcal{I}(V)$.
$\mathcal{I}(V)$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace $L^p(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \cdots \times L^2(\Omega)$.

En effet : Soit $\left((u_k, \frac{\partial u_k}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u_k}{\partial x_n})_k\right)$ une suite d'éléments de $\mathcal{I}(V)$ convergente vers un élément $(\overline{u}, \overline{u}_1, \cdots, \overline{u}_n)$ de $L^p(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \cdots \times L^2(\Omega)$.
C'est à dire :

$$u_k \longrightarrow \overline{u} \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega), \tag{2.2}$$

Et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \longrightarrow \overline{u}_i \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \tag{2.3}$$

donc

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \rightharpoonup \overline{u}_i \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \tag{2.4}$$

En tenant compte de l'injection continue $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), (p > 2)$, la convergence (2.2) assure les convergences :

$$u_k \longrightarrow \overline{u}, \quad \text{et } u_k \rightharpoonup \overline{u} \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega), \tag{2.5}$$

en particulier

$$\int_\Omega u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \longrightarrow \int_\Omega \overline{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \tag{2.6}$$

mais, en utilisant (2.4), on trouve

$$\int_\Omega u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \varphi \longrightarrow -\int_\Omega \overline{u}_i \varphi, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \tag{2.7}$$

ainsi, par unicité de la limite on obtient

$$-\int_\Omega \overline{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega \overline{u}_i \varphi, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

et donc

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = \overline{u}_i.$$

Ce qui montre que $\mathcal{I}(V)$ est un sous espace fermé de $L^p(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \ldots \times L^2(\Omega)$,

qui est séparable et uniformément convexe (donc réflexif). Ainsi, $\mathcal{I}(V)$ est réflexif d'après **la proposition 1.3** et séparable d'après **la proposition 1.4** .
Par conséquent V est réflexif et séparable.

On introduit maintenant des espaces de fonctions en x et t .

2.2 Espaces de Lebesgue et Distributions à valeurs vectorielles

2.2.1 Les espaces de Lebesgue $L^p(0,T;V)$

Définition 2.4. *[5, 3] Soient V un espace de **Banach**, $p \in [1,+\infty]$ et $T \in \mathbb{R}^{+*}$. On appelle espace de **Lebesgue** à valeurs dans V, et on note $L^p(0,T;V)$, l'espace des (classes de) fonctions mesurables $u :]0,T[\to V$, telles que :*

1. $\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$, *si* $1 \leq p < \infty$,
2. $\|u\|_{L^\infty(0,T;V)} = \underset{t\in]0,T[}{ess\sup}\|u(t)\|_V < +\infty$, *si* $p = +\infty$.

Propriétés 2.1. *([5] et [8]) On a les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $p \in [1,\infty]$, $\|u\|_{L^p(0,T;V)}$ est une norme sur $L^p(0,T;V)$.*
2. *L'espace $L^p(0,T;V)$ est un espace de **Banach**, pour cette norme.*
3. *Si l'espace V est réflexif, alors le dual de $L^p(0,T;V)$ s'identifie algébriquement et topologiquement à $L^{p'}(0,T;V')$, pour $1 \leq p < \infty$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et on note $(L^p(0,T;V))' \approx L^{p'}(0,T;V')$.*
4. *Si l'espace de **Banach** V s'injecte continûment dans l'espace de **Banach** W, alors $L^p(0,T;V)$ s'injecte continûment dans $L^p(0,T;W)$.*
5. *Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors l'espace $L^p(0,T;L^p(\Omega))$ est algébriquement et topologiquement équivalent à l'espace $L^p(]0,T[\times\Omega)$, pour $1 \leq p < \infty$. i.e $L^p(0,T;L^p(\Omega)) \approx L^p(]0,T[\times\Omega)$.*
6. *Si V est séparable, alors $L^p(0,T;V)$ est aussi séparable, pour $1 \leq p < \infty$.*

2.2.2 Distributions à valeurs vectorielles

Définition 2.5. ***(Espace des distributions à valeurs vectorielles)****([5])*
Soientt V un espace vectoriel normé et $T \in \mathbb{R}^{+*}$. On appelle espace des distributions sur $]0,T[$ à valeurs dans V, et on note $\mathcal{D}'(0,T;V)$ l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{D}(0,T)$ dans V. i.e $\mathcal{D}'(0,T;V) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]0,T[),V)$.

