République Algérienne Démocratique et Populair
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique
Université Ibn Khaldoun – Tiaret –

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département des MATHEMATIQUES

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

DOMAINE : Mathématiques et Informatique

FILIERE : Mathématiques

SPECIALITE: Analyse Fonctionnelle et Applications

**Présenté par**

BOUKOUFA KARIMA

BELKHEIR AICHA

DOUAINIA SOUAAD

TERBOUCHE MOHAMED

**SUJET DU MEMOIRE :**

# *QUELQUES RESULTATS D'ANALYSE FONCTIONNELLE*

Soutenu le 18/07/2019 Devant Le Jury Composé de :

| | |
|---|---|
| Mr : A.Hallouz, ,MCB | Président |
| Mr : A.Larabi, , MCA | Encadreur |
| Mr :K. BENIA ,MAA | Examinateur |

Année Universitaire : 2018/2019

# Remerciement

Avant de commencer la présentation de ce travail, nous tenons à remercier sincèrement et profondément en premier lien notre dieu *ALLAH* le tout puissant.

Nous devons exprimer notre gratitude à Mr * A.LARABI* d'avoir accepter de nous encadrer avec enthousiasme et beaucoup d'attention, ainsi que pour sa gentillesse, sa disponibilité, et ses conseil qui nous ont permis d'avancer

Nous tenons à remercier aussi les membres de jury Mr :A.HALLOUZ Mr :K . BENIA

D'avoir accepter d'examiner ce modeste travail

# dédicace

*C'est avec grand plaisir que Je dédie cet humble travail*

*A mes très chers parents, pour leurs amour et sacrifices,*

*A mes adorables frères Fethi  et Yacine , sœur Zahira et son fils Salah Eddine ,Asmaa*

*A mes proches amis Souaàd, Karima, Kaletoum, Ouahiba ,Aicha*

*A toute ma grande famille*

*A toutes les personnes qui me connaissent de prés ou de loin, seulement pour leur existence*

# dédicace

*Avec un énorme plaisir, un cœur ouvres et une immense joie que je dédie mon travail*

*A mes chers parents pour leur soutien, leur patience, leur encouragement durant mon par cours scolaire*

*A mes sœurs : Sondous , Malika, Khadidja, Ikram, Fatiha, Fatima*

*A mes frères : Mabrouk , Djilali, Hakime*

*A toute Familie : Blekhir et Ben soutra*

*A tous mes meilleures amis (es) : Zineb, Samiha, Zohra, Mimouna, Kheira….*

*Et a l'ensemble des étudiants de la promo master*

*Ainsi a toutes personnes qui m'ont encouragé ou aidé qui long de mes études*

*Aicha*

# dédicace

*Je dédie ce modeste travail à :*

*Ma très chère mére, qui ma tant aidé avec son soutient, elle est ma source de courage et de patience à qui j'exprime toute ma reconnaissance . Mon très cher père qui a sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir ce que je suis*

*Mon cher frère : Khaled*

*Ma chère sœur : Leila*

*Ma famille et mes amies*

*Aussi mes enseignants en particuliers Mr. LARZBI , Mr. OURDANI*

*Souaad*

# dédicace

*Après de longues années d'études et de travail, je dédion ce medeste travail :*

*Ames très chers parents, que dieu les bénisse et les protège pour leurs soutien moral et financier , pour leurs encouragement et les sacrifices qu'ils ont endurés*

*A mes frères et mes sœurs*

*A tous mes oncles , tantes et cousins. A toute mes grande famille. A tous mes fidèles amis*

*A mes enseignants qui nous ont dirigé et aidé et surtout soutenu pour être un jour un cadre en mathématique .*

*A tous ceux qui je connaisse de près ou de loin*

*Je tenon enfin de dédier ce travaille à tous mes amis  d'étude de AFA*

*A tous les proches qu'ils sont mentionnés et les autres qu'ils sont oubliés veuillez nous excuser*

*Mohamed*

# Table des matières

# Chapitre 1

# Rappel Sur Les Espaces Topologiques,Métriques,Vectoriels Normés

Dans ce premier chapitre nous allons rappeler les notions essentielles qui concernent les Espaces Topologiques , Métriques et Vectoriel Normés ,Nous généraliserons ensuite les notions étudiées dans les cours de deuxième années comme : Les ouverts, les fermés , voisinages , intérieure ,...etc .
Ces notions représentent un outil important pour l'étude des problèmes mathématiques.

## 1.1 Espaces Topologiques

**Définition 1.1.** *(Espaces Topologiques) Le couple* $(E, \tau)$ *est appelé espace topologique .*
*Si les trois axiomes suivants sont satisfaits :*

1. $E$ *et* $\emptyset \in \tau$

*2.* $\forall O_1, O_2, ..., O_n \in \tau \Rightarrow \cap_{i=1}^{i=n} O_i \in \tau$

*3. Toute réunion d'éléments de $\tau$ est un élément de $\tau$.*
*Les élément de $\tau$ sont appelés les ensemble ouverts de $E$.*
*Considéré comme espace topologique, on dit égalment que $\tau$ définit une topologie sur $E$.*

**Définition 1.1.** *(ouverts) Soit $X$ un ensemble,une topologie sur $X$ est la donnée d'une famille $O$ de parties de $X$, appelées ouverts , vérifiant :*

1. $\phi$ et $X$ sont des ouverts ;
2. toute réunion d'ouverts est un ouvert ;
3. une intersection finie d'ouverts est un ouvert ;

Autrement dit, $O$ est stable par union quelconque, intersection finie, et contient $\phi$ et $X$. On dit alors que $X$ muni de cette topologie est un espace topologique.

**Définition 1.2.** *(Fermés)*

*Dans un espace topologique $X$, On dit que $F \subset X$ est fermé si et seulement si son complémentaire est un ouvert on a donc les propriétés suivants. Par passage au complémentaire :*

- $\phi$ et $X$ sont des fermés.
- toute intersection de fermés est fermé.
- une union finie de fermé est un fermé.

**Définition 1.3.** *(Voisinages) Soit $X$ un espace topologique et $x \in X$, une partie $V \subset X$ est voisinage de $x$ s'il existe un ouvert $O$ tel que $x \in O \subset V$ .*

*On note $V_X(x)$ l'ensemble des voisinages de $x$ dans $X$ :*
*$V \in V_X(x)$ " signifie " $V$ est un voisinage de $x$ dans $X$*

En particulier :
– $X$ est un voisinage de $x$ ;

- un voisinage de $x$ contient $x$ ;
- si $V \in V(x)$ et $V \subset W$, alors $W \in V(x)$ ;
- une union quelconque de voisinage de $x$ est encore un voisinage de $x$.

**Définition 1.4.** *(Système Fondamental de Voisinage) dans un espace topologique $X$, on appelle système fondamental de voisinage d'un point $x$ tout ensemble $\theta$ de voisinage de $X$ (resp $A$) tels que pour tout voisinage $V$ de $X$ (resp $A$), il existe un voisinage $w \in v$ tels que $w \in V$*

**Définition 1.5.** *(Intérieur) Soient $(E, \tau)$ un espace topologique et $A$ une partie de $E$.*
*L'intérieur de $A$ est le plus grand ouvert contenu dans $A$, on le note $\mathring{A}$ ou $Int_E A$. Un point $X$ est dit intérieur à $A$ lors que $x \in \mathring{A}$.*

**Définition 1.6.** *(L'adhérence) L'adhérence de $A$ est le plus petit fermé contenant $A$, on le note $\bar{A}$ ou $Adh_E A$ un point $x$ est dit adhérent à $A$ lors que $x \in E$.*

**Définition 1.7.** *(La frontière) La frontière de $A$ c'est le complémentaire de l'intérieur de $A$ dans l'adhérence de $A$, on le note $frA = \bar{A} \backslash \mathring{A}$. Un point $x$ est dit frontière de $A$ lorsque $x \in frA$.*

**Définition 1.8.** *(Densité) Soient $(E, \tau)$ un espace topologique et $A$ une partie de $E$, $A$ est dite dense dans $E$ si $\bar{A} = E$.*

**Définition 1.9.** *(Espace Séparé) un espace topologieque $(E, \tau)$ est dit séparé lorsque pour tous points distincts $x$ et $y$ de $E$, il existe des voisinages disjoints $V_x$ et $V_y$ de $x$ et $y$ respectivement.*

**Définition 1.10.** *(Séparabilité) un espace topologique $(E, \tau)$ est dit séparable s'il existe une famille dénombrable d'élément de $E$ dense dans $E$.*

**Définition 1.11.** *(Espaces de Baire)*

- *un espace de Baire est un espace topologique oú une intersection dénombrable d'ouverts denses reste dense*

– *un espace de Baire est un espace topologique oú tout partie maigre est d'interieur vide*

**Définition 1.12.** *(Séquentiellement Compact) est un espace topologique dans lequel toute suite possède au moins une sous-suite convergente .*

**Définition 1.13.** *(Ensemble Maigre) un sous-ensemble de $E$ est maigre si et seulement s'il est réunion dénombrable d'ensembles nulle part denses dans $E$*

## 1.2 Espaces Métriques

**Définition 1.14.** *(Espaces Métriques) on appelle espace métrique un ensemble $E$ muni d'une fonction distance, c'est-à-dire d'une application $d$ de $E \times E$ dans la demi-droite $\mathbb{R}_+ = \{x; x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\}$ de $\mathbb{R}$, qui au couple $(x, y)$ de $E \times E$, fait correspondre un nombre $d(x, y) \geqslant 0$, appelé distance de $x$ et $y$ cette distance doit possède les trois propriétés suivantes :*

- $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
- *symétrie :* $d(x, y) = d(y, x)$
- *inégalité triangulaire :* $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$

**Définition 1.15.** *(Boules,Sphère)*

– *On appelle boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$ fini, et on note $B(x, r)$, l'ensemble des $y$ de $E$ tels que $d(x, y) < r$.*

– *On appelle boule fermée de centre $x$ et de rayon $r$ fini, et on note $B_f(x, r)$, l'ensemble des $y$ de $E$ tels que $d(x, r) \leqslant r$.*

– *On appelle sphère de centre $x$ et de rayon $r$, et on note $S(x, r)$, l'ensemble des $y$ de $E$ tels que $d(x, y) = r$.*

**Définition 1.16.** *On dit qu'une partie $A$ d'un espace métrique $(E, d)$ est bornée s'il existe une boule fermée $B_f(x_0, r)$ contenant $A$, ie :* $\exists x_0 \in E . \exists r > 0, \forall x \in$

$A, d(x_0, x) \leqslant r$.

**Définition 1.17.** *(Distance entre deux parties ,diamètre) Soit* $(E, d)$ *un espace métrique et* $A, B$ *deux parties non vides de* $E$. *On définit :*
• *la distance entre* $A$ *et* $B$ *:* $d(A, B) = \inf\{d(a, b)/a \in A, b \in B\}$
• *le diamètre de* $A$ *:* $diam(A) = \sup\{d(a_1, a_2)/a_1, a_2 \in A\}$,
*On a toujours :* $d(A, A) = 0, d(A, E) = 0$.

## 1.3 Espaces Vectoriels Normés

**Définition 1.18.** *(Espaces Vectoriels Normés) Soit* $E$ *un espace vectoriel sur le corp* $\mathbb{K}$ *des nombres réels ou complexes. On appelle norme sur* $E$ *une application notée* $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *vérifiant :*

1. *positivité :* $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2. *homogénéité :* $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. *inégalité de convexité :* $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

*Si seulement si les propriétés* 1 *et* 2 *sont vérifiées, mais pas* 3 *on parle de semi-norme. un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé est un couple* $(E, \|.\|)$ *ou* $\|.\|$ *est une norme sur* $E$.

# Chapitre 2

# Compacité ,Connexité ,Connexité par arc (principaux résultats)

Le deuxiéme chapitre introduit de manière détaillée les notions de compacité et connexité. Ce chapitre contient des proprietés trés importantes et des exemples.

