



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique
Université Ibn Khaldoun – Tiaret –



Faculté des Mathématiques et Informatique

Département des MATHÉMATIQUES

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

DOMAINE : Mathématiques et Informatique

FILIERE : Mathématiques

SPECIALITE: Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

Boukafha l'arbi

Dadoune Abdelghani

Dahdah Fethi

Ouail El rabie

***Méthodes numérique pour les équations
différentielles***

Soutenu le /07/2019 Devant Le Jury Composé de :

Mr. : A.Hallouz, MCB

Mr : A.Larabi, MCA

Mr : K.Benia, MCB

Président

Encadreur

Examineur

Année Universitaire : 2018/2019

Table des matières

Introduction	5
1 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	
RÉSULTATS FONDAMENTAUX	7
1.1 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE DU PREMIER ORDRE	7
1.1.1 Problème de Cauchy	8
1.1.2 Solutions maximales	8
1.1.3 Solutions globales	10
1.2 THÉORÈME D'EXISTENCE DES SOLUTIONS	11
1.2.1 Équivalence du problème de Cauchy avec la résolution d'une équation intégrale	11
1.2.2 Cylindre de sécurité	12
2 QUELQUE MÉTHODES POUR RESOUDRE LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES	15
2.1 MÉTHODE D'EULER	15
2.2 MÉTHODES DE RUNGE-KUTTA	20
2.3 MÉTHODE DE NEWMARK	27
2.4 MÉTHODES D'ADAMS	28
2.4.1 Adams-Bashforth	28

2.4.2	Adams-Moulton	32
2.4.3	Stabilité de la méthode AM_{r+1}	33
2.5	MÉTHODE DE ROSENBROCK	37
2.6	MÉTHODE DE PRÉDICTION-CORRECTION	39
3	QUELQUES APPLICATIONS	46
3.1	MÉCANIQUE	46
3.2	DYNAMIQUE DES POPULATIONS	48
3.3	ELECTRICITÉ	52
3.4	MÉTÉOROLOGIE	53
	Bibliographie	55

REMERCIEMENTS

Nos remerciements avant tout le Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.

Nous tenons également à exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur

Monsieur M.LARABI ABDEELRAHMANE

pour m'avoir donné la chance de travailler tout le long de la réalisation de ce mémoire et qui n'a pas cessé de nous donner ses conseils et remarques.

Nous remercions aussi aux membres de jury, pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant de juger ce travail.

Merci à vous M.(A.Hallouz), d'avoir accepté de présider le jury.

Merci à vous M. (K. Benia) pour faire l'honneur d'accepter d'examiner ce travail.

Nos remerciements vont également à tous les professeurs et enseignants du département mathématique qui ont suivi toute au long de notre cycle d'étude.

Nous exprimons nos profondes gratitude à nos parents pour leurs encouragements, leur soutien et pour les sacrifices qu'ils ont enduré. Nous tenons à remercier vivement toutes personnes qui nous ont aidés de près ou de loin à élaborer et réaliser ce mémoire.

Et un grand merci à nos familles ainsi que nos amis et collègues pour leurs encouragements.

DÉDICACES

Après de longues années d'études et de travail, nous dédions ce modeste travail :

A mes très chers parents, que dieu les bénisse et les protège pour leurs soutien moral et financier, pour leurs encouragements et les sacrifices qu'ils ont endurés.

A mes frères et mes sœurs.

A l'esprit de mes grands-mères.

A tous mes oncles, tantes et cousins. A toute ma grande famille. A tous mes fidèles amis.

A mes enseignants qui nous ont dirigé et aidé et surtout soutenu pour être un jour un cadre en mathématique.

A tous ceux qui nous connaissent de près ou de loin.

Nous tenons enfin de dédier ce travail à tous mes amis d'étude de AFA et mes collègues et mes voisins.

A tous les proches qu'ils sont mentionnés et les autres qu'ils sont oubliés veuillez nous excuser.

Introduction

Les équations différentielles sont des équations liant entre elles une fonction inconnue y d'une variable t et ses dérivées successives $y', y'', \dots, y^{(n)}$, jusqu'à un certain ordre $n \geq 1$. On les présente le plus souvent sous la forme

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$$

c'est-à-dire que la dérivée n^{ime} de y au point t est fonction de t et des valeurs des dérivées de y d'ordre strictement inférieur à n en ce même point t . On se pose la question de savoir ; pour f donnée, si de telles équations ont des solutions, c'est-dire s'il existe de telles fonctions y , puis de décrire aussi précisément que possible ces solutions éventuelles.

Dans ce travail on considère les méthodes numériques pour les équations différentielles, le mémoire comprend une introduction, et trois chapitres, une conclusion et une bibliographie.

1^{er} chapitre Le but de ce chapitre est de démontrer les théorèmes généraux d'existence et d'unicité des solutions pour les équations différentielles ordinaires. Il s'agit du chapitre central de la théorie, de ce fait nécessairement assez abstrait. Sa bonne compréhension est indispensable en vue de la lecture des chapitres ultérieurs.

Le 2^{eme} chapitre est composé par les méthodes de résolution (Euler, Runge-kutta, Newmark, Adams, Rosenbrock et méthode prédiction-Correction)

Dans le 3^{eme} chapitre sont données des application L'usage des équations différentielles pour décrire le comportement des systèmes évoluant dans le temps est d'un usage universel dans toutes les sciences qui utilisent la modélisation mathématique. Cet outil commun a plusieurs disciplines ou sous-disciplines, on commence par donner quelques exemples d'équations différentielles issues de différentes disciplines.

A la fin on trouve une bibliographie .

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RÉSULTATS FONDAMENTAUX

Le but de ce chapitre est de démontrer les théorèmes généraux d'existence et d'unicité des solutions pour les équations différentielles ordinaires. Il s'agit du chapitre central de la théorie, de ce fait nécessairement assez abstrait. Sa bonne compréhension est indispensable en vue de la lecture des chapitres ultérieurs.

1.1 ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE DU PREMIER ORDRE

Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application continue. On considère l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \quad (t, y) \in U, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (1.1)$$

Définition 1.1. - Une solution de (1.1) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

- (i) $(\forall t \in I) \quad (t, y(t)) \in U$
- (ii) $(\forall t \in I) \quad y'(t) = f(t, y(t))$.

Remarque 1.1. *L'inconnue de l'équation (1.1) est donc en fait une fonction .*

Le qualificatif ordinaire pour l'équation différentielle (1.1) signifie que la fonction inconnue y dépend d'une seule variable t (lorsqu'il ya plusieurs variables t_i et plusieurs dérivées $\partial y / \partial t_i$, on parle d'équation aux dérivées partielles).

1.1.1 Problème de Cauchy

Définition 1.2. *Étant donné un point $(t_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ de (1.1) sur un intervalle I contenant t_0 dans son intérieur , telle que $y(t_0) = y_0$.*

1.1.2 Solutions maximales

Nous introduisons d'abord le concept de prolongement d'une solution. L'expression solution maximale est alors entendue implicitement au sens de la relation d'ordre fournie par le prolongement des solutions.

Définition 1.3. *Soient $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m, \tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$ des solutions de (1.1) . on dit que \tilde{y} est un prolongement de y si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{y}|_I = y$.*

Définition 1.4. *on dit qu'une solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est maximale si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $I \subsetneq \tilde{I}$.*

Théorème 1.1. *toute solution y se prolonge en une solution maximale \tilde{y} (pas nécessairement unique).*

Démonstration

Supposons que y soit définie sur un intervalle $I =]a, b[$ (cette notation désigne un intervalle ayant pour bornes a et b , incluses ou non dans I) .

Il suffira de montrer que y se prolonge en une solution $\tilde{y} :]a, \tilde{b}[\rightarrow \mathbb{R}^m (\tilde{b} \geq b)$ maximale à droite, c'est-à-dire qu'on ne pourra plus prolonger \tilde{y} au delà de \tilde{b} . Le même raisonnement s'appliquera à gauche.

Pour cela, on construit par récurrence des prolongements successifs $y_{(1)}, y_{(2)} \dots$ de y avec $y_{(k)} : |a, b_k[\rightarrow \mathbb{R}^m$. On pose $y_{(1)} = y, b_1 = b$. Supposons $y_{(k-1)}$ déjà construite pour un indice $k \geq 1$. On pose alors

$$c_k = \sup c; y_{(k-1)} \text{ se prolonge sur } |a, c[.$$

On a $c_k \geq b_{k-1}$. Par définition de la borne supérieure, il existe b_k tel que $b_{k-1} \leq b_k \leq c_k$ et un prolongement $y_{(k)} : |a, b_k[\rightarrow \mathbb{R}^m$ de $y_{(k-1)}$ avec b_k arbitrairement voisin de c_k ; en particulier, on peut choisir

$$c_k - b_k < \frac{1}{k} \quad \text{si } c_k < +\infty$$

$$b_k > k \text{ si } c_k = +\infty$$

La suite (c_k) est décroissante, car l'ensemble des prolongements de $y_{(k-1)}$ contient l'ensemble des prolongements de $y_{(k)}$; au niveau des bornes supérieures on a donc $c_k \geq c_{k+1}$. Si $c_k < +\infty$ à partir d'un certain rang, les suites

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq \dots \leq c_k \leq c_{k-1} \leq \dots \leq c_1$$

sont adjacentes, tandis que si $c_k = +\infty$ quel que soit k on a $b_k > k$. Dans les deux cas, on voit que

