REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle Et Equations Différentielles

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

Sur La stabilité des Solutions des Equations Différentielles Ordinaires

Présenté par

***Hammadouche Mimouna**
***Hameurlaine Fatiha**
***Bendahma Ikram**
***Hebib Sara**

soutenu devant le Jury composé de

***H. BENALI**	**MCB**	**Président**
***M. SOFRANI**	**MAA**	**Examinateur**
***A.OUARDANI**	**MCB**	**Encadreur**

Promotion : **2018 \ 2019**

Remerciement

On remercie tout d'abord DIEU tout puissant de nous avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce modeste travail.

En tout premier lieu, nous tenons à remercier chaleureusement notre encadreur Mr. Ouardani Abderrahmane pour l'aide, les remarques, ses encouragements et précieux conseils.

Nos remerciements vont aussi au jury pour sa disponibilité, ses suggestions et recommandations.

Nous tenons à remercier tous les enseignants qui ont participé à notre formation.

Enfin nous remercions le chef département Mr.Larabi Abd el Rahman, sans oublier toutes les personnes qu'on a rencontré au cours de ces années universitaire.

★ ★ ★

*__________ *Je dédie ce travail à* __________*

Ma mère et mon père .

Ma grande mère Mahdjouba .

Mes frères.

Mes Soeurs .

Ma famille et mes amies .

____________________ *Fatiha* ____________________

*_____________ *Je dédie ce travail à* _____________*

Ma mère et mon père.

Mes frères.

Mes Soeurs.

Ma famille et mes amies .

_______________________ *Mimouna.* _______________________

*———— *Je dédie ce travail à* ————*

Ma mère et mon père.

Ma famille et mes amies.

———— *Ikram.* ————

*____________ *Je dédie ce travail à* ____________*

Ma famille et mes amies.

____________ *Sara.* ____________

Table des matières

INTRODUCTION

Au milieu du 17^{eme} siècle : La naissance des équations différentielles plus précisément des équations différentielles ordinaires. Les équations différentielles sont apparues historiquement tout au début du développement de l'analyse, en générale à l'occasion de problèmes de mécanique ou de géometrie.

Les équations différentielles représentent un objet d'étude de toute première importance, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. [1, 2, 3, 4].

Notons que les équations différentielles peuvent servir à de très nombreux cas concrets :

- L'évolution de la décharge d'un condensateur électrique.
- L'évolution de la vitesse de descente d'un parachutiste.
- La loi de des intégration radioctive.
- L'étude des fluides.
- Les progrés de l'informatique et de la prévision météorologique permettent de modéliser le déplacement des panachs volcanique.
- La progression des épidémies,des virus informatiques,ou l'évolution de la dé-

mographie, la croissance des cellules des tumeurs malignes(les équations différentielles peuvent servir à combattre le cancer et les maladies infectieuses).

Dans ce mémoire en va se concentrer à l'étude des équations différentielles ordinaires qui sont des équations différentielles dont la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable, elles se présentent sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives.

La stabilité est une notion vaste dans le monde des mathématiques, elle s'occupe de voire la non variété des solution sur une certaine perturbation des condition initiale [8], on le peut voir au sens de Lyapounov et d'autres $\cdots$.

Ce mémoire présente une introduction au équation différentielle ordinaire linéaire et des systèmes linéaires du premier ordre et les théorie d'existance des solutions et leurs stabilités dans un espace de Banach.

Le but de ce travail est l'existence et la stabilité des solutions de certaines catégories d'équations différentielles fonctionnelles. Les résultats obtenus sont basés sur des théories ̀a points fixes [5, 6].

Ce mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Chapitre 1. Nous introduisons des notations, des définitions et nous rappelons quelques préliminaires nécessaires des équations différentielles ordinaires et les systèmes différentielles qui seront utilisés tout au long de cette mémoire. Nous présentons quelques définitions avec une introduction du problème de Cauchy, accompagnés de quelques théories de base des théorèmes des points fixes.

Chapitre 2. Nous présentons quelques concepts et théorémes de stabilité (notion de stabilité, stabilité des points d'équilibre).

Chapitre 3. Nous abordons l'existence et la stabilité des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$x'(t) = f(t, x(t)); \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

avec la condition initiale

$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$,

où $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Equations différentielles ordinaires

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions. Soient I un ouvert de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ et $U_1, U_2, \cdots, U_n$ des ouverts de E. les équations différentielles ordinaires, seront notées en abrégé EDO dans la suite.

Définition 1.1. *Une équation différentielle sur l'espace de Banach E est une équation de la forme :*

$$F(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

où n est un entier non nul appelé l'ordre de l'équation, F est une fonction donnée de $(n+2)$ variables supposée régulières sur $I \times U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$, x est la fonction inconnue de I dans l'espace de Banach E et $x, x', x'', \cdots, x^{(n)}$ sont ses dérivées successives. Plus précisément le problème est de trouver un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une fonction $x : t \mapsto x(t)$ dérivable sur cet intervalle jusqu'à l'ordre n et vérifiant l'équation

$$\forall t \in I, \quad F(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0, \tag{1.2}$$

cette équation est de forme très générale, on pratique, on préférera travailler avec des équations plus particulières dites du type explicite, pour lesquelles il existe une *fonction H régulière sur $I \times U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_{n-1}$ tel que*

$$x^{(n)} = H(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n-1)}). \tag{1.3}$$

Exemple 1.1.1.

$$F(t, x, x', x'') = 0,$$

est d'ordre 2.

$$F(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0,$$

est d'ordre n.

1.1.1 Equation différentielle ordinaire linéaire

Définition 1.2. *Une EDO d'ordre n est linéaire si elle est de la forme*

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = g(t), \tag{1.4}$$

avec tous les $x^{(i)}$ de degré 1 et tous les coefficients $a_n(t)$ dépendant au plus de t, si g est nulle, alors l'équation est dite homogène, ou sans second mombre. L'équation différentielle suivante

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{(n-1)}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = 0, \tag{1.5}$$

est appelée l'équation différentielle homogène associée.
Si $a_j(t)$, $0 \leq j \leq n$, sont des constantes, on parle d'équation différentielle linéaire a coefficients constants.