Il est à préciser que, pour tout u de $\mathcal{D}'(0,T;V)$ et tout φ de $\mathcal{D}(0,T)$, la valeur $u(\varphi)$, notée $\langle u, \varphi\rangle$ est dans V.

Définition 2.6. ***(Dérivation)*** *([5]) Soit $u \in \mathcal{D}'(0,T;V)$. On définit la dérivée u' de u, notée parfois $\dfrac{du}{dt}$, par :*

$$\frac{du}{dt} : \mathcal{D}(0,T) \to V$$

$$\varphi \mapsto \langle \frac{du}{dt}, \varphi\rangle = -\langle u, \frac{d\varphi}{dt}\rangle.$$

On vérifie que $\dfrac{du}{dt} \in \mathcal{D}'(0,T;V)$, d'où toute distribution à valeurs vectorielles est indéfiniment dérivable.

Définition 2.7. ***(Distribution associée à une fonction*** *)([5])*
Si $u \in L^1_{loc}(0,T;V)$, on peut lui associer une distribution, dite régulière, encore noteé u, définie par :

$$u : \mathcal{D}(0,T) \to V, \ \textit{tel que } \langle u, \varphi\rangle = \int_0^T \varphi(t)u(t)dt$$

Par conséquent, toute $u \in L^p(0,T;V) \subset L^1_{loc}(0,T;V)$ est indéfiniment dérivable au sens des distributions à valeurs vectorielles.

Définition 2.8. ***(Convergence)****([5])*
Soient (u_n) une suite de $\mathcal{D}'(0,T;V)$ et $u \in \mathcal{D}'(0,T;V)$. On dit que (u_n) converge fortement vers u dans $\mathcal{D}'(0,T;V)$, si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T), \ \langle u_n, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle \textit{ fortement dans } V$$

Notation :

Soient V et W deux espaces de **Banach**, $p \in [1, +\infty]$, on note :
$W^{1,p}(0,T;V;W) = \{u \in L^p(0,T;V), \frac{du}{dt} \in L^p(0,T;W)\}$
$W^{1,p}(0,T;V;W)$ est un espace de **Banach** pour la norme naturelle.

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;V;W)} = \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|\frac{du}{dt}\|_{L^p(0,T;W)}$$

On note $W^{1,p}(0,T;V) = W^{1,p}(0,T;V;V)$.
L'intérêt d'un tel espace est que ses éléments ont des propriétés de régularité plus précisément :

Théorème 2.2. *([3]).*

1. *Toute $u \in W^{1,p}(0,T;V))$ (avec $1 \leq p \leq \infty$) admet un représentent continu sur $[0,T]$, ou encore $u \in \mathcal{C}([0,T],V)$*
2. *$u(t) = u(s) + \displaystyle\int_s^t u'(\tau)d\tau$, pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$.*
3. *De plus, il existe une constante C dépendant uniquement de T, telle que*

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_V \leq C\|u\|_{W^{1,p}(0,T;V)}.$$

Remarques 2.1. *Le* ***Théorème 2.2*** *permet de donner un sens à $u(0)$ et $u(T)$ pour des fonctions de $L^p(0,T;V)$ qui sont presque partout définies.*

Proposition 2.4. *([5]) Soit V' le dual d'un espace de Hilbert séparable V, alors pour toute $u \in W^{1,2}(0,T;V;V')$, on a :*

$$\forall v \in V, \frac{d}{dt}\langle u(.), v\rangle_{V,V} = \langle \frac{d}{dt}u(.), v\rangle_{V',V} \text{ dans } \mathcal{D}'(0,T).$$

Remarques 2.2. *La* ***proposition 2.4*** *permet l'interversion de la dérivation par rapport à t et le crochet de dualité, en particulier elle permet l'interversion de la dérivation par rapport à t et l'intégration su Ω, dans le cas $V = L^2(\Omega)$.*

Théorème 2.3. *([3]).*

1. *Toute* $u \in W^{1,p}(0,T; H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega))$ *admet un représentent continu de* $[0,T]$ *dans* $L^2(\Omega),$ *ou encore* $u \in \mathcal{C}([0,T], L^2(\Omega))$
2. *La fonction* $t \mapsto \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega))}$ *est absolument continue et*

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega))} = 2\langle \frac{du(t)}{dt}, u(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

Chapitre 3

Un problème hyperbolique non linéaire

3.1 Position du problème

Dans ce travail, on étudie un problème hyperbolique semi linéaire considéré dans [4], en utilisant la méthode de **Faedo-Galerkin**.

