REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET

Faculté des Mathématiques et d'Informatique

Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse Fonctionnelle Et Equations deférontialle

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

L'existence de Solutions d'un Probléme périodique de Second Ordre par la méthode des Sous et Sur Solution

Présenté par

***Mazouz Yamina**

***Miloudi Messaouda**

***Ziat Khadouma**

soutenue devant le Jury composé de

***Sabit Souhila**	**MCB**	**Président**
***Ziane Mohamed**	**MCA**	**Encadreur**
***Baghdad Said**	**MAA**	**Examinateur**

Promotion : **2018 \ 2019**

Remerciement

En préambule à ce mémoire Nous remercions ALLAH qui nous aide et nous donner
la patience et le courageded durant ces langues années d'étude.
Nous souhaitons adresser nos remerciements les plus sincères aux personne qui nous ont apportér leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à
la réussite de cette formidable année universitaire.
Nous tenant à remercier sincèrement Mr Ziane Mohamed en tant que Encadreur, qui à toujours montrér à l'écouter et trés disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire.
Enfin, nous adressons nos plus sincéres remerciements à tous nos proches et nos amis, qui nous ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire. Merci à tous.

★ ★ ★

Dedicace

Merce allah (mon dieu) de m'voire donnè capacité d'écrire et de
réfléchire,la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout de réve
bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire al hamdo li allah
je dédie modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbolede
tendres qui s'est sacrifiée pour mon bonheuret ma réussite,à ma mére
A mon pére,école de mon enfance ,qui a été mon ombre durant toutes
les années des études,et qui a veillé tout au long de ma vie à
encouragement, à me donner l'aide et à une protéger
A mes adorables sours
a mes fréres
A tout la grande familles ZIAT
A mes amies
A tout ceux qui me sont chéres
A tous ceux qui j'aime
je dédie ce travail

Ziat Khadouma

Dedicace

je dédie ce mémoire

A mes parents,qui sont la graine de mon eistence et la source de ma réussita, pour leurs encouragements et leurs sacrifices,á mes soeurs

je vous remercie pour votre confiance,votre soutien

je ne sais comment vous remercier pour tout ce que je vous dois

A toute la famille miloudi

A mes chers amis

Miloudi Massaouda

Remerciement

je rend grâce á dieu m'avoire donne le courrage et la volonté aussi que la conscienсl afib de terminer mes etudes

je dédic ce modeste travail :

A mes trés chés parents qui m'ont soutenue dans la réussite de mes études

A mes frées

A mes sours

A tout la familles MAZOUZ

A tout la familles LAID

A tout mes amies

Mazouz Yamina

Table des matières

1 Préliminaires **6**

1.1 Espaces Fonctionnels 6

1.1.1 Théorème d'Ascoli -Arzela 8

1.2 Les sous et sur-solutions 10

1.2.1 Les sous et sur-solutions de classe C^2 10

1.2.2 Les sur et sous-solutions dans l'espace $W^{2,1}$ 11

1.2.3 Propriétes des sous et sur-solutions 13

1.3 Sur les problèmes aux limites associés aux EDO du second ordre . . . 17

1.3.1 Présentation du problème 18

1.3.2 Fonction de Green 19

1.3.3 Exemples de problèmes associés aux EDO du second ordre . . 22

1.3.4 Applications aux théorèmes du point fixe 29

2 Construction des sous et sur-solutions **32**

2.1 Introduction 33

2.2 Construction des sous-solutions 34

2.3 Construction des sur-solutions 44

2.4 Exemples 46

3 La méthode des sous et sur-solutions **49**

3.1 Existence de solutions C^2 50

3.2 Exemples 58

3.3 Existence de solutions $W^{2,1}$ 61
3.4 Exemple 67

Bibliographie **69**

INTRODUCTION

L'objectif principal de Ce travail est l'étude de l'éxistence de solutions de problèmes périodiques du second ordre par la méthode des sous et sur solutions. Plus précisemment, il s'agit de problèmes périodiques du type :

$$\begin{cases} u'' = f(t, u(t)) \quad \text{pour } t \in [0, 2\pi] \\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases} \tag{1}$$

où $f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. L'étude de problème (1) est basée sur une combinaison de l'argument du point fixe avec la méthode des sous et sur-solutions.

Ce travail se compose de trois chapitres :

Chapitre 1 : C'est un rappel de quelques définitions et notions de base de l'analyse fonctionnelle. Dans ce chapitre nous rappelons les définitions des espaces, opérateurs et fonctions et des théorèmes utilisés tout au long de ce mémoire

Dans la deuxiéme partie de ce chapitre on introduit la notion des sous et sur-solutions d'un problème périodique du second ordre. On définit d'abord les sous et sur-solutions classiques C^2 qu'on utilisera au chapitre 3 pour établir un résultat d'existence au problème périodique (1) où f est une fonction continue. Par la suite on introduira la notion des sous et sur-solutions $W^{2,1}$, qui sera utilisée au chapitre 3 pour montrer l'existence de solutions $W^{2,1}$ pour le problème (1)en supposant que f est L^1-Carathéodory. Cette notion a été introduite par H.Epheser en 1955 et a été développée par De.Coster et P.Habets en 1996 [1]. Parmi les auteurs qui ont traité ce sujet nous citons S.Djebali dans ces articles [2, 3] et I.Rachunkova et M.Tvrdy [4, 5]. La troisième partie de ce chapitre concerne la résolution des problèmes périodiques du second ordre en utilisant les fonctions de Green. Nous allons traiter comme exemples les problèmes suivants :

$$\begin{cases} \varphi''(t) = h(t) & \text{si } t \in]0, 2\pi[\\ \varphi(0) = \varphi(2\pi) \\ \varphi'(0) = \varphi'(2\pi). \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \varphi''(t) - \alpha^2\varphi(t) = h(t) & \text{si } t \in]0, 2\pi[\\ \varphi(0) = \varphi(2\pi) \\ \varphi'(0) = \varphi'(2\pi). \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \varphi''(t) + \alpha^2\varphi(t) = h(t) & \text{si } t \in]0, 2\pi[\\ \varphi(0) = \varphi(2\pi) \\ \varphi'(0) = \varphi'(2\pi). \end{cases} \tag{4}$$

où $h \in L^1([0, 2\pi])$ et $\alpha > 0$.
Ces exemples seront trés utiles dans la construction des sous et sur-solutions pour le problème périodique

Chapitre 2 : Dans ce chapitre nous considérons le problème périodique (1) et nous donnerons quelques conditions sur la fonction f qui permettent d'assurer l'existence des sous et sur-solutions de ce problème. Pour construire ces dernières nous allons utiliser les résultats élaborés dans la troisième partie du chapitre 1 concernant l'existence de solutions d'un problème périodique du second ordre et précisemment les résulats des trois exemples (2), (3), (4) traités dans ce chapitre. Nous términons ce chapitre par des exemples illustratifs. Le travail de ce chapitre à été fait par I.Rachunkova et M.Tvrdy dans les articles [4, 5].

Chapitre 3 : Dans ce chapitre nous allons étudier les théorèmes d'existences cités dans les articles de I.Rachunkova et M.Tvrdy [4, 5] et dont les démonstrations de ces théorèmes ont étés prises des travaux de C. De.Coster et P.Habets [1] concernant l'existence de solutions d'un problème périodique par la méthode des sous et sur-solutions. Dans la première partie de ce chapitre nous montrons l'existence d'une solution C^2 du problème périodique (1), en supposant que f est continue et nous donnerons un théorème d'existence qui montre que si le problème admet une sous-solution α et une sur-solution β telle que $\alpha \leq \beta$ alors on peut trouver une solution comprise entre ces deux fonctions. Dans la deuxième partie nous allons traiter le même problème en supposant que f est L^1-Carathéodory et nous allons montrer l'existence d'une solution $W^{2,1}$ en introduisant la notion des sous et sur-solutions $W^{2,1}$. Dans cette méthode on donnera un critère d'extrémum basé sur la dérivée seconde. Nous terminons ce chapitre par des exemples qui illustrent l'interêt de cette méthode dans la résolution des problèmes périodiques.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et notions fondamentales de l'analyse fonctionnelle. Nous présentons quelques résultats concernant l'existence de solutions pour des problèmes périodiques associés à des EDO du second ordre en utilisant les fonctions de Green et leures propriétes.

1.1 Espaces Fonctionnels

Définition 1.1. *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur le corps* $\mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$.

Exemples

Soit $J = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Les espaces vectoriels $C(J, \mathbb{R})$, espace des fonctions continues de J dans $\mathbb{R}$ et L^1 $(J, \mathbb{R})$, espace des fonctions L^1 intégrables sur J et $BM(J, \mathbb{R})$, espace des fonctions bornées et mesurables de J dans $\mathbb{R}$, munis respectivement des normes suivantes :

$$\|x\| = \sup_{t\in J} |x(t)|, \qquad \|x\|_{L^1} = \int_a^b |x(t)|dt, \qquad \|x\|_{BM} = \max_{t\in J} |x(t)|$$

sont des espaces de Banach sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.2. *Un espace topologique X est dit compact s'il est séparé et vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

1. *De tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un recouvrement fini (propriété de Heine-Borel).*
2. *De toute famille de fermés de X ayant une intersection vide, on peut extraire une famille finie ayant une intersection vide (proposition de Contor).*
3. *Une famille de fermés de X à une intersection non vide si toute sous famille finie extraite à une intersection non vide.*

Proposition 1.1. *Dans un espace normé de dimension finie, les parties compacts sont les parties fermées et bornées.*

Définition 1.3. ***(Espace** L^p**)*** *Soit p un entier tel que $\infty > p \geq 1$. On désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. On définit l'espace :*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \qquad \textit{mesurable} \qquad \textit{et} \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}$$

que l'on munit de la norme $\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Définition 1.4. ***(Espace de Sobolev)*** *Soit m un entier tel que $m \geq 2$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On définit l'espace de Sobolev d'ordre m par :*

$$W^{m,p}(I) = \{u \in L^p(I) : u', u'', ...u^{(m)} \in L^p(I)\}$$

Définition 1.5. ***(Fonction de Carathéodory)*** *Une fonction $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est L^1- Carathéodory si :*

1. *La fonction* $t \mapsto f(t,x)$ *est mesurable sur* J*, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*.*
2. *La fonction* $x \mapsto f(t,x)$ *est continue, pour presque tout* $t \in J$*.*
3. $\forall r > 0, \exists h \in L^1(J,\mathbb{R}) : \forall t \in J, \forall x \in \mathbb{R}$ *tel que*$\|x\| < r$ *on a* $\|f(t,x)\| \leq h(t)$

Si la fonction f *vérifie uniquement les conditions* 1 *et* 2*, elle est dite de Carathéodory.*

Remarque 1.1. *En particulier l'espace :*

$$W^{2,1}(I) = \{u \in L^1(I) : u', u'' \in L^1(I)\}$$

est un espace de Sobolev.

1.1.1 Théorème d'Ascoli -Arzela

Soit M un sous ensemble d'un espace de fonctions définies d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel normé X.