1.2 Systèmes différentielles linèaires

Soient I un intrvalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{ij} : I \mapsto \mathbb{R}$, $i, j = 1, \cdots n$ et $f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues sur I. L'objectife est de trouver des fonctions

$$x_1, \cdots, x_n : I \longrightarrow \mathbb{R},$$

de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{1.6}$$

on peut écrire ce système sous la forme matricielle suivante :

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t), \tag{1.7}$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

En générale il peut y avoir une infinité de solutions de cette équation. Soient $t_0 \in I$ et $X(t_0) \in \mathbb{R}^n$ données

$$X(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Le but est de trouver X une solution de l'équation (1.7) satisfaisants a la condition initiale (1.8). Autrement dit, existe-il X une fonction dérivable définie sur I a valeur dans $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + F(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

pour tout $t \in I$.

Définition 1.3. *le système* (1.7) *est dit homogène si* $F = 0$ *c'est à dire :*

$$X'(t) = A(t)X(t).$$

Définition 1.4. *Le système* (1.7) *est dit non homogène si* $F \neq 0$ *c'est à dire :*

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t).$$

1.2.1 Problème de cauchy

Il est impossible de définir la notion de solution d'un système différentiel du premier ordre, c'est pourquoi on introduit un problème standard qui est le problème de Cauchy.

Un problème de Cauchy est un problème constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution vérifiant une certaine condition initiale. Cette condition peut prendre plusieurs formes selon la nature de l'équation différentielle.

Soit U un ouvert de $I \times \mathbb{R}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 1.5. *Étant donnée une équation différentielle du premier ordre sous la forme suivante :*

$$x'(t) = f(t, x),$$

pour $(t, x(t)) \in U$, *et un point* $(t_0, x_0) \in U$ *le problème de cauchy correspondant consiste a chercher des solution* x, *tell que* $x(t_0) = x_0$. *On note le problème de* *cauchy de la forme suivante :*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad (t, x(t)) \in U \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} . \tag{1.10}$$

Définition 1.6. *Une solution du problème de Cauchy* (1.10) *sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$ *avec la condition initiale* $(t_0; x_0) \in U$ *et* $t_0 \in I$ *est une fonction dérivable* $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que :*

- *pour tout* $t \in I,\ (t, x(t)) \in U,$
- *pour tout* $t \in I,\ x'(t) = f(t, x(t)),$
- $x(t_0) = x_0.$

Théorème 1.1. *Le problème de Cauchy* (1.10) *admet une solution* x *définie sur* I *si et seulement si*

1. *pour tout* $t \in I,\ (t, x(t)) \in U,$
2. x *est continue sur* $I,$
3. *pour tout* $t \in I$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Preuve :

Soit $x : I \longrightarrow R$ une fonction continue sur un intervalle ouvert I qui contient t_0 et que $(t, x(t)) \in U$.

Supposons que x est une solution du problème de Cauchy (1.10). Alors x est dérivable sur I et vérifie :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.11}$$

En intégrant les deux membres de t_0 à t, on obtient pour tout $t \in I$

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds,$$

ce qui donne, en remplaçant $x(t_0)$ par x_0

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad \text{pour tout} \quad t \in I.$$

Inversement, supposons que pour tout $t \in I$, x vérifie :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \tag{1.12}$$

alors, d'aprés la continuité de x et f, donc la derivvabilité de la fonction $t \mapsto f(t, x(t))$, on obtient

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad \text{pour tout} \quad t \in I, \tag{1.13}$$

de plus x vérifie $x(t_0) = x_0$ ce qui signifie que x est solution du problème (1.10).

1.3 Réduction de l'ordre d'une équation différentielle ordinaire d'ordre n

On va donner une méthode qui transforme une EDO d'ordre n en un système différentielle d'ordre 1.

En effet

$$F(t, x, z, z', \cdots, z^{(n-1)}) = 0 \Leftrightarrow x^{(n)} = H(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n-1)}),$$

faisant le chengement de variable suivant

$$\begin{cases} z = x' \\ z' = x'' \\ z'' = x^{(3)} \\ \vdots \\ z^{(n-1)} = x^{(n)}, \end{cases}$$

alors

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ H(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n-1)}) \end{pmatrix}.$$

i.e. $X' = A\,X + B$, avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ H(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n-1)}) \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.3.1. *Soit l'équation différentielle :*

$$x^{(3)} = x'' \tag{1.14}$$

on pose

$$x'(t) = y(t)$$

$$x''(t) = y'(t)$$

$$x^{(3)}(t) = y''(t)$$

on remplace dans (1.14), *on trouve*

$$y'' - y' = 0,$$

$$\frac{y''}{y'} = 1,$$

on pose

$$y' = z,$$

il vient :

$$\begin{aligned} \frac{z'}{z} = 1 &\Longrightarrow \frac{dz}{z} = dt \\ &\Longrightarrow ln|z| = t + c, \;\; c \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow z = ke^t, \;\; k \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow y = ke^t + c, \;\; c, k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On retourne à l'équation suivante :

$$x'(t) = c_1 + c_2 e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

ainsi la solution de l'équation (1.14) *s'écrit :*

$$x(t) = c_1 t + c_2 e^t + c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},$$

pour résoudre un système différentielle de type (1.9) *il faut passer à la solution générale et particulier et on va sommer les deux solutions pour obtenir la solution, d'abord on résout*

$$X'(t) = A(t)X(t). \tag{1.15}$$

Remarques 1.1. *Si la matrice A ne dépent pas de t on appelle* (1.15) *système* *différentielle vectorielle, et si A dépend de t on appelle* (1.15) *système différentielle matricielle.*

1.4 Théorème du point fixe de Banach- Picard

Le théorème du point fixe de Banach (ou théorème d'application contractante) est un théorème simple à prouver et qui s'applique aux espaces complets et possède de nombreuse applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence des solutions pour les équations différentielles où les équations intégrales et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques comme celle de Newton dans la résolution d'équation non linéaire, ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème du point fixe de picard

Théorème 1.2. *Soit (E, d) un espace métrique complet et $T : E \longrightarrow E$ une application contractente i.e.*

$$\exists k \in (0, 1), \quad d(Tx, Ty) \leq Kd(x, y), \quad \forall x, y \in E.$$