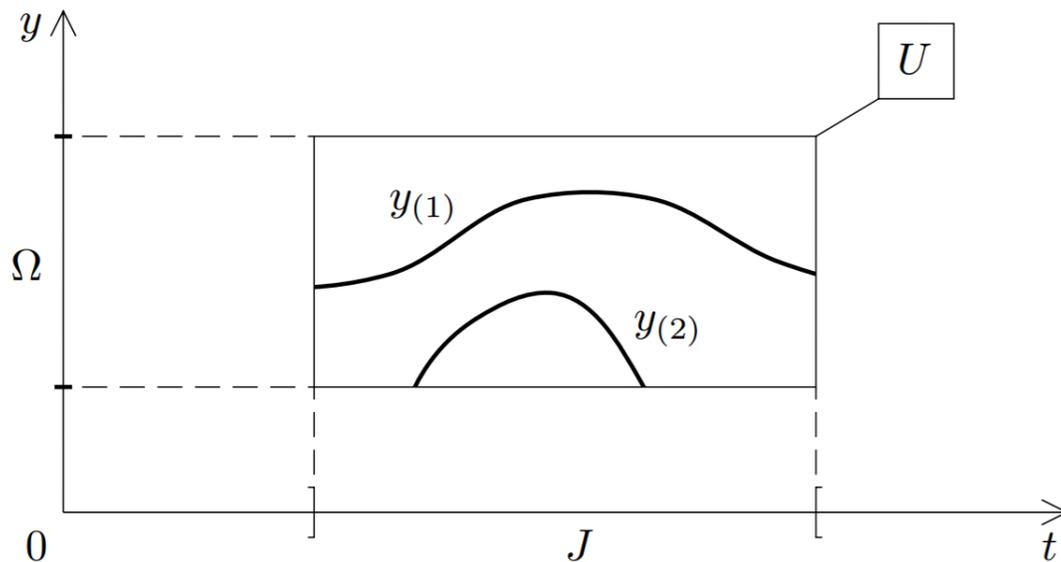
$$\tilde{b} = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} c_k$$

Soit $\tilde{y} : |a, \tilde{b}| \rightarrow \mathbb{R}^m$ le prolongement commun des solutions $y_{(k)}$, éventuellement prolongé au point \tilde{b} si cela est possible. Soit $z : |a, c| \rightarrow \mathbb{R}^m$ un prolongement de \tilde{y} . Alors z prolonge $y_{(k-1)}$ et par définition de c_k il s'ensuit $c \leq c_k$. A la limite il vient $c \leq \tilde{c}$, ce qui montre que la solution \tilde{y} est maximale à droite.

1.1.3 Solutions globales

On suppose ici que l'ouvert U est de la forme $U = J \times \Omega$ où J est un intervalle de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^m .

Définition 1.5. Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle J tout entier.



Remarques 1.1. toute solution globale est maximale , mais la réciproque est fausse . Sur le schéma ci-dessus par exemple, $y(1)$ est globale tandis que $y(2)$ est maximale mais non globale. Donnons un exemple explicite de cette situation.

Exemples 1.1.1.

$$y' = y^2 \quad \text{sur} \quad U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{1.2}$$

Cherchons les solutions $t \rightarrow y(t)$ de (1.2)

- On a d'une part la solution $y(t) = 0$
- Si y ne s'annule pas, (1.2) s'écrit $\frac{y'}{y^2} = 1$, d'où par intégration

$$-\frac{1}{y(t)} = t + C, \quad y(t) = -\frac{1}{t + C}$$

Cette formule définit en fait deux solutions, définies respectivement sur $]-\infty, -C[$ et sur $] - C, +\infty[$; ces solutions sont maximales mais non globales. Dans cet exemple $y(t) = 0$ est la seule solution globale de (1.2)

1.2 THÉORÈME D'EXISTENCE DES SOLUTIONS

Dans tout ce paragraphe, on considère une équation différentielle

$$y' = f(t, y) \tag{1.3}$$

où $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue et U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$

1.2.1 Équivalence du problème de Cauchy avec la résolution d'une équation intégrale

Le lemme très simple ci-dessous montre que la résolution de (1.3) est équivalente à la résolution d'une équation intégrale :

Lemme 1.1. *Une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une solution du problème de Cauchy de données initiales (t_0, y_0) si et seulement si*

(i) *y est continue et $(\forall t \in I)(t, y(t)) \in U$,*

(ii) $(\forall t \in I) \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du$

En effet si y vérifie (i) et (ii) alors y est différentiable et on a $y(t_0) = y_0$, $y'(t) = f(t, y(t))$. Inversement, si ces deux relations sont satisfaites, (ii) s'en déduit par intégration.

1.2.2 Cylindre de sécurité

Pour résoudre l'équation différentielle (1.3), on va plutôt chercher à construire des solutions de l'équation intégrale (1.2.1) (ii), et en premier lieu, on va montrer qu'une solution passant par un point $(t_0, y_0) \in U$ ne peut s'éloigner trop vite de y_0 . On note $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur \mathbb{R}^m et $B(x, r)$ (resp. $\overline{B}(x, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) de centre x et de rayon r dans \mathbb{R}^m . Comme U est supposé ouvert, il existe un cylindre

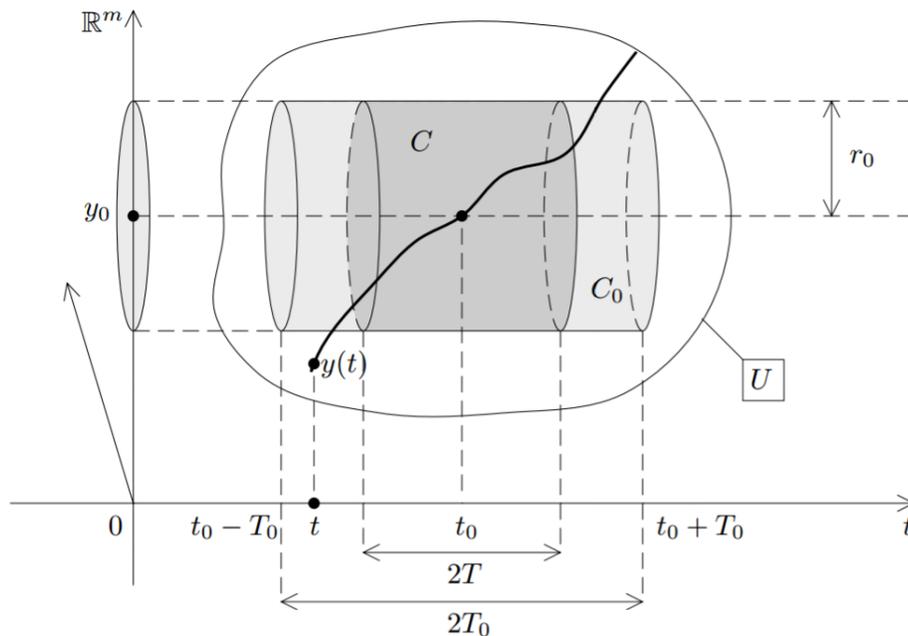
$$C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$$

de longueur $2T_0$ et de rayon r_0 assez petit, tel que $C_0 \subset U$. L'ensemble C_0 est fermé borné dans \mathbb{R}^{m+1} , donc compact. Ceci entraîne que f est bornée sur C_0 , c'est-à-dire

$$M = \sup_{(t,y) \in C_0} \|f(t, y)\| < +\infty$$

Soit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0$ un cylindre de même diamètre que C_0 et de demi-longueur $T \leq T_0$.

Définition 1.6. *On dit que C est un cylindre de sécurité pour l'équation (1.3) si toute solution $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ du problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $\overline{B}(y_0, r_0)$*



Sur le schéma ci-dessus, C est un cylindre de sécurité mais C_0 n'est pas un : la solution y s'échappe de C_0 avant le temps $t_0 + T_0$.

Supposons que la solution y s'échappe de C sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$. Soit τ le premier instant où cela se produit :

$$\tau = \inf \{t \in [t_0, t_0 + T]; \|y(t) - y_0\| > r_0\}$$

Par définition de τ on a $\|y(t) - y_0\| \leq r$ pour $t \in [t_0, \tau[$, donc par continuité de y . on obtient $\|y(\tau) - y_0\| = r_0$. Comme $(t, y(t)) \in C \subset C_0$ pour $t \in [t_0, \tau]$, il vient $\|y'(t)\| = \|f(t, y(t))\| \leq M$ et

$$r_0 = \|y(\tau) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{\tau} y'(u) du \right\| \leq M(\tau - t_0)$$

donc $\tau - t_0 \geq \frac{r_0}{M}$. Par conséquent si $T \leq \frac{r_0}{M}$, aucune solution ne peut s'échapper de

C sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Corollaire 1.1. - *Pour que C soit un cylindre de sécurité, il suffit de prendre*

$$T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$$

Le choix $T = \min(T_0, \frac{r_0}{M})$ convient par exemple.

Remarques 1.2. *si $C \subset C_0$ est un cylindre de sécurité, toute solution du problème de Cauchy $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ vérifie $\|y'(t)\| \leq M$, donc y est lipschitzienne de rapport M .*

QUELQUE MÉTHODES POUR RESOUDRE LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

2.1 MÉTHODE D'EULER

La méthode de Leonhard Euler est une méthode à pas séparé du premier ordre. Elle consiste à remplacer l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dx}$ par le schéma discret $\frac{(y_{i+1}-y_i)}{h}$. La résolution du problème

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

conduit au schéma

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \end{cases}$$

En pratique, la méthode d'Euler n'est pas utilisée, car elle n'offre pas une précision suffisante. Cette méthode est convergente et du premier ordre, car l'erreur de consistance vaut

$$|y(x_i) - y_i| = \frac{1}{2}h^2 f'(c, y_i) \quad \text{avec } c \in [x_{i-1}, x_i]$$

Mais la méthode explicite est souvent instable. Par exemple, si la fonction f est linéaire $f(x, y) = -ay$ avec $a > 0$, le schéma d'Euler

$$y_{i+1} = y_i - ah y_i = (1 - ah)y_i$$

est instable dès que $h > 2/a$, car dans ce cas, y_i tend vers l'infini lorsque i tend vers l'infini. En revanche, le schéma rétrograde

$$y_{i+1} = y_i - h y'_{i+1} = \frac{y_i}{1 + ah}$$

conduit à une méthode implicite qui est universellement stable puisque y_{i+1} tend vers zéro, quand le pas h tend vers l'infini.