Définition 1.6. ***(Ensemble équicontinu)*** *M est dit équicontinu si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t, \tau \in [a,b], |t-\tau| \leq \delta \Longrightarrow \|f(t) - f(\tau)\| \leq \varepsilon, \forall f \in M.$$

Définition 1.7. ***(Ensemble uniformément borné)*** *M est dit uniformément borné s'il existe* $K > 0$ *tel que :*

$$\|f(t)\| \leq K, \forall f \in M.$$

Définition 1.8. ***(Ensemble relativement compact)*** *M est dit relativement compact si* $\overline{M}$ *(adhérence de* M*)est compact.*

Théorème 1.1. ***(Ascoli-Arzela)*** *Soit* $C(J,\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact* J *de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans un espace vectoriel normé* $\mathbb{R}$*. Un ensemble* M *est relativement compact dans* $C(J,\mathbb{R})$ *si et seulement si* M *est uniformément borné et équicontinu .*

Corollaire 1.1. *Soit $BM(J,X)$ l'espace des fonctions bornées mesurables d'un intervalle compact J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel normé X. Pour qu'un ensemble M soit relativement compact dans $BM(J,X)$ il suffit que cet ensemble soit uniformément borné et équicontinu.*

Définition 1.9. ***(Opérateur compact)*** *Un opérateur A défini de X dans lui même est dit compact si l'ensemble $A(X)$ est relativement compact .*

Définition 1.10. ***(Opérateur complètement continu)*** *Un opérateur A est dit complètement continu si :*

i. *A est continu de X dans lui même.*

ii. *$\forall B \subset X$ borné, $A(B)$ est relativement compact.*

Théorème 1.2. ***(Point fixe de Schauder)*** *Soit X un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et C une partie non vide de X fermé et convexe. Si T est une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact, alors T admet un point fixe.*

Théorème 1.3. ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)*** *Soit X un espace de Banach. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^1(X,X)$ et soit f une fonction de X dans X tell que f>0. On suppose que :*

i. *La suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, pour presque tout $x \in X$.*

ii. *Il existe une fonction $g \in L^1(X,\mathbb{R})$ telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n(x)\| \leq g(x), \text{ pour tout } t \in X.$$

Alors :

$$f \in L^1(X,X) \qquad et \qquad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0.$$

Corollaire 1.2. ***(Inégalité de la moyenne)*** *Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction bornée sur $[a,b]$ et $g \in L^1([a,b])$. Alors :*

$$\left\| \int_a^b f(t)g(t)dt \right\| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \int_a^b \|g(t)dt\|$$

1.2 Les sous et sur-solutions

Dans cette section nous présentons des définitions et des résultats sur les sous et sur-solutions correspondantes au problème considéré. Nous allons commencer par définir les sous et sur-solutions dans l'espace C^2 puis nous donnons des définitions dans l'espace de Sobolev $W^{2,1}$.

1.2.1 Les sous et sur-solutions de classe C^2

On considère le problème périodique :

$$\begin{cases} u'' = f(t, u(t)) \quad \text{pour } t \in [0, 2\pi] \\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases} \tag{1.1}$$

où f est une fonction continue de $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Dans ce qui suit on désignera par $C^1([0, 2\pi])$ l'espace des fonctions continues et différentiables de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$ et par $C^2(]0, 2\pi[)$ l'espace des fonctions continues et deux fois différentiables de $]0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.11. ***(Sous-solution)*** *Une fonction $\alpha \in C^2(]0, 2\pi[) \cap C^1([0, 2\pi])$ est une sous -solution du problème (1.1) si :*

i) *Pour tout $t \in]0, 2\pi[; \alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t))$.*

ii) *$\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ et $\alpha'(0) \geq \alpha'(2\pi)$.*

Définition 1.12. ***(Sur-solution)*** *Une fonction $\beta \in C^2(]0, 2\pi[) \cap C^1([0, 2\pi])$ est une sur- solution du problème (1.1) si :*

i) *Pour tout $t \in]0, 2\pi[; \beta''(t) \leq f(t, \beta(t))$.*

ii) *$\beta(0) = \beta(2\pi)$ et $\beta'(0) \leq \beta'(2\pi)$.*

1.2.2 Les sur et sous-solutions dans l'espace $W^{2,1}$

Dans cette partie on repend le problème périodique (1.1) dans le quel on suppose que la fonction f est L^1-Caratheodory.
Pour simplifier les notations, on prolonge $f(t,u)$ par périodicité à tout $\mathbb{R}$, en posant :

$$f(t,u) = f(t+2\pi, u), \forall t \in \mathbb{R} \qquad et \qquad \forall u \in \mathbb{R}$$

et on considère l'ensemble :

$$C_{2\pi} = \{u \in C(\mathbb{R}) : \forall t \in \mathbb{R}, u(t) = u(t+2\pi)\}.$$

Nous allons à présent introduire les dérivées de Dini en un point t_0 d'une fonction u continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en notant par :

$$D_-u(t_0) = \lim_{h\to o^-} \inf \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h}$$

$$D^-u(t_0) = \lim_{h\to o^-} \sup \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h}$$

$$D_+u(t_0) = \lim_{h\to o^+} \inf \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h}$$

$$D^+u(t_0) = \lim_{h\to o^+} \sup \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h}$$

respectivement les dérivés à gauche supérieures et inférieures et les dérivés à droite supérieures et inférieures de la fonction u au point t_0.

Définition 1.13. ***(Sous-solution** $W^{2,1}$**)*** *Une fonction $\alpha \in C_{2\pi}$ est une sous-solution $W^{2,1}$ du problème (1.1) si pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, ou bien $D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$ ou bien il existe un intervalle I_0 ouvert tel que $t_0 \in I_0$, $\alpha \in W^{2,1}(I_0)$ et pour presque tout $t \in I_0$ on a :*

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t)).$$

Définition 1.14. ***(Sur-solution** $W^{2,1}$**)** *Une fonction $\beta \in C_{2\pi}$ est une sur-solution $W^{2,1}$ du problème (1.1) si pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, ou bien $D^-\beta(t_0) > D_+\beta(t_0)$, ou bien il existe un intervalle I_0 ouvert tel que $t_0 \in I_0$, $\beta \in W^{2,1}(I_0)$ et pour presque tout $t \in I_0$ on a :*

$$\beta''(t) \leq f(t, \beta(t)).$$

Proposition 1.2. *Une fonction $\alpha \in C^2(]0, 2\pi[) \cap C^1([0, 2\pi])$ est une sous-solution $W^{2,1}$ du problème (1.1) si et seulemement si elle satisfait la Définition 1.11.*

Démonstration. Condition nécessaire : On suppose que α est une sous-solution C^2 du problème (1.1). C'est-à-dire qu'elle satisfait Définition 1.11. Alors pour tout $t \in]0, 2\pi[$ on a :$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t))$. Ce qui implique que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ la condition $D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$ n'est pas satisfaite car $\alpha \in C^2(]O, 2\pi[)$ mais il existe un intervalle ouvert $I_0 =]2\pi k, 2\pi(k+1)[$ où $k \in \mathbb{N}$ tel que $t_0 \in I_0$ et $\alpha \in W^{2,1}(I_0)$ car on a $C^2(0, 2\pi) \cap C^1([0, 2\pi]) \subset W^{2,1}(]0, 2\pi[)$ et pour tout $t \in I_0$

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t)).$$

Donc α est une sous-solution dans $W^{2,1}$.

Condition suffisante : On suppose que α est une sous-solution $W^{2,1}$ du problème (1.1). Soit $t_0 \in]0, 2\pi[$. Puisque $\alpha \in C^1([0, 2\pi])$ alors $D_-\alpha(t_0) = D^+\alpha(t_0)$. Donc il existe un intervalle I_0 ouvert tel que $t_0 \in I_0$ et $\alpha \in W^{2,1}(I_0)$ et pour presque tout $t \in I_0$ on a $\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t))$, puisque α'' et f sont continues sur $]0, 2\pi[$, alors :

$$\forall t \in I_0, \alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t))$$

et comme $\alpha \in C_{2\pi}$, alors $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ de plus

$$\begin{aligned}\alpha'(0) &= \lim_{h\to o} \frac{\alpha(h)-\alpha(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to o} \frac{\alpha(2\pi+h)-\alpha(2\pi)}{h} \\ &= \alpha'(2\pi).\end{aligned}$$

D'ou $\alpha'(0) \geq \alpha'(2\pi)$; ce qui prouve que α est une sous-solution C^2.

Proposition 1.3. *Une fonction* $\beta \in C^2(]0,2\pi[) \cap C^1([0,2\pi])$ *est une sur-solution* $W^{2,1}$ *du problème (1.1) si et seulemement si elle satisfait la Définition 1.12.*

Démonstration.

Elle suit les mêmes étapes et le même raisonnement que la proposition précédante.

1.2.3 Propriétes des sous et sur-solutions

Proposition 1.4. *Si* α_1 *et* α_2 *(resp.*$\beta_1 et \beta_2$*) sont deux sous-solutions (resp.sur-solutions) du problème (1.1) qui s'intersectent un nombre fini de fois, alors* $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2)$*, resp.* $(\beta = \min(\beta_1, \beta_2))$ *est une sous-solution (resp.sur-solution) du problème (1.1).*

Démonstration.

Soient α_1 et α_2 deux sous-solutions du problème (1.1) et soit $t_0 \in \mathbb{R}$.

$\diamond$ Si $\alpha_1(t_0) > \alpha_2(t_0)$ alors, grâce à la continuité de α_1 et α_2, il existe un intervalle ouvert V tel que $t_0 \in V$ et $\alpha_1(t) > \alpha_2(t), \forall t \in V$.

• Si $D_{-}\alpha_1(t_0) < D^{+}\alpha_1(t_0)$ alors :

$$\begin{aligned} D_{-}\alpha(t_0) &= \lim_{h\to 0^-} inf\frac{\alpha(t_0+h)-\alpha(t_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} inf\frac{\alpha_1(t_0+h)-\alpha_1(t_0)}{h} \\ &= D_{-}\alpha_1(t_0) \\ &< D^{+}\alpha_1(t_0) \\ &= \lim_{h\to 0^+} sup\frac{\alpha_1(t_0+h)-\alpha_1(t_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} sup\frac{\alpha(t_0+h)-\alpha(t_0)}{h} \\ &= D^{+}\alpha(t_0). \end{aligned}$$

• S'il existe un intervalle ouvert I_0 tel que $t_0 \in I_0$, $\alpha_1 \in W^{2,1}(I_0)$ et pour presque tout $t_0 \in I_0$,

$$\alpha_1''(t) \geq f(t,\alpha_1(t))$$

alors pour $I_1 = I_0 \cap V$, on a $\alpha_1 = \alpha$ sur I_1.Donc $\alpha \in W^{2,1}(I_1)$ et pour presque tout $t \in I_1$

$$\alpha''(t) \leq f(t,\alpha(t)).$$

$\diamond$ Si $\alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0) = \alpha(t_0)$.

Dans ce cas on va discuter deux possibilités sur $\alpha_1(t)$, et $\alpha_2(t)$:

* Si $\alpha_1(t) \geq \alpha_2(t)$ sur un voisinage $]t_0-h, t_0+h[$ de t_0, on a :

• Si $D_{-}\alpha_1(t_0) < D_{+}\alpha_1(t_0)$ alors :

$$\begin{aligned}
D_{-}\alpha(t_0) &= \lim_{h\to 0^-} inf \frac{\alpha(t_0+h)-\alpha(t_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} inf \frac{\alpha_1(t_0+h)-\alpha_1(t_0)}{h} \\
&= D_{-}\alpha_1(t_0) \\
&< D_{+}\alpha_1(t_0) \\
&= \lim_{h\to 0^+} inf \frac{\alpha_1(t_0+h)-\alpha_1(t_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} inf \frac{\alpha(t_0+h)-\alpha(t_0)}{h} \\
&= D_{+}\alpha(t_0).
\end{aligned}$$

• S'il existe un intervalle ouvert I_0 tel que $t_0 \in I_0$, $\alpha_1 \in W^{2,1}(I_0)$ et pour presque tout $t \in I_0$,

$$\alpha_1''(t) \geq f(t, \alpha_1(t)).$$

alors il existe un intervalle $I_1 = I_0 \cap]t_0 - h, t_0[$ tel que $t_0 \in I_1$, $\alpha = \alpha_1 \in W^{2,1}(I_1)$ et pour presque tout $t \in I_1$

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t))$$

* Si $\alpha_1(t) > \alpha_2(t)$ sur $]t_0 - h, t_0[$ et $\alpha_1(t) < \alpha_2(t)$ sur $]t_0, t_0 + h[$,