Le but essentiel est de prouver l'existence d'une solution faible de ce problème.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et soit Γ la frontière de Ω, qu'on suppose assez régulière.

On considère le problème (P) suivant :

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|^\rho u = f \quad \text{dans } Q = \Omega\times]0,T[& (P.1)\\ u = 0 \quad\quad \text{sur } \Sigma = \Gamma\times]0,T[& (P.2)\\ u(x,0) = u_0(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \text{ dans } \ x \in \Omega & (P.3)\end{cases}$$

où f, u_0, u_1 sont des fonctions données, $\rho > 0$ un paramètre réel donné et $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Le but est de chercher une fonction $u = u(x,t)$; $x \in \Omega, t \in]0,T[$ à valeurs réelles

vérifiant l'équation $(P.1)$ et les conditions initiales $(P.3)$, ainsi que la condition au bord $(P.2)$, sous certaines hypothèses (H) données par la suite.
Pour simplifier l'écriture on pose :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u'; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u''$$

et on écrit : $u(t)$ au lieu de $u(x,t)$ et $f(t)$ au lieu de $f(x,t)$.
On peut, maintenant, formuler de façons précise le problème (P), pour l'étudier.
On a besoin d'introduire l'espace $V = H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, avec $p = \rho + 2$ et les hypothèses suivantes :

$$(H) : \begin{cases} f \in \mathcal{C}\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \subset L^2(Q) & (H.1) \\ u_0 \in V & (H.2) \\ u_1 \in L^2(\Omega) & (H.3) \end{cases}$$

3.1.1 Formulation variationnelle

En multipliant l'équation (P.1) par un élément $v \in V$; en intégrant sur Ω et en utilisant la formule de **Green** (voir A.2), on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$(u''(t), v) + a(u(t), v) + (|u|^\rho u, v) = (f, v), \forall v \in V, \tag{3.1}$$

où

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx. \tag{3.2}$$

•Il est clair que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire symétrique.

3.2 Théorème d'existence

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses (H), le problème (P) admet une solution u vérifiant :*

$$u \in L^\infty(0,T;V), \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.4}$$

$$(u^{''} - \Delta u + |u|^\rho u, v) = (f,v), \text{ dans } \mathcal{D}^{'}(0,T), \forall v \in V. \tag{3.5}$$

$$u(0) = u_0, \ \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1 \tag{3.6}$$

Remarques 3.1. *Les deux expressions $u(x,0) = u_0(x)$ et $u'(x,0) = u_1(x)$ ont un sens.*

En effet : De (3.3) et (3.4) et du **Théorème 2.2** ; il résulte en particulier que u admet un représentant continu de $[0,T] \to L^2(\Omega)$ de sorte que $u(0) = u_0(x)$ a un sens.
Pour vérifier que $u'(0) = u_1(x)$ a aussi un sens, on utilise l'équation (P.1) qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f + \Delta u - |u|^\rho u \tag{3.7}$$

comme $\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ est un opérateur linéaire borné. i.e :

$$\Delta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega)). \tag{3.8}$$

De (3.3) et (3.8), on déduit que :

$$\Delta u \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)),$$

$u(t)$ étant dans $L^p(\Omega)$ et l'application $\varrho : L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$ définie par $\varrho(v) = |v|^\rho v$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, est telle que $\|\varrho(v)\|_{p'} = \|v\|_p^{\frac{p}{p'}}$ alors

$$|u(t)|^\rho u(t) \in L^{p'}(\Omega), \tag{3.9}$$

donc, de (3.3) et (3.9), on déduit que :

$$|u|^\rho u \in L^\infty(0,T;L^{p'}(\Omega)).$$

De sorte que (3.7) conduit à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) + L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)) + L^\infty(0,T;L^{p'}(\Omega)),$$

d'où
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) + L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)),$$

et donc
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)).$$

Ce qui montre, grâce au **théoreme 2.2** et (3.4), que :
$\dfrac{\partial u}{\partial t}$ admet un représentant continu de $[0,T]$ dans $H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)$ de sorte que $u'(x,0) = u_1(x)$ a un sens.