Alors, $\exists! x \in E$ tel que

$$Tx = x.$$

Preuve :

L'unicité est immédiate, pour l'existence, on considère la suite récurrente suivante

$$\begin{cases} x_{n+1} = T(x_n) \\ x_0 \quad \text{donné.} \end{cases}$$

On va montrer que la suite (x_n) est de Cauchy. On remarque que, pour $x \in E$

$$d(Tx, T^2x) \leq kd(x, Tx),$$

et, par récurrence immédiate, pour $x \in E$ et $n \geq 0$

$$d(T^n x, T^{n+1}x) \leq k^n d(x, Tx).$$

Ainsi, on a pour $x \in E$ et $p \geq 0$

$$\begin{aligned} d(x, T^p x) &\leq d(x, Tx) + d(Tx, T^2x) + \cdots + d(T^{p-1}x, T^p x) \\ &\leq d(x, Tx)(1 + k + \cdots + k^{p-1}) \\ &\leq d(x, Tx)\frac{1-k^p}{1-k}. \end{aligned}$$

On déduit que pour $n \geq 0$ et $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &= d(x_n, T^p(x_n)) \\ &\leq d(x_n, Tx_n)\frac{1-k^p}{1-k} \\ &= d(T^n x_0, T^{n+1}x_0)\frac{1-k^p}{1-k} \\ &\leq d(x_0, Tx_0)k^n\frac{1}{1-k}. \end{aligned}$$

Ceci montre que la suite (x_n) est de Cauchy, donc converge vert un $x^* \in E$ (car E est supposé complet pour la métrique d). En passant à la limite dans la relation de récurrence $x_{n+1} = T(x_n)$ (en utilisant le fait que T est une applicatin continue), en obtient $x^* = T(x^*)$, d'où l'existence d'un point fixe.

Théorème du point fixe de Banach

Théorème 1.3. *Soit I un intervalle fermé non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow I$ est une fonction contractante, c'est à dire qu'il existe $k \in]0,1[$, tel que*

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq k\, |t_1 - t_2|\,, \quad \forall t_1, t_2 \in I. \tag{1.16}$$

Alors, il existe un unique point fixe $t \in I$ pour f, i.e.

$$\exists! t \in I; \quad f(t) = t.$$

Théorème 1.4. *Tout application continue d'un compact de $\mathbb{R}^n$ dans lui même admet un point fixe.*

Théorème 1.5. *[théorème de Schauder]*

Soit E un espace de Banach, M un convexe, fermé borné de E, et $N : M \to M$ un opérateur continu et compact, alors N admet au moins un point fixe dans M.

1.4.1 Résolvante d'un système linéaire

Définition 1.7. *On appelle résolvante du système* (1.15) *l'application*

$$R : I \times I \to M_n(\mathbb{R})$$

définie par :

$$\forall (t,s) \in I, \frac{dR}{dt}(t,s) = A(t)R(t,s), \quad R(s,s) = Id.$$

Définition 1.8. ***Exponentielle de matrice :***

Pour tout matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{R})$ on définit la matrice carrée $\exp A \in M_n(\mathbb{R})$ par :

$$\exp A = Id + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Proposition 1.1. *La matrice exponentielle de matrice définie dans la définition précédente vérifie les propriétés suivantes :*

- $e^{0_{M_n(\mathbb{R})}} = I_n$
- $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, \quad \forall s \in I, \quad \forall t \in I$
- $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$
- $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$
- $e^{(t-t_0)}e^{(t_0-t_1)} = e^{(t-t_1)}$

Corollaire 1.1. *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système*

$$X'(t) = AX(t),$$

est

$$R(t,s) = e^{(t-s)A}.$$

Remarques 1.2. *La résolvante vérifie les propriétés suivantes :*

✓ $R(t_0,t_1)R(t_1,t_2) = R(t_0,t_2)$,

✓ $(R(t_0,t))^{-1} = R(t,t_0)$.

1.4.2 La résolution d'un système différentielle linéaire d'ordre 1

On a :

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t). \tag{1.17}$$

On considère l'équation homogène :

$$X'(t) = A(t)X(t),$$

$$\frac{X'(t)}{X(t)} = A(t) \Rightarrow \int \frac{X'(s)}{X(s)}\,ds = \int A(s)\,ds \Rightarrow \ln X(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\,ds + c,$$

d'ou

$$X(t) = X_0\, e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds},$$

telle que, $X_0 = e^c$ donc :

$$X(t) = R(t, t_0)X_0 = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)ds} X_0,$$

est une solution homogène.

On cherche la solution particulière par la méthode de la variation de la constante

$$\begin{aligned} X(t) &= R(t, t_0)X_0(t). && (1.18) \\ X'(t) &= \frac{d}{dt}(R(t, t_0)X_0(t)) && (1.19) \\ &= \frac{d}{dt}(R(t, t_0)X_0(t) + X_0'(t)R(t, t_0) && (1.20) \\ &= A(t)R(t, t_0)X_0(t) + X_0'(t)R(t, t_0). && (1.21) \end{aligned}$$

on remplace (1.21) dans (1.17) on obtient

$$A(t)R(t, t_0)X_0(t) + X_0'(t)R(t, t_0) = A(t)R(t, t_0)X_0(t) + F(t)$$

alors

$$X_0'(t) = \frac{F(t)}{R(t, t_0)} \Rightarrow X_0'(t)R(t, t_0) = F(t) \Rightarrow X_0'(t) = R(t_0, t)F(t).$$

D'où

$$X_0(t) = \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)F(s)ds + X_0(t_0) \tag{1.22}$$

On remplace (1.22) dans (1.18)et par sommation des solutions on obtient

$$X(t) = R(t, t_0)X_0 + X_0(t_0)R(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t, s)F(s)ds.$$

Remarques 1.3. *Dans le cas d'un système autonome on trouve la résolvante de la forme suivante :*

$$R(t, s) = e^{(t-s)A}.$$

Théorème 1.6. *Si $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ et $F : I \to \mathbb{R}^n$ sont continues, autrement dit*

$t \to a_{ij}(t)$ *pour touts* $i, j = 1, \cdots, n$ *et* $t \to f_i(t)$ *continue pour tout* $i = 1, \cdots, n$, *alors pour tout* $t_0 \in I$ *et pour tout* $X_0 \in \mathbb{R}^n$, *il existe donc une solution unique du problème* (1.9).