• Si $D_{-}\alpha_1(t_0) < D_{+}\alpha_1(t_0)$,alors :

$$\begin{aligned}
D_{-}\alpha(t_0) &= \lim_{h\to 0^-} inf \frac{\alpha(t_0+h)-\alpha(t_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} inf \frac{\alpha_1(t_0+h)-\alpha_1(t_0)}{h} \\
&= D_{-}\alpha_1(t_0) \\
&< D_{+}\alpha_1(t_0) \\
&= D_{+}\alpha_2(t_0) \\
&= \lim_{h\to 0^+} inf \frac{\alpha_2(t_0+h)-\alpha_2(t_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} inf \frac{\alpha(t_0+h)-\alpha(t_0)}{h} \\
&= D_{+}\alpha(t_0).
\end{aligned}$$

• S'il existe un intervalle ouvert I_0 tel que $t_0 \in I_0$, $\alpha_1 \in W^{2,1}(I_0)$ et pour presque tout $t \in I_0$

$$\alpha_1''(t) \geq f(t, \alpha_1(t)).$$

Alors :

∘ Si $D_{-}\alpha_2(t_0) < D^{+}\alpha_2(t_0)$, alors :

$$\begin{aligned}
D_-\alpha(t_0) &= \lim_{h\to 0^-} inf \frac{\alpha(t_0+h)-\alpha(t_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} inf \frac{\alpha_1(t_0+h)-\alpha_1(t_0)}{h} \\
&= D_-\alpha_1(t_0) \\
&= D_-\alpha_2(t_0) \\
&< D^+\alpha_2(t_0) \\
&= \lim_{h\to 0^+} sup \frac{\alpha_2(t_0+h)-\alpha_2(t_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} sup \frac{\alpha(t_0+h)-\alpha(t_0)}{h} \\
&= D^+\alpha(t_0).
\end{aligned}$$

∘ S'il existe un intervalle ouvert I_1 tel que $t_0 \in I_1$, $\alpha_2 \in W^{2,1}(I_1)$ et pour presque tout $t \in I_1$,

$$\alpha_2''(t) \geq f(t, \alpha_2(t)).$$

Alors il existe un intervalle $I = I_0 \cap I_1$ tel que $t_0 \in I$, $\alpha \in W^{2,1}(I)$ et pour presque tout $t \in I$,

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t))$$

1.3 Sur les problèmes aux limites associés aux EDO du second ordre

L'objectif de cette partie est de présenter quelques résultats concernant les problèmes aux limites associés aux EDO du second ordre, et en particulier les problèmes périodiques linéaires. Nous allons étudier des résultats d'existence de solutions pour ce type de problèmes en utilisant les fonctions de Green que nous allons utiliser dans la construction des sous et sur-solutions du problème (1.1).

1.3.1 Présentation du problème

On considère le problème du second ordre suivant :

$$\begin{cases} \varphi''(t) + p(t)\varphi(t) = f(t) \quad \text{pour } t \in [a,b] \\ \varphi(a) = \varphi(b) \\ \varphi'(a) = \varphi'(b) \end{cases} \tag{1.2}$$

où p et f sont des fonctions définies de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
On appelle problème homogène associé au problème (1.2) le problème suivant :

$$\begin{cases} \varphi''(t) + p(t)\varphi(t) = 0 \quad \text{pour } t \in [a,b] \\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \\ \varphi'(a) = \varphi'(b) = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Théorème 1.4. ***(Altérnative de Fredholm)*** *Le problème (1.2) admet pour toute fonction f une solution unique si le problème homogène (1.3) admet pour seule solution la solution triviale.*

Remarque 1.2. *Le problème (1.3) a au moins une solution, par exemple la solution triviale $\varphi \equiv 0$. Cependant cette solution a peu d'intérêt en pratique ce qui nous ramène à montrer que ce problème a au moins une solution non triviale. On a le résultat suivant :*

Proposition 1.5. *Une condition necessaire et suffisante pour que le problème (1.3) admet une solution non triviale est que pour deux solutions linéairement indépen-*

dantes φ_1 et φ_2 de l'equation $\varphi''(t) + p(t)\varphi(t) = 0$ on a :

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(a) - \varphi_1'(a) & \varphi_2(a) - \varphi_2'(a) \\ \varphi_1(b) - \varphi_1'(b) & \varphi_2(b) - \varphi_2'(b) \end{vmatrix} = 0. \tag{1.4}$$

Dans ce cas toutes les solutions sont données par : $\varphi(t) = c\varphi_0(t)$ où φ_0 est une solution non triviale du problème (1.3) et c une constante arbitraire.

1.3.2 Fonction de Green

Définition 1.15. *On appelle fonction de Green associée au problème (1.2) une fonction $G : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *G est continue sur $[a,b] \times [a,b]$.*
2. *G est symétrique : $G(t,s) = G(s,t), \forall (t,s) \in [a,b] \times [a,b]$.*
3. *$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)$ est continue pour tout $t \neq s$.*
4. *$\frac{\partial G}{\partial t}(t^+, t^-) - \frac{\partial G}{\partial t}(t^-, t^+) = 1$.*
5. *La fonction partielle $t \longmapsto G(t,s)$ est solution de (1.2).*
6. *La fonction partille $t \longmapsto G(t,s)$ vérifie les conditions aux bords homogènes, pour tout $s \in [a,b]$.*

Théorème 1.5. *Si le problème (1.3) n'admet pas de solutions non triviales, alors il existe une et une seule fonction G ne dépendant pas de f et dite fonction de Green telle que pour toute fonction f la solution du problème (1.2) s'écrie de manière unique sous la forme :*

$$\varphi(t) = \int_a^b G(t,s) f(s) ds.$$

Démonstration.

***Existence de la fonction G :**

On considère deux solutions φ_1 et φ_2 de l'equation

$$\varphi'' + p\varphi = 0$$

qui vérifient :

$$\begin{cases} \varphi_1(a) = \varphi_1(b) \\ \varphi_2'(a) = \varphi_2'(b) \end{cases} \quad ou \begin{cases} \varphi_2(a) = \varphi_2(b) \\ \varphi_1'(a) = \varphi_1'(b). \end{cases}$$

On appelle wronskien des fonctions φ_1 et φ_2 le nombre :

$$w(\varphi_1, \varphi_2)(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t).$$

On a $w(\varphi_1, \varphi_2) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$ et de plus il ne dépend pas du choix de t .
On pose

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{\varphi_1(t)\varphi_2(s)}{w(\varphi_1,\varphi_2)(t)} & \text{si } a \leq t \leq s \leq b \\ \frac{\varphi_1(t)\varphi_2(s)}{w(\varphi_1,\varphi_2)(t)} & \text{si } a \leq s < t \leq b. \end{cases} \tag{1.5}$$

On peut vérifier facilement que G vérifie les propiétés de la définition 1.15.

***Unicité de la fonction G :**

Soit G et H deux fonctions de Green associées au problème (1.2). Alors

$$\int_a^b [G(t, s) - H(t, s)]f(s)ds = 0, \forall t \in [a, b], et \forall f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

pour t fixé posons $f(s) = G(t, s) - H(t, s)$;on a

$$\int_a^b [G(t, s) - H(t, s)]^2 ds = 0, \forall t \in [a, b]$$

comme G et H sont continues alolrs $G \equiv H$ c'est-à-dire

$$G(t, \cdot) = H(t, \cdot), \forall t \in [a, b]$$

***Existence et unicité d'une solution :**

La fonction φ définie par :

$$\varphi(t)=\int_a^b G(t,s)f(s)ds=\frac{\varphi_2(t)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}\int_a^t \varphi_1(s)f(s)ds+\frac{\varphi_1(t)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}\int_a^t \varphi_2(s)f(s)ds$$

est solution du problème (1.2). En effet,nous avons :

$$\varphi'(t)=\int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds$$

et en dérivant une deuxième fois on trouve :

$$\varphi''(t)=\int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial^2 t}(t,s)f(s)ds+f(t)\left[\frac{\partial G}{\partial t}(t,t^-)-\frac{\partial G}{\partial t}(t,t^+)\right]$$

or d'aprés les propiétés de la fonction de Green on a :

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,t^-)-\frac{\partial G}{\partial t}(t,t^+)=1.$$

On en déduit l'expression :

$$\varphi''(t)=\int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial^2 t}(t,s)f(s)ds+f(t).$$

On remplace φ dans l'équation $\varphi''(t)+p(t)\varphi(t)=f(t)$ pour trouver :

$$\int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial^2 t}(t,s)f(s)ds+f(t)+p(t)\int_a^b G(t,s)f(s)ds=f(t).$$

ce qui implique que :

$$\int_a^b\left[\frac{\partial^2 G}{\partial^2 t}(t,s)+p(t)G(t,s)\right]f(s)ds+f(t)=f(t).$$

Puisque G vérifie l'équation homogène $\varphi''(t) + p(t)\varphi(t) = 0$, alors

$$\frac{\partial^2 G}{\partial^2 t}(t,s) + p(t)G(t,s) = 0.$$

ce qui entraine que $f(t) = f(t)$. D'ou φ est solution du problème (1.2).

1.3.3 Exemples de problèmes associés aux EDO du second ordre

Exemple 1.3.1. *Soit le problème :*

$$\begin{cases} \varphi''(t) = h(t) & \textit{pour } t \in [0,2\pi] \\ \varphi(0) = \varphi(2\pi) = c \\ \varphi'(0) = \varphi'(2\pi) \end{cases} \tag{1.6}$$

ou $c \in \mathbb{R}$ et $h \in L([0,2\pi])$.
Le problème (1.6) admet une unique solution $\varphi \in C^2([0,2\pi])$ donnée par :

$$\varphi(t) = c + \int_0^{2\pi} H(t,s)h(s)ds, \forall t \in [0,2\pi]$$

où la fonction H est définie par :

$$H(t,s) = \begin{cases} \frac{t(s-2\pi)}{2\pi} & si\ 0 \le t \le s \le 2\pi \\ \frac{s(t-2\pi)}{2\pi} & si\ 0 \le s \le t \le 2\pi. \end{cases} \tag{1.7}$$

En effet : on considère l'équation

$$\varphi''(t) = h(t).$$

En intégrant une première fois les deux membres entre 0 *et* t, *on obtient :*

$$\int_0^t \varphi''(s)ds = \int_0^t h(s)ds,$$

c'est-à-dire,

$$\varphi'(t) - \varphi'(0) = \int_0^t h(s)ds$$

et donc

$$\varphi'(t) = \int_0^t h(s)ds + \varphi'(0).$$

Ensuite par une deuxième intégration, on trouve :

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t ds \int_0^s h(\tau)d\tau + \varphi'(0).$$

C'est-à-dire,

$$\varphi(t) = \int_0^t (t-s)h(s)ds + t\varphi'(0) + \varphi(0).$$

Comme on a : $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ *et* $\varphi'(0) = \varphi'(2\pi)$ *alors :*

$$c + \varphi'(0)2\pi + \int_0^{2\pi} (2\pi - s)h(s)ds = c$$

ce qui donne

$$\varphi'(0) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2\pi - s)h(s)ds.$$

On remplace $\varphi'(0)$ dans l'expression de $\varphi(t)$ on trouve :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= c - \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi}(2\pi - s)h(s)ds + \int_0^t (t-s)h(s)ds \\
&= c - \frac{t}{2\pi}\int_0^t (2\pi - s)h(s)ds - \frac{t}{2\pi}\int_t^{2\pi}(2\pi - s)h(s)ds + \int_0^t (t-s)h(s)ds \\
&= c + \int_0^t \frac{s(t-2\pi)}{2\pi}h(s)ds + \int_t^{2\pi}\frac{t(s-2\pi)}{2\pi}h(s)ds \\
&= c + \int_0^{2\pi} H(t,s)h(s)ds
\end{aligned}$$

où H est définie par l'expression (1.7).

Lemme 1.1. *La fonction H donnée par (1.7) vérifie les estimations suivantes :*

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{s(2\pi - s)}{2\pi} \leq H(t,s) \leq 0$$

pour tout $(s,t) \in [0, 2\pi]^2$.