## 2.1 La compacité :

### 2.1.1 Définitions

**Définition 2.1.** *(recouvrement)*

- *Soient $(E, \tau)$ un espace topologique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de l'ensemble $E$. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de $E$ si $\bigcup_{i\in_I} A_i = E$*
- *un sous recouvrement est une sous famille $(A_j)_{j\in J}$, $J \subset I$ telle que $\bigcup_{j\in J} A_j = E$*
- *On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de $E$ si chacun des éléments $A_i$ est ouvert.*

**Définition 2.2.** *(Borel-Lebesgue) Un espace topologique $E$ est dit compact s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert de $E$ admet au moins un sous recouvrement fini $(E = \bigcup_{i\in I} O_i) \Rightarrow (\exists J \subset I : J$ fini $, E = \bigcup_{i\in J} O_i)$*

**Exemples 2.1.1.** *1.* $\mathbb{R}$ *n'est pas compact, car si l'on recouvre par les intervalles* $]n-1, n+1[$ *il est claire qu'un nombre fini de ces intervalles ne peut contenir tout* $\mathbb{R}$ *.*

2. *Un ensemble fini est compact . Une partie finie d'un espace topologique séparé est compacte .*

**Proposition 2.1.** *Un espace topologique* $(E, \tau)$ *est compact s'il est séparé et si de toute famille de fermées d'intersection vide on peut extraire une sous famille finie d'intersection vide .*

*E est compact* $\Longleftrightarrow \bigcap_\alpha F_\alpha = \emptyset \Longrightarrow \qquad \exists i_0, ..., i_n \qquad \bigcap_\alpha F_{\alpha_i} = \emptyset$

**Preuve 2.1.** *supposons que E compact donc :* $\forall \lambda_i$,

$$E = \bigcup_i \lambda_i \qquad \Longrightarrow \qquad \exists i_0 ... i_n \qquad E = \bigcup_{i=0}^{n} \lambda_i$$

*Soit* $(F_\alpha)$ *une famille de fermé*

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad \complement \bigcap_\alpha F_\alpha = \complement \emptyset = E$$

*comme E est compact ,* $\exists \lambda_1, ..., \lambda_n$

$$E = \bigcup_{i=0}^{n} \lambda_i \Longleftrightarrow \complement E = \complement \bigcup_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \emptyset = \bigcap_{i=0}^{n} F_{\alpha_i}$$

*et on a :*

$$\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad \exists i_0, ..., i_n \qquad \bigcap_{\alpha=0}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset$$

*Réciproquement :*

$$E = \bigcup_i \lambda_i \qquad , \qquad \complement E = \complement \bigcup_i \lambda_i \qquad , \emptyset = \bigcap_\alpha F_{\alpha_i} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset \Rightarrow \complement \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \complement \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} \lambda_i = E$$

**Proposition 2.2.** *La droite* $\overline{\mathbb{R}}$ *est compacte.*

**Preuve 2.2.** $\overline{\mathbb{R}}$ *est en effet homéomorphe à l'intervalle* $[-1, 1]$.

### 2.1.2 Propriétés élémentaires

1. Toute partie $F$ d'un espace compact $E$ est compacte, car les fermés de $F$ sont aussi des fermés de $E$.
2. Toute partie compacte $K$ d'un espace topologique séparé $E$ est fermés. En effet, soit $x$ un point adhérent à $K$. Touts les voisinages fermés de $x$ rencontrent $K$, et leurs intersections avec $K$ forment une famille de parties fermés de $K$ dont toute sous famille finie a une intersection non vide. Donc l'intersection de tous les voisinages fermés de $x$, qui n'est autre que $x$, puisque $E$ est séparé rencontre $K$ .
   En d'autres termes, $x \in K$, donc $K$ est fermé .
3. Dans un espace topologique séparé, toute intersection de parties compactes est compacte, et toute réunion finie de parties compactes est compacte .

## 2.2 Espaces Localement Compactes

**Définition 2.3.** *Un espace topologique $E$ est dit localement compact s'il est séparé, et si chacun de ses points possède au moins un voisinage compact.*

**Exemples 2.2.1.**
1. *Tout espace compact est localement compact .*
2. *L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$, pour sa topologie de sous espace de $\mathbb{R}$ n'est pas localement compact .*
3. *La droite rélle $\mathbb{R}$ et l'espace $\mathbb{R}^n$, sont localement compacts .*

**Proposition 2.3.** *Tout sous ensemble fermé d'un espace localement compacte est localement compacte .*

**Preuve 2.3.** *Soient $E$ un espace localement compact, $A$ un sous ensemble fermé de $E$ . Tout $x \in A$ dans $E$ un voisinage compact $V$ l'ensemble $V \cap A$ est fermé dans $V$ donc est compact, comme c'est un voisinage de $x$ dans $A$ ce point a bien dans $A$ un voisinage compact. Enfin $A$ est séparé puisque il est contenu dans l'espace séparé $E$ donc il est bien localement compact .*

## 2.3 Parties compacte dans un espace métrique

**Définition 2.4. - *Propriétés***
*Soit $(E, d)$ un espace métrique, $K \subset E$. On dit que $K$ est compact si :*

*i) De tout recouvrement de $K$ par des ouverts , on peut extraire un sous recouvrement fini ;*

*ii) Toute suite d'éléments de $K$ admet une valeur d'adhérence dans $K$ ;*

*iii) De toute suite d'éléments de $K$ on peut extraire une sous suite qui converge dans $K$ .*

*La propriété i) est appelée axiome de Borel-Lebesgue .*

**Remarques 2.1.** *Dans le cadre général, la définition est le i), mais on exige parfois que $K$ soit séparé en plus de satisfaire l'axiome de Borel-Lebesgue .*
*Dans le cadre métrique, ce n'est pas nécessaire un espace métrique est automatiquement séparé.*

**Proposition 2.4.** *Soit $K \subset (E, d)$ un compact , et $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés non vides de $K$, alors $\bigcap_{n \in N} F_n \neq \emptyset$*

**Preuve 2.4.** *Par l'absurde si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$, alors il existe $n_1, ..., n_s$ tels que $\bigcap_{j=1}^{s} F_{nj} = \emptyset$, or on a supposé $F_0 \supset ... \supset F_n \supset ...$, donc $\bigcap_{j=1}^{s} F_{nj} = F_N$ où $N = \max(n_1 ... n_s)$, ce qui contredit l'hypothèse $F_N \neq \emptyset$.*

**Proposition 2.5.** *Un fermé dans un compact est compact.*

## 2.4 propriétés des fonctions continues sur un compact

**Définition 2.5.** *une partie compacte (un compact) de $\mathbb{R}^n$ est une partie fermé et bornée il existe au moins deux façons de définir un compact dans un espace normé mais dans $\mathbb{R}^p$ elle sont équivalentes à celle qu'on donne ici .*

**Exemple 2.4.1.** *Dans $\mathbb{R}$ un intervalle fermé et dans $\mathbb{R}^p$ les boules fermés sont des exemples de compactes .*

**Théorème 2.1.** *soit $f : D \to \mathbb{R}^p$ une fonction continue sur une partie $D \subset \mathbb{R}^p$ et $K$ une partie compacte de $\mathbb{R}^p$ continue dans $D$, alors $f(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^p$*

**Corollaire 2.1.** *une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes cela signifie que sur un compact $K \in \mathbb{R}^p$ il existe au moins un point $X_m \in K$ et au moins un point $X_M \in K$ tels que pour tout $X \in K$ on ait :*

$$\|f(X_m)\| \leq \|f(X)\| \leq \|f(X_M)\|$$

**Théorème 2.2.** *soit $f : E \to F$ une application continue entre un espace métrique si $A \subset E$ est sequentiellement compact, alors l'image directe $f(A)$ est sequentiellement compact .*

**Preuve 2.5.** *Soit $(y_n) = (f(x_n))$ avec $x_n \in A$, une suite dans $f(A)$ comme $A$ est Sequentiellement compact, $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ admet une sous-suite convergente $(x_{n_k})_n \in \mathbb{N}$ soit $x \in A$ sa limite par continue de $f$ il s'ensuit que $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$, et donc $(y_{n_k})_k \in \mathbb{N} = f(x_{n_k})_k \in \mathbb{N}$ est une sous-suite de $(y_n)$ qui converge dans $f(A)$ .*

### 2.4.1 Théorème Continuité Uniforme

soit $E$ et $F$ deux espaces métriques, avec $E$ supposé séquentiellement compact, et soit $f : E \to F$ continue, alors $f$ est uniformément continue ;

**Preuve 2.6.** *par l'absurde si $f$ n'est pas uniformément continue, alors $\forall \varepsilon > 0$ tels que pour tout $\delta > 0$, $\exists x, y \in E$ avec : $d(x,y) < \delta$ et $d(f(x), f(y)) \geqslant \varepsilon$.*

*En particulier : c'est vrai pour $\delta = \frac{1}{n}$. Ainsi $\exists x_n, y_n \in E$ avec $d(x,y) < \frac{1}{n}$ et $d(f(x), f(y)) \geqslant \varepsilon$ .*

*comme $E$ est séquentiellement compact, la suite $(x_n)$ admet une sous-suite convergente $(x_{n_k})$. soit $x$ sa limite, alors $(y_{n_k})$ tend également vers $x$ comme $f$ est continue $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})$ d'autre part :*

*$d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geqslant \varepsilon$ donc en passant à la limite $d(f(x), f(y)) \geqslant \varepsilon > 0$ contradiction.*

**Théorème 2.3.** *une fonction $f$ continue définie sur un espace topologique compact à valeur réelles est bornée, et atteint sa borne inférieur et sa borne supérieur .*

### 2.4.2 Théorème de d'Alembert

tout polynôme non constant, à coefficients complexes, possède au moins une racines dans $\mathbb{C}$

**Preuve 2.7.** *on munit $\mathbb{C}$ de sa topologie usuelle ,*

*soit $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$*

*un polynôme de degré $n \geq 1$, à coefficient $a_k \in \mathbb{C}, 1 \leq k \leq n, a_n \neq 0$*

*si $a_0 = 0$,ce polynôme a une racine évidente $z = 0$, on suppose donc $a_0 \neq 0$ on sait que lorsque $z \in \mathbb{C}, |z| \to \infty, P(z)$ est équivalent à $a_n z^n$ il existe donc $R > 0$ tels que si $|z| \geq R, |P(z)| > |a_0|$ le disque $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$est compact,car c'est une partie fermée et bornée de $\mathbb{C}$. sur ce disque la fonction $z \mapsto |P(z)|$ est continue donc* *(théorème 2.3) atteint son minimum* $b_0$ *en un point* $z_0$ *de ce disque .*

*supposons* $b_0 \neq 0$*. Nous pouvons écrire*

$$P(z) = b_0(1 + b_k(z - z_0)^k + (z - z_0)^k Q(z - z_0))$$

*avec* $1 \leq k \leq n, b_k \neq 0, Q$ *étant un polynôme en* $(z - z_0)$ *identiquement nul si* $k = n$ *dont le terme de plus bas degré en* $z - z_0$ *est si* $k < n$ *de degré supérieur ou égale à 1 .*
*La continuité de* $Q$ *montre qu'il existe* $\rho > 0$ *tels que pour* $|z - z_0| < \rho, |Q(z - z_0| < \frac{|b_k|}{2}$ *posons alors* $b_k = |b_k|e^{i\theta}$ *et donnons à* $z - z_0$ *la valeur* $z - z_0 = re^{-i\frac{(\theta+\pi)}{k}}$*, avec* $0 \leq r \leq \rho$ *et choisissons de plus* $r$ *assez petit pour que* $|b_k|r^k < 1$

*Nous avons alors :*

$$|1 + b_k(z - z_0)^k + (z - z_0)^k Q(z - z_0) \leq 1 - \frac{b_k}{2} r^k < 1$$

*et par suite* $|P(z)| < |b_0|$*, ce qui est impossible puis que* $|b_0|$ *est le minimum de* $|P(z)|$

## 2.5 Fonction Continue et Semi-Continue sur un Espace de Baire

**Définition 2.6.** *Soit* $f$ *un application d'un espace topologique* $E$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *ou dans* $\mathbb{R}$*. On dit que* $f$ *est semi-continue inférieurement ou point* $a$ *de* $E$ *si pour tout* $b < f(a)$ *il existe un voisinage* $U$ *de* $a$ *tels que, pour tout* $x \in U$ *on ait* $f(x) \geq b$ *on dit que* $f$ *est semi-continue supérieurement ou point* $a$ *de* $E$ *si pour tout* $c > f(a)$ *il existe un voisinage* $V$ *de* $a$ *tels que, pour tout* $x \in V$ *on ait* $f(x) \leq c$*.*

*On dit que* $f$ *est semi-continue inférieurement(resp, semi-continue supérieure-*

*ment ) si elle l'est en tout point de E*

**Remarques 2.2.** *a)* ***continuité et semi-continuité*** *: on voit aisément qu'une application $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est continue en point $a \in E$ si et seulement si elle est à la fois semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement au point $a$*

*b)* ***changement de signe*** *: l'application $f$ est semi-continue inférieurement au point $a$ si et seulement si $-f$ est semi-continue supérieurement en $a$*

**Proposition 2.6.** *une application $f$ d'un espace topologique $E$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ semi-continue inférieurement (resp ,supérieurement) si et seulement si pour tout $M \in \mathbb{R}, f^{-1}(]M, +\infty])$ est ouvert (resp, $f^{-1}(]-\infty, M])$ est ouvert ) .*

**Preuve 2.8.** *supposons $f$ semi-continue inférieurement et soit $M \in \mathbb{R}$ la fonction $f$ est semi-continue inférieurement en tout point $a$ de $f^{-1}(]M, \infty])$, la définition (2.6) montre alors que $f^{-1}(]M, \infty])$ contient un voisinage de $a$, donc est lui-même un voisinage de $a$ ,la partie $f^{-1}(]M, \infty])$ de $E$ étant voisinage de chacun de ses point est ouvert .*