Dans la méthode des trapèzes, la fonction f est remplacée par une fonction affine par morceaux. Le schéma de discrétisation

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (y'_{i+1} + y'_i)$$

Proposition 2.1. *Si $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité tel que $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$, toute solution approchée y donnée par la méthode d'Euler est contenue dans la boule $\overline{B}(y_0, r_0)$*

Démonstration

On vérifie par récurrence sur n que

$$\begin{cases} y([t_0, t_n]) \subset \overline{B}(y_0, r_0) \\ \|y(t) - y_0\| \leq M(t - t_0) \text{ pour } t \in [t_0, t_n] \end{cases}$$

C'est trivial pour $n = 0$. Si c'est vrai pour n , alors on a en particulier $(t_n, y_n) \in C$, donc $\|f(t_n, y_n)\| \leq M$, et par conséquent

$$\|y(t) - y_n\| = (t - t_n) \|f(t_n, y_n)\| \leq M(t - t_n)$$

pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Par hypothèse de récurrence

$$\|y_n - y_0\| = \|y(t_n) - y_0\| \leq M(t_n - t_0)$$

L'inégalité triangulaire entraîne alors $\forall t \in [t_n, t_{n+1}]$:

$$\|y(t) - y_0\| \leq M(t - t_n) + M(t_n - t_0) \leq M(t - t_0)$$

En particulier $\|y(t) - y_0\| \leq MT \leq r_0$, d'où

$$y([t_0, t_{n+1}]) \subset \overline{B}(y_0, r_0)$$

Définition 2.1. soit $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction de classe \mathbb{C}^1 par morceaux (ceci signifie qu'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$ de $[a, b]$ telle que pour tout n la restriction $y_{[a_n, a_{n+1}]}$ soit de classe \mathbb{C}^1 ; on suppose donc seulement la continuité et l'existence d'une dérivée à droite et à gauche de y aux points a_n).

on dit que y est une solution ε -approchée de (1.1) si

$$(i) (\forall t \in [a, b]) \quad (t, y(t)) \in U$$

$$(ii) (\forall n), (\forall t \in]a_n, a_{n+1}[) \quad \|y'(t) - f(t, y(t))\| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, y est une solution ε -approchée si y vérifie (1.1) avec une erreur $\leq \varepsilon$

Majoration de l'erreur pour les solutions approchées d'Euler

soit ω_f le module de continuité de f sur C défini par

$$\omega_f(u) = \max \{ \|f(t_1, y_1) - f(t_2, y_2)\| ; |t_1 - t_2| + \|y_1 - y_2\| \leq u \}$$

où $u \in [0, +\infty[$ et où les points $(t_1, y_1), (t_2, y_2)$ parcourent C . Comme C est compact, la fonction f est uniformément continue sur C , par conséquent

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \omega_f(u) = 0$$

On suppose dans la suite que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité tel que $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$

Proposition 2.2. *Soit $y : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ une solution approchée construite par la méthode d'Euler avec pas maximum h_{\max} . Alors l'erreur ε vérifie $\varepsilon \leq \omega_f((M + 1)h_{\max})$*

En particulier, l'erreur ε tend vers 0 quand h_{\max} tend vers 0.

Démonstration

Majorons par exemple $\|y'(t) - f(t, y(t))\|$ pour $t \in [t_0, t_0 + T]$ où y est la solution approchée associée à la subdivision $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$. Pour $t \in]t_n, t_{n+1}[$ on a $y'(t) = f(t_n, y_n)$ et.

$$\begin{aligned} \|y(t) - y_n\| &= (t - t_n) \|f(t_n, y_n)\| \leq M h_n \\ |t - t_n| &\leq h_n \end{aligned}$$

Par définition ω_f , il vient

$$\begin{aligned}\|f(t_n, y_n) - f(t, y(t))\| &\leq \omega_f(Mh_n + h_n) \\ \|y'(t) - f(t, y(t))\| &\leq \omega_f((M+1)h_{\max})\end{aligned}$$

Montrons finalement un résultat sur la convergence des solutions approchées.

Proposition 2.3. *Soit $y_{(p)} : [t_0 - T, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ une suite de solutions ε_p -approchées contenues dans le cylindre de sécurité C , telles que $y_{(p)}(t_0) = y_0$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \varepsilon_p = 0$. On suppose que $y_{(p)}$ converge uniformément sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ vers une fonction y . Alors y est une solution exacte du problème de Cauchy pour l'équation (1.1).*

Démonstration

Comme $\|y'_{(p)}(t) - f(t, y_{(p)}(t))\| \leq \varepsilon_p$, il vient après intégration.

$$\left\| y_{(p)}(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(u, y_{(p)}(u)) du \right\| \leq \varepsilon_p |t - t_0|.$$

Si $\delta_p = \max_{[t_0 - T, t_0 + T]} \|y - y_{(p)}\|$, on voit que

$$\|f(u, y_{(p)}(u)) - f(u, y(u))\| \leq \omega_f(\delta_p)$$

tend vers 0, d'où, grâce à la convergence uniforme :

$$y(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(u, y(u)) du = 0, \quad \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T]$$

Comme la limite uniforme y est continue, le lemme du début du (1.1) entraîne que y est une solution exacte de (1.1)

2.2 MÉTHODES DE RUNGE-KUTTA

Carl Runge (1856 – 1927) et Martin Kutta (1867 – 1944) ont proposé en 1895 de résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

en introduisant un schéma numérique de la forme

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h_i \\ y_{i+1} = y_i + h_i \cdot \Phi(x_i, y_i, h_i) \end{cases}$$

où la fonction d'incrément Φ est une approximation de $f(x, y)$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Supposons donnés un entier r , une matrice A dont les éléments triangulaires supérieurs sont nuls et un vecteur $b = (b_1, \dots, b_r)$, l'algorithme de Runge-Kutta est le suivant :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot (b_1 k_1 + \dots + b_r k_r) \\ x_{i+1} = x_i + h \\ k_j = f(x_i + c_j h, y_i + h(a_{j1} k_1 + \dots + a_{jr} k_r)) \end{cases}$$

Le vecteur b vérifie $b_1 + \dots + b_r = 1$. Les coefficients c_i sont les sommes des éléments d'une ligne de la matrice A . Les éléments supérieurs de A sont nuls $a_{ij} = 0$ si $j \geq i$. Dans ces méthodes, le pas h peut facilement varier (h_i). Une méthode de Runge-Kutta est entièrement déterminée par la donnée de l'entier r , du vecteur b et de la matrice A .

Méthodes d'ordre 1 :

Pour $b = 1$ et $a_{11} = 0$, l'algorithme $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$ se réduit à la méthode d'Euler. Pour $b = 1$ et $a_{11} = 1$, l'algorithme de Runge-Kutta $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1})$ conduit à la méthode d'Euler rétrograde (méthode implicite).

Méthodes d'ordre 2 :

Pour déterminer toutes les méthodes d'ordre 2, cherchons une fonction Φ de la forme :

$$\Phi = b_1 k_1 + b_2 k_2$$

où les coefficients k_1 et k_2 sont donnés par

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + ch, y_i + ahk_1)$$

Développons y_{i+1} au voisinage du point (x_i, y_i)

$$y_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + f(x_i, y(x_i)) \right) \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i))$$

De même, développons k_2 au voisinage de (x_i, y_i)

$$y_{i+1} = y_i + hb_1 k_1 + hb_2 \left(f(x_i, y_i) + hc \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + ah f(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) \right) + O(h^2)$$

En identifiant les deux expressions, il vient

$$\begin{cases} y(x_i) = y_i \\ f(x_i, y_i) = (b_1 + b_2) f(x_i, y_i) \\ \frac{1}{2} f'_x + \frac{1}{2} f'_y f = b_2 (c f'_x + a f'_y f) \end{cases}$$

On déduit que $b_1 + b_2 = 1$ et $b_2 c = b_2 a = \frac{1}{2}$. Soit en posant $b_2 = \theta$ et $b_1 = 1 - \theta$ et $c = a = \frac{1}{2}$, on retrouve les trois cas standards. La méthode d'Euler s'obtient pour $\theta = 0$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

La méthode de Heun (ou d'Euler-Cauchy) est obtenue pour $\theta = 1/2$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(k_1 + k_2)/2 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1) \end{cases}$$

La méthode de Runge-Kutta (proprement dite) est obtenue pour $\theta = 1$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hk_2 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1) \end{cases}$$

Methodes d'ordre 3 :

L'algorithme de Runge-Kutta classique correspond au cas $b = (\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ et à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme effectue à chaque pas le calcul de trois facteurs k_i

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(k_1 + 4k_2 + k_3)/6 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2) \\ k_3 = f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2) \end{cases}$$

Pour améliorer l'efficacité du calcul, on utilise des méthodes à pas variable, c'est-à-dire des méthodes dans lesquelles le pas varie à chaque itération. Une des méthodes classiques consiste à employer deux méthodes de Runge-Kutta emboîtées. La pre-

mière méthode d'ordre r sert à calculer la solution approchée, tandis que la seconde méthode d'ordre r' sert à estimer l'erreur de consistance pour contrôler le pas. On dit que la méthode est d'ordre (r', r) . Proposée en 1957, la méthode de Merson est la première méthode de Runge-Kutta emboîtée. Elle consiste à calculer

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/3, y_i + hk_1/3) \\ k_3 = f(x_i + h/3, y_i - hk_1/6 + hk_2/6) \\ k_4 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/8 + 3k_2/8) \\ k_5 = f(x_i + h, y_i + hk_1/2 - 3hk_3/2 + 2hk_4) \\ y_{i+1} = y_i + h(k_1 + 4k_2 + k_3)/6 \\ y_{i+1}^* = y_i + h(k_1 - 3k_3 + 4k_4)/2 \end{cases}$$

L'erreur

$$\Delta_i = |y_{i+1} - y_{i+1}^*|$$

est évaluée à chaque pas. Si ε désigne la tolérance acceptée, l'algorithme de Merson divise le pas par facteur 2 quand $\Delta_i > \varepsilon$, multiplie le pas par deux quand $\Delta_i \leq \frac{\varepsilon}{64}$, et conserve le pas actuel dans les autres cas. La méthode de Merson est d'ordre 5 pour le calcul de la solution et d'ordre 4 pour le contrôle du pas. Dans la méthode proposée par Fehlberg en 1969, on calcule

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/4, y_i + hk_1/4) \\ k_3 = f(x_i + 3h/8, y_i + 3hk_1/32 + 9hk_2/32) \\ k_4 = f(x_i + 12h/13, y_i + 439hk_1/216 - 8hk_2 + \dots \\ \quad \dots + 3680hk_3/513 - 845hk_4/4104) \\ k_5 = f(x_i + h/2, y_i - 8hk_1/27 + 2hk_2 - 3544hk_3/2565 + \dots \\ \quad \dots + 1859hk_4/4104 - 11hk_5/40) \\ y_{i+1} = y_i + h(25k_1/216 + 1408k_3/2565 + 2197k_4/4104 - k_5/5) \\ y_{i+1}^* = y_i + h(16k_1/135 + 6656k_3/12825 + 28561k_4/56430 + \dots \\ \quad \dots - 9k_5/50 + 2k_6/55) \end{array} \right.$$

D'autres méthodes d'ordre plus élevé ont été proposées. Dormand et Prince [Dormand, 1980] ont proposé une méthode d'ordre (7, 8). Plus récemment, Cash et Karp [Cash, 1990] ont proposé une méthode d'ordre (4, 5). La difficulté de ce genre d'algorithmes réside dans le fait d'ajuster au mieux les coefficients des deux méthodes.