Démonstration.

*Si $0 \leq t \leq s \leq 2\pi$

$$H(t,s) = \frac{s(t-2\pi)}{2\pi}$$

On a : $s \leq t$ et $t - 2\pi \leq 0$, alors :

$$\begin{aligned}
s(t-2\pi) &\geq t(t-2\pi) \\
&\geq t(s-2\pi) \\
&\geq s(s-2\pi).
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que :

$$\frac{s(t-2\pi)}{2\pi} \geq \frac{s(s-2\pi)}{2\pi}.$$

On considère maintenant la fonction $p(s) = \frac{s(s-2\pi)}{2\pi}$ définie sur $[0, 2\pi]$. On a $p'(s) =$

$\frac{s-\pi}{\pi}$ s'annule pour $s=\pi$. Elle est négative sur $[0,\pi]$ et positive sur $[\pi,2\pi]$. Donc p admet un minimum au point $s=\pi$, et $p(\pi)=\frac{-\pi}{2}$, alors pour tout $s\in[0,2\pi], p(s)\geq \frac{-\pi}{2}$. D'ou

$$-\frac{\pi}{2}\leq\frac{s(s-2\pi)}{2\pi}\leq H(t,s)\leq 0.$$

De la même manière on montre que cette inégalité est satisfaite si on prend $0\leq s\leq t\leq 2\pi$.

Exemple 1.3.2. *Soit $\alpha>0$ et $\alpha\neq k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Alors pour toute fonction $h\in L([0,2\pi])$ le problème :*

$$\begin{cases}\varphi''(t)+\alpha^2\varphi(t)=h(t) & \textit{pour } t\in[0,2\pi]\\ \varphi(0)=\varphi(2\pi)\\ \varphi'(0)=\varphi'(2\pi)\end{cases}\tag{1.8}$$

admet une unique solution $\varphi\in C^2[0,2\pi]$ définie par :

$$\varphi(t)=\int_0^{2\pi}g(t,s)h(s)ds$$

où $g(t,s)$ est donnée par :

$$g(t,s)=\begin{cases}\frac{cos(\alpha(\pi+t-s)}{2\alpha sin(\alpha\pi)} & si\ 0\leq t\leq s\leq 2\pi\\ \frac{cos(\alpha(\pi+s-t)}{2\alpha sin(\alpha\pi)} & si\ 0\leq s\leq t\leq 2\pi.\end{cases}\tag{1.9}$$

Pour démontrer ce résultat on considère d'abord le problème homogène associé au problème (1.8) et on peut montrer qu'il admet seulement la solution triviale. D'ou par le Théorème 1.5 on conclu que la fonction de Green existe et est unique .
Pour la construction de cette fonction on prend deux solutions de l'equation différentielle de ce problème linéairement indépendantes et chacune d'elles vérifie une des conditions aux bords.

Les solutions de l'équation différentielle $\varphi'' + \alpha^2\varphi = 0$ sont de la forme :

$$\varphi(t) = c_1 cos(\alpha t) + c_2 sin(\alpha t)$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires.
Soient φ_1 et φ_2 deux solutions telles que :

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(2\pi) \text{ et } \varphi_2'(0) = \varphi_2'(2\pi)$$

on trouve :

$$\varphi_1(t) = 2sin(\pi\alpha)cos(\pi\alpha - \alpha t)$$

$$\varphi_2(t) = -2sin(\alpha\pi)sin(\alpha\pi - \alpha t).$$

Le wronskien de φ_1 et φ_2 est donné par : $w(\varphi_1, \varphi_2) = 4\alpha sin^2(\alpha\pi)$ et d'apres la formule (1.5) la fonction de Green sera donnée par l'expression (1.9) et enfin la solution du problème (1.8) est définie par :

$$\varphi(t) = \int_0^{2\pi} g(t, s)h(s)ds.$$

Lemme 1.2. *Pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$, la fonction de Green g dans (1.9) satisfait aux estimations suivantes :*

$$0 \leq \frac{cos(\alpha\pi)}{2\alpha sin(\alpha\pi)} \leq g(t, s) \leq \frac{1}{2\alpha sin(\alpha\pi)}$$

pour tout $(t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Démonstration.
Si $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$, $0 < \alpha\pi \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\sin(\alpha\pi) \geq 0$. Delà :

$$\frac{\cos(\alpha(\pi + t - s))}{2\alpha\sin(\alpha\pi)} \leq \frac{1}{2\alpha\sin(\alpha\pi)}.$$

D'autre part si on suppose que $0 \leq t \leq s \leq 2\pi$. On a $\pi+t-s \leq \pi$, et la fonction cos est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, alors $\cos(\alpha(\pi+t-s)) \geq \cos(\alpha\pi)$ car $\alpha(\pi+t-s) \leq (\alpha\pi) \leq \frac{\pi}{2}$. D'où :

$$\frac{\cos(\alpha(\pi+t-s))}{2\alpha\sin(\alpha\pi)} \geq \frac{\cos(\alpha\pi)}{2\alpha\sin\alpha\pi}.$$

On en déduit alors que :

$$0 \leq \frac{cos(\alpha\pi)}{2\alpha sin(\alpha\pi)} \leq g(t,s) \leq \frac{1}{2\alpha sin(\alpha\pi)}.$$

De la même manière on montre cette inégalité si $0 \leq s \leq t \leq 2\pi$.

Exemple 1.3.3. *Soit $\alpha > 0$. Pour toute fonction $h \in L([0,2\pi])$ le problème :*

$$\begin{cases} \varphi''(t) - \alpha^2\varphi(t) = h(t) & pour\ t \in [0,2\pi] \\ \varphi(0) = \varphi(2\pi) \\ \varphi'(0) = \varphi'(2\pi) \end{cases} \tag{1.10}$$

admet une unique solution $\varphi \in C^2[0,2\pi]$ définie par :

$$\varphi(t) = \int_0^{2\pi} k(t,s)h(s)ds$$

où $k(t,s)$ est donnée par :

$$k(t,s) = \begin{cases} -\frac{\cosh(\alpha(\pi+t-s)}{2\alpha\sinh(\alpha\pi)} & si\ 0 \leq t \leq s \leq 2\pi \\ -\frac{\cosh(\alpha(\pi+s-t)}{2\alpha\sinh(\alpha\pi)} & si\ 0 \leq s \leq t \leq 2\pi. \end{cases} \tag{1.11}$$

On reprend le même raisonnement que dans l'Exemple 1.3.2, en considèrant les solutions de l'équation différentielle $\varphi'' - \alpha^2\varphi = 0$ qui sont de la forme :

$$\varphi(t) = c_1e^{\alpha t} + c_2e^{-\alpha t}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires. Comme le problème homogène admet *uniquement la solution triviale alors le problème (1.10) admet une unique solution donnée par :*

$$\varphi(t) = \int_0^{2\pi} k(t,s)h(s)ds$$

où k est la fonction de Green associée au problème (1.10).
Pour la construction de la fonction k on considère deux solutions φ_1 et φ_2 de l'équation $\varphi'' - \alpha^2\varphi = 0$ telles que

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(2\pi) \qquad et \qquad \varphi_2'(0) = \varphi_2'(2\pi).$$

On trouve :

$$\varphi_1(t) = 2(\cosh(\alpha t - 2\pi\alpha) - \cosh \alpha t)$$

$$\varphi_2(t) = 2(\sinh \alpha t - \sinh(\alpha t - 2\pi\alpha)).$$

Le wronskien de φ_1 et φ_2 est donné par : $w(\varphi_1, \varphi_2) = 16\ \alpha \sinh^2 \pi\alpha$ et en apliquant la formule (1.5) on obtient l'expression de $k(t,s)$ donnée par (1.11).

Lemme 1.3. *On peut vérifier que pour tout $\alpha > 0$ la fonction de Green k satisfait aux estimations suivantes*

$$-\frac{\cosh(\alpha\pi)}{2\alpha \sinh(\alpha\pi)} \leq k(t,s) \leq \frac{-1}{2\alpha \sinh(\alpha\pi)} < 0$$

pour tout $(t,s) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$.

Démonstration.

On a

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

et

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

La fonction cosh étant croissante sur $[0, \infty[$, en prenant $0 \leq t \leq s \leq 2\pi$ on a

$\alpha(\pi + t - s) \leq \alpha\pi$, et delà :

$$\cosh(\alpha(\pi + t - s)) \leq \cosh(\alpha\pi).$$

D'ou puisque la fonction sinh est strictement positive sur $]0, \infty[$ on a :

$$\frac{\cosh(\alpha(\pi + t - s))}{2\alpha \sinh(\alpha\pi)} \leq \frac{\cosh(\alpha\pi)}{2\alpha \sinh(\alpha\pi)}.$$

D'autre part, on a $\cosh(\alpha(\pi + t - s)) \geq 1$ ce qui entraîne :

$$\frac{\cosh(\alpha(\pi + t - s))}{2\alpha \sinh(\alpha\pi)} \geq \frac{1}{2\alpha \sinh(\alpha\pi)}.$$

Ainsi nous avons vérifier que pour tout $t, s \in [0, 2\pi]$ tel que $t \leq s$, on a :

$$0 > \frac{\cosh(\alpha\pi)}{2\alpha \sinh(\alpha\pi)} \geq \frac{\cosh(\alpha(\pi + t - s))}{2\alpha \sinh(\alpha\pi)} \geq \frac{1}{2\alpha \sinh(\alpha\pi)}.$$

Si on multiplie les membres de cette inégalité par -1 on trouve

$$-\frac{\cosh(\alpha\pi)}{2\alpha \sinh(\alpha\pi)} \leq k(t, s) \leq \frac{-1}{2\alpha \sinh(\alpha\pi)} < 0$$

pour tout $(t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.
Par un raisonnement analogue on montre cette estimation pour $s \leq t$.

1.3.4 Applications aux théorèmes du point fixe

Théorème du point fixe de Brouwer(1912)

Théorème 1.6. *Soit C un compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \longrightarrow C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C.*

Démonstration.
Sans perte de généralité nous allons nous restraindre au cas où $C = \overline{B}(0, R)$.

Si pour $x_0 \in \partial C$, $f(x_0) = x_0$, le théorème est démontré. Sinon i.e $f(x) \neq x, \forall x \in \partial C$ considérons alors la déformation continue $f_t(x) = x - tf(x)$, pour $t \in [0,1]$, et $x \in \partial C$. On a les estimations suivantes :

$$\|f_t(x)\| \geq |\|x\| - t\|f(x)\|| = |R - t\|f(x)\|| \geq (1-t)R > 0.$$

En effet, comme $f(C) \subset C$ on a

$$t\|f(x)\| < \|f(x)\| \leq R, \forall t \in [0,1].$$

Le $deg(I_d - tf, C, 0)$ est donc bien défini et vaut par homotopie

$$deg(I_d, C, 0) = 1 = deg(I_d - f, C, 0) \neq 0.$$

Il existe donc $x \in C$ tel que $(I_d - f)(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$.

Théorème de Schauder (1930)

Théorème 1.7. *Soit C un sous ensemble convexe, fermé, et non vide d'un espace de Banach et $f : C \longrightarrow C$ une application continue et compacte. Alors f admet au moins un point fixe dans C.*

Démonstration.

***Etape 1 :**On suppose $C = \overline{B}(0,1)$.

S'il existe $x_0 \in \partial C$ tel que $f(x_0) = x_0$ il n'y a rien à démontrer, sinon $\forall t \in [0,1]$ le degré de $I_d - tf$ en 0 relativement à C est bien défini. En effet s'il existe $x \in \partial C$ tel que $tf(x) = x$ alors, $R = t\|f(x)\| \leq Rt$, car $f(C) \subset C$ et donc $t = 1$ ce qui contredit $\|f(x)\| = R = \|x\|$. Et par homothopie on a $deg(f, C, 0) = 1$. D'ou le résultat.