Chapitre 2

Notion de stabilité

2.1 Notion de stabilité

L'étude de la solution dans le plan de phase ou de la stabilité au voisinage d'un point d'équilibre fournit des informations qualitatives importantes sur la solution. La théorie de la stabilité traite la stabilité des solutions d'équations différentielles et des trajectoires des systèmes dynamiques sous de petites perturbations des conditions initiales.

Ce chapitre est consacré à l'étude de la stabilité de Lyaponouv des solutions des équations différentielles ordinaires et des systèmes linéaires.

2.2 Cas d'une équation différentielle ordinaire

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \quad (t,x) \in U, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

tel que les conditions d'éxistance de la solution du problème de Cauchy (2.1) sont satisfaites dans certaine ensemble U.

Soit $\phi(t, t_0, x_0)$ est solution de problème (2.1) avec $\phi(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

On considère cette dernière la solution non perturbèe, la soluion $\phi(t, t_0, x_1)$ est perturbèe, la diffèrence $x_0 - x_1$ est la perturbation.

Définition 2.1. *La solution $\phi(t, t_0, x_0)$ est dite stable au sens de Lyaponouv si pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que*

$$|x_0 - x_1| < \delta \Longrightarrow |\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, x_1)| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Définition 2.2. *La solution $\phi(t, t_0, x_0)$ est uniforemement stable, si*

$$\delta = \delta(\varepsilon).$$

Définition 2.3. *La solution $\phi(t, t_0, x_0)$ est appelé instable si elle n'est pas stable.*

Définition 2.4. *La solution $\phi(t, t_0, x_0)$ est dit asymptotiquement stable si*

1. *elle est stable au sens de Lyaponouv,*
2. *il existe $\delta = \delta(t_0)$ telle que*

$$|x_0 - x_1| < \delta \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} |\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, x_1)| = 0.$$

Définition 2.5. *La solution $\phi(t, t_0, x_0)$ est globalement asymptotiquement stable si, dans la définition précédente $\delta = \infty$.*

Proposition 2.1. *La stabilité de la solution $\phi(t)$ de l'équation (2.1) et la même que celle de la solution identiquement nulle de l'équation déduite de l'équation (2.1).*

Preuve :

On pose $y(t) = x(t) - \phi(t)$.

On remplace dans l'équation (2.1) on trouve :

$$y'(t) = x'(t) - \phi'(t) = f(t, y(t) + \phi(t)) - f(t, \phi(t)) = f(t, y(t)).$$

On note que

$$f(t, 0) = f(t, \phi(t)) - f(t, \phi(t)) = 0,$$

où

$$x'(t) = f(t, x(t)) \longleftrightarrow \begin{cases} y' = f(t, y(t)), \\ f(t, 0) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Donc pour étudier la stabilité de la solution $\phi(t)$ de l'équation (2.1), il suffit d'étudier la stabilité de la solution nulle de l'équation (2.2).

Dans tout ce qui suit on considére que l'équation (2.1) a la solution nulle où $f(t, 0) = 0$.

Définition 2.6. *Un point x^* est un point d'équilibre ou point stationnaire si*

$$f(t, x^*) = 0$$

2.3 Etude de la stabilité des points d'équilibre

Définition 2.7. *On dit que la solution nulle (le point d'équilibre) de l'équation* (2.1) *est :*

1) stable au sens de Lyaponouv *ou tout simplement stable si $\forall \varepsilon > 0$ et $t_0 \geq 0, \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ telle que pour toute solution $\phi(t, t_0, x_0)$:*

$$|x_0| < \delta \Longrightarrow \phi(t) \quad \textit{existe} \quad \forall t \geq t_0 \quad \textit{et} \quad |\phi(t)| < \varepsilon.$$

2) uniforemément stable *si $\delta = \delta(\varepsilon)$.*

3) instable *si elle n'est pas stable.*

4) asymptotiquement stable *si :*

(a) *la solution* 0 *est stable,*

(b) $\exists \delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$*, telle que* $|x_0| < \delta_0 \Longrightarrow |\phi(t)| \longrightarrow 0$ *quand* $t \longrightarrow \infty$.

Exemple 2.3.1. *Soit le problème :*

$$\begin{cases} x' = -x, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

La solution générale de l'équation (2.3) *est* $\phi(t) = ce^{-t}$*, et la solution du problème est de la forme* $\phi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{(t_0 - t)}$.
et la solution qui permet d'atteindre la condition $x(t_0) = x_0$ *s'écrit sous la forme* $\phi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{(t_0 - t)}$.
On note que :

$$|\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, x_1)| = |x_0 - x_1| e^{(t_0 - t)} \leq |x_0 - x_1|, t \geq t_0$$

Donc

$$|\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, x_1)| < \varepsilon, \exists \delta = \varepsilon / |x_0 - x_1| < \delta \to \forall \varepsilon > 0.$$

Donc la solution du problème (2.3) *est stable au sens de Lyaponouv.*
Puisque $\delta = \delta(\varepsilon)$ *alors la solution est uniforemément stable.*
D'autre part, on a

$$\lim_{t \to +\infty} |\phi(t, t_0, x_0) - \phi(t, t_0, x_1)| = \lim_{t \to +\infty} |x_0 - x_1| e^{(t_0 - t)} = 0.$$

Et par suite la solution est asymptotiquement stable.

2.4 Cas d'un système différentielle linéaire

Soient :

$$X' = A(t)X(t) + F(t), \tag{2.4}$$

$$X'(t) = A(t)X(t), \tag{2.5}$$

avec $X(t_0) = X_0$, $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est continue, et $F(t)$ une fonction continue sur l'intervalle $I = [t_0; +\infty[$.