Preuve du théorème 3.1

La preuve est basée sur la méthode de **Faedo-Galerkin** qui consiste à réaliser les trois étapes suivantes :

✓ Construction de solutions approchées du problème.

✓ Établissement d'estimations à priori sur les solutions approchées .

✓ Passage à la limite pour récupérer une solution du problème.

•Etape1 : Construction de solutions approchées du problème

Comme V est séparable (Voir Proposition 2.3), alors d'après le Théorème 1.3, il existe une suite $(w_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs de V, vérifiant les propriétés suivantes :

1. Toute famille finie $w_1, w_2, ..., w_m$ est libre.
2. Si V_m désigne l'espace vectoriel engendré par $w_1, w_2, ..., w_m$, alors $\underset{m\in\mathbb{N}^*}{\cup} V_m$ est dense dans V.

Cherchons une solution approchée $u_m = u_m(t)$ dans l' espace V_m et vérifiant la

formulation variationnelle (3.1.1) sur V_m .
Autrement dit, cherchons $u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i$, vérifiant

$$(u''_m(t), w_k) + a(u_m(t), w_k) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_k) = (f(t), w_k), \qquad \forall k \in \{1, \dots, m\}$$

on rappelle que $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$.
En tenant compte de la densité de $\underset{m\in\mathbb{N}^*}{\cup} V_m$ dans V et de l'injection dense de V dans $L^2(\Omega)$, on peut trouver, pour tout $u_0 \in V$ et respectivement, pour tout $u_1 \in L^2(\Omega)$ des suites $(u_{0m})_m \subset V_m$ et $(u_{1m})_m \subset V_m$, et par conséquent, des suites réelles $(\alpha_{km})_{k\leq m\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta_{km})_{k\leq m\in\mathbb{N}^*}$ telles que

$$u_{0m} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{km} w_k \to u_0 \quad \textit{dans } V, \tag{3.10}$$

$$u_{1m} = \sum_{k=1}^{m} \beta_{km} w_k \to u_1 \quad \textit{dans } L^2(\Omega). \tag{3.11}$$

Le vecteur $g_m(t) = (g_{im}(t)) \in \mathbb{R}^m$ est à déterminer par le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$(P_m)\begin{cases} (u''_m(t), w_k) + a(u_m(t), w_k) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_k) = (f(t), w_k), \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \\ u_m(0) = u_{0m} \\ u'_m(0) = u_{1m} \end{cases}$$

Le **Théorème de Péano** (voir A A.1) assure l'existence d'une solution $(g_m(t))$ du problème approché (P_m) sur un intervalle $]0, t_m[$.
L'étape qui suit montre que $t_m = T$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.
•Etape2 : **Établissement d'estimations à priori sur les solutions approchées**
En multipliant la k-ième équation du problème (P_m) par $g'_{km}(t)$ et en sommant sur k, on obtient

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + a\,(u_m(t), u'_m(t)) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u'_m(t)) = (f(t), u'_m(t))\,,$$

d'où :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u_m^{'}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + a(u_m(t), u_m(t)\Big) + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |u_m(x,t)|^p dx\right) = \Big(f(t), u_m^{'}(t)\Big)\,. \tag{3.12}$$

De (3.12), on trouve que :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\Big(\|u_m^{'}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\Big) + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|^p_{L^p(\Omega)}\right] = (f(t), u'_m(t)),$$

et par intégration sur $(0,t)$, on arrive à

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big(\|u_m^{'}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\Big) + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|^p_{L^p(\Omega)} \;&= \frac{1}{2}\Big(\|u_m^{'}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m(0)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\Big)\\ &+\|u_m(0)\|^p_{L^p(\Omega)} + \textstyle\int_0^t (f(\sigma), u'_m(\sigma))d\sigma\end{aligned} \tag{3.13}$$

mais,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t (f(\sigma), u_m^{'}(\sigma))d\sigma\right| \;&\leq \int_0^t \|f(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}\|u'_m(\sigma)\|_{L^2(\Omega)}d\sigma,\ \text{par l'inégalité de } \textbf{Hölder}\\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^t \|f(\sigma)\|^2_{L^2(\Omega)}d\sigma + \frac{1}{2}\int_0^t \|u'_m(\sigma)\|^2_{L^2(\Omega)}d\sigma,\ \text{par l'inégalité de } \textbf{Cauchy.}\end{aligned} \tag{3.14}$$