***Etape 2 :** On suppose que C est un convexe, fermé et non vide.

On considére une rétraction continue $R : B \longrightarrow C$ où B une boule contenant C. Soit le diagramme $B \longrightarrow C \longrightarrow B$. L'application foR est compacte, car f est compacte et R bornée. D'aprés la 1^{er} étape, l'application foR admet un point fixe $x_0 \in B$ et

$foR(x_0) = x_0$. Or $R(x_0) \in C$ et par hypothèse $f(C) \subset C$, alors $f\left(R(x_0)\right) \in C$ et donc $x_0 \in C$.

Chapitre 2

Construction des sous et sur-solutions

Dans les travaux concernant les problèmes aux limites du second ordre on applique souvent la méthode des sous et sur-solutions, en supposant l'existence de ces dernières. Mais le problème qui se pose est le suivant : sous quelles conditions peut on assurer l'existence d'une sous et d'une sur-solution dans un problème aux limites associé à une EDO du second ordre.

Références bibliographiques : I.Rachunkova et M.Tvrdy [4, 5].

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous considèrons le problème suivant :

$$\begin{cases} u'' = f(t, u(t)) & \text{pour } t \in [0, 2\pi] \\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases} \tag{2.1}$$

dont nous allons étudier quelques conditions sur la fonction f qui nous assurent l'existence des sous et sur-solutions et trouver des estimations à priori sur celles-ci.
Pour la construction des sous et sur solutions nous allons utiliser les résultats rappelés dans le chapitre 1 qui concernent la résolution des problèmes aux limites associés aux EDO du second ordre et plus présisemment les résultas élaborés dans les Exemples 1.3.1, 1.3.2 et 1.3.3.

Dans ce qui suit, nous commencons par rappeler les espaces suivants : $L[0, 2\pi]$, l'espace des fonctions intégrables au sens de Lebesgue sur $[0, 2\pi]$, et $C^2[0, 2\pi]$ l'espace des fonctions deux fois différentiables sur $[0, 2\pi]$ et la dérivée second est continue sur $[0, 2\pi]$. Pour tout $x \in C^2[0, 2\pi]$ et $h \in L[0, 2\pi]$ on pose :

$$\|x\|_C = \sup_{x \in [0,2\pi]} |x(t)|, \qquad \|h\|_L = \int_0^{2\pi} |h(s)ds \text{ et } \overline{h} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(s)ds.$$

On note par :

$$h^+(t) = \max\{h(t), 0\}, \qquad h^-(t) = \max\{-h(t), 0\}, \text{ pour tout } t \in [0, 2\pi]$$

la partie positive, respectivement négative de h sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

2.2 Construction des sous-solutions

Le lemme suivant est nécessaire dans les estimations que nous allons démontrer dans les propositions qui suiveront.

Lemme 2.1. *Soit* $p : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $m, M \in \mathbb{R}$ *tels que* $mM \geq 0$ *et* $m \leq p(t) \leq M$ *sur* $[0, 2\pi]$*. Alors pour toute fonction* $h \in L[0, 2\pi]$ *telle que* $\overline{h} = 0$ *on a :*

$$|\int_0^{2\pi} p(s)h(s)ds| \leq \max\{|m|, |M|\}\frac{\|h\|_L}{2}. \tag{2.2}$$

Démonstration.

Soit $h \in L[0, 2\pi]$ tel que $\overline{h} = 0$. Nous avons : $\overline{h^+} = \overline{h^-}$ et $\|h\|_L = 4\pi\overline{h^+} = 4\pi\overline{h^-}$.
On suppose maintenant que $0 \leq m \leq M$.
Nous avons d'une part :

$$\overline{h^+} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^+(s)ds.$$

Donc

$$2\pi\overline{h^+} \geq \int_0^{2\pi} h^+(s)ds \geq \int_0^{2\pi} h(s)ds.$$

De même on a :

$$-2\pi\overline{h^-} \leq \int_0^{2\pi} h(s)ds$$

et puisque $\overline{h^+} = \overline{h^-}$ alors :

$$-2\pi\overline{h^+} \leq \int_0^{2\pi} h(s)ds \leq 2\pi\overline{h^+}$$

or on a : $\|h\|_L = 4\pi\overline{h^+}$, ce qui entraine

$$|\int_0^{2\pi} h(s)ds| \leq \frac{\|h\|_L}{2}.$$

D'autre part, on a :

$$-M \leq p(t) \leq M, \qquad \forall t \in [0, 2\pi]$$

ce qui implique
$$-M\frac{\|h\|_L}{2} \leq \int_0^{2\pi} p(s)h(s)ds \leq M\frac{\|h\|_L}{2}.$$

On en déduit alors que :

$$|\int_0^{2\pi} p(s)h(s)ds| \leq M\frac{\|h\|_L}{2}.$$

De la même manière si on suppose que : $m \leq M \leq 0$ on trouve :

$$|\int_0^{2\pi} p(s)h(s)ds| \leq -m\frac{\|h\|_L}{2}$$

ce qui prouve la relation (2.2).

Proposition 2.1. *Supposons qu'il existent a, $A \in \mathbb{R}$ et $b \in L[0, 2\pi]$ tels que :*

i) $a \leq 0$ *et* $\overline{b} = 0$

ii) $f(t, x) \leq a + b(t)$, *p.p.t,* $t \in [0, 2\pi]$ *et tout* $x \in [A, B]$ *où* $B = A + \frac{\pi}{2}\|b\|_L$.

Alors il existe une sous-solution α du problème (2.1) telle que :

$$A \leq \alpha(t) \leq B, \forall t \in [0, 2\pi].$$

Démonstration.

On considère le problème aux limites (1.6) dans l'Exemple 1.3.1 que nous repronduisons ici :
$$\begin{cases} \varphi''(t) = h(t) & \text{pour } t \in [0, 2\pi] \\ \varphi(0) = \varphi(2\pi) = c \\ \varphi'(0) = \varphi'(2\pi) \end{cases} \tag{2.3}$$

où $c \in \mathbb{R}$ et $h \in L([0, 2\pi])$. On pose : $h(t) = b(t)$ sur $[0, 2\pi]$.

Ce problème admet une solution unique définie sur $[0, 2\pi]$ par :

$$\varphi(t) = c + \int_0^{2\pi} H(t,s)b(s)ds$$

où $H(t,s)$ est donnée par l'expression (1.7) qui est rappelée ici :

$$H(t,s) = \begin{cases} \frac{t(s-2\pi)}{2\pi} & \text{si } 0 \le t \le s \le 2\pi \\ \frac{s(t-2\pi)}{2\pi} & \text{si } 0 \le s \le t \le 2\pi. \end{cases} \tag{2.4}$$

D'aprés le Lemme 1.1, la fonction $H(t,s)$ vérifie l'estimation suivante :

$$-\frac{\pi}{2} \le -\frac{s(2\pi - s)}{2\pi} \le H(t,s) \le 0, \forall (t,s) \in [0, 2\pi]^2.$$

Alors si on prend $m = -\frac{\pi}{2}$ et $M = 0$ dans le Lemme 2.1 on trouve :

$$|\int_0^{2\pi} H(t,s)b(s)ds| \le \max\{\frac{\pi}{2}, 0\}\frac{\|b\|_L}{2} \le \frac{\pi}{4}\|b\|_L.$$

Donc :

$$-\frac{\pi}{4}\|b\|_L \le \int_0^{2\pi} H(t,s)b(s)ds \le \frac{\pi}{4}\|b\|_L$$

d'ou

$$c - \frac{\pi}{4}\|b\|_L \le \varphi(t) = c + \int_0^{2\pi} H(t,s)b(s)ds \le c + \frac{\pi}{4}\|b\|_L.$$

En choisissant $c = A + \frac{\pi}{2}\|b\|_L$, on trouve $A \le \varphi(t) \le A + \frac{\pi}{2}\|b\|_L$, d'ou

$$A \le \varphi(t) \le B, \forall t \in [0, 2\pi].$$

On peut vérifier que : $\varphi''(t) = b(t)$ et $f(t,x) \le a + b(t) \le b(t) = \varphi''(t)$ et aussi $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ et $\varphi'(0) = \varphi'(2\pi)$ car φ est solution du problème (2.3). Donc elle satisfait les conditions de la Définition 1.11. D'ou φ est une sous-solution du problème (2.1).

Proposition 2.2. *On suppose qu'il existe* $a,\ A \in \mathbb{R}$ *et* $b \in L[0, 2\pi]$ *tels que :*

i) $a < 0$ *et* $\overline{b} = 0$.

ii) $f(t,x) \leq a + b(t)$ *p.p.t* $t \in [0, 2\pi]$ *et tout* $x \in [A(t), B(t)]$

où $A(t) = a + h(t)$ *et* $B(t) = A(t) + \frac{\pi}{2}\|b\|_L$ *et* $h(t) = \frac{t(t-2\pi)}{2}$ *sur* $[0, 2\pi]$.
Alors il existe une sous-solution φ *du problème (2.1) qui vérifie :*

$$A(t) \leq \varphi \leq B(t), \forall t \in [0, 2\pi].$$

Démonstration.

On considère le problème (2.3) en prenant maintenant $h(t) = a + b(t)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Alors en utilisant le résultat de l'Exemple 1.3.1, ce problème admet une unique solution φ donnée par :

$$\varphi(t) = c + \int_0^{2\pi} H(t,s)(a + b(s))ds$$

où H est la fonction de Green définie dans l'expression (2.4). Nous avons :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= c + a\int_0^{2\pi} H(t,s)ds + \int_0^{2\pi} H(t,s)b(s)ds \\
&= c + a\int_0^{t} \frac{(t-2\pi)s}{2\pi}ds + a\int_t^{2\pi} \frac{t(s-2\pi)}{2\pi}ds + \int_0^{2\pi} H(t,s)b(s)ds \\
&= c + \frac{a}{2\pi}\frac{(t^2(t-2\pi))}{2} + \frac{a}{2\pi}(2\pi t^2 - 2\pi^2 t - \frac{t^3}{2}) + \int_0^{2\pi} H(t,s)b(s)ds \\
&= c + \frac{a}{2}t(t-2\pi) + \int_0^{2\pi} H(t,s)b(s)ds.
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 1.1 on trouve :

$$-\frac{\pi}{4}\|b\|_L \leq \int_0^{2\pi} H(t,s)b(s)ds \leq \frac{\pi}{4}\|b\|_L.$$

D'ou :

$$c + ah(t) - \frac{\pi}{4}\|b\|_L \leq c + ah(t)\int_0^{2\pi} H(t,s)b(s)ds \leq c + ah(t)\frac{\pi}{4}\|b\|_L.$$

Si on prend $c = A + \frac{\pi}{4}$ on trouve :

$$A + ah(t) \leq \varphi(t) \leq A + ah(t) + \frac{\pi}{2}\|b\|_L.$$

Donc

$$\forall t \in [0, 2\pi], A(t) \leq \varphi(t) \leq B(t).$$

Pour terminer cette démonstration nous avons :

$$\varphi''(t) = a + b(t) \geq f(t,x) p.p.t.t \in [0, 2\pi] \qquad et \qquad \forall x \in [A(t), B(t)]$$

et on a aussi :

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi) \qquad et \qquad \varphi''(0) \geq \varphi''(2\pi)$$

car φ est une solution du problème (2.3). Alors on conclu que φ est une sous-solution du problème (2.1) qui vérifie :

$$A(t) \leq \varphi(t) \leq B(t), \forall t \in [0, 2\pi].$$

Remarque 2.1. *Les Propositions 2.1 et 2.2 considèrent seulement le cas où $a < 0$. Le cas où a est non nécessairement négative est étudié dans ce qui suit.*

Proposition 2.3. *On suppose qu'il existe $a, A \in \mathbb{R}$, $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$ et $b \in L[0, 2\pi]$ tels que :*

i) $\overline{b} = 0$ *et* $a \leq M$ *où* $M = \alpha^2 A + \frac{\alpha\|b\|_L}{4sin(\alpha\pi)}$.

ii) $f(t,x) \leq -\alpha^2 x + a + b(t)$, *p. p. t* $t \in [0, 2\pi]$, *et tout* $x \in [A, B]$ *où* $B = A + \frac{\|b\|_L}{2\alpha\sin(\alpha\pi)}$.