Définition 2.8. *On dit que le système* (2.4) *est stable (respectivement non stable) si sa solution est stables (non stable) au sens de Lyapunouv.*

Théorème 2.1. *Pour toute fonction F arbitraire continue sur I, le système* (2.4) *est stable, si et seulement si la solution nulle du système* (2.5) *est stable.*

Preuve :

$\Rightarrow$ Soit $t_0 \in I$, $\phi(t)$ une solution stable du système(2.5) sur un intervalle $[t_0; +\infty[$, telle que $\phi(t_0) = X_0$ i.e $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ telle que pour toute solution $\psi(t)$ sur un intervalle $[t_0; +\infty[$, avec la condition initiale $\psi(t_0) = Z_0$ vérifie

$$||X_0 - Z_0||_E < \delta \Longrightarrow ||\phi(t) - \psi(t)||_E < \varepsilon.$$

D'autre part on sait que la fonction noteé

$$\phi^*(t) = \phi(t) - \psi(t), \tag{2.6}$$

est la solution du système homogène (2.5).
Par hypothèse ϕ^* vérifie :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0/||\phi^*(t_0)||_E < \delta \Longrightarrow ||\phi^*(t)||_E < \varepsilon, t \geq t_0. \tag{2.7}$$

Puisque toute solution de système (2.5) peut être écrite sous la forme (2.6), donc l'implication (2.7) est vérifieé, c'est-a-dire la stabilité de la solution nulle du système

(2.5).

$\Leftarrow$ Supposons que la solution nulle du système (2.5) est stable. Pour toute solution $\phi^*(t)$ du système (2.5) sur un intrvalle $[t_0; +\infty[$ est vérifiée (2.7), on déduit de la dernière formule que si $\phi(t)$ est une solution particulière du système (2.4) sur un intervalle $[t_0; +\infty[$ et $\psi(t)$ la solution arbitraire du même système sur $[t_0; +\infty[$ telle que :

$$||\phi(t_0) - \psi(t_0)||_E < \delta \Longrightarrow ||\phi(t) - \psi(t)||_E < \varepsilon.$$

Cela signifie que la solution $\phi(t)$ est stable.

Corollaire 2.1. ***1**.Pour étudier la stabilité de la solution nulle du système* (2.5)*, il suffit d'étudier la stabilité d'une solution du système* (2.4)*.*

Exemple 2.4.1. *On va étudier la stabilité de la solution du système suivant :*

$$\begin{cases} x' = 1 + t - x, \\ y' = 1 + t - y \end{cases} \tag{2.8}$$

qui satisfait a la condition initiale $x(0) = 0$, $y(0) = 0$*. Le système* (2.8) *est un système linéaire non homogène.*

La forme matricielle de ce système est :

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t),$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad et \quad F(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \end{pmatrix}.$$

Sa solution générale est :

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ce^{-t} + t \\ Ce^{-t} + t \end{pmatrix}.$$

Avec la condition initiale on obtient :

$$\phi(t,0,0) = \begin{pmatrix} \phi_1(t,0,0) \\ \phi_2(t,0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

La condition initiale

$$X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

satisfait les solutions :

$$\phi(t,0,X_0) = \begin{pmatrix} \phi_1(t,0,x_0) \\ \phi_2(t,0,y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0e^{-t}+t \\ y_0e^{-t}+t \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Considérons la différence des solutions (2.10) *et* (2.9) *du système* (2.8) *et écrivons la sous la forme :*

$$\begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0e^{-t}+t-t \\ y_0e^{-t}+t-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0-0 \\ y_0-0 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

On déduit que $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ *tel que toutes solutions* $\phi_1(t)$ *et* $\phi_2(t)$ *du système* (2.8), *dont les valeurs initiales satisfont à la condition* $\|X_0 - 0\|_E < \delta$ *vérifie l'inégalité :*

$$\|\phi(t) - X(t)\|_E = \|X_0 - 0\|_E e^{-t} < \varepsilon,$$

pour tous $t \geq 0$, *par suite la solution* $\phi(t)$ *est stable. De plus puisque*

$$\lim_{t\to\infty} \|\phi(t) - X(t)\|_E = \lim_{t\to\infty} \|X_0 - 0\|_E e^{-t} = 0,$$

la solution $X(t)$ *est asymptotiquement stable.*

2.4.1 Cas d'un système linéaire homogène a coeffécients canstants

Soit le système diffèrentielle suivante :

$$X'(t) = AX(t), \tag{2.11}$$

Avec la condition initiale $X(t_0) = X_0$, où A est une matrice à coeffécients canstants. Il est clair que le système (2.11) admet une solution nulle.

Définition 2.9. *Les valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont solution du polynôme caractéristique $p_n(\lambda)$ de la matrice A défini par :*

$$p_n(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Théorème 2.2. *Si toutes les valeurs propre de A ont une partie réelle strictement négative, alors la solution nulle (point d'équilibre) est globalement asymptotiquement stable.*

Remarques 2.1. *1. Si au moins une valeur propre λ_k de A a une partie réelle positive alors la solution nulle du système* (2.11) *est instable.*

2. Si $Re(\lambda_k) \leq 0, 1 \leq k \leq n$ telle que pour $1 \leq j \leq n, Re(\lambda_j) = 0 \Longrightarrow \lambda_j$ est une valeur propre simple, alors la solution nulle de (2.11) *est stable.*

2.5 Quelques théorèmes de stabilité

On va utiliser des théorèmes qui vont déterminer la nature des points d'équilibre.

2.5.1 Méthode par la fonction de Lyaponouv

Définition 2.10. *On appelle fonction de Lyaponouv une fonction L de classe C^1 définie au voisinage du point d'équilibre x^* et à valeurs reélles possèdant les deux propriétés :*

1. *$L(y) \geq 0$, la fonction étant nulle uniquement en $y = x^*$*
2. *$\langle \nabla L(y), f(y) \rangle \leqslant 0$, où ∇L est le gradient de L*

Si l'inégalité $\langle \nabla L(y), f(y) \rangle < 0$ est stricte (Sauf evidement en $y = x^*$) on parle de fonction stricte de Lyaponouv

Définition 2.11. *Une fonction de Lyaponouv est propre quand elle est définie sur U tout entier, et lorsque l'image réciproque de tout compact de $[0, +\infty[$ est un compact dans U.*

Théorème 2.3. *Si le système (2.5) admet une fonction de Lyaponouv au voisinage du point d'équilibre x^*, ce point d'équilibre est asymptotiquement stable.*

Théorème 2.4. *Pour qu'un point d'équilibre soit globalement asymptotiquement stable, il suffit qu'il existe une fonction propre de Lyaponouv.*

2.5.2 Stabilité de Barbashin

Théorème 2.5. *Soient x^* un point d'équilibre de (1.10), et*

$$V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, vérifiant

1. *V est définie positive,*
2. *la dérivée totale $V^\cdot$ pour (1.10) est définie négative,*
3. *$\|x\|_E \longrightarrow \infty \Rightarrow \|V(x)\|_E \longrightarrow \infty$.*

Alors x^* est globalement asymptotiquement stable.