En combinant (3.13) et (3.14), on obtient

$$\frac{1}{2}\Big(\|u_m^{'}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\Big) + \frac{1}{p}\|u_m(t)\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_m^{'}(\sigma)\|^2_{L^2(\Omega)}d\sigma \tag{3.15}$$

où

$$C = \sup_m\left(\frac{1}{2}\Big(\|u_m^{'}(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_m(0)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\Big) + \|u_m(0)\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_0^t \|f(\sigma)\|^2_{L^2(\Omega)}d\sigma\right),$$

$C = \underset{m}{sup}\left(\frac{1}{2}\left(\|u_{1m}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{0m}\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right) + \|u_{0m}\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_0^t \|f(\sigma)\|^2_{L^2(\Omega)}d\sigma\right),$

le $\underset{m}{sup}$ existe, car les suites en m : $\left(\|u_{1m}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)_m$, $\left(\|u_{0m}\|^2_{H^1_0(\Omega)}\right)_m$ et $\left(\|u_{0m}\|^p_{L^p(\Omega)}\right)_m$ sont convergentes, donc bornées.

Ainsi,

$$\frac{1}{2}\|u'_m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C + \frac{1}{2}\int_0^t \|u'_m(\sigma)\|^2_{L^2(\Omega)}d\sigma,$$

et par application du lemme de **Gronwall** (voir Lemme A.1), on obtient

$$\|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C', \tag{3.16}$$

pour une constante C' indépendante de m.

En revenant, à (3.15), on obtient

$$\|u_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|u_m(t)\|^p_{L^p(\Omega)} \leq pC'$$

i.e.

$$\|u_m(t)\|_{H^1_0(\Omega)} + \|u_m(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \sqrt{pC'} + \sqrt[p]{pC'}. \tag{3.17}$$

En déduit alors que $t_m = T$,

et que la suite $(u_m)_m$ est bornée dans $L^\infty(0,T;V)$ (conséquence de (3.17)) et la suite $(u'_m)_{m\in N}$ est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ (conséquence de (3.16)).

•Etape 3 : Passage à la limite

L'espace $L^\infty(0,T;V)$ est le dual de $L^1(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega))$, qui est séparable (voir **Proposition 2.2**, **Proposition 2.3** , **théorème 1.1**, **Propriétés 2.1**).

Comme $(u_m)_m$ est bornée dans $L^\infty(0,T;V)$, alors d'après **Théorème 1.2** ; on peut extraire une sous suite notée (u_μ) telle que :

$$u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad dans \quad L^\infty(0,T;V). \tag{3.18}$$

De même maniére et de l'injection des espaces de Lebesgue dans les espaces de distributions, on obtient

$$u'_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad dans \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.19}$$

Les suites (u_m) et (u'_m) sont bornées dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, car les espaces $L^\infty(0,T;V)$ et $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ s'injectent continûment dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, donc (u_m) est bornée dans $W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)) \approx H^1(Q)$, qui s'injecte d'une manière compacte dans $L^2(Q)$ (Voir **Théorème 2.1**).
Donc, on peut supposer que la sous suite extraite (u_μ) est telle que

$$u_\mu \to u \ dans \ L^2(Q) \quad et \ p.p \ dans \ Q \tag{3.20}$$

d'où

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \to |u|^\rho u \quad p.p \quad dans \quad Q, \tag{3.21}$$

La suite (u_m) étant bornée dans $L^\infty(0,T;L^p(\Omega))$, alors la suite $(|u_m|^\rho u_m)$ est bornée dans $L^\infty(0,T;L^{p'}(\Omega))$, donc la suite (u_μ) peut être choisie de sorte que

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} w \quad dans \quad L^\infty(0,T;L^{p'}(\Omega)), \quad donc \ dans \ L^{p'}(Q). \tag{3.22}$$

Il reste à montrer que

$$w = |u|^\rho u \tag{3.23}$$

Pour cela on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1. *([4]) Soient $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n+1}$, g_μ et g des fonctions de $L^q(\mathcal{O})$, $1 < q < \infty$, telles que*

$$\|g_\mu\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq c, \quad g_\mu \to g \quad p.p \quad dans \quad \mathcal{O}.$$