Dans la méthode de Cash-Karp, on calcule

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = hf(x_i, y_i) \\ k_2 = hf(x_i + h/5, y_i + k_1/5) \\ k_3 = hf(x_i + 3h/10, y_i + 3k_1/40 + 9k_2/40) \\ k_4 = hf(x_i + 3h/5, y_i + 3h/10 - 9k_2/10 + 6k_3/5) \\ k_5 = hf(x_i + h, y_i - 11k_1/54 + 5k_2/2 - 70k_3/27 + 35k_4/27) \\ k_6 = hf(x_i + 7h/8, y_i + 1631k_1/55296 + 175k_2/512 + 575k_3/13824 + \dots \\ \quad \dots + 44275k_4/110592 + 253k_5/4096) \\ y_{i+1} = y_i + (37k_1/378 + 250k_3/621 + 125k_4/594 + 512k_6/1771) \\ y_{i+1}^* = y_i + (2825k_1/27648 + 18575k_3/48384 + 13525k_4/55296 + k_6/4) \end{array} \right.$$

Si on pose

$$y_{i+1} = y_i + c_1 k_1 + \dots + c_6 k_6 + O(h^6)$$

et

$$y_{i+1}^* = y_i + c_1^* k_1 + \dots + c_6^* k_6 + O(h^6)$$

Une estimation de l'erreur est donnée par

$$\Delta = y_{i+1} - y_{i+1}^* = \sum_{i=1}^6 (c_i - c_i^*) k_i$$

STABILITÉ DES MÉTHODES DE RUNGE-KUTTA

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes à un pas

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$$

avec $\Phi(t_n, y_n, h_n) = \sum_{1 \leq j \leq q} b_j p_{n,j}$. La fonction Φ est définie de manière explicite par

$$\begin{cases} \Phi(t, y, h) = \sum_{1 \leq j \leq q} b_j f(t + c_j h, y_j) & \text{avec} \\ y_i = y + h \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} f(t + c_j h, y_j), & 1 \leq i \leq q \end{cases} . \quad (2.1)$$

Supposons que f soit k -lipschitzienne en y . On va montrer que Φ est alors également lipschitzienne. Soit $z \in \mathbb{R}$ et supposons $\Phi(t, z, h)$ et z_i définis à partir de z comme dans la formule précédente

Lemme 2.1. Soit $\alpha = \max_i \left(\sum_{1 \leq j \leq i} |a_{ij}| \right)$. Alors

$$|y_i - z_i| \leq \left(1 + (\alpha kh) + (\alpha kh)^2 + \dots + (\alpha kh)^{i-1} \right) |y - z|$$

On démontre le lemme par récurrence sur i . Pour $i = 1$, on a $y_1 = y, z_1 = z$ et le résultat est évident. Supposons l'inégalité vraie pour tout $j < i$. Alors

$$\begin{aligned} |y_i - z_i| &\leq |y - z| + h \sum_{j < i} |a_{ij}| \cdot k \cdot \max_{j < i} |y_j - z_j| \\ |y_i - z_i| &\leq |y - z| + \alpha kh \max_{j < i} |y_j - z_j| \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence il vient

$$\max_{j < i} |y_j - z_j| \leq \left(1 + \alpha kh + \dots + (\alpha kh)^{i-2} \right) |y - z|$$

et l'inégalité s'ensuit à l'ordre i .

La formule (2.1) entraîne maintenant

$$|\Phi(t, y, h) - \Phi(t, z, h)| \leq \sum_{1 \leq j \leq q} |b_j| k |y_j - z_j| \leq \Lambda |y - z| \quad \text{avec}$$

$$\Lambda = k \sum_{1 \leq j \leq q} |b_j| \left(1 + (\alpha kh_{\max}) + \dots + (\alpha kh_{\max})^{j-1} \right)$$

Corollaire 2.1. Les méthodes de Runge-Kutta sont stables, avec constante de stabilité $S = e^{\Lambda T}$

Exemples 2.2.1. Pour $q = 1$, le seul choix possible est

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

On a ici $c_1 = 0, a_{11} = 0, b_1 = 1$. L'algorithme est donné par

$$\begin{cases} p_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + h_n p_{n,1} \end{cases}$$

2.3 MÉTHODE DE NEWMARK

La méthode de Newmark est une méthode très utilisée dans les codes de dynamique. C'est une méthode de résolution directe qui s'applique à l'équation matricielle

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F$$

où M est la matrice de masse, C la matrice d'amortissement, K la matrice de rigidité, F la force généralisée. La solution est une fonction $x(t)$ dépendante du temps. Le schéma de Newmark se présente sous la forme

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h\dot{x}_i + h^2((1/2 - \beta)\ddot{x}_i + \beta\ddot{x}_{i+1}) \\ \dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + h((1 - \gamma)\ddot{x}_i + \gamma\ddot{x}_{i+1}) \end{cases}$$

où β et γ sont deux paramètres. Lorsque ces deux paramètres sont nuls, on retrouve les formules de Taylor. Lorsque $\beta = \frac{1}{12}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$, la méthode s'appelle méthode de Fox-Goodwin. On démontre que la méthode de Newmark est d'ordre 1 pour $\gamma \neq \frac{1}{2}$ et d'ordre 2 pour $\gamma = \frac{1}{2}$. La discrétisation de l'équation de la dynamique s'écrit

$$\begin{aligned} (M + h\gamma C + h^2\beta K) \ddot{x}_{i+1} = & F_{i+1} - C(\dot{x}_i + (1 - \gamma)\ddot{x}_i) \\ & - K(x_i + h\dot{x}_i + h^2(1/2 - \beta)\ddot{x}_i) \end{aligned}$$

La résolution de ce système associée aux prédictions des vitesses et des déplacements conduit aux valeurs de l'accélération \ddot{x}_{i+1} .

Une amélioration de ce schéma a été proposée par Hilbert, Hugues et Taylor et est connue sous le nom de méthode *HHT* ou α -*HHT*. Elle consiste à introduire un paramètre α dans l'équation de la dynamique

$$M\ddot{x}_{i+1} + (1 + \alpha)C\dot{x}_{i+1} - \alpha C\dot{x}_i + (1 + \alpha)Kx_{i+1} - \alpha Kx_i = (1 + \alpha)F_{i+1} - \alpha F_i$$

Les valeurs \ddot{x}_0 , \dot{x}_0 et $x_0 = Mh(F_0 - Cx_0 - Kx_0)$ initialisent l'algorithme. En général, on choisit $\beta = (1 - \alpha)^2/4$ et $\gamma = 1/2 - \alpha$. Ce schéma est inconditionnellement stable pour $-1/3 \leq \alpha \leq 0$. Notons enfin que d'autres codes de mécanique utilisent la méthode de Gear, implicite à deux pas, appelée aussi Backward Differential Formulas, qui se définit par le schéma

$$\begin{cases} \dot{x}_{i+1} = (3x_{i+1} - 4x_i + x_{i-1})/2h \\ \ddot{x}_{i+1} = (3\dot{x}_{i+1} - 4\dot{x}_i + \dot{x}_{i-1})/2h \end{cases}$$

2.4 MÉTHODES D'ADAMS

2.4.1 Adams-Bashforth

Dans les méthodes proposées par la fonction f est approchée par son polynôme d'interpolation.

$$\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t)) dt \\ &\simeq y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_{n,r}(t) dt \end{aligned}$$

Dans les méthodes d'Adams-Bashforth, $p_{n,r}(x)$ est le polynôme d'interpolation de f aux points $x_{i-r}, x_{i-r+1}, \dots, x_i$. Si on note les pentes $f_i = f(x_i, y_i)$, l'algorithme de la méthode d'Adams-Bashforth a $(r+1)$ pas, s'écrit

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h_i \cdot (a_0 f_i + a_1 f_{i-1} + \dots + a_r f_{i-r}) \\ x_{i+1} = x_i + h_i \end{cases}$$

Les coefficients a_j sont tabulés, par exemple à l'ordre $r = 3$, on a $a_0 = \frac{55}{24}$, $a_1 = \frac{-59}{24}$, $a_2 = \frac{37}{24}$, $a_3 = \frac{-9}{24}$. L'erreur commise est égale à

$$c_r \cdot h^{r+2} \cdot y^{(r+2)}(\xi)$$

où $\xi \in [x_{i-r}, x_{i+1}]$. A l'ordre 3, le coefficient c_r . La méthode d'Adams-Bashforth est une méthode explicite. Les formules donnant l'expression de y_{i+1} sont parfois appelées formules d'Adams ouvertes. La méthode d'Adams-Bashforth a $(r+1)$ pas est une méthode stable (si f est lipschitzienne) et d'ordre $(r+1)$