Chapitre 3

Existence et stabilité pour les équations différentielles ordinaires fonctionnelles

La théorie de la perturbation est apparue dans l'une des branches les plus anciennes des mathématiques appliquées : la mécanique céleste, l'étude des mouvements des planètes. Depuis l'Antiquité, diverses méthodes mathématiques ont été utilisées pour décrire ces mouvements (vus de la Terre), généralement sans chercher à en déterminer les causes. Après la formulation par Newton de la loi de gravité, il est devenu possible de déduire les mouvements planétaires de lois physiques considérées comme plus fondamentales. Si seuls le soleil et une planète sont pris en compte, le résultat est un mouvement elliptique avec le soleil au centre. Cependant, cela ne correspond pas tout à fait au mouvement réellement observé. L'explication est que les planètes exercent des forces gravitationnelles les unes sur les autres et perturbent, c'est-à-dire modifient leurs mouvements. La théorie de la perturbation dans son original sens fait référence à différentes manières de prendre en compte ces modifications. Essentiellement, on commence par la "solution non perturbée", c'est-à-dire, avec un mouvement purement elliptique, en première approximation, puis on calcule les forces que les planètes exerceraient l'une sur l'autre si ce mouvement non perturbé était correct, puis on corrige la solution non perturbée. en conséquence. Les premières corrections ne sont toujours pas précises, car leur construction dépend de la solution non perturbée, ce qui permet de calculer une deuxième série de corrections, etc. La somme de la solution non perturbée et de la séquence des corrections forme une série, et on espère qu'une somme partielle d'un nombre raisonnable de termes donne une approximation adéquate de la motion pendant peut-être quelques centaines d'années.

Dans ce chapitre, nous établissons des théorèmes d'existence et de stabilité des solutions pour l'équation différentielle suivante :

$$x'(t) = f(t, x(t)); \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.1}$$

avec la conditions initiale

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

où $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée.

Définition 3.1. *Soit $BC := BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ un ensemble des fonctions continues et bornées qui est espace de Banach avec la norme suivante*

$$||x\|_{BC}= \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)|.$$

Lemme 3.1 (théorème de Corduneanu)**.** *Soit $D \subset BC$, alors D est relativement compact si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiée :*

(a) D est uniforemement borné dans BC c'est à dire s'il existe un $M > 0$ telle que,

$$\|f\|_{BC} \leq M, \quad \forall f \in D.$$

(b) Toute fonction dans D est équicontinue sur $\mathbb{R}_+$ (équicontinue sur chaque com-

pact de $\mathbb{R}_+$) c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+ : |t_1 - t_2| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(t_1) - f(t_2)| \leqslant \varepsilon.$$

(c) *Toute fonction de D est équiconvergente, c'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0 \quad |x(t) - \lim_{t \mapsto +\infty} x(t)| < \varepsilon.$$

pour tout $t \geq N$ et $x \in D$.

3.1 L'existance des solutions

Théorème 3.1. *Supposons que les hypothèses suivantes sont vérifieés :*

(H_1) *il existe une fonction positive $P \in BC$, telle que*

$$| f(t,x) - f(t,y) | \leq P(t) \frac{| x - y |}{1 + | x - y |}; \quad t \in \mathbb{R}_+, x, y \in \mathbb{R},$$

et

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t P(s) ds = 0,$$

(H_2) *la fonction $t \longmapsto f(t,0)$ est bornée dans $\mathbb{R}_+$ et*

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t |f(s,0)| \, ds = 0.$$

alors, le problème (3.1)-(3.2) *, possède une solution définie sur $\mathbb{R}_+$.*

Preuve :

posons

$$P_* = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_0^t P(t), \quad f_* = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t,0)| \quad \text{et} \quad f^* = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_0^t f(s,0) \, ds.$$

considérons la boule

$$B_r = \{x \in BC; \| x \|_{BC} \leq r\},$$

telle que

$$r \geq \frac{| x_0 | + f^*}{1 - P_*}.$$

Il est claire que B_r est fermée et bornée, convexe.

Considérons l'opérateur $N : BC \longrightarrow BC$, définit par :

$$(Nx)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds.$$

On montrera que $N : B_r \longrightarrow B_r$ satisfait les conditions du théorème(1.5), la preuve sera donnée dans quatre étapes.

Etape 1 : N est continue.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, telle que $x_n \mapsto x$ dans B_r, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned}
|(Nx_n)(t) - (Nx)(t)| &= \left| x_0 + \int_0^t f(s, x_n(s))\, ds - x_0 - \int_0^t f(s, x(s))\, ds \right| \\
&= \left| \int_0^t f(s, x_n(s))\, ds - \int_0^t f(s, x(s))\, ds \right| \\
&\leq \int_0^t P(s) \frac{|x_n(s) - x(s)|}{1 + |x_n(s) - x(s)|}\, ds \\
&\leq \int_0^t P(s) |x_n(s) - x(s)|\, ds \\
&\leq \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x_n(t) - x(t)| \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \int_0^t P(s)\, ds \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} P_* \| x_n - x \|_{BC} = 0.
\end{aligned}$$

On trouve que $||N(x_n(t)) - N(x(t))||_{BC} = 0, \quad$ quant $n \to +\infty$

Donc l'opérateur N est continu.