Alors

$$g_\mu \rightharpoonup g \quad dans \quad L^q(\mathcal{O}).$$

L'application de ce lemme avec :

$$\mathcal{O} = Q, \quad g_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu, \text{ et } q = p'.$$

Assure la convergence

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \rightharpoonup |u|^\rho u \quad dans\ L^{p'}(Q). \tag{3.24}$$

De (3.22), (3.24) et de l'unicité de la limite, on conclut que : $w = |u|^\rho u$ et donc

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} |u|^\rho u \quad dans \quad L^\infty(0,T; L^{p'}(\Omega)). \tag{3.25}$$

Pour passer à la limite dans la $k - ième$ équation du problème (P_m), avec $m = \mu$ et $1 \leq j < \mu$, il faut passer à la limite pour chaque terme de l'équation.
La convergence (3.18) se traduit par

$$\langle u_\mu, g \rangle \longrightarrow \langle u, g \rangle, \quad \forall g \in L^1(0,T; H^{-1} + L^{p'}(\Omega))$$

et avec un choix convenable de g, on arrive à

$$\langle a(u_\mu, w_j), v \rangle \longrightarrow \langle a(u, w_j), v \rangle, \quad \forall v \in L^1(0,T)$$

qui se traduit par

$$a(u_\mu, w_j) \overset{*}{\rightharpoonup} a(u, w_j)\ dans\ L^\infty(0,T). \tag{3.26}$$

De la même façon et à partir de (3.19) et (3.25), on montre que

$$(u'_\mu, w_j) \overset{*}{\rightharpoonup} (u', w_j) \quad dans \quad L^\infty(0,T), \tag{3.27}$$

et

$$(|u_\mu|^\rho u_\mu, w_j) \overset{*}{\rightharpoonup} (|u|^\rho u, w_j)\ dans\ L^\infty(0,T), \tag{3.28}$$

donc

$$a(u_\mu, w_j) \longrightarrow a(u, w_j)\ dans\ D'(0,T). \tag{3.29}$$

$$(u'_\mu(t), w_j) \longrightarrow (u'(t), w_j) \quad dans \quad \mathcal{D}'(0,T), \tag{3.30}$$

et

$$(|u_\mu|^\rho u_\mu, w_j) \longrightarrow (|u|^\rho u, w_j) \quad dans \quad \mathcal{D}'(0,T). \tag{3.31}$$

Par passage aux dérivées au sens de $\mathcal{D}'(0,T)$, la convergence (3.30) conduit à

$$\frac{d}{dt}(u'_\mu, w_j) \longrightarrow \frac{d}{dt}(u', w_j) \quad dans \quad \mathcal{D}'(0,T),$$

ce qui donne, d'après **Proposition 2.4**

$$(u''_\mu, w_j) \to (u'', w_j) \qquad dans\ \mathcal{D}'(0,T). \tag{3.32}$$

Maintenant, en utilisant (3.32), (3.29) et (3.31), et la $k - ième$ équation du problème (P_m) avec $m = \mu$ et $1 \leq j < \mu$, on obtient

$$(u^{''}, w_j) + a(u, w_j) + (|u|^\rho u, w_j) = (f, w_j), \quad dans\ \mathcal{D}^{'}(0,T),$$

en tant que égalité de distributions, car même $(f, w_j) \in \mathcal{D}'(0,T)$.
Par densité de $\underset{m}{\cup} V_m$ dans V, on obtient

$$(u^{''}, v) + a(u, v) + (|u|^\rho u, v) = (f, v),\ dans\ \mathcal{D}^{'}(0,T), \forall v \in V,$$

autrement dit,

$$(u^{''} - \Delta u + |u|^\rho u, v) = (f, v),\ dans\ \mathcal{D}^{'}(0,T), \forall v \in V.$$