*supposons que pour tout $M \in \mathbb{R}, f^{-1}(]M, \infty])$ soit ouvert .*

*soit $a \in E$ si $f(a) = -\infty$ , il n'existe aucun $b$ strictement inférieur à $f(a)$, et la définition (2.2) montre que $f$ est semi-continue inférieurement en $a$ supposons donc $f(a) > -\infty$, et soit $b \in \mathbb{R}$ vérifiant $b < f(a)$ , d'après l'hypothèse fait $f^{-1}(]b, \infty])$ est ouvert, c'est donc voisinage de $a$ tels que , pour tout point $x$ de ce voisinage . on ait $f(x) \geq b$ on a ainsi prouvé que $f$ est semi-continue inférieurement en $a$*

*le cas d'une fonction semi-continue supérieurement se traite de manière analogue .*

**Remarques 2.3.** *pour tout $M \in \mathbb{R}, f^{-1}([-\infty, M])$ est le complémentaire de $f^{-1}(]M, \infty])$ on peut donc dire que $f$ est semi-continue inférieurement si et seulement si pour tout*

$M \in \mathbb{R}, f^{-1}([-\infty, M])$ *est fermé, de même on peut dire que f est semi-continue supérieurement si seulement si pour tout* $M \in \mathbb{R}, f^{-1}(]M, \infty])$ *est fermé .*

*On peut aussi,dans l'énoncé de la proposition (2.6) et dans la présente remarque , remplacement* $\mathbb{R}$ *par* $\overline{\mathbb{R}}$

**Théorème 2.4.** *soit* $E$ *un espace de Baire et* $f$ *une application semi-continue inférieurement de* $E$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *. On suppose que l'ensemble* $\{x \in E, f(x) < +\infty\}$ *est non maigre . Alors il existe un ouvert non vide* $U$ *de* $E$ *est un réel fini* $M$ *tels que pour tout* $x \in U, f(x) \leq M$

**Preuve 2.9.** *pour tout* $n \in \mathbb{N}, F_n = f^{-1}([-\infty, n])$ *est fermé (remarque 2.3). la réunion de* $E_n$ *qui n'est autre que l'ensemble des points de* $E$ *où* $f$ *prend une valeur autre que* $+\infty$ *est par hypothèse non maigre. l'un des* $E_n$ *est donc d'intérieur non vide*

**Corollaire 2.2.** *les hypothèse étant celles du précédant théorème , on suppose de plus que l'ensemble* $\{x \in E : f(x) < +\infty\}$ *a une intersection non maigre avec tout ouvert non vide de* $E$*.c'est notamment le cas lorsque* $f$ *est à valeur finies .*
*Alors tout ouvert non vide* $V$ *de* $E$ *contient un ouvert non vide* $U$ *tels que il existe un réel fini* $M$ *vérifiant pour tout* $x \in U, f(x) \leq M$

**Preuve 2.10.** *Il suffit de remarque que tout ouvert de* $E$ *est de Baire et d'applique le théorème (2.4)*

**Remarques 2.4.** – *a) cas des fonction semi-continue supérieurement :*
*En remplacement* $f$ *par* $-f$ *on obtient aisément un énoncé analogue pour les fonctions semi-continue supérieurement.*

*b) cas des fonctions continues :*
*le théorème (2.4) , ainsi que l'énoncé analogue relatif aux fonctions semi-continue supérieurement , s'applique bien entendu tous les deux lorsque la fonction considère* $f$ *est continue*

**Corollaire 2.3.** *Soit $E$ un espace de Baire , et $(f_i, i \in I)$ une famille (pas nécessairement fini , ni même dénombrable) d'application semi-continue inférieurement de $E$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ . On a alors l'alternative :*

- Ou bien il existe une partie $G$ de $E$ , intersection dénombrable d'ouvert partout dense , donc elle-même partout dense, telle que, pour tout $x \in G$ on ait $\sup_{i\in I} f_i(x) = +\infty$

- Ou bien il existe ouvert non vide $U$ de $E$ et un réel fini $M$ tels que pour tout $x \in U, \sup_{i\in I} f_i(x) \leq M$

**Preuve 2.11.** *l'application $\sup_{i\in I} f_i$ est semi-continue supérieurement.le premier terme de l'alternative correspond ou cas où $x \in E, \sup_{i\in I} f_i(x) < +\infty$ est maigre le second terne au cas où les hypothèse du théorème (2.4) sont satisfaites il suffit donc d'appliquer ce théorème*

## 2.6 Espace Connexes

### 2.6.1 Définitions

1. Soit $E$ un espace topologique , $E$ est un connexe si pour toute partition de $E$ par deux ouverts $O_1$ ou $O_2$ (ie $E = O_1 \bigcup O_2$ et $O_1 \bigcap O_2 = \emptyset$) $O_1$ et $O_2$ est égal a l'ensemble vide

2. Soit $E$ un espace topologique , $E$ est connexe si les seules parties de $E$ ouverts et fermées $a$ la fois sont $E$ ou $\emptyset$

**Proposition 2.7.** *Les définitions 1 et 2 sont équivalentes*

**Preuve 2.12.** *$1 \Rightarrow 2$*
*Soit $A \subset E, A$ ouvert et fermé alors $E - A$ est ouvert et fermé et $E = A \bigcup (E - A)$, ou $E - A$ et $A$ constituent une partition de $E$ par deux ouverts $\Rightarrow E - A$ ou $A$ est*

*vide.*

*2 ⇒ 1*

*Soit $O_1$ et $O_2$ deux ouverts de $E$ , en constituant une partition alors $O_1$ est ouvert et fermé a la fois (car $O_2$ est le complémentaire de $O_1$) $\Rightarrow O_1 = E$ ou $O_1 = \varnothing$ et $O_2 = E \Rightarrow O_1$ ou $O_2$ est égal a l'ensemble vide*

*Contre Exemple :*

*l'espace topologique discret $E$ n'est pas connexe car toute partie de $E$ est a la fois fermée et ouverte*

## 2.7 Quelques propriétés des connexes

### 2.7.1 Parties connexes d'un espace topoloqique

a) **Adhérence d'une partie connexe :** si $A$ est une partie connexe de l'espace topologique $E$ , toute partie $B$ de $E$ telle que $A \subset B \subset \bar{A}$ (et en particulier, $\bar{A}$ ) est connexe . Soient en effet $V_1$ et $V_2$ deux ouverts disjoints de $B$ de réunion de $B$ . Ils sont de la forme $V_1 = U_1 \bigcap B, V_2 = U_2 \bigcap B$, avec $U_1$ et $U_2$ ouverts de $E$. Mais $W_1 = U_1 \bigcap A$ et $W_2 = U_2 \bigcap A$ sont deux ouverts disjoints de $A$ de réunion $A$ ; comme $A$ est connexe , l'un d'eux est vide ; supposons par exemple que ce soit $U_1 \bigcap A$. Mais alors $U_1 \bigcap B$ est vide, car $A \subset U_1^c$ , qui est fermé , donc $\bar{A} \subset U_1^c$ , donc a fortiori $B \subset U_1^c$. Par suite $B$ est connexe .

b) **passage de la douane :** Soient $A$ et $B$ deux parties de l'espace topologique $E$ . On suppose que $A$ est connexe et rencontre à la fois l'intérieur et l'extèrieur de $B$ , c'est-à-dire que $A \bigcap \mathring{B}$ et $A \bigcap \mathring{B}^c$ sont tous deux non vides. Alors $A$ rencontre la frontière de $B$. cette propriété est conue sous le nom de théorème du passage de la douane. Si en effet $A \bigcap Front(B)$ était vide, $A \bigcap \mathring{B}$ et $A \bigcap \mathring{B}^c$ seraient deux ouverts non vides et disjoints de $A$ de réunion $A$, ce qui contredirait l'hypothèse selon laquelle $A$ est connexe .

**Proposition 2.8.** *Soit $E$ un espace topologique et $(A_i)i \in I$ une famille de connexes de $E$ telle que $\cap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ alors : $A = \cup_{i\in I} A_i$ est connexe .*

**Preuve 2.13.** *Soit $(O_1, O_2)$ une partition de $A$ par deux ouverts, alors $\forall i \in I(O_1 \cap A_i, O_2 \cap A_i)$ est une partition de $A_i$ par deux ouverts du sous espace $A_i$.*
*Comme $A_i$ est connexe il vient $O_1 \cap A_i$ ou $O_2 \cap A_i$ est vide. Supposons $O_1 \cap A_i = \emptyset$ alors $A_i \subset O_2$ $\forall i \in I$ car $\cap A_i \neq \emptyset \Rightarrow \cup A_i \subset O_2$*
*$\Rightarrow O_1 \cup O_2 \subset O_2$ et comme $O_1 \cap O_2 = \emptyset \Rightarrow O_1 = \emptyset$*
*$\Rightarrow A$ est connexe .*

### 2.7.2 Composantes Connexes d'un espace topologique

**Définition 2.7.** *soient $E$ un espace topologique , $x \in E$. On appelle composante connexe de $x$ notée $C(x)$ la réunion de toutes les parties connexes de $E$ contenant $x$. Il en résulte d'après la proposition (2.8) que $C(x)$ est connexes .*

**Définition 2.8.** *soit $A \subset E$ espace topologique. On appelle composantes connexes de $A$ , les composantes connexes du sous espace $A$*

**Proposition 2.9.** *Les composantes connexes de l'espace topologique $E$ sont des ensembles fermés*

**Preuve 2.14.** *soit $C(x)$ la composante connexe de $x \in E$ , comme $\overline{C(x)}$ est connexe alors $C(x) \subseteq \overline{C(x)}$ par définition de $C(x)$, il vient donc $\overline{C(x)} = C(x)$ .*

**Théorème 2.5.** *soit $f : E \longmapsto F$ une application continue d'un espace topologique connexe $E$ dans un espace topologique $F$. L'image $f(E)$ est connexe .*

**Preuve 2.15.** *soient $V_1$ et $V_2$ deux ouverts disjoints de $f(E)$ de réunion $f(E)$ ; ils sont de la forme $V_1 = U_1 \bigcap f(E), V_2 = U_2 \bigcap f(E)$ , où $U_1$ et $U_2$ sont deux ouverts de $F$. Puisque $f$ est continue , $W_1 = f^{-1}(U_1) = f^{-1}(V_1)$ et $W_2 = f^{-1}(U_2) = f^{-1}(V_2)$ sont des ouverts de $E$ , disjoints et de réunion $E$. Comme $E$ est connexe, l'un de ces ouverts, par exemple $W_1$ et vide ,et l'autre égal à $E$ . On en déduit que $V_1$ est vide et $V_2$ égal à $f(E)$ , donc que $f(E)$ est connexe .*

**Remarques 2.5.** *par contre , l'image réciproque $f^{-1}(B)$ d'une partie connexe $B$ d'un espace topologique $F$ , par une application continue $f : E \longmapsto F$ , n'est pas en général connexe .*

### 2.7.3 Théorème des valeurs intermédiaires

soit $f$ une application numérique continue sur un espace topologique connexe alors :

1. $f(E)$ est un intervalle
2. si $f$ prend deux valeurs $\lambda_1$ et $\lambda_2$ distinctes $(\lambda_2 > \lambda_1)$ alors $f$ passe par toutes les valeurs comprises entre $\lambda_1$ et $\lambda_2$

**Preuve 2.16.**
1. *$f(E)$ est un connexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle*
2. *soient $x_1$ et $x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = \lambda_1$ et $f(x_2) = \lambda_2$ alors $[\lambda_1, \lambda_2] \subset f(E)$ et si $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \Rightarrow \lambda \in f(E) \Rightarrow \exists c \in E \backslash f(c) = \lambda$ ce qui signifie que $f$ passe par toute valeur $\lambda$ compose entre $\lambda_1$ et $\lambda_2$*

## 2.8 La connexité par arcs

**Définition 2.9.** *On dit qu'un espace topologique $E$ est connexe par arcs si $\forall x, y \in E$ il existe une application continue $f$ d'un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $E$ telle que : $f(a) = x$ et $f(b) = y$*

**Proposition 2.10.** *un espace topologique $E$ connexe par arc est connexe*

**Preuve 2.17.** *si $E$ n'est pas connexe, il existerait une partition de $E$ par deux ouverts $O_1$ et $O_2$ non vides , soient $x \in O_1$ et $y \in O_2$ alors pour toute application $f$ continue de $[a, b]$ dans $E$ telle que $f(a) = x$ et $f(b) = y$ .*

$$f^{-1}(O_1 \bigcup O_2) = f^{-1}(E) = [a, b]$$

*or*

$$f^{-1}(E) = f^{-1}(O_1) \bigcup f^{-1}(O_2) = [a, b] \Rightarrow [a, b]$$

*non connexe car*

$$f^{-1}(O_1) \bigcap f^{-1}(O_2) = f^{-1}(O_1 \bigcap O_2) = \emptyset$$

*et* $f^{-1}(O_2)$ *sont deux ouverts non vides puisque* $x \in f^{-1}(O_1)$ *et* $y \in f^{-1}(O_2)$.
*La réciproque est fausse .*
*Par exemple :*