Les méthodes de Milne explicites sont fondées sur le même principe que les méthodes d'Adams-Bashforth mais ici, le schéma donnant y_{i+1} est exprimé en fonction de y_{i-r}

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_{i-r} + h_i \cdot (a_0 f_i + a_1 f_{i-1} + \dots + a_r f_{i-r}) \\ x_{i+1} = x_i + h_i \end{cases}$$

Les coefficients a_j sont tabulés. Par exemple à l'ordre $r = 3$, on a $a_0 = \frac{8}{4}$, $a_1 = \frac{-4}{3}$, $a_2 = \frac{8}{3}$, $a_3 = 0$. L'erreur commise est égale à

$$c_r \cdot h^{r+2} \cdot y^{(r+2)}(\xi)$$

où $\xi \in [x_{i-r}, x_{i+1}]$. A l'ordre 3, le coefficient c_r

Erreur de consistance et ordre de la méthode AB_{r+1}

Soit z une solution exacte du problème de Cauchy. L'erreur de consistance est donnée par

$$\begin{aligned} e_n &= z(t_{n+1}) - y_{n+1} \\ &= z(t_{n+1}) - (z(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} p_{n,r}(t) dt) \\ e_n &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} (z'(t) - p_{n,r}(t)) dt \end{aligned}$$

où $p_{n,r}$ est précisément le polynôme d'interpolation de la fonction $z'(t) = f(t, z(t))$ aux points $t_{n-i}, 0 \leq i \leq r$. D'après le théorème de la moyenne, il existe un point $\theta \in]t_n, t_{n+1}[$ tel que

$$e_n = h_n (z'(\theta) - p_{n,r}(\theta))$$

La formule donnant l'erreur d'interpolation implique

$$z'(\theta) - p_{n,r}(\theta) = \frac{1}{(r+1)!} z^{(r+2)}(\xi) \pi_{n,r}(\xi)$$

où $\xi \in]t_{n-r}, t_{n+1}[$ est un point intermédiaire entre θ et les points t_{n-i} , et où

$$\pi_{n,r}(t) = \prod_{0 \leq i \leq r} (t - t_{n-i})$$

Si $\xi \in]t_{n-j}, t_{n-j+1}[$, $0 \leq j \leq r$, on a l'inégalité $|\xi - t_{n-i}| \leq (1 + |j - i|)h_{\max}$, d'où

$$\begin{aligned} |\pi_{n,r}(\xi)| &\leq h_{\max}^{r+1} (1+j) \dots (1+1) 1 (1+1) \dots (1+r-j) \\ &= h_{\max}^{r+1} (j+1)! (r-j+1)! \leq h_{\max}^{r+1} (r+1)! \end{aligned}$$

en majorant 2 par $j + 2, \dots, (r - j + 1)$ par $(r + 1)$. On en déduit par conséquent

$$|z'(\theta) - p_{n,r}(\theta)| \leq |z^{(r+2)}(\xi)| h_{\max}^{r+1}$$

ce qui donne la majoration cherchée de l'erreur de consistance :

$$|e_n| \leq |z^{(r+2)}(\xi)| h_n h_{\max}^{r+1} \leq C h_n h_{\max}^{r+1}$$

avec $C = \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |z^{(r+2)}(t)|$

Exemples 2.4.1. • $r = 0$: on a $p_{n,0}(t) = \text{constante} = f_n$, d'où AB_1 : $y_{n+1} = y_n + h_n f_n$. Il s'agit de la méthode d'Euler.

• $r = 1$: le polynôme $p_{n,1}$ est la fonction affine qui interpole (t_n, f_n) et (t_{n-1}, f_{n-1}) d'où les formules

$$\begin{aligned} p_{n,1}(t) &= f_n + \frac{f_n - f_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} (t - t_n) \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} p_{n,1}(t) dt &= f_n h_n + \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} \left[\frac{1}{2} (t - t_n)^2 \right]_{t_n}^{t_{n+1}} \\ &= b_n \left(f_n + \frac{h_n}{2h_{n-1}} (f_n - f_{n-1}) \right) \end{aligned}$$

L'algorithme s'écrit donc

$$AB_2 \quad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \left(f_n + \frac{h_n}{2h_{n-1}} (f_n - f_{n-1}) \right) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \\ f_{n+1} = f(t_n, y_n) \end{cases}$$

Dans le cas où le pas $h_n = h$ est constant, la formule de récurrence se réduit à

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{3}{2}f_n - \frac{1}{2}f_{n-1} \right)$$

• De manière générale, lorsque le pas est constant les coefficients $b_{n,i,r}$ ne dépendent pas de n car la méthode est invariante par translation. Pour les petites valeurs de r les coefficients $b_{i,r}$ correspondants sont donnés par le tableau :

r	$b_{0,r}$	$b_{1,r}$	$b_{2,r}$	$b_{3,r}$	$\beta_r = \sum_i b_{i,r} $
0	1				1
1	3/2	-1/2			2
2	23/12	-16/12	5/12		3,66.
3	55/24	-59/24	37/24	-9/24	6,6...

2.4.2 Adams-Moulton

Dans les méthodes d'Adams-Moulton, la fonction f est approchée par son polynôme d'interpolation aux points $x_{i-r}, \dots, x_i, x_{i+1}$. La méthode est identique à la méthode d'Adams-Bashforth, mais ici le point x_{i+1} est pris en plus. De ce fait, la méthode d'Adams-Moulton est une méthode implicite : à chaque pas de calcul, on suppose connues les valeurs $f_{i-r}, \dots, f_i, f_{i+1}$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h_i \cdot (a_0 f_{i+1} + a_1 f_i + \dots + a_r f_{i-r}) \\ x_{i+1} = x_i + h_i \end{cases}$$

Les coefficients a_j sont tabulés. Par exemple à l'ordre 3, on a $a_0 = \frac{251}{720}$, $a_1 = \frac{646}{720}$, $a_2 = \frac{-264}{720}$, $a_3 = \frac{106}{720}$, $a_4 = \frac{-19}{720}$. L'erreur commise est égale à

$$c_r \cdot h^{r+3} \cdot y^{(r+3)}(\xi)$$

où $\xi \in [x_{i-r}, x_{i+1}]$. À l'ordre 3, le coefficient c_r vaut $\frac{-3}{160}$. La méthode d'Adams-Moulton est une méthode implicite. Les formules donnant

l'expression de y_{i+1} sont parfois appelées formules d'Adams fermées.

La méthode d' Adams-Moulton a $(r + 1)$ pas est une méthode stable (si f est lipschitzienne) et d'ordre $(r + 2)$

Les méthodes de Milne implicites sont fondées sur le même principe que les méthodes d'Adams-Moulton mais ici, le schéma donnant y_{i+1} est exprimé en fonction de y_{i-r} .

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_{i-r} + h_i \cdot (a_0 f_{i+1} + a_1 f_i + \dots + a_r f_{i-r}) \\ x_{i+1} = x_i + h_i \end{cases}$$

Les coefficients a_j sont tabulés. Par exemple a l'ordre $r = 3$, on a $a_0 = \frac{14}{45}$, $a_1 = \frac{64}{45}$, $a_2 = \frac{24}{45}$, $a_3 = \frac{1464}{45}$, et $a_4 = \frac{14}{45}$. L'erreur commise est égale a

$$c_r \cdot h^{r+3} \cdot y^{(r+3)}(\xi)$$

où $\xi \in [x_{i-r}, x_{i+1}]$. A l'ordre 3, le coefficient c_r vaut $\frac{-8}{945}$

2.4.3 Stabilité de la méthode AM_{r+1}

On suppose que les rapports $\frac{h_n}{h_{n-1}}$ restent bornés, de sorte que les quantités

$$\beta_r^* = \max_n \sum_{\leq i \leq r} |b_{n,i,r}^*|, \quad \gamma_r^* = \max_n |b_{n,-1,r}^*|$$

sont contrôlées. Supposons également que $f(t, y)$ soit k -lipschitzienne en y . La méthode de résolution itérative pour y_{n+1} fonctionne dès que $h_n < \frac{1}{|b_{n,-1,r}^*|^k}$ en particulier dès que

$$h_{\max} < \frac{1}{\gamma_r^* k}$$

ce que nous supposons désormais. Soit \tilde{y}_n une suite perturbée telle que

$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h_n \left(b_{n,-1,r}^* \tilde{f}_{n+1} + \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r}^* \tilde{f}_{n-i} \right) + \varepsilon_n \\ \tilde{f}_{n-i} = f(t_{n-i}, y_{n-i}), \quad r \leq n < N \end{cases}$$

et posons $\theta_n = \max_{0 \leq i \leq n} |\tilde{y}_i - y_i|$. Comme on a $\theta_{n+1} = \max(|\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}|, \theta_n)$, il vient

$$\theta_{n+1} \leq \theta_n + kh_n \left(|b_{n,-1,r}^*| \theta_{n+1} + \sum_{0 \leq i \leq r} |b_{n,i,r}^*| \theta_n \right) + |\varepsilon_n|$$

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} (1 - |b_{n,-1,r}^*| kh_n) &\leq \theta_n \left(1 + \sum_{0 \leq i \leq r} |b_{n,i,r}^*| kh_n \right) + |\varepsilon_n| \\ &\leq \left(1 + \sum_{0 \leq i \leq r} |b_{n,i,r}^*| kh_n \right) (\theta_n + |\varepsilon_n|) \end{aligned}$$

Or $1 - |b_{n,-1,r}^*| kh_n \geq 1 - \gamma_r^* kh_{\max} > 0$, par suite

$$\theta_{n+1} \leq \frac{1 + \sum_{0 \leq i \leq r} |b_{n,i,r}^*| kh_n}{1 - |b_{n,-1,r}^*| kh_n} (\theta_n + |\varepsilon_n|)$$

$$\theta_{n+1} \leq \left(1 + \frac{\sum_{1 \leq i \leq r} |b_{n,i,r}^*| kh_n}{1 - |b_{n,-1,r}^*| kh_n} \right) (\theta_n + |\varepsilon_n|)$$

$$\theta_{n+1} \leq (1 + \Lambda h_n) (\theta_n + |\varepsilon_n|)$$

avec $\Lambda = \beta_r^* k / (1 - \gamma_r^* k h_{\max})$. Un raisonnement analogue à la démonstration du lemme de Gronwall discret donne par récurrence sur n :

$$\theta_n \leq e^{\Lambda(t_n - t_r)} \left(\theta_r + \sum_{r \leq i \leq n} |\varepsilon_i| \right)$$

d'où la constante de stabilité

$$S = e^{\Lambda T} = \exp \left(\frac{\beta_r^* k T}{1 - \gamma_r^* k h_{\max}} \right)$$

Lorsque h_{\max} est assez petit devant $1/\gamma_r^* k$, on a donc sensiblement

$$S \simeq \exp(\beta_r^* k T)$$

Le tableau du (1.3) montre qu'à ordre $r + 2$ égal, la méthode AM_{r+1} est beaucoup plus stable que AB_{r+2} . Il n'en reste pas moins que malgré cet avantage important, la méthode d'Adams-Moulton est d'utilisation délicate à cause de son caractère implicite. Les méthodes de prédiction-correction que nous allons décrire permettent d'obtenir une stabilité équivalente, tout en fournissant un schéma explicite de résolution.