Etape 2 : $N(B_r)$ est uniformément bornée.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et $x \in B_r$ nous avons

$$\begin{aligned}
|(Nx)(t))| &= \left| x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds \right| \\
&\leq |x_0| + \left| \int_0^t f(s, x(s))\, ds \right| \\
&\leq |x_0| + \int_0^t |f(s, x(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)|\, ds \\
&\leq |x_0| + \int_0^t |f(s, 0) + P(s)\frac{|x(s)|}{1 + |x(s)|}|\, ds \\
&\leq |x_0| + \int_0^t |f(s, 0)| + P(s)|x(s)|\, ds \\
&\leq |x_0| + \int_0^t |f(s, 0)| ds + \int_0^t P(s)|x(s)|\, ds \\
&\leq |x_0| + \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_0^t |f(s, 0)| ds + \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)| \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_0^t P(s)\, ds \\
&\leq |x_0| + f^* + P_* \parallel x \parallel_{BC} \\
&\leq |x_0| + f^* + P_* r \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\parallel (Nx)(t) \parallel_{BC} \leq r.$$

Donc $N(B_r) \subset B_r$, comme B_r est bornée, alors $N(B_r)$ est uniformément bornée.

Etape 3 : $N(B_r)$ est équicontinue sur chaque compact $[0, a]$ de $\mathbb{R}_+$.

Soient $t_1, t_2 \in [0,a],\ t_1 < t_2$ et $x \in B_r$, alors

$$\begin{aligned}
|(Nx)(t_2) - (Nx)(t_1)| &= \left| x_0 + \int_0^{t_2} f(s,x(s))\,ds - x_0 - \int_0^{t_1} f(s,x(s))\,ds \right| \\
&= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s,x(s))\,ds \right| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \left(P(s)\frac{|x(s)|}{1+|x(s)|} + |f(s,0)| \right) ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \left(P(s)|x(s)| + |f(s,0)| \right) ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} P(s)|x(s)|ds + \int_{t_1}^{t_2} |f(s,0)|\ ds \\
&\leq \sup_{t\in[0,a]} \int_{t_1}^{t_2} |f(s,0)|ds + \sup_{t\in[0,a]} |x(t)| \sup_{t\in[0,a]} P(t) \int_{t_1}^{t_2} ds \\
&\leq (f_* + \sup_{t\in[0,a]} P(t) r) \int_{t_1}^{t_2} ds \\
&\leq \lim_{t_1 \to t_2} (f_* + ||P||_{BC})(t_2 - t_1) = 0.
\end{aligned}$$

alors $||(Nx)(t_2) - (Nx)(t_1)||_{BC} \to 0$ qaund $t_1 \to t_2$

Donc l'opérateur $N(B_r)$ est équicontinue.

Etape 4 : $N(B_r)$ est équiconvergente.

Soient $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in B_r$. Alors, nous avons

$$\begin{aligned}
|(Nx)(t)| &= \left| x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds \right| \\
&\le |x_0| + \int_0^t |f(s, x(s))|\, ds \\
&\le |x_0| + \int_0^t |f(s, x(s)) - f(s, 0) + f(s, 0)|\, ds \\
&\le |x_0| + \int_0^t \left(P(s) \frac{|x(s)|}{1 + |x(s)|} + |f(s, o)| \right) ds \\
&\le |x_0| + \int_0^t \left(P(s)|x(s)|ds + \int_0^t |f(s, o)| \right) ds
\end{aligned}$$

D'où,

$$|(Nx)(t)| \to |x_0|, \quad \text{quand} \quad t \to +\infty,$$

Il s'ensuit alors

$$\begin{aligned}
|(Nx)(t) - (Nx)(t)(+\infty)| &= \left| x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds - x_0 \right| \\
&= \left| \int_0^t f(s, x(s))\, ds \right| \\
&\le \int_0^t P(s)|x(s)|ds + \int_0^t |f(s, 0)|\, ds \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to +\infty.
\end{aligned}$$

On trouve donc

$$|(Nx)(t) - (Nx)(+\infty)| \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to +\infty.$$

Donc, $N(B_r)$ est équiconvergente.

D'apré le lemme(3.1), l'opérateur $N : B_r \longrightarrow B_r$ est continu et compact.

Par conséquent, le théorème(1.5) implique que le problème (3.1) - (3.2) admet une solution définie sur $\mathbb{R}_+$.

3.2 la stabilité des solutions

Dans cette section, nous démontrons la stabilité des solutions du problème (3.1) - (3.2).

Théorème 3.2. *Supposons que les hypothèse* $(H_1), (H_2)$ *et la condition* $P_* = \sup \int_0^t p(s)ds < 1$ *sont vérifiées, alors les solutions du problème* $(3.1) - (3.2)$ *sont localement asymptotiquement stables.*

Preuve : Soit y une solution du problème $(3.1) - (3.2)$, considérons la boule $B(y, P_*)$. Soit $x \in B(y, P_*)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, nous avons

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= |(Nx)(t) - (Ny)(t)| \\ &= \left| x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds - x_0 - \int_0^t f(s, y(s))\, ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t \left(f(s, x(s)) - f(s, y(s)) \right)\, ds \right| \\ &\leq \int_0^t P(s) \frac{|x(s) - y(s)|}{1 + |x(s) - y(s)|}\, ds \\ &\leq \int_0^t P(s)\, ds \\ &\leq P_*. \end{aligned}$$

D'où,

$$\| N(x) - y \|_{BC} \leq P_*.$$

Donc $N(B(y, P_*)) \subset B(y, P_*)$. En plus, si x est solution du problème $(3.1) - (3.2)$, alors

$$\begin{aligned}
|x(t)-y(t)| &= |(Nx)(t)-(Ny)(t)| \\
&= |x_0+|\int_0^t f(s,x(s))\,ds - x_0 - \int_0^t f(s,y(s))\,ds \\
&\leq \int_0^t (f(s,x(s))-f(s,y(s)))\,ds \\
&\leq \int_0^t P(s)\frac{|x(s)-y(s)|}{1+|x(s)-y(s)|}\,ds \\
&\leq \int_0^t P(s)\,ds \to 0 \quad \text{quand} \quad t\to+\infty.
\end{aligned}$$

Finalement, les solutions du problème $(3.1)-(3.2)$ sont localement asymptotiquement stables.