*soient* $A, B$ *deux parties connexes d'un espace topologique* $E$ *telles que* $\bar{A} \bigcap B = \emptyset$ *, montrer que* $A \bigcup B$ *est connexe appliquer ce résultat à* $E = \mathbb{R}$ *et à :*

$$A = \{(x, \frac{1}{x})/0 < x < 1\}$$

*et*

$$B = \{(x, y)/ -1 < y < 1\}$$

*montrer que* $A \bigcup B$ *est connexe mais non connexe par arc*

## 2.9 Espace localement connexe

**Définition 2.10.** *On dit qu'un espace topologique* $E$ *est localement connexe si tout point* $x \in E$ *possède un système fondamental de voisinages connexes*

**Exemple 2.9.1.**

*si l'on admet (cela sera prouvé ultérieurement ) que tout intervalle de* $\mathbb{R}$ *est connexe alors* $\mathbb{R}$ *est localement connexe car si* $x \in \mathbb{R}$ *et si* $v \in V(x)$ *alors* $\exists \alpha > 0$ *tel que* $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset V$

**Théorème 2.6.** *Soit* $E$ *un espace topologique alors :*
$E$ *localement connexe* $\Leftrightarrow$ *les composantes connexes des ouverts de* $E$ *sont des ouverts de* $E$

**Preuve 2.18.** *Soient $E$ localement connexe et $O$ un ouvert de $E$ .*
*Soit $C$ une composante de $O$ et soit $x \in C$ alors il existe un voisinage $V$ connexe inclus dans $O$ ($O$ est un voisinage de $X$) et il est clair que $V \subset C \Rightarrow C$ est voisinage de chacun de ses points $\Rightarrow C$ est ouverte .*
*Réciproquement si les composantes connexes des ouverts de $E$ sont des ouverts de $E$ , soient $x \in E$ et $V$ un voisinage de $x$ alors la composante connexe $U$ de $x$ pour le sous espace $\mathring{V}$ est un ouvert de $E$ et telle que $U \subset \mathring{V} \subset V \Rightarrow E$ est localement connexe*

**Notation 2.1.** *Dans la connexité est la base de la théorème de l'homotopie partie importante de la topologie algébrique.*

**Proposition 2.11.** *Soit $f$ une application continue d'un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i) L'application $f$ est ouverte*
*(ii) L'application $f$ est injective*
*(iii) L'application $f$ est strictement monotone*

**Preuve 2.19.**

*Supposons $f$ ouverte , soient $a$ et $b$ deux points distincts de $I$, supposons par exemple $a < b$ l'image de l'intervalle compact $[\alpha, \beta]$ par la fonction continue $f$ est un intervalle compact $[a, b]$, car $f$ est ouverte, l'image de l'intervalle ouverte $]a, b[$ est un intervalle ouvert dont le complémentaire relativement à $[\alpha, \beta]$ contient au plus deux points $f(a)$ et $f(b)$. Ce ne peut être que $]\alpha, \beta[$.*

*On a donc $f(\{a, b\}) = \{\alpha, \beta\}$, c'est-a-dire $f(a) \neq f(b)$ .*

*Supposons $f$ injective . Si $f$ n'était pas monotone, il existerait trois points $a, b$ et $c$ de $I$ vérifiant $a < b < c$, tels que l'on ait :*

*soit* $f(a) \leq f(b)$ *et* $f(b) \geq f(c)$, *soit* $f(a) \geq f(b)$ *et* $f(b) \leq f(c)$ .

*Le théorème des valeurs intermédiaires montrerait alors que les ensembles* $f(]a,b[)$ *et* $f(]b,c[)$ *ne sont pas disjoints, c'est-a-dire que* $f$ *n'est pas injective .*

*Supposons* $f$ *strictement monotone, par exemple croissante. Soit* $a$ *un point de* $I$ *. Comme* $I$ *est ouvert, pour* $\varepsilon > 0$ *suffisamment petit, l'intervalle* $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ *est contenu dans* $I$*. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires et la monoton2e de* $f$*, On voit que*

$$f(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[) = ]f(a-\varepsilon), f(a+\varepsilon)[$$

*On en déduit immédiatement que* $f$ *est ouverte .*

# Chapitre 3

# Théorème du Point Fixe et Applications aux Équations Différentielles

**Notations**

- $B(x_0, r)$ est la boule ouverte de centre $x_0$ et de rayon $r$
- $B_f(x_0, r)$ est la boule fermée centrée en $x_0$ et de rayon $r$
- $\mathring{K}$ est l'intérieur de $K$
- $\bar{A}$ est l'adhérence de $A$
- $S(x_0, r)$ est la sphère de centre $x_0$ et de rayon $r$
- $C^0(E, F)$ est l'ensemble des fonctions continues de $E$ dans $F$
- $C_b^0(E, F)$ est l'ensemble des fonctions continues et bornées de $E$ dans $F$

Dans ce chapitre , on étudie les théorèmes du point fixe de Picard et de Schauder,et quelques unes de leurs applications (aux équations différentielles et au problème d'inversion locale ).Étant donnés un ensemble E et une application $f : E \to E$,ces théorèmes donnent certaines conditions sous lesquelles f admet un point fixe dans E. Ces théorèmes sont importants dans les mathématiques car il y a plusieurs applications, par exemple pour trouver les racines d'un polynôme, ou pour montrer l'existence des solutions numériques des équations différentielles.

Le théorème du Point Fixe de Picard dit qu'une contraction d'un espace métrique complet a un point fixe unique. Ce théorème donne un comportement régulier du point fixe par rapport aux paramétrés. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs. D'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Le théorème du Point Fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est pas donc nécessaire d'établir des estimés sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le Théorème de Picard (par exemple, l'identité). Par contre, ce théorème ne donne aucun des avantages du théorème précédent.

On applique dans ce rapport ces théorèmes au Problème de Cauchy : étant données une condition initiale $(x_0, t_0)$ et une équation différentielle $\frac{d}{dt}x = f(x,t)$, existe il une solution, et est elle unique ? Les réponses à ces questions sont données par le théorème de Cauchy Lipschitz (si $f$ est localement Lipschitzienne) et de Cauchy Arzela(si $f$ est seulement continue). On retrouve que ces comportements différents résultent des différences entre les théorèmes du point fixe de Picard et de Schauder.

une autre application du Théorème de Picard dans ce rapport est la démonstration du Théorème d'Inversion Locale. En effet, on montre qu'une certaine fonction est une bijection en utilisant le Théorème de Picard pour montrer l'existence (surjectivité) et l'unicité (injectivité) d'un point fixe.Dans ce cas, il était possible de construire une contraction ; par contre, on ne pourrait pas appliquer le Théorème de Schauder car on a besoin de l'unicité.

# 3.1 Le premier théorème du point fixe

## 3.1.1 Un Théorème du Point Fixe Métrique

Ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

**Théorème 3.1.** *(Picard)*
*Soient $(E, d)$ un espace métrique complet et $\varphi : E \to E$ une application contractante ,ie. Lipschitzienne de rapport $k < 1$.*
*Alors, $\varphi$ admet un unique point fixe $a \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_{p+1} := (\varphi_{x_p})$ converge vers $a$ .* [5]

**Preuve 3.1.** *On montre d'abord l'unicité d'un point fixe, puis son existence.*

1. *Unicité : Supposons qu'il existe $a, b \in E, a \neq b$, tels qu'on ait $\varphi(a) = a$ et $\varphi(b) = b$.*
   *Alors on a $d(\varphi(a), \varphi(b)) = d(a, b)$ et donc $\frac{d(\varphi(a),\varphi(b))}{d(a,b)} = 1 > k$ ce qui contredit le fait que $f$ soit k-Lipschitzienne.*
2. *Existence : Soit $x_0$ un point initial quelconque et $(x_p)$ la suite itérée associée. On a $d(x_p, x_{p+1}) = d(\varphi(x_{p-1}), \varphi(x_p)) \leq kd(x_{p-1}, x_p)$. On a montrer par récurrence sur $p$ que $d(x_p, x_{p+1}) \leq k^p d(x_0, x_1)(P)$ :*
   - *Initialisation : Évident pour $p = 0$.*
   - *Généralisation : Supposons que pour un certain entier $p$ quelconque mais fixé*

*on ait la propriété (P). Alors :*

$$\begin{aligned} d(x_{p+1}, x_{p+2}) &= d(\varphi(x_p), \varphi(x_{p+1})) \\ &\leq kd(x_p, x_{p+1}) \\ &\leq k \cdot k^p d(x_0, x_1) \\ &\leq k^{p+1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

*Ce qui achève la récurrence.*

*On a* $\forall q > p$ :

$$d(x_p, x_q) \leq \Sigma_{l=p}^{q-1} d(x_l, x_{l-1}) \leq (\Sigma_{l=P}^{q-1} k^l) d(x_0, x_1)$$

*De plus, pour tout* $p > q, \sum_{l=p}^{q-1} k_l = \dfrac{k^p}{l-k}$, *d'où* $d(x_p, x_q) \leq \dfrac{k^p}{l-k} d(x_0, x_1)$. *On en déduit que* $(x_p)$ *et une suite de Cauchy. Comme* $(E, d)$ *est complet, la suite* $(x_p)$ *converge vers un point limite* $a \in E$. *De plus on a* $\varphi(x_p) \to \varphi(a)$ *quand* $p \to +\infty$ *car* $\varphi$ *est continue et* $\varphi(x_p) = x_{p+1}$. *Or* $x_{p+1} \to a$ *quand* $p \to +\infty$, *d'où par unicité de la limite on a* $\varphi(a) = a$.

**Contre Exemples :**

Les exemples suivant montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire.

1. $X$ n'est pas stable par $f$ : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0, 1]$.
   Or $X$ est fermé dans $\mathbb{R}$, et complet car $\mathbb{R}$ est complet. De plus,
   $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \Rightarrow \sup_{x \in X} |f'(x)| < 1 \Rightarrow f$ est contractante .Mais f n'a pas de point fixe car $f([0, 1]) = [1, \sqrt{2}]$, i,e. $X$ n'est pas stable par $f$ .
2. f n'est pas contractante : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $X = [0, \infty[$.
   Or $f : X \to X$, et $X$ est un fermé de $\mathbb{R}$.$\mathbb{R}$ est complet donc $X$ est complet. Mais $\sup_{x \in X} |f'(x)| = 1$ donc $f$ n'est pas contractante.
3. $X$ n'est pas complet : $f(x) = \frac{\sin(x)}{2}$ sur $X = ]0, \frac{\pi}{4}]$.
   Or $f(]0, \frac{\pi}{4}]) = ]0, \frac{\sqrt{2}}{4}] \subset ]0, \frac{\pi}{4}]$, et $\sup_{x \in X} |f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$; donc, $f$ est contrac-

tante. Mais $X$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc pas complet.

### 3.1.2 Le Théorème de Cauchy-Lipschitz

Ce théorème est une application du théorème 3.1.1. En effet, nous verrons qu'une façon de le démontrer est d'appliquer le théorème précédent avec $E$ un ensemble de fonctions et $\varphi$ une application bien choisie.
Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application continue . On introduit le problème de Cauchy (C) suivant :
Étant donné $(t_0, y_0) \in U$, trouver une solution $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ de l'équation différentielle (E) $y' = f(t, y), (t, y) \in U$ telle que $t_0 \in I$ et $y(t_0) = y_0$.