Alors le problème (2.1) admet une sous-solution φ qui vérifie :

$$A \leq \varphi(t) \leq B, \forall t \in [0, 2\pi].$$

Démonstration.

On considère le problème (1.8) de l'Exemple 1.3.2 que nous reprenons ici :

$$\begin{cases} \varphi''(t) + \alpha^2 \varphi(t) = h(t) & \text{pour } t \in [0, 2\pi] \\ \varphi(0) = \varphi(2\pi) \\ \varphi'(0) = \varphi'(2\pi) \end{cases} \tag{2.5}$$

On prend $h(t) = M + b(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.
Ce problème admet une unique solution φ définie sur $[0, 2\pi]$ par :

$$\varphi(t) = \int_0^{2\pi} g(t,s)(M + b(s))ds$$

où g est la fonction de Green donnée par (1.9) et qui est rappelée ici :

$$g(t,s) = \begin{cases} \frac{cos(\alpha(\pi + t - s)}{2\alpha sin(\alpha\pi)} & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 2\pi \\ \frac{cos(\alpha(\pi + s - t)}{2\alpha sin(\alpha\pi)} & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 2\pi. \end{cases} \tag{2.6}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} g(t,s)ds &= \int_0^t \frac{cos(\alpha(\pi + s - t))}{2\alpha sin(\alpha\pi)} ds + \int_t^{2\pi} \frac{cos(\alpha(\pi + t - s))}{2\alpha sin(\alpha\pi)} ds \\ &= \frac{1}{2\alpha sin(\alpha\pi)} \left[[\frac{1}{\alpha} sin\alpha(\pi + s - t)]_0^t + [\frac{1}{\alpha} sin\alpha(\pi + t - s)]_t^{2\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2\alpha sin(\alpha\pi)} (\frac{2sin(\alpha\pi)}{\alpha}) = \frac{1}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\varphi(t) = \frac{M}{\alpha^2} + \int_0^{2\pi} g(t,s)b(s)ds.$$

On a d'après le Lemme 1.2

$$0 \leq \frac{cos\alpha\pi}{2\alpha sin(\alpha\pi)} \leq g(t,s) \leq \frac{1}{2\alpha sin(\alpha\pi)},$$

ce qui implique, en utilisant le Lemme 2.1, que :

$$|\int_0^{2\pi} g(t,s)b(s)ds| \leq \frac{\|b\|_L}{4\alpha sin(\alpha\pi)},$$

c'est à dire que :

$$-\frac{\|b\|_L}{4\alpha sin(\alpha\pi)} \leq \int_0^{2\pi} g(t,s)b(s)ds \leq \frac{\|b\|_L}{4\alpha sin(\alpha\pi)}.$$

D'ou on déduit :

$$\frac{M}{\alpha^2} - \frac{\|b\|_L}{4\alpha sin(\alpha\pi)} \leq \varphi(t) = \int_0^{2\pi} g(t,s)b(s)ds \leq \frac{M}{\alpha^2} + \frac{\|b\|_L}{4\alpha sin(\alpha\pi)},$$

et puisque $M = \alpha^2 A + \frac{\alpha\|b\|_L}{4sin(\alpha\pi)}$, alors :

$$A \leq \varphi(t) \leq A + \frac{\|b\|_L}{2\alpha sin(\alpha\pi)}.$$

On conclu finallement que :

$$A \leq \varphi(t) \leq B, \forall t \in [0, 2\pi].$$

On a : $\varphi''(t) = M + b(t)$ et $A \leq \varphi(t) \leq B$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. D'ou

$$f(t, \varphi(t)) \leq -\alpha^2\varphi(t) + a + b(t) \leq M + b(t) \qquad p.p.t, t \in [0, 2\pi]$$

car $a \leq M$ et puisque

$$\varphi''(t) = -\alpha^2\varphi(t) + M + b(t) \qquad p.p.t, t \in [0, 2\pi]$$

on en déduit que :

$$f(t,\varphi(t)) \leq \varphi''(t) p.p.t.t \in [0,2\pi].$$

Alors φ est une sous-solution du problème (2.1).

Corollaire 2.1. *En considèrant les mêmes hypothèses que celles de la Proposition 2.3, en prenant $\alpha \in]\frac{1}{2},\infty[$ on obtient la même conclusion pour la sous-solution φ en prenant $M = \frac{1}{8}(2A + \|b\|_L)$ et $B = A + \|b\|_L$.*

Remarque 2.2. *Si on suppose que l'hypothèse $a \leq M$ n'est pas satisfaite, i.e $\exists \mu > 0 : a = M + \mu$, alors on peut remplacer l'intervalle $[A,B]$ par $[A + \frac{\mu}{\alpha^2}, B + \frac{\mu}{\alpha^2}]$ dans l'hypothèse $ii)$ pour obtenir :*

$$\frac{a}{\alpha^2} - \frac{\|b\|_L}{4\alpha sin(\alpha\pi)} \leq \varphi(t) \leq \frac{a}{\alpha^2} + \frac{\|b\|_L}{4\alpha sin(\alpha\pi)}, \forall t \in [0,2\pi].$$

Si on remplace $a = M + \mu$ et $M = \alpha^2 A + \frac{\alpha\|b\|_L}{4sin(\alpha\pi)}$, on trouve

$$A + \frac{\mu}{\alpha^2} \leq \varphi(t) \leq B + \frac{\mu}{\alpha^2}, \forall t \in [0,2\pi].$$

Proposition 2.4. *On suppose qu'il existe a, $A \in R$, $\alpha \in]0,\infty[$ et $b \in L[0,2\pi]$ tels que :*

i) $\bar{b} = 0$ *et* $a \leq -M$ *où* $M = \alpha^2 A + \frac{\alpha\|b\|_L \cosh(\alpha\pi)}{4\sinh(\alpha\pi)}$.

ii) $f(t,x) \leq \alpha^2 x + a + b(t)$ *p.p.t.* $t \in [0,2\pi]$ *et* $\forall x \in [A,B]$*.où* $B = A + \frac{\|b\|_L \cosh(\alpha\pi)}{2\sinh(\alpha\pi)}$.

Alors le problème (2.1) admet une sous-solution φ qui vérifie :

$$A \leq \varphi(t) \leq B, \forall t \in [0,2\pi].$$

Démonstration. On procède de la même manière que dans la preuve de la Proposition 2.3, en considèrant le problème (1.10) dans l'Exemple 1.3.3 que nous reprenons ici :

$$\begin{cases} \varphi''(t) - \alpha^2\varphi(t) = h(t) & \text{pour } t \in [0, 2\pi] \\ \varphi(0) = \varphi(2\pi) \\ \varphi'(0) = \varphi'(2\pi). \end{cases} \tag{2.7}$$

On prend $h(t) = -M + b(t)$. Ce problème admet une solution unique φ définie sur $[0, 2\pi]$ par :

$$\varphi(t) = \int_0^{2\pi} k(t,s)h(s)ds$$

où k est la fonction de Green associée à ce problème qui est donnée par l'expression (1.11) qui est rappelée ici :

$$k(t,s) = \begin{cases} -\frac{\cosh(\alpha(\pi+t-s)}{2\alpha\sinh(\alpha\pi)} & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 2\pi \\ -\frac{\cosh(\alpha(\pi+s-t)}{2\alpha\sinh(\alpha\pi)} & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 2\pi. \end{cases} \tag{2.8}$$

Puisque $h(t) = -M + b(t)$ on a :

$$\varphi(t) = \int_0^{2\pi} k(t,s)(-M + b(s))ds = -M\int_0^{2\pi} k(t,s)ds + \int_0^{2\pi} k(t,s)b(s)ds.$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} k(t,s)ds &= \int_0^t -\frac{\cosh(\alpha(\pi+s-t))}{2\alpha\sinh(\alpha\pi)}ds - \int_t^{2\pi} \frac{\cosh(\alpha(\pi+t-s))}{2\alpha\sinh(\alpha\pi)} \\ &= -\frac{1}{2\alpha\sinh(\alpha\pi)}\left[[\frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha(\pi+s-t))]_0^t - [\frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha(\pi+t-s))]_t^{2\pi}\right] \\ &= -\frac{1}{2\alpha^2\sinh(\alpha\pi)}(\sinh(\alpha\pi) - \sinh\alpha(\pi-t) - \sinh\alpha(t-\pi) + \sinh(\alpha\pi)) \\ &= -\frac{1}{2\alpha^2\sinh(\alpha\pi)}(2\sinh(\alpha\pi) = -\frac{1}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\varphi(t) = \frac{M}{\alpha^2} + \int_0^{2\pi} k(t,s)b(s)ds.$$

Nous avons d'aprés le Lemme 1.3 :

$$-\frac{\cosh(\alpha\pi)}{2\alpha\sinh(\alpha\pi)} \leq k(t,s) \leq -\frac{1}{2\alpha\sinh(\alpha\pi)} < 0, \forall (t,s) \in [0,2\pi]^2.$$

Donc en utilisant le résultat du Lemme 2.1, on obtient :

$$|\int_0^{2\pi} k(t,s)b(s)ds| \leq \frac{\|b\|_L \cosh(\alpha\pi)}{4\alpha\sinh(\alpha\pi)}, \forall (t,s) \in [0,2\pi].$$

C'est-à-dire :

$$-\frac{\|b\|_L \cosh(\alpha\pi)}{4\alpha\sinh(\alpha\pi)} \leq \int_0^{2\pi} k(t,s)b(s)ds \leq \frac{\|b\|_L \cosh(\alpha\pi)}{4\alpha\sinh(\alpha\pi)}.$$

En ajoutant $\frac{M}{\alpha^2}$ aux membres de l'inéquation on trouve :

$$\frac{M}{\alpha^2} - \frac{\|b\|_L \cosh(\alpha\pi)}{4\alpha\sinh(\alpha\pi)} \leq \frac{M}{\alpha^2} + \int_0^{2\pi} k(t,s)b(s)ds \leq \frac{M}{\alpha^2} + \frac{\|b\|_L \cosh(\alpha\pi)}{4\alpha\sinh(\alpha\pi)}.$$

Puisque on a

$$M = \alpha^2 A + \frac{\alpha\|b\|_L \cosh(\alpha\pi)}{4\sinh(\alpha\pi)}$$

et

$$B = A + \frac{\|b\|_L \cosh(\alpha\pi)}{2\alpha\sinh(\alpha\pi)}$$

on trouve finalement :

$$A \leq \varphi(t) \leq B, \forall t \in [0,2\pi].$$

D'un autre coté nous avons :

$$\varphi''(t) = \alpha^2\varphi(t) - M + b(t), \forall t \in [0,2\pi]$$

et $\varphi(t) \in [A,B]$. Donc en utilisant ii) on obtient :

$$f(t,\varphi(t)) \leq \alpha^2\varphi(t) + a + b(t) \leq \alpha^2\varphi(t) - M + b(t) \leq \varphi''(t).$$

On en déduit que φ est une sous-solution du problème (2.1).

Remarque 2.3. *Si $a = -M + \mu$, pour $\mu > 0$. Pour retrouver le résultat de la Proposition 2.4 on remplace l'intervalle $[A, B]$ par $[A - \frac{\mu}{\alpha^2}, B - \frac{\mu}{\alpha^2}]$ dans iii).*

2.3 Construction des sur-solutions

Dans cette section nous reformulons les assertions étudiées dans la section précedante pour obtenir des conditions qui assurent l'existence d'une sur-solution du problème (2.1).Vu la dualité des définitions des sous et sur-solutions (Définitions 1.11 et 1.12) les preuves des propositions de cette section sont analogues à celles de la section précedante et sont donc omises.