Maintenant, sous les conditions du théorème (3.1), nous pouvons démontrer la stabilité globale des solutions du poblème $(3.1)-(3.2)$.

Théorème 3.3. *Supposons que les hypothèses (H_1) et (H_2) sont vérifiées, alors les solutions des problémes $(3.1)-(3.2)$ sont globalement asymptotiquement stables .*

Preuve : Soient x et y deux solotions du probléme $(3.1)-(3.2)$, alors pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, nous avons

$$\begin{aligned}
|x(t)-y(t)| &= |(Nx)(t)-(Ny)(t)| \\
&= |x_0+|\int_0^t f(s,x(s))\,ds - x_0 - \int_0^t f(s,y(s))\,ds \\
&\leq \int_0^t (f(s,x(s))-f(s,y(s)))\,ds \\
&\leq \int_0^t P(s)\frac{|x(s)-y(s)|}{1+|x(s)-y(s)|}\,ds \\
&\leq \int_0^t P(s)ds \to 0 \quad \text{quand} \quad t\to+\infty.
\end{aligned}$$

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on trouve

$$|x(t) - y(t)| \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to +\infty.$$

Par conséquent, les solutions du probléme $(3.1) - (3.2)$ sont globalement asymptotiquement stables.

Exemple 3.2.1. *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$x(t) = f(t, x(t)); \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.3}$$

avec la condition initiale

$$x(0) = 1, \tag{3.4}$$

Où

$$f(t, x(t)) = \frac{(1-t)e^{-t}|x(t)|}{1 + |x(t)|}.$$

Nous pouvons voir que l'hypothèse (H_1) est satisfaite pour

$$P(t) = (1-t)e^{-t}.$$

L'hypothèse (H_2) est satisfaite pour

$$f(t, 0) = 0.$$

En plus, nous avons

$$P_* = e^{-1} < 1.$$

Donc toutes les conditions du théorème(3.1) sont satisfaites, le problème (3.3) - (3.4) admet au moins une solution définie sur $\mathbb{R}_+$.

En plus d'après le théorème (3.3), les solution du problème (3.3) - (3.4) sont globalement asymptotiquement stables.

On fait :

f est continue, alors

$$\begin{aligned}
|f(t,x)-f(t,y)| &= \left|\frac{(1-t)e^{-t}\,|x(t)|}{1+|x(t)|}-\frac{(1-t)e^{-t}\,|y(t)|}{1+|y(t)|}\right| \\
&= \left|(1-t)e^{-t}\left(\frac{|x(t)|}{1+|x(t)|}-\frac{|y(t)|}{1+|y(t)|}\right)\right| \\
&= \left|(1-t)e^{-t}\left(\frac{|x(t)|\,(1+|y(t)|)-|y(t)|\,(1+|x(t)|)}{(1+|x(t)|)(1+|y(t)|)}\right)\right| \\
&= \left|(1-t)\left(\frac{|x(t)|+|x(t)|\,|y(t)|-|y(t)|\,|x(t)|-|y(t)|}{(1+|x(t)|)(1+|y(t)|)}\right)\right| \\
&= \left|(1-t)e^{-t}\left(\frac{|x(t)|-|y(t)|}{(1+|x(t)|)(1+|y(t)|)}\right)\right| \\
&\leq (1-t)e^{-t}\frac{|x(t)|-|y(t)|}{1+|x(t)|-|y(t)|}
\end{aligned}$$

Ainsi que, nous avons

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t (1-s)e^{-s}ds = 0.$$

D'ou, l'hypothése (H_1) est bien vérifié pour :

$$P(t) = (1-t)e^{-t}$$

Il s'ensuit que

$$P_* = e^{-1} < 1.$$

De plus, la fonction $f(t,0)=0$ est bien bornée dans $\mathbb{R}_+$ qui montre que l'hypothèse (H_2) est vérifiée pour $f(t,0)=0$.

Donc toutes les conditions du théorème(3.1) sont satisfaites, par suite le problème (3.3) - (3.4) admet au moins une solution définie sur $\mathbb{R}_+$. En plus d'après le théorème(3.3) les solution du problème (3.3) - (3.4) sont globalement asymptotiquement stables.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons traité l'existance et la stabilité de Lyaponouv des solutions des équations différentielles ordinaires avec une condition initiale à l'aide de quelques théorèmes notament le théorème de Schauder et le théorème de Corduneanu dans un espace de Banach.

Bibliographie

[1] Lelièvre, Tony, Equations différentielles ordinaires Notes du cours Modéliser, Simuler, Programmer (MoPSI)(Cours de deuxieme année de l'ENPC, 2007)

[2] L.Pujo - Menjouet Equation Différentielles Ordinaires et Partielles Université claude Bernard, pujo@math.univ-lyon1.fr.

[3] Krasnov, M Receuil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires éd. mir 1981.

[4] Hartman, Philip Ordinary differential equations. Wiley 1964.

[5] C.Minazzo, K.Rider Théoreme du point fixe et application aux équations différentielles Université de nice - Sophia Antipolis 2006 - 2007.

[6] Granas, Andrzej and Dugundji, James Fixed point theory Springer Science & Business Media 2013.

[7] Corduneanu, Constantin Integral equations and applications Cambridge University Press 1991.

[8] Kray. Marie Pertirbation d'un Système différentielle ayant une solution périodique 2007.

[9] Hivert, Hélène Etude mathématique et numérique de quelques modèles cinétiques et de leurs asymptotiques : limites de diffusion et de diffusion anormale Université Rennes 1 2016.

[10] Lequeurre, Julien Quelques résultats d'existence, de contrôlabilité et de stabilisation pour des systèmes couplés fluide-structure Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier 2011.

[11] Benzoni, Sylvie Equations différentielles ordinaires 2007.

[12] Bibi, Mohand-Ouamer and others Stabilisation des systèmes linéaires et non linéaires par la commande. Universié de bejaia 2014.

[13] Françoins Cottet- Emard Calcule différentielle et integrale.

[14] Université du Haver Grisella Groce Cours Equations différentielles Ordinaires.

[15] Croce, Gisella Quelques contributions au calcul des variations et équationd élliptiques Université du Havre 2015.