Il reste à montrer (P.2).
De (3.18), (3.19) et **Théorème 2.2**, on a :

$$u_\mu, u \in W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Omega)).$$

Il résulte, d'après **Théorème 2.2**, que u_μ, u sont continues de $[0,T]$ dans $L^2(\Omega)$, d'où l'existence d'un $t_0 \in [0,T]$ tel que

$$T\|u_\mu(t_0) - u(t_0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^T \|u_\mu(t) - u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt$$

et de (3.20), il résulte que

$$u_\mu(t_0) \longrightarrow u(t_0) \ dans \ L^2(\Omega), \tag{3.33}$$

de (3.19), on montre que

$$\int_{t_0}^t u'_\mu(\sigma)d\sigma \rightharpoonup \int_{t_0}^t u'(\sigma)d\sigma \ dans \ L^2(\Omega), \tag{3.34}$$

et d'après **Théorème 2.2**, on a :

$$u_\mu(t) = u_\mu(t_0) + \int_{t_0}^t u'_\mu(\sigma)d\sigma, \ pour \ tout \ 0 \leq t \leq T, \tag{3.35}$$

et

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(\sigma)d\sigma \ pour \ tout \ 0 \leq t \leq T, \tag{3.36}$$

par suite, de (3.35), (3.36), (3.34) et (3.33) :

$$u_\mu(t) \rightharpoonup u(t) \ dans \ L^2(\Omega), \ \forall t \in [0,T].$$

En particulier pour $t = 0$:

$$u_\mu(0) \rightharpoonup u(0) \ dans \ L^2(\Omega), \tag{3.37}$$

d'aprés (3.10), on a :

$$u_\mu(0) = u_{0\mu} \rightharpoonup u_0 \ dans \ V, et \ donc \ dans \ L^2(\Omega)$$

de l'unicité de la limite, on obtient

$$u(0) = u_0.$$

D'une manière analogue, on vérifie que $u'(0) = u_1$.

Annexe A

A.1 Théorème de Péano

Théorème A.1. *([6]) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et f une application continue d'un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times E$ dans E. Pour toute donnée de* ***Cauchy*** *$(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe au moins une solution maximale $\varphi : I \to E$ de l'équation différentielle*

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$$

telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

A.2 Formule de Green

Théorème A.2. *([7] page 102) Soient Ω un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$, et soient $u, v \in H^1(\Omega)$. Alors, pour $1 \leq i \leq n$.*

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\Gamma} \gamma_0(v)\gamma_0(u)\nu_i,$$

avec $\gamma_0(u)$ et$\gamma_0(v)$, sont respectivement, la trace de u et la trace de v sur le bord Γ de Ω et $\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure à Γ.

A.3 Inégalité de Poincaré

Théorème A.3. *([1]) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante C (dépendante de Ω et de p) telle que :*

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty).$$

Par conséquent, $\| \nabla u \|_{L_p(\Omega)}$ définit une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, équivalente à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.
Sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\displaystyle\int_\Omega \nabla u.\nabla v$ est le produit scalaire qui induit la norme $\| \nabla u \|_{L_2(\Omega)}$ équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$.

A.4 Inégalité de Hölder

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq \infty$, $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

A.5 Inégalité de Young

Soit $1 < p, q < \infty$, $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad ; \quad a > 0, b > 0$$

A.6 Lemme de Gronwall

Lemme A.1. *([5]) Soient T un réel positif, C une constante positive, f et g deux fonctions vérifiant :*

$$f \in L^\infty(]0;T[), f(t) \geq 0 \ p.p$$

et

$$g \in L^1(]0;T[), \;\; g(t) \geq 0 \; p.p.$$

Si

$$f(t) \leq \int_0^t g(s)f(s)ds + C,$$

alors f vérifie :

$$f(t) \leq Cexp(\int_0^t g(s)ds)$$

Bibliographie

[1] H.Brezis , Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications 2 ^{e} tirage Masson. Paris, 1983.

[2] Hervé Le Dret, Équations aux dérivées partielles elliptiques non Linéaires

[3] L. C.Evans, Partial Differential Equations .American Mathematical Society 1997 J.L Lions, Quelques méthode de résolution des problèmes aux limites non linéaire Dunod Gauthier-villars.Paris,1969 .

[4] J.L Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaire Dunod Gauthier-villars.Paris,1969 .

[5] Marie-Thérèses, Lacroix-Sonrier , Distributions,Espace de Sobolev,Applications Ellipses.Paris 1998

[6] Gilles Christol ;Anne Cot ;Charles-Michel Marle, Calcul différentiel Ellipses.Paris 1997

[7] S.Kesavan, Topics in Functional Analysis And Applications.1989 New Age International(p) Ltd ; Pubishers Reprint 2003.

[8] Aidi Mohamed, Etude de quelques problèmes aux limites gonvernés par le système de Lamé ;Université de Kasdi Merbah Ouargla 2014