Proposition 2.5. *On suppose qu'il existe a,$A \in \mathbb{R}$ et $b \in L[0, 2\pi]$ tels que :*

i) $a \geq 0$ *et* $\overline{b} = 0$.

ii) $f(t, x) \geq a + b(t)$ *p. p.* t $t \in [0, 2\pi]$ *et ,* $\forall x \in [A, B]$ *où* B *est défini comme dans la Proposition 2.1.*

Alors il existe une sur-solution φ du problème (2.1) qui vérifie :

$$A \leq \varphi(t) \leq B, \forall t \in [0, 2\pi].$$

Proposition 2.6. *Supposons qu'il existe a,$A \in \mathbb{R}$ et $b \in L[0, 2\pi]$ tels que :*

i) $a > 0$ *et* $\overline{b} = 0$.

ii) $f(t, x) \geq a + b(t)$ *p. p.* t ,$t \in [0, 2\pi]$ *et* $\forall x \in [A(t), B(t)]$ *où* $A(t), B(t)$ *sont définis comme dans la Proposition 2.2.*

Alors il existe une sur-solution φ du problème (2.1) qui vérifie :

$$A(t) \leq \varphi(t) \leq B(t), \forall t \in [0, 2\pi].$$

Proposition 2.7. *On suppose qu'il existe a, $A \in \mathbb{R}$, $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$ et $b \in L[0, 2\pi]$ tels que :*

i) $\overline{b} = 0$ *et* $a \geq M$ *où* $M = \alpha^2 A + \frac{\alpha\|b\|_L}{4sin(\alpha\pi)}$.

ii) $f(t, x) \geq -\alpha^2 x + a + b(t)$ *p. p.t.* $t \in [0, 2\pi]$ *et* $\forall x \in [A, B]$ *où* $B = A + \frac{\|b\|_L}{2\alpha\pi}$.

Alors le problème (2.1) admet une sur-solution φ qui vérifie :

$$A \leq \varphi(t) \leq B, \forall t \in [0, 2\pi].$$

Corollaire 2.2. *En considèrant les mêmes hypothèses de la Proposition 2.7 et en prenant $\alpha \in]\frac{1}{2}, \infty[$, on obtiendera la même conclusion pour la sur-solution φ en prenant :*

$$M = \frac{1}{8}(2A + \|b\|_L)$$

et

$$B = A + \|b\|_L.$$

Proposition 2.8. *On suppose qu'il existe a,$A \in \mathbb{R}$ $\alpha \in]0, \infty[$ et $b \in L[0, 2\pi]$ tels que :*

i) $a \geq -M$ *et* $\overline{b} = 0$ *où* $M = \alpha^2 A + \frac{\alpha\|b\|_L \cosh(\alpha\pi)}{4\sinh(\alpha\pi)}$.

ii) $f(t, x) \geq \alpha^2 x + a + b(t)$ *p. p.t.* $t \in [0, 2\pi]$ *et* $\forall x \in [A, B]$ *où* $B = A + \frac{\|b\|_L \cosh(\alpha\pi)}{2\sinh(\alpha\pi)}$.

Alors le problème (2.1) admet une sur-solution φ qui vérifie :

$$A \leq \varphi(t) \leq B, \forall t \in [0, 2\pi].$$

2.4 Exemples

Exemple 2.4.1. *On considère le problème :*

$$\begin{cases} u''(t) + \sin u(t) = h(t) & si\ t \in]0, 2\pi[\\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases}$$

où $h \in C([0, 2\pi])$*. Pour construire une sous-solution de ce problème, on pose* $h(t) = \overline{h} + \tilde{h}(t)$*, avec*

$$\overline{h} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t)dt.$$

La fonction $\alpha(t) = A + w(t)$*, avec* $\overline{w} = 0$ *satisfait :*

$$\alpha''(t) + \sin \alpha(t) = w''(t) + \sin \alpha(t) \geq \overline{h} + \tilde{h}(t).$$

Dans le cas ou $\overline{h} \leq \sin \alpha(t)$*, nous choisissons* w *solution du problème :*

$$\begin{cases} w''(t) = \tilde{h}(t) & si\ t \in]0, 2\pi[\\ w(0) = w(2\pi) \\ w'(0) = w'(2\pi). \end{cases}$$

Nous avons $\|w\|_\infty \leq \frac{\pi}{6} \|\tilde{h}\|_{L^1}$*. Si on suppose que*

$$\|\tilde{h}\|_{L^1} \leq 3 \qquad et \qquad \overline{h} \leq \cos(\frac{\pi}{6} \|\tilde{h}\|_{L^1})$$

alors $\|w\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}$*. Donc on peut choisir* $A = \frac{\pi}{2}$*. D'ou la fonction* $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} + w(t)$ *est une sous-solution de ce problème.*
Si $\overline{h} \geq -\cos(\frac{\pi}{6} \|\tilde{h}\|_{L^1})$ *nous démontrons de la même façon que* $\beta(t) = \frac{3\pi}{2} + w(t)$ *est une sur-solution de ce problème.*

Exemple 2.4.2. *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} u''(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}u^2 = q(t) & si\ t \in]0, 2\pi[\\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases}$$

où $q \in L^1(0, 2\pi)$.
Pour construire une sous-solution de ce problème on pose $q(t) = \overline{q} + \tilde{q}(t)$ *où* $\overline{q} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q(t)dt$ *et on pose* $\alpha(t) = A + w(t)$ *tel que* $\overline{w} = 0$*, on a :*

$$\alpha''(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\alpha^2 = w''(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\alpha^2 \geq \overline{q} + \tilde{q}(t).$$

On choisit w *solution du problème :*

$$\begin{cases} w''(t) = \tilde{q}(t) & si\ t \in]0, 2\pi[\\ w(0) = w(2\pi) \\ w'(0) = w'(2\pi). \end{cases}$$

Nous avons

$$\|\alpha'\|_\infty = \|w'\|_\infty \leq \|\tilde{q}\|_{L^1}.$$

On pose $A = -w(0)$*. Donc*

$$\forall t \in [0, 2\pi], |\alpha(t)| \leq \|\tilde{q}\|_{L^1} t$$

alors

$$\alpha''(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}\alpha^2 - \overline{q} - \tilde{q}(t) \geq -\|\tilde{q}\|^2_{L^1}(2\pi)^{\frac{3}{2}} - \overline{q}.$$

D'ou $\alpha(t) = w(t) - w(0)$ *est une sous-solution, si on suppose que*

$$\|\tilde{q}\|^2_{L^1}(2\pi)^{\frac{3}{2}} + \overline{q} \leq 0.$$

De même si on pose $\beta(t) = \alpha(t) + B$ *où* B *est une constante positive, alors* β *est une sur-solution.*

Chapitre 3

La méthode des sous et sur-solutions

La première partie de ce chapitre est consacrée, moyennant les notions de sous et sur-solutions de classe C^2 (voir Définitions 1.11 et 1.12) aux résultats d'existence de solutions de classe C^2 pour les problèmes aux limites périodiques. Dans la deuxième partie on suppose que le second membre du problème considéré est L^1-Carathéodory et grâce aux notions des sous et sur-solutions $W^{2,1}$ on présente des résultats d'existence de solutions de classe $W^{2,1}$.

Références bibliographiques : C.De Coster et P.Habets [1], S.Djebali [3], I.Rachunkova et M.Tvrdy [5].

3.1 Existence de solutions C^2

Dans cette section nous allons considèrer le problème périodique suivant :

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)) \quad \text{pour } t \in [0, 2\pi] \\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases} \tag{3.1}$$

où f est une fonction de $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nous allons associer à ce problème une sous et une sur-solution. Le résultat principale sur lequel se base la méthode de sous et sur-solutions est le théorème des valeurs intemédiaires. Il prouve que si on peut trouver une sous-solution inférieure à une sur-solution, alors il existe une solution comprise entre ces deux fonctions.

Définition 3.1. *Une fonction $u \in C^2([0, 2\pi])$ est dite solution du problème (3.1) si elle vérifie le système :*

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)) \quad \text{pour } t \in [0, 2\pi] \\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi). \end{cases}$$

Théorème 3.1. *Soient α et β respectivement des sous et sur-solutions de classe C^2 du problème (3.1) telles que $\alpha \leq \beta$. Et soit E l'ensemble defini par :*

$$E = \{(t, u) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} / \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}.$$

On suppose que f est continue sur E. Alors le problème (3.1) admet au moins une solution $u \in C^2[0, 2\pi]$ telle que pour tout $t \in [0, 2\pi]$

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t).$$

Démonstration.

La démonstration de ce théorème se fait en deux étapes.

***Etape 1 :**

On montre que toute solution du problème (3.1) satisfait :

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$$

* $\alpha(t) \leq u(t)$

On suppose par l'absurde qu'il existe $t \in [0, 2\pi]$ tel que $u(t) - \alpha(t) < 0$. Puisque $(u - \alpha) \in C^2([0, 2\pi])$, il existe $t_0 \in [0, 2\pi]$ tel que :

$$\min_{t \in [0,2\pi]} \{u(t) - \alpha(t)\} = u(t_0) - \alpha(t_0) < 0.$$

• Si $t_0 \in]0, 2\pi[$ alors $u''(t_0) - \alpha''(t_0) \geq 0$ et puisque u est une solution de (3.1) et $u(t_0) < \alpha(t_0)$ alors

$$\begin{aligned} u''(t_0) - \alpha''(t_0) &= f(t_0, \alpha(t_0)) + u(t_0) - \alpha(t_0) - \alpha''(t_0) \\ &= [f(t_0, \alpha(t_0)) - \alpha''(t_0)] + [u(t_0) - \alpha(t_0)] \\ &< 0 \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction.

• Si $t_0 \in \{0, 2\pi\}$, alors

$$\min_{t \in [0,2\pi]} \{u(t) - \alpha(t)\} = u(0) - \alpha(0) = u(2\pi) - \alpha(2\pi) < 0,$$

entraînant $u'(0) - \alpha'(0) \geq 0$ et $u'(2\pi) - \alpha'(2\pi) \leq 0$; or $u'(0) = u'(2\pi)$ et $\alpha'(0) \geq \alpha'(2\pi)$ i.e. $u'(0) - \alpha'(0) \leq u'(2\pi) - \alpha'(2\pi)$. D'ou

$$u'(0) - \alpha'(0) = u'(2\pi) - \alpha'(2\pi) = 0.$$

Donc, pour t assez petit, on a $u(t)-\alpha(t)<0$ et

$$\begin{aligned}\int_0^t [u''(s)-\alpha''(s)]\,ds &= \int_0^t [f(s,\alpha(s))+u(s)-\alpha(s)-\alpha''(s)]\,ds\\ &= \int_0^t [f(s,\alpha(s))-\alpha''(s)]+[u(s)-\alpha(s)]\,ds\\ &< 0\end{aligned}$$

c'est à dire $u'(t)-\alpha'(t)<0$. D'ou la contradiction.
*$u(t)\leq\beta(t)$
On suppose par l'absurde qu'il existe $t_0\in[0,2\pi]$ tel que :

$$\max_{t\in[0,2\pi]}\{u(t)-\beta(t)\}=u(t_0)-\beta(t_0)>0.$$

• Si $t_0\in]0,2\pi[$, alors $u''(t_0)-\beta''(t_0)\leq 0$ et puisque u est une solution de (3.1) et $u(t_0)>\beta(t_0)$ alors

$$\begin{aligned}u''(t_0)-\beta''(t_0) &= f(t_0,\beta(t_0))+u(t_0)-\beta(t_0)-\beta''(t_0)\\ &= [f(t_0,\beta(t_0))-\beta''(t_0)]+[u(t_0)-\beta(t_0)]\\ &> 0\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction.
• Si $t_0\in\{0,2\pi\}$, alors

$$\max_{t\in[0,2\pi]}\{u(t)-\beta(t)\}=u(0)-\beta(0)=u(2\pi)-\beta(2\pi)>0$$

entraîne que

$$u'(0)-\beta'(0)\leq 0\leq u'(2\pi)-\beta'(2\pi).$$

β étant une sur-solution de (3.1), on a

$$u'(0)-\beta'(0)=u'(2\pi)-\beta'(0)\geq u'(2\pi)-\beta'(2\pi);$$

ce qui entraîne que

$$u'(0) - \beta'(0) = u'(2\pi) - \beta'(2\pi) = 0.$$

D'aute part, puisque $u(0) - \beta(0) > 0$, alors pour t assez petit on a $u(t) - \beta(t) > 0$ et

$$\begin{aligned}\int_0^t [u''(s) - \beta''(s)]\, ds &= \int_0^t [f(s, \beta(s)) + u(s) - \beta(s) - \beta''(s)]\, ds \\ &= \int_0^t [f(s, \beta(s)) - \beta''(s)] + [u(s) - \beta(s)]\, ds \\ &> 0\end{aligned}$$

c'est-à-dire $u'(t) - \beta'(t) > 0$. D'ou la contradiction.