**Définition 3.1.** *Soient $T > 0$ et $r_0 > 0$. On dit que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$ est un* ***cylindre de sécurité*** *pour (C) si toute solution $y : I \to \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $B_f(y_0, r_0)$.*

**Définition 3.2.** *$f$ est* ***localement Lipschitzienne*** *par rapport à la variable $y$ sur $U$ si $\forall(r_0, y_0) \in U$, il existe un voisinage $V$ de $(r_0, y_0)$ dans $U$ et une constante $k = k(V)$ telle que $\forall(t, y_1),(t, y_2) \in V$, on ait $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leqslant k\|y_1 - y_2\|$.*

**Théorème 3.2.** *(Cauchy-Lipschitz)*
*Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est continue et* ***localement Lipschitzienne*** *par rapport à $y$ sur $U$, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$, le problème de Cauchy admet une unique solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to U$.*
*De plus,si on pose $\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que la suite itérée $\Phi^p(z)$ converge uniformément vers la solution exacte.*[5]

**Preuve 3.2.**

*On commence par construire un cylindre de sécurité pour $(C)$.*
*Soit $V$ un voisinage de $(t_0, y_0)$ sur lequel $f$ est k-Lipschitzienne par rapport à $y$, et soient $T_0 > 0$ et $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times B(y_0, r_0) \subset V$ un cylindre. $C_0$ est un fermé*

*borné de $\mathbb{R}^{m+1}$ donc compact, et on en déduit alors que $f$ est bornée sur $C_0$.*

*Soit $M = \sup_{t,y} \in C_0\|f(t, y(t))\|$. on pose $T = \min(T_0, \frac{r_0}{M})$. On va montre que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times B_f(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité pour $(C)$.*

*Soit $y : I \subset [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \to \mathbb{R}^m$ avec $y(t_0) = y_0$ et $y' = f(t, y)\forall t \in I$. Supposons qu'il existe $\tau \in [t_0, t_0 + T[$ tel que $y(\tau)$ n'appartient pas à $B_f(y_0, r_0)$. De plus, supposons que $J = \{t \in [t_0, t_0 + T[: y(t) \notin B_f(y_0, r_0)$ soit non vide. On pose $\tau = \inf J$. Alors $\forall t \in [t_0, \tau[$ on a $y(t) \in B_f(y_0, r_0)$, et de plus $d(y_0, y(\tau)) = r_0$. Comme $(t, y(t)) \in C_0, \forall t \in [t_0, \tau]$ et $= f(t, y)$ on a par le Théorème des Accroisements Finis,*

$$r_0 = \|y_0 - y(\tau)\| = \|y(t_0) - y(\tau)\| \leq |t_0 - \tau| \sup_{t \in [t_0, \tau]} |y'(t)| < M.T \leq r_0.$$

*Donc par passage à la limite ($B_f(y_0, r_0)$ étant fermé) on a $y(t) \in B_f(y_0, r_0)\forall t \in [t_0, t_0 + T] \cap I$. De même on montre que $y(t) \in B_f(y_0, r_0)\forall t[t_0 - T, t_0] \cap I$ et donc $y(t) \in B_f(y_0, r_0)\forall t \in I$.*
*Dans la suite on travaille avec ce cylindre de sécurité. on remarque que par construction on a $\sup_C |f| = M$ et $f$ est k-Lipschitzienne par rapport à $y$ sur $C$. On note $F = C^0([t_0 - T, t_0 + T], B(y_0, r_0))$ muni de la distance $d = \|.\|_\infty$.*
*$\forall y \in F$ on associe $\Phi(y)$ définie par :*

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du$$

*on montre d'abord l'équivalence suivante : $y$ est solution de $(E) \Leftrightarrow y$ est un point fixe de $\Phi$ :*
*$(\Leftarrow)$ supposons que $y$ est un point fixe de $\phi$ . Alors $\forall y \in F$ on a $\Phi(y) = y$ d'où $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du$. or $f$ est continue sur $U$ donc $y$ est continue sur $U$. De plus, $y$ est dérivable sur $[T_0-t, T_0+t]$ et sa dérivée égale $f(t, y(t))$, i,e.$(t) = f(t, y(t))$. On a aussi $y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(u, y(u))du = y_0$. Donc $f$ est solution du problème de Cauchy $(C)$.*

($\Rightarrow$) *Supposons maintenant que* $y$ *est solution de (* $E$*). On a alors* $y'(t) = f(t, y(t))$ *et* $y(t_0) = y_0$.

*On peut intégrer* $y^{'}$ *par rapport à* $u$ *car* $y(u)^{'} = f(u, y(u))$ *est continue sur un segment et donc intégrable sur ce même segment. Alors on obtient :*

$$\int_{t_0}^{t} y^{'}(u)du = \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du = [y(u)]_{u=t_0}^{u=t} = y(t) - y(t_0) = y(t) - y_0$$

*Donc, on a bien* $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du = \Phi(y)(t)$ *et donc* $y$ *est point fixe de* $\Phi$.
*On veut appliquer le théorème du point fixe à* $\Phi^p$ *( pour* $p$ *bien choisi).*

1. *On montre d'abord que* $\Phi$ *est une application de* $F$ *dans* $F$*. Pour cela on montre que* $\Phi(y)(t) \in B_f(y_0, r_0) \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$*. Soit* $y \in F$*. On remarque que si* $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$,

$$\begin{aligned} \|\Phi(y)(t) - y_0\| &= \|\int_{t_0}^{t} f(u, y(u))du\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(u, y(u))\|du \\ &\leq M \int_{t_0}^{t} du \\ &\leq M|t - t_0| \\ &\leq M \cdot T \leq r_0 \end{aligned}$$

   *Donc* $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], \Phi(y)(t) \in B_f(y_0, r_0)$ *d'où* $\Phi(y) \in F$ *et on a évidemment la stabilité de* $F$ *par* $\Phi^p$.

2. *On montre maintenant que* $\Phi^p$ *est contractante. Soient* $y, z \in F$*. On note* $y_p = \Phi^p(y)$ *et* $z_p = \Phi^p(z), \forall p \in \mathbb{N}^\star$*. Par récurrence sur* $p$ *on montre qu'on a :*

$$\|y_p(t) - z_p(t)\| \leq k^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} d(y, z) \qquad (HR)$$

- *Initialisation : C'est évident dans le cas* $p = 0$.
- *Généralisation : Supposons que pour un certain entier* $p$ *quelconque mais fixé on ait (HR).*
  *Alors*

$$\begin{aligned}
\|y_{p+1}(t) - z_{p+1}(t)\| &\leq |\int_{t_0}^{t} k\|y_p(u) - z_p(u)\|du| \\
&\leq |\int_{t_0}^{t} k.k^p \frac{|u - t_0|^p}{p!} d(y, z)du| \qquad (par(HR)) \\
&\leq \frac{k^{p+1}}{p!} d(y, z)|\int_{t_0}^{t} |u - t_0|^p du| \\
&= \frac{k^{p+1}}{p!} d(y, z)[\frac{|u - t_0^{p+1}|}{p+1}]_{u=t_0}^{u=t}| = k^{p+1} \frac{|t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} d(y, z)
\end{aligned}$$

*Ce qui achève la récurrence.*
*Comme* $|t - t_0| \leq T$, *on a* $d(y_p, z_p(t)) \leq k^p \frac{T^p}{p!} d(y, z)$, *donc* $\Phi$ *est lipschitzienne de rapport* $k^p \frac{T^p}{p!}$. *Et il existe un* $p \in \mathbb{N}^\star$ *tel que* $k^p \frac{T^p}{p!} < 1$ *( car* $\lim_{p \to +\infty} k^p \frac{T^p}{p!} = 0$).
*Donc , pour* $q \geq p, \Phi^q$ *est contractante.*
*Le théorème 3.12 nous donne la complétude de F.*
*On déduit du théorème 3.1.1 que* $\Phi^q$ *admet un unique point fixe* $y$. *De plus* $\Phi^q(\Phi(y)) = \Phi(\Phi^q(y)) = \Phi(y)$ *donc* $\Phi(y)$ *est un point fixe de* $\Phi^q$, *et par unicité du point fixe de* $\Phi^q$ *on a* $\Phi(y) = y$. *Comme les points fixes de* $\Phi$ *sont des points fixes de* $\Phi^q$ *on en déduit que* $y$ *est l'unique point fixe de* $\Phi$. *Finalement,* $y$ *est l'unique solution de* $(E)$.

### 3.1.3 Exemple

$y^{'} = 3|y|^{2/3}$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

On veut déterminer l'ensemble des solutions maximales. On a $f(t,y) = 3|y|^{2/3}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et différentiable sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}\backslash\{0\})$. De plus on a $\frac{\partial f}{\partial y} =$ signe$(y) \times 2|y|^{-1/3}$.Pour $y \neq O$. La dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}$ est donc continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\star}$. La fonction $f$ est localement Lipschitzienne en $y$ sur $\{y > 0\}$ et $\{y < 0\}$, mais elle ne l'est pas au voisinage des points $(t_0, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Soit $(y, ]A, B[)$ une solution dans $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors $y^{'} \geq 0$, donc y est croissante. On note

$$a := \inf\{t \in ]A, B[ : y(t) = 0\}, \qquad b = \sup\{t \in ]A, B[ : y(t) = 0\}.$$

Si $a \neq A$, on a $y(a) = 0$ et $y(t) < 0$ pour $t < a$. Donc, sur l'intervalle $]A, a[$, l'équation différentielle est équivalente à $\frac{1}{3}y'(+y)^{-2/3} = 1$, d'où $y^{1/3}(t) - y^{1/3}(a) = t - a$, et alors $y(t) = (t-a)^3$. De même $y(t) = (t-b)^3$ pour $t > b$ si $b \neq B$.

On en déduit que si $y_0 < 0$ alors pour tout $b \in [t_0 - y_0^{1/3}, +\inf ty[$, la fonction

$$y_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \begin{cases} (t - t_0 + y_0^{1/3})^3 & si \quad t \leq t_0 - y_0^{1/3} \\ 0 & si \quad t_0 - y_0^{1/3} \leq t \leq b \\ (t-b)^3 & si \quad t \geq b \end{cases}$$

est une solution (nécessairement maximale) de l'équation $y' = 3|y|^{2/3}$ et on obtient ainsi toutes les solutions maximales du problème de Cauchy associées à $(t_0, y_0)$(pour $y_0 < 0$).

De même, si $y_0 > 0$ alors les solutions maximales du problème de Cauchy associées à $(t_0, y_0)$ sont les fonctions de la forme :

$$y_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \begin{cases} (t-a)^3 & si \quad t \leq a \\ 0 & si \quad a \leq t \leq t_0 - y_0^{1/3} \\ (t - t_0 + y_0^{1/3})^3 & si \quad t \geq t_0 - y_0^{1/3} \end{cases}$$

pour tout $a \in ]-\infty, t_0 - y_0^{1/3}]$.
si $y_0 = 0$ alors les solutions maximales associées à $(t_0, 0)$ sont de la forme :

$$y_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \begin{cases} (t-a)^3 & si \quad t \leq a \\ 0 & si \quad a \leq t \leq b \\ (t-b)^3 & si \quad t \geq b \end{cases}$$

pour tout $a \in ]-\infty, t_0]$ et tout $b \in [t_0, +\infty[$.
On constate sur cet exemple que la condition Lipschitzienne sur $f$ est nécéssaire pour avoir l'unicité locale dans le théorème de Cauchy-Lipschitz. Dans cet exemple on a pas l'unicité globale des solutions du problème de Cauchy. Ceci est dû au fait qu'en $y \leq 0$, $f$ n'est plus Lipschitzienne mais seulement continue. On verra en section 3.3 que si $f$ est $C^0$, alors on peut toujours démontrer l'existence locale de solutions au problème de Cauchy.

### 3.1.4 Le Théorème d'Inversion Locale

Ici encore ce théorème est une application du théorème 3.1.1 qu'on appliquera à une certaine fonctions dans une partie de la démonstration.

**Définition 3.3.** *Soient $E, F$ deux espaces de Banach, $U \subset E$ ouvert, $a \in U, f : U \to F$ une application. On dit que $f$ est différentiable en $a$ s'il existe $\varphi \in \ell_c(E, F)$*

*(i.e. $\varphi$ est linéaire et continue) telle que*

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|) \quad lorsque \quad h \to 0$$

*Si $\varphi$ existe, elle est unique et est appelée la **différentielle** de $f$ en $a$ et est notée $df_a$. Si $f$ est différentiable en tout point de $U$ , on dit que $f$ est **différentiable sur** $U$ . Alors l'application $df : U \to \ell_c(E,F) : a \mapsto df_a$ est appelée **l'application différentielle de** $f$ .Si $df$ est continue, on dit que $f$ est de classe $C^1(U)$.*

**Théorème 3.3.** *(Inversion Locale)*
*Soient :*

- *$E, F$ deux espaces de Banach.*
- *$U \subset E$ ouvert.*
- *$f : U \to F$ une application de classe $C^1$.*
- *$a \in U$ tel que $df_a$ soit continu et inversible ( et donc $df_a^{-1}$ est continue)*
  *Alors, il existe un voisinage ouvert $V$ de $a$ et un voisinage ouvert $W$ de $f(a)$ tels que :*

  1. *la restriction $f_{|V}$ de $f$ à $V$ est une bijection de $V$ sur $W$*

  2. *l'application inverse $g : W \to V$ est continue*

  3. *$g$ est de classe $C^1$ et $\forall x \in W, dg_{f(x)} = df_x^{-1}$ [7]*

**Preuve 3.3.** *On munit $\ell_c(E,F)$ de la norme $|||u||| = \sup_{||x||=1} ||u(x)||$. Quitte à remplacer $f$ par la fonction $x \mapsto df_x^{-1}[f(a+x) - f(a)]$, on peut se ramener au cas où $a = 0, f(a) = 0,$ et $df_0 = df_a = Id_E$(et donc $E = F$).*

*Comme $f$ est de classe $C^1$, il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset U$ et $|||df_x - df_0||| = |||df_x - Id_E||| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in B(0,r)$. On désigne $u := Id_E - df_x$, donc $df_x = Id_E - u$ avec $|||u||| \leq \frac{1}{2}$. Alors, $df_x$ est un isomorphisme bicontinue qui, d'après* *la proposition 1 (en Annexes), vérifie* $df_x^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$, *et donc*

$$|||df_x^{-1}||| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |||u|||^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \mapsto +\infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^n} = 2$$