Exemples 2.4.2. • $r = 0$: le polynôme $p_{n,0}^*$ est le polynôme de degré 1 qui interpole (t_{n+1}, f_{n+1}) et (t_n, f_n) , soit

$$p_{n,0}^*(t) = f_n + \frac{f_{n+1} - f_n}{h_n} (t - t_n)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} p_{n,0}^*(t) dt = h_n \left(\frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n \right)$$

On obtient ainsi la méthode dite des trapèzes (ou méthode de Crank-Nicolson) :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left(\frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n \right)$$

ou encore

$$y_{n+1} - \frac{1}{2} h_n f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + \frac{1}{2} h_n f_n$$

• $r = 1$: le polynôme $p_{n,1}^*$ interpole les points (t_{n+1}, f_{n+1}) , (t_n, f_n) , (t_{n-1}, f_{n-1}) d'où les formules

$$p_{n,1}^*(t) = f_{n+1} \frac{(t-t_n)(t-t_{n-1})}{h_n(h_n+h_{n-1})} - f_n \frac{(t-t_{n-1})(t-t_{n-1})}{h_n h_{n-1}} + f_{n-1} \frac{(t-t_n)(t-t_{n+1})}{h_{n-1}(h_n+h_{n-1})}$$

$$y_{n+1} = y_n \int_{t_n}^{t_{n+1}} p_{n,1}^*(t) dt$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left[\frac{2h_n + 3h_{n-1}}{6(h_n + h_{n-1})} f_{n+1} + \frac{3h_{n-1} + h_n}{6h_{n-1}} f_n - \frac{h_n^2}{6h_{n-1}(h_n + h_{n-1})} f_{n-1} \right]$$

Dans le cas où le pas $h_n = h$ est constant, cette formule se réduit à

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{5}{12} f_{n+1} + \frac{8}{12} f_n - \frac{1}{12} f_{n-1} \right)$$

• De manière générale, les coefficients $b_{n,i,r}^*$ sont des nombres $b_{i,r}^*$ indépendants de n lorsque le pas est constant. On a la tableau suivante :

r	$b_{-1,r}^*$	$b_{0,r}^*$	$b_{1,r}^*$	$b_{2,r}^*$	$b_{3,r}^*$	$\beta_r^* = \sum_i b_{i,r}^* $	b_{r+1}
0	1/2	1/2				1	2
1	5/12	8/12	-1/12			1.16...	3.66...
2	9/24	19/24	-5/24	1/24		1.41...	6.66...
3	251/720	646/720	-264/720	106/720	-19/20	1.78...	12.64...

Les coefficients $b_{n,i,r}^*$ vérifient toujours $\sum_{-1 \leq i \leq r} b_{n,i,r}^* = 1$

2.5 MÉTHODE DE ROSENBROCK

Les méthodes de Rosenbrock aussi appelées méthodes de Kaps-Rentrop, ont l'avantage de pouvoir traiter des systèmes raides et sont compétitives avec d'autres algorithmes plus compliqués lorsque la taille du système n'est pas trop élevée ($N < 10$)
Considérons l'équation

$$y' = f(t, y)$$

Les méthodes de Rosenbrock à s pas se définissent par le schéma

$$y_{n+1} = y_n + c_1 k_1 + \dots + c_s k_s$$

où

$$k_i = hf \left(t_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j \right) + \gamma_i h^2 \frac{\partial f}{\partial t} (t_n, y_n)$$

$$+ h \frac{\partial f}{\partial y} (t_n, y_n) \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j$$

Les coefficients b_i , $\alpha_{i,j}$ et $\gamma_{i,j}$ sont donnés pour chaque schéma et

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} \text{ et } \gamma_i = \sum_{j=1}^i \gamma_{ij}$$

Lorsque le système ne dépend pas du temps, l'équation $y' = f(y)$ est approchée par

$$y_{n+1} \approx y_n + h \left(f(y_n) + \frac{\partial f}{\partial t}(y_n) (y_{n+1} - y_n) \right)$$

ce qui conduit à la résolution d'un système de la forme

$$\left(I - h \frac{\partial f}{\partial y}(y_n) \right) (y_{n+1} - y_n) = hf(y_n)$$

appelée méthode semi-implicite d'Euler. En paramétrant ces équations, Rosenbrock propose le schéma suivant

$$\left(I - h\gamma_{ii} \frac{\partial f}{\partial y}(y_n) \right) k_i = hf \left(y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j \right) + h \frac{\partial f}{\partial y}(y_n) \sum_{j=1}^i \gamma_{ij} k_j$$

Kaps-Rentrop proposent de choisir pour coefficients $\gamma_{ii} = \gamma$, ce qui permet d'inverser facilement la matrice $(I - h\gamma \partial f(y_n) / \partial y)$ et de calculer les coefficients k_i .

Pour une méthode à $s = 2$ pas, on prendra

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$$

avec

$$\begin{aligned} (1 - \gamma h J) k_1 &= f(y_i) \\ (1 - \gamma h J) k_2 &= f(y_i + h k_1) - 2\gamma h J k_1 \end{aligned}$$

J étant une approximation du jacobien de f et $\gamma = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour une méthode à $s = 4$ pas, Kaps-Rentrop proposent de poser

$$g_i = \sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} k_j + \gamma k_i$$

et de résoudre le système

$$\begin{cases} (1/\gamma h - J_n)g_1 = f(y_n) \\ (1/\gamma h - J_n)g_2 = f(y_n + 2g_1) - 8g_1/h \\ (1/\gamma h - J_n)g_3 = f(y_n + (48g_1 + 6g_2)/25) + (372g_1 + 60g_2)/25h \\ (1/\gamma h - J_n)g_4 = f(y_n + (48g_1 + 6g_2)/25) - (112g_1 + 54g_2 + 50g_3)/125h \\ y_{n+1} = y_n + 19g_1/9 + g_2/2 + 25g_3/108 + 125g_4/108 \end{cases}$$

où J_n est une approximation du jacobien. Une estimation de l'erreur de cette méthode est donnée par la différence entre les valeurs de y_{n+1} à l'ordre $s = 4$ et à l'ordre $s = 3$

$$\Delta = y_{n+1}^{(4)} - y_{n+1}^{(3)} = \frac{17}{54}g_1 + \frac{7}{36}g_2 + \frac{125}{108}g_4$$

2.6 MÉTHODE DE PRÉDICTION-CORRECTION

Dans les méthodes de prédiction-correction (PECE), un prédicteur Φ_1 fournit une première valeur approchée \tilde{y}_{i+1} de y_{i+1} à partir de la connaissance de $y_{i-r}, \dots, y_i, f_{i-r}, \dots, f_i$. Cette valeur approchée est utilisée pour évaluer une approximation f_{i+1} de $f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$. Une nouvelle formule de y_{i+1} donne une valeur corrigée en utilisant la valeur approchée précédemment calculée de \tilde{f}_{i+1} . Pour démarrer l'algorithme, comme les premiers termes ne sont pas connus, on utilise en général une méthode de Runge-Kutta. Les méthodes de prédiction-correction, aussi appelées méthodes PECE se composent de quatre équations Prédiction (P), Evaluation (E), Correction (C) et de nouveau Evaluation (E)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Prdiction} & \tilde{y}_{i+1} = \Phi_1(y_{i-r}, \dots, y_i, f_{i-r}, \dots, f_i) \\ \text{Evaluation} & \tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) \\ \text{Correction} & y_{i+1} = \Phi_2(y_{i-r}, \dots, y_i, f_{i-r}, \dots, f_i, \tilde{f}_{i+1}) \\ \text{Evaluation} & f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}) \end{array} \right.$$

Afin de gagner du temps, la dernière évaluation est par fois omise : c'est la méthode PEC. Dans les méthodes d'Adams, le prédicteur est une méthode d'Adams-Bashforth d'ordre $(r + 1)$ et le correcteur utilise une formule d'Adams-Moulton d'ordre $(r + 2)$. Par exemple, à l'ordre 4, on emploiera

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}_{i+1} = y_{i-5} + \frac{3h}{10}(11f_i - 14f_{i-1} + 26f_{i-2} - 14f_{i-3} + 11f_{i-4}) \\ \tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{2h}{45}(7\tilde{f}_{i+1} + 32f_i + 12f_{i-1} + 32f_{i-2} + 7f_{i-3}) \\ f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}) \end{array} \right.$$

La méthode de Milne d'ordre 4 est illustrée ci-après

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}) \\ f_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3}(\tilde{f}_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}) \\ f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}) \end{array} \right.$$