1. *On va montrer que la restriction de* $f$ *à un voisinage ouvert de* $0$ *dans* $B(0,r)$ *est une bijection sur* $B(0,\frac{r}{2})$. *Soit* $y \in B(0,\frac{r}{2})$. *On considère la fonction*

$$h : B_f(0,r) \to E$$

$$x \mapsto y + x - f(x)$$

*Il est claire que* $h$ *est de classe* $C^1$ *; de plus,* $\forall x \in B(0,r), |||dh_x||| = |||Id_E - df_x||| \leq \frac{1}{2}$. *Donc, d'après le Théorème des Accroissements Finis,*

$$\forall x, x^{'} \in B_f(0,r), ||h(x) - h(x^{'})|| \leqslant \frac{1}{2}||x - x^{'}|| \qquad (1)$$

*En particulier , pour* $x^{'} = 0$, *On a* $||x - f(x)|| = ||h(x) - h(0)|| \leqslant \frac{1}{2}\|x\|$, *donc*

$$\forall x \in B(0,r), ||h(x)|| \leqslant ||y|| + ||x - f(x)|| \leqslant ||y|| + \frac{1}{2}||x|| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

*Ainsi,* $h$ *est une fonction de* $B_f(0,r)$ *dans* $B(0,r) \subset B(0,1)$. *Comme de plus* $h$ *est* $\frac{1}{2}$ *Lipschitzienne d'après (1),d'après le théorème 3.1.1,* $\exists! x \in B_f(0,r)$ *tel que* $h(x) = x$, *c'est-à-dire tel que* $f(x) = y$. *Comme* $x = h(x)$ *et que* $h$ *est à valeurs dans* $B(0,r)$, *on en déduit que* $x \in B(0,r)$.
*Alors, pour tout* $y \in B(0,\frac{r}{2}), \exists! x \in B(0,r)$ *tel que* $f(x) = y$.*On définit* $V := f^{-1}(B(0,\frac{r}{2})) \cap B(0,r)$.$V$ *est un voisinage de* $0$ *car* $f(0) = 0$ *et* $f$ *est continue sur* $B(0,r)$. *En notant* $W := B(0,\frac{r}{2})$, *on a alors* $f_{|V} : V \to W$ *est une bijection.*

2. *On note* $g : W \to V$ *l'application inverse. On utilise de nouveau* $h$ *, cette fois-ci avec* $y = 0$, *et donc* $\forall x \in U, x = h(x) + f(x)$.*Alors,* $\forall x, x' \in B(0,r)$,

$$||x - x'|| \leq ||h(x) - h(x')|| + ||f(x) - f(x')|| \leq \frac{1}{2}||x - x'|| + ||f(x) - f(x')||$$

*donc,* $||x - x'|| \leqslant 2||f(x) - f(x')||$. *On en déduit que* $\forall y, y' \in W$,

$$||g(y) - g(y')|| \leqslant 2||f(g(y)) - f(g(y'))|| = 2||y - y'|| \qquad (2)$$

*$g$ est donc Lipschitzienne et par conséquent continue.*

3. *On fixe $x \in V$ et on pose $y = f(x) \in W$. Il existe $r' > 0$ tel que $B(y, r') \subset W$, et pour tout $w \in B(0, r')$, on pose $v = g(y + w) - g(y)$. Donc,d'après (2), $\|v\| \leq 2\|w\|$, et*

$$\begin{aligned} \Delta(w) &= g(y + w) - g(y) - df_x^{-1}(w) \\ &= v - df_x^{-1}[f(x + v) - f(x)] \\ &= -df_x^{-1}[f(x + v) - f(x) - df_x(v)]. \end{aligned}$$

*Comme $|||df_x^{-1}||| \leq 2$, on obtient $\|\Delta(w)\| \leq 2\|f(x + v) - f(x) - df_x(v)\| = 2\|v\|\varepsilon(v)$ avec $\lim_{v\to 0} \varepsilon(v) = 0$. Donc,$\|\Delta(w)\| \leq 4\|w\|\varepsilon(g(y + w) - g(y)) = 4\|w\|\varepsilon'(w)$.*
*Comme $g$ est continue, $\lim\limits_{w\to 0} \varepsilon'(w) = 0$. Alors, $\|\Delta(w)\| = o(\|w\|)$. Donc, $g$ est différentiable en $y$ et $dg_y = df_x^{-1}$. Enfin, comme $df_x^{-1}$ est continue ( car $f$ est de classe $C^1$ et que $L \in GL(E) \mapsto L^{-1} \in GL(E)$ est continue), la fonction $dg : y \mapsto dg_y$ est continue. Ainsi, $g$ est de classe $C^1$.*

## 3.2 Le Deuxième Théorème du Point Fixe

### 3.2.1 Un Théorème du Point Fixe Topologique

Les résultats de cette section sont issus du livre [8].
Ce théorème donne l'existence d'un point fixe ( mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur une boule fermé dans un espace de dimension finie.

**Théorème 3.4.** *Si* $f : [a, b] \to [a, b]$ *est continue, alors il existe* $x \in [a, b]$ *tel que* $f(x) = x$

**Théorème 3.5.** *Soit* $K$ *une partie non vide, compacte et convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : K \to K$ *une fonction continue. Il existe* $x \in K$ *tel que* $f(x) = x$.

**Remarques 3.1.** *Les parties convexes et compactes de* $\mathbb{R}$ *sont des segments. Le théorème de Brouwer prend donc le cas* $n = 1$ *la forme particulière suivante :*

**Preuve 3.4.** *Si* $f$ *est continue de* $[a, b]$ *dans lui-même, la fonction* $g : x \mapsto f(x) - x$ *est continue, prend en* $a$ *la valeur* $f(a) - a \geq 0$ *et en* $b$ *la valeur* $f(b) - b \leq 0$*. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction* $g$ *s'annule en un point* $x_0$*, qui est un point fixe de* $f$*.*
*Afin de démontrer le théorème 3.4, on va d'abord le réduire dans le cas où* $K = B_f(0, 1)$.

### 3.2.2 Rétractions

**Définition 3.4.** *On appelle* ***rétractions*** *de l'espace topologique* $E$ *sur un fermé* $F$ *de* $E$ *toute fonction continue de* $E$ *dans* $F$ *qui est l'identité sur* $F$.

**Théorème 3.6.** *Soit $K$ un compact convexe dans un espace de Hilbert $E$. Alors, il existe une rétraction 1- Lipschitzienne $\pi_k : E \to K$.*

**Preuve 3.5.** *Soit $x \in E$. Par compacte de $K$, il existe $a \in K$ tel que $\|x - a\| = \inf_{k \in K} \|x - k\|$. Si $b \in K$ est tel que $\|x - b\| = \inf_{k \in K} \|x - k\| = \|x - a\|$, alors $\langle a - b, x - \frac{a+b}{2} \rangle = 0$ et donc $-\|x - \frac{a+b}{2}\|^2 + \|x - a\|^2 = \|\frac{a-b}{2}\|^2$. Or $\frac{a-b}{2} \in K$ par convexité de $K$ et donc $\|\frac{a-b}{2}\|^2 \leq \|x - a\|^2 - \|x - \frac{a+b}{2}\|^2 \leqslant 0$. Donc, $a = b$. Comme pour tout $x \in E$, il existe un unique $a_x \in K$ tel que $\|x - a_x\| = \inf_{k_i n K} \|x - k\|$, alors $\pi_K(x) = a_x$ définit une application $\pi_K : E \to K$ qui est l'identité sur $K$.*

*Pour montrer que $\pi_K$ est continue, remarquons d'abord que pour tout $k \in K$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $(1-t)\pi_K(x) + tk \in K$ et donc $\|x - \pi_K(x)\|^2 + 2t\langle x - \pi_K(x), k - \pi_K(x)\rangle + t^2\|k - \pi_K(x)\|^2 = \|x - \pi_K(x) - t(k - \pi_K(x))\|^2 \geq \|\pi_K(x) - x\|^2$. Donc, $\langle x - \pi_K(x), -b + \pi_K(x)\rangle \geq 0$ pour tout $k \in K$. Donc $\forall (u_1, u_2) \in E^2$, on a :*

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|^2 &= \|(u_1 - \pi_K(u_1)) + (\pi_K(u_2)) + (\pi_K(u_1 - \pi_K(u_2) - u_2)\|^2 \\ &= \|\pi_K(u_1) - \pi_K(u_2)\|^2 + 2\langle(\pi_K(u_1) - \pi_K(u_2), u_1 - \pi_K(u_1) + \pi_K(u_2 \end{aligned}$$

$$+\|u_1 - \pi_K(u_1) + \pi_K(u_2) - u_2\|^2$$

$$\geq \|\pi_K(u_1) - \pi_K(u_2)\|^2.$$

*Soit $K$ un compact convexe de $\mathbb{R}^n$. Quitte à remplacer $K$ par $\lambda K$ et $f$ par $x \in \lambda K \mapsto \lambda f(\frac{x}{\lambda}) \in \lambda K$ on peut supposer que $K \subset B_f(0, 1)$. Donc, $\pi_K$ est une rétraction de $B_f(0, 1)$ sur $K$.Soit $F : E \to K$ une fonction continue. Alors $\overline{F} := F \circ \pi_K : B_f(0, 1) \mapsto B_f(0, 1)$ est continue. Si le théorème de Brouwer ( voir ci-dessous ) est démontré pour $B_f(0, 1)$ tel que $x = \overline{F}(x) = F(\pi_K(x))$. Comme $F$ est à valeurs dans $K$, on a $x \in K$ et donc $\pi_K(x) = x$, ce qui implique que $x$ est un point fixe de $F$ sur $K$.*

*On peut donc se ramener au cas où $K = B_f(0, 1)$. Dans ce cas le théorème de Brouwer est équivalent au théorème suivant :*

**Théorème 3.7.** *Il n'existe pas de rétraction $B_f(0,1)$. sur $S(0,1)$.*

**Preuve 3.6.** $(\Rightarrow)$ *Si une telle rétraction $F$ existe alors $-F : B_f(0,1) \to B_f(0,1)$ n'a pas de point fixe. En effet, s'il existe $x \in B_f(0,1)$tel que $F(x) = -x$, alors $x \in S(0,1)$ et donc $x = -F(x) = -x$, ce qui est impossible.*
$(\Leftarrow)$ *Si $f : B_f(0,1) \to B_f(0,1)$ est continue et n'a pas de point fixe, alors*
$F : B_f(0,1) \to S(0,1)$
$x \mapsto x + t_x(x - f(x))$
*où $t_x$ est le seul $t > 0$ tel que $\|x - t(x - f(x))\|^2 = 1 = \|x\|^2 + 2t\langle x, x - f(x)\rangle + t^2\|x - f(x)\|^2$.*
*On trouve $t_x = \frac{-\langle x, x-f(x)\rangle + \sqrt{\langle x, x-f(x)\rangle^2 + \|x-f(x)\|^2(1-\|x\|^2)}}{\|x-f(x)\|^2}$, donc $F$ est continue. De plus, si $x \in S(0,1)$, alors $\|x\| = 1$, donc $t_x = \frac{-\langle x, x-f(x)\rangle + |\langle x, x-f(x)\rangle|}{\|x-f(x)\|^2}$. Or $\langle x, x - f(x)\rangle = \|x\|^2 - \langle x, f(x)\rangle \geq 1 - \|x\| \cdot \|f(x)\| \geq 0$, d'où $t_x = 0$ et $\forall x \in S(0,1), F(x) = x$.*

**Contre-exemples**

De la même façon que pour le théorème 3.1.1 nous allons voir que chaque hypothèse du théorème a également son importance ici.

1. Partie $K$ convexe et compacte de $\mathbb{R}$, $f : K \mapsto K$ sans point fixe :

$$K = [0,2]; f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 1 \\ 1 & sinon \end{cases}$$

2. Partie $\varepsilon$ convexe non compacte de $\mathbb{R}$ et $f : \varepsilon \mapsto \varepsilon$ continue sans point fixe :
   $\varepsilon = [0,2[; f(x) = \frac{x}{2} + 1$

3. partie K compacte non convexe de $\mathbb{R}$ et $f : K \mapsto K$ continue sans point fixe :

$$K = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{2}, 2]; f(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{2} & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & si \quad \frac{3}{2} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

### 3.2.3 Le cas $\mathbf{K} = \mathbf{B}_f(0, 1)$

On dit qu'un espace topologique a la propriété du point fixe si toute fonction continue $f : E \to E$ possédé un point fixe . Nous allons prouver que la boule $B_f(0, 1)$ a la propriété du point fixe en toute dimension $n \in \mathbb{N}^*$ . On note ici $B_n$(resp. $S_n$) la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ (resp.la sphère unité de $\mathbb{R}^n$). Notre preuve est basée sur l'études des champs de vecteurs sur $S_n$ :

**Définition 3.5.** *On appelle **champ de vecteurs** sur la sphère $S_{n-1}$ , toute fonction continue $V : S_{n-1} \to \mathbb{R}^n$ telle que pour tout $x$, $V(x)$ soit tangent en $x$ à $S_{n-1}$ c'est-à-dire orthogonal à $x$*

**Lemme 3.1.** *S'il existe une rétraction de $B_{2n}$ sur $S_{2n-1}$, il existe un champ de vecteurs partout non nul sur $S_{2n}$*

**Preuve 3.7.** *On suppose que $\rho$ est la rétraction de $B_{2n}$ sur $S_{2n-1}$ et on note*

$$\pi : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n}$$

$$(x_1, x_2, ..., x_{2n+1}) \mapsto (x_1, x_2, ..., x_{2n})$$

*qui envoie $S_{2n}$ sur $B_{2n}$. Il existe un champ de vecteurs $V : S_{2n-1 \to S_{2n-1}}$ (partout non nul). En effet , si on pose :*

$$V(x_1, x_2, ..., x_{2n}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, ..., x_{2n}, -x_{2n-1})$$

*on a que $V$ est continue ,*

$$||V(x)||^2 = ||x||^2 = 1$$

*et* $\langle V(x), x\rangle = 0$ *La fonction* $f : y \mapsto V \circ \rho \circ \pi(y)$ *est alors continue sur* $S_{2n}$ *à valeurs dans* $S_{2n-1} \subset S_{2n}$ *. Si pour un* $y \in S_{2n}, f(y) =^+_- y$ *, alors* $y \in S_{2n-1}$ *donc* $\pi(y) = y$ *,* $\rho \circ \pi(y) = \rho(y) = y$*, d'où* $f(y) = V(y) =^+_- y$ *ce qui contredit le fait que* $\langle V(y), y\rangle = 0$*, et on en déduit alors que* $\forall y \in S_{2n}, f(y) \notin \{y, -y\}.f$ *étant une fonction continue de* $S_{2n}$ *dans* $S_{2n}$ *, la fonction* $V'$ *définie par*

$$V' = f(y) - \langle f(y), y\rangle.y$$

*et continue et vérifie ,*$\forall y \in S_{2n}$,

$$\langle V'(y), y\rangle = \langle f(y), y\rangle - \langle f(y), y\rangle ||y||^2 = 0$$

*donc* $V'$ *est bien un champ de vecteurs sur* $S_{2n}$ *. Et il est partout non nul car si on avait* $V'(x) = 0, f(x)$ *serait colinéaire à* $x$ *et appartiendrait à* $S_{2n}$ *, i.e.*$f(x) =^+_- x$ *ce qui est impossible .*
*Le théorème suivant , dont la preuve se trouve en annexe , achève la preuve du théorème de Brouwer en dimension pair d'après les théorème 3.1 et 3.7 .*

**Théorème 3.8.** *Sur la sphère* $S_{2n}$ *tout de vecteurs s'annule en au moins un point .*

**Théorème 3.9.** *(Brouwer) La boule* $B_n$ *a la propriété du point fixe pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *.*

**Preuve 3.8.** *Comme ce théorème est déjà démontré pour n pair , il ne reste plus qu'à montrer que si* $B_{n+1}$ *a la propriété du point fixe , alors* $B_n$ *l'a aussi.*
*Soient la fonction* $f : B_n \to B_n$ *continue et* $\pi$ *la projection définie par* $\pi : (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \mapsto (x_1, x_2, ..., x_n)$ *.On a alors* $\pi(B_{n+1}) = B_n$ *,et de plus* $f \circ \pi$ *est continue de* $B_{n+1}$ *dans* $B_n \subset B_{n+1}$*. Donc , il existe* $y \in B_{n+1}$ *que* $(f \circ \pi)(y) = y$*. Alors* $y \in B_n$ *donc* $\pi(y) = y$*.*
*On en déduit que* $y$ *est un point fixe de* $f$ *sur* $B_n$

### 3.2.4 Le Théorème de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach .

**Théorème 3.10.** *(Schauder)*
*Soient $E$ un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact .Alors toute application continue $f : K \mapsto K$ possède un point fixe .*

**Preuve 3.9.** *Soit $f : K \mapsto K$ application continue. Comme $K$ est compact , $f$ est uniformément continue ;donc , si on fixe $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que , pour tout $x, y \in K$, on ait $||f(x) - f(y)|| \leq \varepsilon$, dés que $||x - y|| \leq \delta$ .De plus , il existe un ensemble fini des points $\{x_1, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boule ouvertes de rayon $\delta$ centrés aux $x_i$ recouvrent $K$ ;i.e.$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq P} B(x_j, \delta)$. Si on désigne $L := Vect(f(x_j))_{1 \leq j \leq p}$ , alors $L$ est de dimension finie , et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie .*
*Pour $1 \leq j \leq p$ , on définit la fonction continue $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par*

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 & si ||x - x_j|| \geq \delta \\ 1 - \frac{||x - x_j||}{\delta} & sinon \end{cases}$$

*et on voit que $\psi_j$ est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors .*
*On a donc , pour tout $x \in K, \sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, et donc on peut définir sur $K$ les fonctions continues positives $\varphi_j$ par*

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k(x)}$$

*pour les quelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$, pour tout $x \in K$*
*On pose alors, $x \in K, g(x) := \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) f(x_j)$. $g$ est continue (car elle est somme des fonction continue ), et prend ses valeurs dans $K^*$ (car g(x)est un barycentre des $f(x_j)$). Donc si on prend la restriction $g \backslash k^* : K^* \to K^*$, par le théorème 3.9 , $g$*

*possède un point fixe $y \in K^*$ . De plus,*

$$\begin{aligned} f(y) - y = f(y) - g(y) &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)(f(y) - f(x_j)) \end{aligned}$$

*Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $||y - x_j|| < \delta$, et donc $||f(y) - f(x_j)|| < \varepsilon$. Donc , on a pour tout $j, ||\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))|| \leq \varepsilon\varphi_j$, et donc*

$$||f(y) - y|| \leq \sum_{j=1}^{p} ||\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))|| \leq \sum_{j=1}^{p} \varepsilon\varphi_j(y) = \varepsilon$$

*Donc , pour tout entier $m$, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $||f(y_m) - y_m|| < 2^{-m}$ .Et puisque $K$ est compact , de la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite $(y_{mk})$ qui converge vers un point $y^* \in K$ . Alors $f$ étant continue , la suite $(f(y_{mk}))$ converge vers $f(y^*)$, et on conclut que $f(y^*) = y^*$,i.e. $y^*$ est un point fixe de $f$ sur $K$*

### 3.2.5 Le Théorème de Cauchy-Arzela

On reprend maintenant le le problème de Cauchy pour l'équation $y^{'} = F(t, y(t))$, mais ici on en sait pas si $F$est Lipschitzienne . Le théorème de Schauder nous donnera l'existence d'un solution , mais pas nécessairement l'unicité qu'on avait en section 2.2.

**Théorème 3.11.** *(Cauchy-Arzela).Soient :*

- *$E$ un espace normé de dimension fini*
- *$U$ un ouvert de $\mathbb{R} \times E$*
- *$F$ un fonction continue de $U$ dans $E$ ,et*
- *$(t_0, x_0)$ un point de $U$*

*Alors l'équation différentielle $x^{'} = F(t, x)$ a une solution au voisinage de $(t_0, x_0)$ ,* *i.e.il existe un nombre $\rho > 0$ et une fonction $f : [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \to E$ de classe $C^1$ avec $f(t_0) = x_0$ telle que pour tout $t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$*

1. $(t.f(t)) \in U$
2. $f'(t) = F(t, f(t))$

**Preuve 3.10.** *Soit $M > ||F(t_0, x_0)||$. Quitte à remplacer $U$ par l'ensemble ouvert $\{(t, x) \in U : ||F(t, x) < M\}$ , on peut supposer que $F$ est majorée en norme par $M$ sur $U$ . Il existe donc $r > 0$ et $h > 0$ tels que $U \supset [t_0 - h, t_0 + h] \times B_f(x_0, r)$ et on choisit $\rho = \min(h, \frac{r}{M}) > 0$.*
*On considère l'ensemble $K$ des fonctions M-Lipschitziennes de l'intervalle $J = [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$ dans $E$ qui valent $x_0$ en $t_0$, que l'on munit de la norme uniforme . Si $f$ etg sont dans $K$ et $s \in [0, 1]$ alors $sf + (1 - s)g \in K$, doncK est convexe . Si $f(i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $K$ pour la norme uniforme , alors d'après le théorème 3.12 , il existe une fonction continue $f : J \to E$telle que $f_i$ converge uniformément vers $f$ On a alors $f(t_0) = \lim_{i\to\infty} f_i(t_0) = x_0$ et $t, t' \in J, ||f(t) - f(t')|| = \lim_{i\to\infty} ||f_i(t) - f_i(t')\| \leq M|t - t'|$ , et donc $f \in K$ . On en déduit que $K$ est fermé pour la norme uniforme dans $C^0(J, E)$ .*
*De plus , pour tout $t \in J$ et tout $f \in K$, on a*

$$||f(t) - x_0|| + ||f(t) - t_0|| \leq M|t - t_0| \leq M\rho \leq r$$

*Ce qui montre que $K(t) = \{f(t) : f \in K\}$ est contenu dans la boule $B_f(x_0, r)$, et donc $K(t)$ est relativement compacte.Et puisque $K$ est uniformément équicontinu ,il résulte du théorème 3.13 que $K$ est compacte.*
*On peut alors définir une application $\Phi : K \to C^1(J, E)$, en posant*

$$\Phi(f)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))ds$$

*En effet ,si $f \in K$, alors $f(s) \in B_f(x_0, r)$ pour tout $s \in J$, ce qui montre que la fonction $s \to F(s, f(s))$ est bien définie et continue sur $J$ , à valeurs dans $E$*

*, et possède une primitive* $\Phi(f)$ *de classe* $C^1$ *, valant* $x_0$*en* $t_0$. *Puisque la fonction* $g := \Phi(f)$ *vérifie* $g^{'}(t) = F(t, f(t))$, *ou a que* $||g^{'}(t) \leq M$, *c'est-à-dire que gest M-Lipschitzienne sur* $J$. *De plus,*$g(t_0) = x_0$. *Donc,* $\Phi \subset K$. *Enfin, comme* $F$ *est uniformément continue sur compact* $J \times B_f(x_0, r)$, *pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $(s, x)$ *et* $(s^{'}, x^{'})$ *appartenant à* $J \times B_f(x_0, r)$ *, on ait* $\max(|s - s^{'}|, ||x - x^{'}||) < \delta \Rightarrow ||F(s, x) - F(s^{'}, x^{'})|| < \dfrac{\varepsilon}{\rho}$
*Alors, si* $f$ *et* $f_1$ *appartiennent à* $K$ *et si* $||f - f_1|| < \delta$, *on a* $\forall s \in J, ||F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))|| < \frac{\varepsilon}{\rho}$.*Donc,*

$$\begin{aligned} ||\Phi(f)(t) - \Phi(f_1)(t)|| &= ||\int_{t_0}^{t} F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))ds|| \\ &\leq |t - t_0| \sup_{s \in J} ||F(s, f(s)) - F(s, f_1(s))|| \\ &\leq \rho\frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon \end{aligned}$$

*pour tout* $t \in J$. *Ceci montre que* $||\Phi(f) - \Phi(f_1)|| \leq \varepsilon, i.e \Phi : K \to K$ *est une application continue.Donc , d'après le Théorème 3.10, il existe un point fixe* $f \in K$ *de* $\Phi$, *c'est-à-dire que* $f$ *est une solution au problème de Cauchy*

## 3.3 Annexes

### 3.3.1 Différents outils utilisés

**Proposition 3.1.** *Soient* $E$ *un espace de Banach ,* $u \in \ell_c(E)$ *telle que* $|||u||| = \sup_{||x||=1} ||u(x)|| < 1$.
*Alors l'application* $(Id_E - u)$ *est inversible , d'inverse* $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$, *ce qui dans* $\ell_c(E)$.[7]

**Preuve 3.11.** *comme* $|||u||| < 1$ *et* $|||u^k||| \leq |||u|||^k$ *, la série* $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$ *converge absolument dans* $L_c(E)$. *Alors :*

$$(Id_E - u)(\sum_{k=0}^{+\infty} u^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k - \sum_{k=1}^{+\infty} u^k = u^0 = Id_E$$

*d'où* $\sum_{k=0}^{+\infty} u^k$ *est l'inverse de* $(Id_E - u)$.
*Des démonstrations des deux théorèmes qui suivent dans* [9] *(resp. p.82 et p.87).*

**Théorème 3.12.** *Soit* $(X, d_X)$ *et* $(Y, d_Y)$ *deux espaces métrique avec* $Y$ *complet. Alors l'ensemble* $C_b^0(X, Y)$ *est complet pour la distance uniforme* $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X}\{d_Y(f(x), g(x))\}$

**Théorème 3.13.** *(Ascoli) Soient* $(X, d_X)$ *un espace métrique compact et* $(Y, d_Y)$ *un espace métrique .*
*On se donne un sous ensemble* $F$ *de* $C^0(X, Y)$ *tel que :*

1. $\forall x \in X, \overline{\{f(x), f \in F\}}$ *est compact dans* $Y$
2. *La famille* $F$ *est équicontinue.i.e.*$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tel que* $\forall x, x^{'} \in X, \forall f \in F$ *on a*

$$d_X(x, x^{'}) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x^{'})) \leq \varepsilon$$

*Alors* $\bar{F}$ *est compact dans* $C^0(X, Y)$ *(muni de la distance uniforme).*

### 3.3.2 Démonstration Du Théorème 3.8

Supposons qu'il existe un champ de vecteurs$V$ partout non nul sur $S_{2n}$.On va d'abord se ramener au cas où $V$ est la restriction à $S_{2n}$ d'une fonction de classe $C^1$ sur un voisinage de $S_{2n}$ vérifiant $||V(x)|| = 1, \forall x \in S_{2n}$.