À l'ordre 6, la méthode de Milne est donnée par les schémas suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{y}_{i+1} = y_{i-5} + \frac{3h}{10}(11f_i - 14f_{i-1} + 26f_{i-2} - 14f_{i-3} + 11f_{i-4}) \\ \tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{2h}{45}(7\tilde{f}_{i+1} + 32f_i + 12f_{i-1} + 32f_{i-2} + 7f_{i-3}) \\ f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}) \end{array} \right.$$

Stabilité de méthode PECE

Supposons que le prédicteur soit de la forme

$$py_n = \sum_{0 \leq i \leq r} \alpha_{n,i} y_{n-i} + h_n \sum_{0 \leq i \leq r} \beta_{n,i} f_{n-i}$$

on notons

$$A = \max_n \sum_i |\alpha_{n,i}|, \quad B = \max_n \sum_i |\beta_{n,i}|$$

Soit \tilde{y}_n une suite perturbée telle que

$$\begin{cases} p\tilde{y}_{n+1} = \sum_{0 \leq i \leq r} \alpha_{n,i} \tilde{y}_{n-i} + h_n \sum_{0 \leq i \leq r} \beta_{n,i} \tilde{f}_{n-i} \\ \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h_n \left(b_{n,-1,r}^* p\tilde{f}_{n+1} + \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r}^* \tilde{f}_{n-i} \right) + \varepsilon_n \end{cases}$$

Remarques 2.1. *Dans la réalité il s'introduit également une erreur d'arrondi $p\varepsilon_n$ au niveau de la prédiction, mais pour notre calcul il sera plus simple de comptabiliser cette erreur dans ε_n (ceci n'est visiblement pas restrictif).*

Posons $\theta_n = \max_{0 \leq i \leq n} |\tilde{y}_i - y_i|$ et $p\theta_n = |p\tilde{y}_n - py_n|$. Comme $f(t, y)$ est supposée k -lipschitzienne en y , il vient :

$$\begin{cases} p\theta_{n+1} \leq A\theta_n + h_n Bk\theta_n \\ \theta_{n+1} \leq \theta_n + kh_n (|b_{n,-1,r}^*| p\theta_{n+1} + \sum_{0 \leq i \leq r} |b_{n,i,r}^*| \theta_n) + |\varepsilon_n| \end{cases}$$

En substituant $p\theta_{n+1} \leq \theta_n + \theta_n (A - 1 + Bkh_n)$ dans la deuxième ligne il vient

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &\leq \theta_n \left(1 + \left[\sum_{-1 \leq i \leq r} |b_{n,i,r}^*| + |b_{n,-1,r}^*| (A - 1 + Bkh_n) \right] kh_n \right) + |\varepsilon_n| \\ \theta_{n+1} &\leq \theta_n (1 + \Lambda h_n) + |\varepsilon_n|\end{aligned}$$

avec $\Lambda = (\beta_r^* + \gamma_r^* (A - 1 + Bkh_{\max})) k$. Le lemme de Gronwall montre donc que la méthode PECE est stable, avec constante de stabilité

$$S = e^{\Lambda T} = \exp((\beta_r^* + \gamma_r^* (A - 1 + Bkh_{\max})) kT)$$

Si h_{\max} est petit, on va avoir

$$S \simeq \exp((\beta_r^* + \gamma_r^* (A - 1)) kT)$$

On voit que la stabilité du prédicteur n'a pas d'incidence sur la stabilité de la méthode PECE, seule la valeur de la constante A peut influencer sur cette stabilité on pourrait en théorie utiliser un prédicteur instable! La consistance du prédicteur implique $\sum_i \alpha_{n,i} = 1$. Si les coefficients $\alpha_{n,i}$ sont ≥ 0 , alors on a $A = 1$ (c'est le cas des méthodes de Nyström, Milne, ou AB_{r+1}), par conséquent la constante de stabilité

$$S \simeq \exp(\beta_r^* kT)$$

sera peu différente de celle de la méthode d'Adams-Moulton seule. On obtient donc des méthodes assez stables, d'un coût modéré en temps de calcul et d'ordre aussi élevé que l'on veut. Par comparaison avec les méthodes de Runge-Kutta, elles sont un peu plus rapides mais un peu moins stable à ordre égal.

Erreur de consistance dans PECE

Soit z une solution exacte du problème de Cauchy. L'erreur de consistance est

$$e_n = z(t_{n+1}) - y_{n+1} \quad \text{avec} \quad y_{n-i} = z(t_{n-i}), \quad 0 \leq i \leq r$$

Soit y_{n+1}^* la valeur qui serait obtenue à l'aide du seul correcteur (Adams-Moulton), de sorte que

$$\begin{cases} y_{n+1}^* = y_n + h_n(b_{n,-1,r}^* f_{n+1}^* + \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r}^* f_{n,i}) \\ f_{n+1}^* = f(t_{n+1}, y_{n+1}^*) \end{cases}$$

L'erreur de consistance correspondante est

$$e_n^* = z(t_{n+1}) - y_{n+1}^*$$

Le prédicteur introduit lui aussi une erreur de consistance

$$pe_n = z(t_{n+1}) - py_{n+1}$$

Écrivons

$$\begin{aligned} e_n &= (z(t_{n+1}) - y_{n+1}^*) + (y_{n+1}^* - y_{n+1}) \\ e_n &= e_n^* + (y_{n+1}^* - y_{n+1}) \end{aligned}$$

On a par ailleurs

$$y_{n+1}^* - y_{n+1} = h_n b_{n,-1,r}^* (f_{n+1}^* - pf_{n+1}).$$

Si $f(t, y)$ est k -lipschitzienne en y , en déduit

$$|y_{n+1}^* - y_{n+1}| \leq h_n |b_{n,-1,r}^*| k |y_{n+1}^* - py_{n+1}|$$

et $y_{n+1}^* - py_{n+1} = (z(t_{n+1}) - py_{n+1}) - (z(t_{n+1}) - y_{n+1}^*)$, d'où

$$|y_{n+1}^* - py_{n+1}| \leq |pe_n| + |e_n^*|$$

Il en résulte finalement

$$\begin{aligned} |y_{n+1}^* - y_{n+1}| &\leq |b_{n,-1,r}^*| kh_n (|pe_n| + |e_n^*|) \\ |e_n| &\leq |e_n^*| + |y_{n+1}^* - y_{n+1}| \\ |e_n| &\leq (1 + |b_{n,-1,r}^*| kh_n) |e_n^*| + |b_{n,-1,r}^*| kh_n |pe_n| \end{aligned}$$

On voit que l'influence du prédicteur est nettement moindre que celle du correcteur puisque son erreur de consistance est en facteur d'un terme $O(h_n)$. Le correcteur AM_{r+1} étant d'ordre $r+2$ c'est-à-dire $|e_n^*| \leq Ch_n h_{\max}^{r+2}$, on voit qu'il convient de choisir un prédicteur d'ordre $r+1$. Les contributions de $|e_n^*|$ et $|pe_n|$ dans $|e_n|$ seront alors toutes deux $\leq Ch_n h_{\max}^{r+2}$, l'ordre global de PECE est donc $r+2$ dans ce cas.

Exemples 2.6.1. • *Prédicteur : Euler (ordre 1), Correcteur : AM_1 (ordre 2)*

$$\left\{ \begin{array}{l} P : py_{n+1} = y_n + h_n f_n \\ E : pf_{n+1} = f(t_{n+1}, py_{n+1}) \\ C : y_{n+1} = y_n + h_n (\frac{1}{2} pf_{n+1} + \frac{1}{2} f_n) \\ E : f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{array} \right.$$

Cet algorithme coïncide avec la méthode de Heun, qui n'est autre que la méthode

de Runge-Kutta définie par

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

- *Prédicteur* : AB_{r+1} (ordre $r + 1$), *Correcteur* : AM_{r+1} (ordre $r + 2$)

$$\left\{ \begin{array}{l} P : \quad py_{n+1} = y_n + h_n \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r} f_{n-i} \\ E : \quad pf_{n+1} = f(t_{n+1}, py_{n+1}) \\ C : \quad y_{n+1} = y_n + h_n (b_{n,-1,r}^* pf_{n+1} + \sum_{0 \leq i \leq r} b_{n,i,r}^* f_{n-i}) \\ E : \quad f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{array} \right.$$

QUELQUES APPLICATIONS

Introduction

L'usage des équations différentielles pour décrire le comportement des systèmes évoluant dans le temps est d'un usage universel dans toutes les sciences qui utilisent la modélisation mathématique. Cet outil commun a plusieurs disciplines ou sous-disciplines, on commence par donner quelques exemples d'équations différentielles issues de différentes disciplines.

3.1 MÉCANIQUE

La relation fondamentale de la mécanique, écrite à 1 dimension pour une particule ponctuelle, fournit une source intarissable d'équations différentielles. Dans un système d'unités adaptées, elle s'écrit

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

où x désigne la position de la particule, \dot{x} sa dérivée par rapport au temps (la vitesse) et où f représente les forces appliquées sur la particule. Cette équation, du second ordre en x , est généralement complétée par des conditions initiales qui spécifient la

position et la vitesse a un instant origine : $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$. Il est utile de remarquer que cette équation du second ordre est équivalente à un système différentiel de 2 équations du 1er ordre. En effet, introduisons la vitesse $v \equiv \dot{x}$, l'équation précédente s'écrit aussi

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) \end{cases}$$

Le plan (x, v) est appelé, aussi bien en physique qu'en mathématique, plan ou plus généralement espace des phases. Dans le cas particulier où f ne dépend pas de x c'est-à-dire $f = f(v, t)$ dans le cas des mouvements dominés par les frottements, l'équation d'évolution de la vitesse : $\dot{v} = f(v, t)$ peut être résolue indépendamment de x . On obtient ensuite x par intégration de l'équation $\dot{x} = v$ si par contre f ne dépend que de x c'est-à-dire $f = f(x)$, l'équation obtenue, en divisant les deux équations différentielles, s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dv}{dx} = \frac{f(x)}{v} \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

On obtient donc encore une équation différentielle du 1er ordre, l'inconnue étant la fonction $v(x)$. Cette équation qui est séparable dans les variables v et x conduit directement à l'existence d'un invariant (l'énergie).