La fonction continue strictement positive $x \mapsto ||V(x)||$ atteint , sur le compacte $S_{2n}$,son minimum $\delta > 0$.Le compact

$$K = \{x \in \mathbb{R}^{2n+1} : \frac{1}{2} \leq ||x|| \leq \frac{3}{2}\}$$

est un voisinage de $S_{2n}$ dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. Toute fonction réelle continue de K peut être approchée uniformément sur$K$ ,à $\frac{\delta}{2n}$ prés , par une fonction de classe $C^1$ sur l'intérieur de $K$. En particulier, si $(V_1, V_2, ...V_{2n+1})$ sont les fonction coordonnées de $V$,alors les fonction $x \mapsto V_i(\frac{x}{||x||})$ , continues sur $K$ , peuvent être approchées uniformément sur $K$,à $\frac{\delta}{2n}$ prés, par des fonction $W_i$ qui sont de classe $C^1$ sur $\mathring{K}$.Alors la fonction $W : x \mapsto (W_1(x), W_2(x), ...W_{2n+1}(x))$ est de classe $C^1$ , et vérifie

$$||W(x) - V(x)||^2 = \sum_{j=1}^{2n+1} (W_j(x) - V_j(x))^2 \leq \frac{2n+1}{4n^2}\delta^2 < \delta^2$$

, ce qui montre que ,$\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle W(x) + \lambda x, V(x) \rangle &= \langle W(x), V(x) \rangle \\ &= ||V(x)||^2 - \langle V(x) - W(x), V(x) \rangle \\ &\geq \delta^2 - ||W(x) - V(x)||.||V(x)|| > 0, \end{aligned}$$

d'où $W(x) + \lambda x \neq 0$, donc $W^*(x) = W(x) - \langle W(x).x \rangle .x \neq 0$.Alors $x \mapsto \frac{W^*(x)}{||W^*(x)||}$ est un champ de vecteurs à valeurs dans $S_{2n}$ de classe $C^1$ sur $\mathring{K}$ On suppose maintenant que $V$ est un champ de vecteurs de classe $C^1$ au voisinage de $S_{2n}$ , à valeurs dans $S_{2n}$ , et on considère , pour $t \in \mathbb{R}$, les applications $\phi$ et $\Phi_t$, définies sur $\mathring{K}$ par

$$\phi(x) = ||x||.V(\frac{x}{||x||})$$

$$\Phi_t = x + t\phi(x)$$

, qui sont de classe $C^1$.Puisque $V^1$ est continue sur le compact $S_{2n}$, elle y est bornée , et le calcul de $\phi^{'}(x)$ montre que $\phi^{'}$ est bornée par un nombre M sur $\mathring{K}$. Alors , si $M||t|| < 1$, on a, pour un $x \in \mathring{K}$

$$||I - \Phi_t^{'}(x) = |t|.||\phi^{'}(x) \leq M|t| < 1$$

donc $\Phi_t^{'}$ est inversible (d'après 1) et $\Phi_t$ est ouverte .
Donc $U = \Phi_t(\mathring{K})$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. De plus ,

$$\langle V(x).x \rangle = 0 \Rightarrow ||\Phi_t(x)||^2 = ||x||^2 + t^2||x||^2||V(\frac{x}{||x||})||^2 = (1+t^2)||x||^2.$$

On en conclut que, si $\frac{1}{2} < r < \frac{3}{2} <$,l'image par $\Phi_t$ de la sphère $S(r)$ de rayon $r$ est une partie compacte , donc fermée de la sphère $S(r\sqrt{1+t^2})$ de rayon $r\sqrt{1+t^2}$. Mais c'est aussi la trace sure $S(r\sqrt{1+t^2})$ de $U$ , donc une partie ouverte de $S(r\sqrt{1+t^2})$. Par connexité de $S(r\sqrt{1+t^2})$ on a alors $\Phi_t(S(r)) = S(r\sqrt{1+t^2})$, donc $\Phi_t$ est surjective de $K$ sur $U := \{x \in \mathbb{R}^{2n+1} : \frac{1}{2}\sqrt{1+t^2} < ||x|| < \frac{3}{2}\sqrt{1+t^2}\}$.
Si on a $\Phi_t(x) = \Phi_t(y)$, alors

$$\sqrt{1+t^2}.||x|| = ||\Phi_t(x)|| = ||\Phi_t(y)|| = \sqrt{1+t^2}.||y||,$$

donc $||x|| = ||y||$ et $0 = ||x+t\phi(x)-y-t\phi(y)|| \geq ||x-y|| - ||t||.||x||.||V(\frac{x}{||x||}) - V(\frac{y}{||x||})||$. Puisque (d'après le lemme ) on a $||V(\frac{x}{||x||}) - V(\frac{y}{||x||})|| \leq \frac{\pi}{2}M\frac{||x-y||}{||x||}$, on obtient $1 - \frac{\pi}{2}M|t| = ||x-y|| \leq 0$, ce qui entraine $x = y$ si $\frac{\pi}{2}M|t| < 1$.
Pour $|t|$ assez petit, la fonction $\Phi_t$ est donc injective et est un $C^1$-difféomorphisme de $\mathring{K}$ sur $U$.
Par homothétie, le volume de U est alors le produit du volume de $\mathring{K}$ par $(1+t^2)^{\frac{2n+1}{2}}$.C'est aussi l'intégrale sur $\mathring{K}$ du déterminant Jacobi $D_t$ de $\Phi_t$ ;et puisque la matrice jacobienne de $\Phi_t$ en x est $I + tJ_\phi(x).D_t(x)$ est alors un polynôme de degré au plus $2n+1$ en $t$ : $D_t(x) = \sum_{j=0}^{2n+1} t^j\alpha_j(x)$ .
On en conclut que

$$vol(U) = (1+t^2)^{\frac{2n+1}{2}} vol(\mathring{K}) = \int D_t(c)dx = \sum_{j=0}^{2n+1} t^j \int \alpha_j(x)dx,$$

donc, au voisinage de 0 ,$(1+t^2)\frac{2n+1}{2}$ est égal à un polynôme$P(t)$ de degré au $2n+1$. Puisque $(1+t^2)\frac{2n+1}{2}$ est pair , on devrait avoir P(t) pair donc de degré au plus $2n.P(t)^2$ serait alors un polynôme de degré au plus $4n$, égal à $(1+t^2)\frac{2n+1}{2}$.C'est une contradiction donc le champ de vecteurs $V$ s'annule en au moins un point.[8]

**Lemme 3.2.** *(Accroissements finis) Soit $m \geq 1$.Si $\phi$ est une application de classe $C^1$ définie sur un voisinage de $S_m$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$, à valeur dans un espace de Banach E, et si $||\phi'(x)|| \leq M, \forall x \in S_m$, alors la fonction $\phi$ et $\frac{\pi}{2}$-Lipschitzienne sur $S_m$*

**Preuve 3.12.** *Soient $x$ et $y$ deux point distincts de $S_m$.On peut trouver $z \in S_m$ qui forme avec $x$ une base $\langle y, z\rangle \geq 0$. Il existe alors un $v \in [0, \pi]$ tel que $y = xcosv + zsinv$.Et la fonction $\gamma : s \mapsto xcoss + zsins$ prend ses valeurs dans dans $S_m$.La fonction $\phi \circ \gamma$ est de classe $C^1$ , et on a*

$$||(\phi \circ \gamma)^{'}(s)||^2 \leq ||\phi^{'}(\gamma(s))||^2.||\gamma^{'}(s)||^2 \leq M^2|| - x\sin s + z\cos s||^2 = M^2.$$

*On a donc*

$$||\phi(x) - \phi(y)|| = ||\phi \circ \gamma(u) - \phi \circ \gamma(0)|| \leq v \sup ||(\phi \circ \gamma)^{'}(s)|| \leq Mv,$$

*et puisque $||x - y|| = (1 - \cos v)^2 + \sin^2 v = 2 - 2\cos v = 4\sin^2 \dfrac{v}{2}, ona||x - y|| = 2\sin\frac{v}{2} \geq 2.\frac{2}{\pi}.\frac{v}{2} = \frac{2}{\pi}v$. On en conclut que $||\phi(x) - \phi(y)|| \leq \frac{\pi}{2}||x - y||$. [9]*

### 3.3.3 Une Autre Démonstration Du Théorème De Brouwer En Dimension 2

On donne ici une preuve du Théorème de Brouwer utilisant la notion de forme différentielle et la formole de Green-Riemann. On se restreint à la dimension 2 , mais ça marche aussi pour les dimensions supérieures(mais nécessite une formule de Green-Riemann plus compliquée).

**Définition 3.6.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.On appelle* ***forme différentielle de degré 1*** *sur $\Omega$ toute application $\alpha$ de $\Omega$ sur le dual $(\mathbb{R}^n)^*$ de $\mathbb{R}^n$*
*Soit $F : B_f(0, 1) \mapsto S(0, 1)$ tel que $F_{|s(0,1)} = id$ . On commence par supposer que $F$ est $C^1$. On note $F(x, y) = (F_1(x, y); F_2(x, y))$ et on considère la forme différentielle*

$$\alpha : B_f(0, 1) \mapsto (\mathbb{R}^2)^*$$

$$(x, y) \mapsto \frac{F_1\frac{\partial F_2}{\partial y} - F_2\frac{\partial F_1}{\partial y}}{F_1^2 + F_2^2}dy + \frac{F_1\frac{\partial F_2}{\partial x} - F_2\frac{\partial F_1}{\partial x}}{F_1^2 + F_2^2}dx = Qdy + Pdx$$

*$\alpha$ est bien définie sur $B_f(0,1)$ car $F_1^2+F_2^2=1\neq 0$. On va applique le théorème 3.14 à $\alpha$ :*

**Théorème 3.14.** *(Green-Riemann) Soit $K\subset\mathbb{R}^2$ un compact à bord $C^1$et $\alpha = Pdx+Qdy$ une forme différentielle de degré 1, de classe $C^1$ sur un ouvert contenant $K$. Alors $K$ est mesurable et*

$$\int_{\partial K^+}(Pdx+Qdy)=\int\int_K[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)]dxdy. \qquad (Ref.[6])$$

*On cherche donc à calculer $\int_{B_f(0,1)}[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)]dxdy$.Après de laborieux calculs on trouve $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$, d'où $\int_{S(0,1)}\alpha=0$ . En revanche si on fait le changement de variable suivant :*
*$x^{'}=F_1(x,y)$ et $y^{'}(x,y)$, on a,*

$$dx^{'}=\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)dy$$

$$dy^{'}=\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)dy$$

*Et donc ,*

$$\alpha(x,y)=\frac{1}{F_1^2+F_2^2}[F_1(\frac{\partial F_2}{\partial y}dy+\frac{\partial F_2}{\partial x}dx)-F_2(\frac{\partial F_1}{\partial y}dy+\frac{\partial F_1}{\partial x}dx)]=\frac{1}{x'^2+y'^2}[x^{'}dy^{'}-y^{'}dx^{'}]$$

$$\int_{S(0,1)}\alpha=\int_0^1\frac{1}{x'^2+y'^2}[x^{'}dy^{'}-y^{'}dx^{'}]=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos^2\theta+sin^2\theta}[\cos^2\theta d\theta+sin^2\theta d\theta]\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$$

*(par le changement de variable $x^{'}=\cos\theta$ et $y^{'}=\sin\theta$ ). On a alors une contradiction car $0\neq 2\pi$ donc une telle fonction $F$ n'existe pas .*
*On en déduit donc que si $f:B_f(0,1)\mapsto B_f(0,1)$ est $C^1$ alors elle admet un point fixe .*
*Si $f$ est seulement continue , alors il existe une suite de fonctions $C^1, f_m : B_f(0,1)\mapsto B_f(0,1)$ qui converge uniformément vers $f$. On en déduit qu'il existe $x_n\in B_f(0,1)$ tel que $f_n(x_n)=x_n$, d'où $\|f(x_n)-x_n\|=\|f(x_n)-f(x_n)\|\leq\|f-f_n\|_\infty$. comme*

$B_f(0,1)$ *est compact , quitte à extraire un sous-suite , on peut supposer que* $x_n$ *tend vers un point*$x_\infty \in B_f(0,1)$ *et on a*

$$||f(x_\infty) - x_\infty|| \leq ||f(x_\infty) - f(x_n)|| + ||f(x_n) - x_n|| + ||x_\infty - x_n|| \longrightarrow 0_{n \mapsto \infty}$$

*d'où* $f(x_\infty) = x_\infty$.