Exemple 3.1.1. Chute libre

On cherche à déterminer l'expression de la vitesse d'un corps dans l'air, c'est à dire dans notre environnement habituel. Lorsqu'on lâche un corps M de masse m dans cet environnement, il est soumis à trois forces :

- son poids : $m\vec{g}$
- une force de frottement : $-k\vec{v}$ qui s'oppose au mouvement et qui est proportionnelle à la vitesse k dépend de la forme du corps et de la composition de l'atmosphère.

- la poussée d'Archimède : $\vec{\Pi}$ que l'on négligera en raison de sa faible influence.
- On oriente l'axe du déplacement vers le bas D' après le second principe de la dynamique on a :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{g} - k\vec{v}$$

en projetant sur l'axe du mouvement et en remarquant que l'accélération est la dérivée de la vitesse, on obtient :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \quad \text{donc } \tau = \frac{m}{k}$$

- La solution de l'équation homogène est : $\lambda e^{-\frac{k}{m}t}$
- Une solution particulière est : $\frac{b}{a_0} = \frac{mg}{k}$
- La solution générale est : $v(t) = \lambda e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$ or $v(0) = 0$ donc $\left[v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \right]$.

Remarques 3.1. Un corps lâché en chute libre possède une vitesse limite $v_\infty = \frac{mg}{k}$

3.2 DYNAMIQUE DES POPULATIONS

De nombreuses modélisations de dynamique des populations (espèces animales, diffusion des virus, substances radioactives ou chimiques) ont été proposées. Parmi les plus simples, on peut citer celle attribuée à Malthus qui traduit la conservation du nombre d'individus N d'une espèce sous l'effet des naissances b et des décès d :

$$\begin{cases} \dot{N} = bN - dN \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Lorsque $b = 0$, on reconnaît dans cette équation la loi de décroissance exponentielle

des substances radioactives si d est interprétée comme une constante de désintégration. Dans le cas où $b > d$, rien ne vient limiter la croissance de la population, ce qui n'est pas très réaliste. Verhulst (1836) a proposé un modèle phénoménologique non linéaire (Modèle logistique) qui s'écrit

$$\begin{cases} \dot{N} = \alpha N \left(1 - \frac{N}{k}\right) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

où α et k sont des constantes positives. Ce modèle a un comportement très différent du modèle linéaire de Malthus. On montrera qu'il n'existe plus de solutions qui conduisent à l'extinction de l'espèce (la solution $N = 0$ est instable), le terme non linéaire conduisant à une stabilisation de la population vers la valeur limite $N = k$.

Exemples 3.2.1. Modèles d'EDO, forme générale

modéliser la dynamique d'une population sous l'effet d'un terme de croissance.

$$\begin{cases} U'(t) = f(U(t)), t \in [0, T[\\ U(0) = U_0 \geq 0 \end{cases}$$

Inconnue : taille de la population $U(t)$ à chaque instant $t > 0$.

Donnée initiale : $U_0 =$ taille initiale de la population.

Terme de croissance : $f \in C^1(\mathbb{R})$ est appelée fonction de croissance.

Population de taille : $U(t)$ Accroissement

$$U(t + \delta t) - U(t) = (\text{nb naissances} - \text{nb décès}) \text{ pendant } \delta t$$

Taux de natalité a , *de mortalité* b .

$$U(t + \delta t) - U(t) = aU\delta t - bU\delta t$$

Limite $\delta t \rightarrow 0$

$$U' = aU - bU$$

On définit donc

$$f(U) = (a - b)U$$

Modèle de Malthus (Malthus 1798)

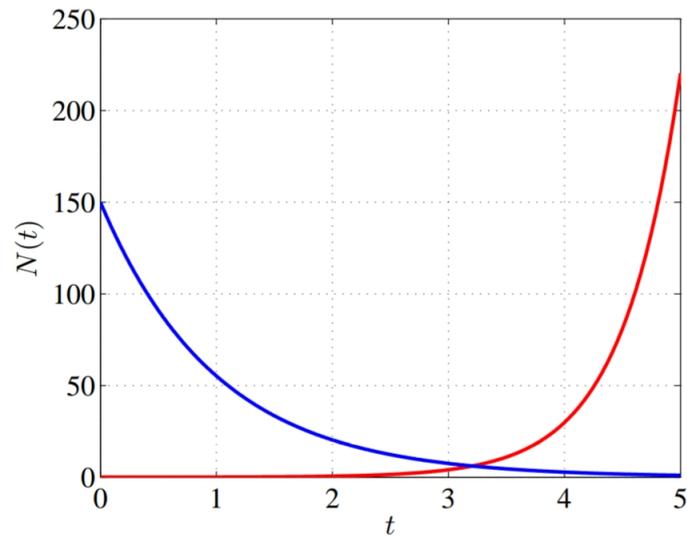
$$f(U) = (a - b)U$$

Hypothèse : a et b sont constants, indépendants de U .

Solution de $U' = f(U)$:

$$U(t) = U_0 e^{rt}$$

avec $r = a - b$, le taux de croissance de la population.



Courbe rouge : avec $U_0 = 0.01$ et $r = 2$

En bleu : avec $U_0 = 150$ et $r = -1$

- croissance exponentielle si $r > 0$ (ou décroissance, si $r < 0$)

Modèle logistique (Verhulst 1838)

$$f(U) = (a - b)U$$

Hypothèse : le taux de mortalité b augmente avec la taille de la population :

$$b(U) = b_0 + b_1U, \text{ où } b_1 > 0.$$

En posant $r = a - b_0$ et $K = \frac{a-b_0}{b_1}$, on obtient :

$$U'(t) = f(U) = rU \left(1 - \frac{U}{K} \right), t \geq 0$$

où

- r : taux de croissance intrinsèque ;
- K : capacité d'accueil du milieu (exprimée en nombre d'individus)
- U^* : tel que $f(U^*) = 0$: état stationnaire du modèle ($U' = f(U) = 0$ quand $U = U^*$)

ici, deux états stationnaires, 0 et K

3.3 ELECTRICITÉ

L'état d'un circuit électrique composé de résistances, bobines et condensateurs, peut être décrit par l'intensité I et la différence de potentiel U dans chacun de ces composants. Et les différentes lois de l'électricité montrent que cet état est régi par un système d'équation différentielles. Typiquement, pour un circuit fermé comprenant un composant de chaque sorte, dans l'ordre résistance-bobine-condensateur, la bobine ayant pour inductance L et le condensateur ayant pour capacité C , le comportement de la résistance étant régi par la loi d'Ohm généralisée :

$$U_R = F(I_R)$$

on a les équations différentielles :

$$\begin{cases} L \frac{dI_L}{dt} = U_L \\ C \frac{dU_C}{dt} = I_C \end{cases}$$

assorties des relations

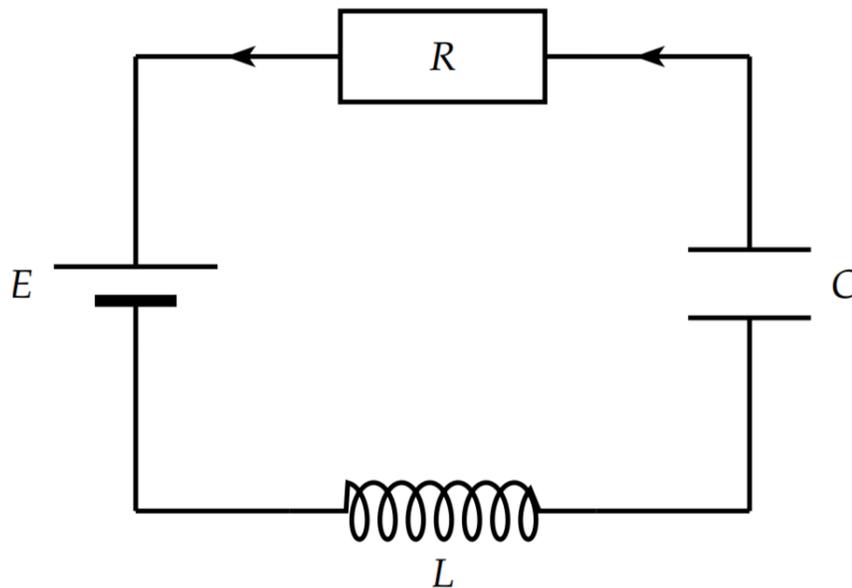
$$U_C = U_L + U_R, \quad I_R = I_L = -I_C$$

Notez qu'il y a de l'arbitraire dans l'orientation du circuit, mais les équations sont invariantes par changement d'orientation. En éliminant les autres inconnues, on se ramène à un système de deux équations pour $x = I_L$ et $y = U_C$ par exemple :

$$\begin{cases} L \frac{dx}{dt} = y - F(x) \\ C \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

Dans le cas particulier où $F(x) = x^3 - x$, ce système est connu sous le nom d'équation de Van der Pol.

Exemples 3.3.1. *Système RLC*



$$u_L + u_R + u_C = E$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = E$$

$$\text{Or } \frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C}$$

$$\text{En dérivant, on obtient : } L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (1)$$

$$\text{En divisant par } L, \text{ on a : } \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

3.4 MÉTÉOROLOGIE

Les équations qui permettent de modéliser l'évolution des différents paramètres-météorologiques (température, humidité, pression, etc...) sont très complexes. Un

systeme très simple mais qui permet de retrouver plusieurs des caractéristiques de ces équations a été proposé par Lorenz. Il s'agit d'un système d'équations différentielles ordinaires en dimension 3

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

Bibliographie

- [1] Jean Pierre DEMAILLY, Analyse numérique et ED . Collection Grenoble science, 2006.
- [2] memoire, ED et appliquées a la physique. 19 juin 2007.
- [3] Coddington E-.A et Livinson L, Theory of Ordinary differential equations. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1995.
- [4] Rienhard.H, Equations différentielles, fondements et applications .Dunod, Paris,1982.
- [5] G.Teschi, Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems .AMS, 2012,