*** Etape2 :**

Dans cette étape nous allons montrer que le problème (3.1) admet au moins une solution. Pour cela nous allons transformer le problème (3.1) en un problème de point fixe et appliquer le théorème de Schauder (Théorème 1.2). Nous allons avoir besoins des résultats du chapitre 1 concernant les problèmes aux limites associés aux EDO du second ordre traités dans la section 1.5. Ceci nous amene à considérer le problème modifié suivant :

$$\begin{cases} u'' - u = f(t, \gamma(t, u)) - \gamma(t, u) & \text{pour } t \in]0, 2\pi[\\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases} \tag{3.2}$$

où $\gamma : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\gamma(t, u) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{si } u < \alpha \\ u(t) & \text{si } \alpha \leq u \leq \beta \\ \beta(t) & \text{si } \beta < u. \end{cases} \tag{3.3}$$

Ce problème admet, d'après le Théorème 1.5, une solution u qui s'écrit d'une manière unique sous la forme

$$u(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s)\,[f(s,\gamma(s,u(s))) - \gamma(s,u(s))]\,ds \tag{3.4}$$

où $G(t,s)$ est la fonction de Green associée au problème homogène associé au problème (3.2). Rappelons que l'expression de $G(t,s)$ est donnée par la formule suivante (voir Exemple 1.3.3, formule (1.11)), en remplacant $\alpha = 1$.

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{\cosh(\pi+t-s)}{2\sinh(\pi)} & \text{si } 0 \le t \le s \le 2\pi \\ -\frac{\cosh(\pi+s-t)}{2\sinh(\pi)} & \text{si } 0 \le s \le t \le 2\pi. \end{cases} \tag{3.5}$$

L'expression (3.4) de la solution u du problème modifié (3.2) nous permet de transformer le problème (3.1) en une équation intégrale. Considérons alors l'opérateur suivant :

$$T : C([0,2\pi]) \longrightarrow C([0,2\pi])$$

tel que pour tout $u \in C[0,2\pi]$ et tout $t \in [0,2\pi]$:

$$Tu(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s)\,[f(s,\gamma(s,u(s))) - \gamma(s,u(s))]\,ds.$$

Les points fixes de cet opérateur sont solutions de l'équation intégrale, donc solutions du problème (3.1). Pour montrer l'existence de solutions du problème (3.1) il suffit de montrer que T admet un point fixe en vérifiant que les hypothèses du théorème de Schauder (Théorème 1.2) sont satisfaites. C'est-à-dire montrer que T est continu et que $T(C[0,2\pi])$ est relativement compact. Pour montrer cette dernière hypothèse nous allons utiliser le théorème d'Ascoli-Arzela (Théorème 1.1), c'est-à-dire vérifier que $T([0,2\pi])$ est équicontinu et uniformément borné.

***T est continu**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge dans $C([0,2\pi])$ vers un certain élément u. Alors pour $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} |Tu_n(t) - Tu(t)| &= \int_0^{2\pi} G(t,s)\left[f(s,\gamma(s,u_n(s))) - f(s,\gamma(s,u(s))) + \gamma(s,u_n(s)) - \gamma(s,u(s))\right] ds \\ &\leq \max_{s,t\in[0,2\pi]} |G(t,s)| \left| \int_0^{2\pi} ([f(s,\gamma(s,u_n(s))) - \gamma(s,u_n(s))] - [f(s,\gamma(s,u(s))) - \gamma(s,u(s)) \right. \\ &\leq \max_{t,s\in[0,2\pi]} |G(t,s)| \int_0^{2\pi} |h_n(s) - h(s)| ds \\ &\leq \max_{t,s\in[0,2\pi]} |G(t,s)| \|h_n - h\|_{\mathbb{L}^1} \end{aligned}$$

où pour tout $s \in [0, 2\pi]$

$$h_n(s) = f(s, \gamma(s, u_n(s))) - \gamma(s, u_n(s))$$

et

$$h(s) = f(s, \gamma(s, u(s))) - \gamma(s, u(s)).$$

Puisque f et γ sont continues et que la suite $(u_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(s)$, alors la suite $(h_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $h(s)$ pour presque tout $s \in [0, 2\pi]$ et puisque f et γ sont bornées, alors d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.3), on a $\|h_n - h\|_{L^1} \longrightarrow 0$. Donc pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|Tu_n(t) - Tu(t)| \longrightarrow 0$. D'ou $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Tu. Par conséquance T est continu.

***$T(C[0, 2\pi])$ est uniformément borné**

Soit $u \in C[0, 2\pi]$. Puisque les fonctions α et β sont bornées (car elles sont continues dans le compact $[0, 2\pi]$) alors il existe deux constantes m_1 et m_2 telles que :

$$\forall t \in [0, 2\pi]; |\alpha(t)| \leq m_1 \qquad et \qquad \beta(t) \leq m_2.$$

Pour $M = \max\{m_1, m_2\}$, nous avons :

$$\forall t \in [0, 2\pi], \max\{|\alpha(t)|, |\beta(t)|\} \leq M.$$

On en déduit alors que :

$$\forall t \in [0, 2\pi], |\gamma(t, u(t))| \leq M$$

D'autre part, f étant continue sur le compact E, on en conclu que :

$$\exists M_1 > 0, \forall t \in [0, 2\pi] : |f(t, \gamma(t, u(t)))| \leq M_1.$$

D'ou

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &= |\int_0^{2\pi} G(t,s)\left[f(s, \gamma(s, u(s))) - \gamma(s, u(s))\right] ds| \\
&\leq \max_{s,t \in [0,2\pi]} |G(t,s)| |\int_0^{2\pi} \left[f(s, \gamma(s, u(s))) - \gamma(s, u(s))\right] ds| \\
&\leq \max_{t,s \in [0,2\pi]} |G(t,s)| |\int_0^{2\pi} (M + M_1) ds| \\
&\leq 2\pi M_2 (M + M_1)
\end{aligned}$$

où $M_2 = \max_{t,s \in [0,2\pi]} |G(t,s)|$. Donc l'ensemble $T(C[0, 2\pi])$ est uniformément borné.
*** $T(C[0, 2\pi])$ est équicontinu**
Soient $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ et soit $\varepsilon > 0$. Puisque G est uniformément continue, alors

$$\exists \delta > 0 : |t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow |G(t_1, s) - G(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{(M + M_1) 2\pi}, \forall s \in [0, 2\pi].$$

D'où pour $u \in C[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
|Tu(t_1) - Tu(t_2)| &= |\int_0^{2\pi} (G(t_1, s) - G(t_2, s)) \left[f(s, \gamma(s, u(s))) - \gamma(s, u(s))\right] ds| \\
&\leq |G(t_1, s) - G(t_2, s)||f(s, \gamma(s, u(s))) - \gamma(s, u(s))| \\
&\leq 2\pi \frac{\varepsilon}{(M + M_1)2\pi}(M + M_1) \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $T(C[0, 2\pi])$ est équicontinu.
D'après le théorème d'Ascoli-Arzela (Théorème 1.1) $T(C[0, 2\pi])$ est relativement compact. Par suite, par le théorème de point fixe de Schauder (Théorème 1.2) T admet un point fixe u dans $C[0, 2\pi]$ qui est solution du problème (3.2).
De plus, nous avons :

$$u''(t) = u(t) + f(t, \gamma(t, u(t))) - \gamma(t, u(t)),$$

et donc u'' est continue, ce qui imlique que $u \in C^2[0, 2\pi]$. On en déduit que u est solution du problème (3.1). D'après la première étape, u vérifie :

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \forall t \in [0, 2\pi].$$

Corollaire 3.1. *Soit* $f : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue telle que pour* $r_1 \leq r_2$ *et* $\forall t \in [0, 2\pi]$

$$f(t, r_1) \leq 0 \leq f(t, r_2).$$

Alors ce problème admet au moins une solution $u \in C^2([0, 2\pi])$ *telle que*

$$r_1 \leq u(t) \leq r_2, \forall t \in [0, 2\pi].$$

Remarque 3.1. *Le résultat du Théorème 3.1 n'est pas seulement un résulat d'existence. Il donne aussi une localisation de la solution et cela peut être très utile comme* *nous allons le voir dans les exemples suivants.*

3.2 Exemples

Exemple 3.2.1. *On considère le problème suivant*

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' - u^3 + \sin^3 t = 0 \quad \textit{pour } t \in]0, 2\pi[\\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases}$$

où $\varepsilon > 0$ *est un paramétre assez petit.*
La fonction $\alpha(t) = \sin t - 2\varepsilon$ *est une sous-solution de ce problème car :*

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \alpha''(t) - \alpha^3(t) + \sin^3 t &= \varepsilon^2(-\sin t) - (\sin t - 2\varepsilon)^3 + \sin^3 t \\ &= \varepsilon \left[6 \sin^2 t - 13\varepsilon \sin t + 8\varepsilon^2\right] \\ &> 0 \end{aligned}$$

avec $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = -2\varepsilon$ *et* $\alpha'(0) = \alpha'(2\pi) = 1 - 2\varepsilon$.
La fonction $\beta(t) = \sin t + 2\varepsilon$ *est une sur-solution de ce problème.*
En effet,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \beta''(t) - \beta^3(t) + \sin^3 t &= \varepsilon^2(-\sin t) - (\sin t + 2\varepsilon)^3 + \sin^3 t \\ &= \varepsilon \left[-6 \sin^2 t + 11 \sin t - 8\varepsilon^2\right] \\ &< 0 \end{aligned}$$

avec $\beta(0) = \beta(2\pi) = 2\varepsilon$ *et* $\beta'(0) = \beta'(2\pi) = 1 + 2\varepsilon$.
De plus, on a $\alpha(t) \leq \beta(t), \forall t \in [0, 2\pi]$.
En vertu du Théorème 3.1, ce problème admet une solution u vérifiant :

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \forall t \in [0, 2\pi]$$

ce qui nous permet de dire que :

$$\sin t - 2\varepsilon \leq u(t) \leq \sin t + 2\varepsilon, \forall t \in [0, 2\pi]$$

c'est à dire

$$u(t) = \sin t + O(\varepsilon).$$

Exemple 3.2.2. *On considère le problème*

$$\begin{cases} u'' + \sin u = h(t) & \textit{pour } t \in]0, 2\pi[\\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi). \end{cases}$$

On suppose que $h \in C^0([0, 2\pi])$ *et* $\|h\|_{C^0} \leq 1$.
Nous avons $\alpha(t) = \frac{\pi}{2}$ *est une sous-solution de ce problème car :*

$$\begin{aligned} \alpha''(t) + \sin \alpha(t) - h(t) &= \sin \frac{\pi}{2} - h(t) \\ &= 1 - h(t) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

avec $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = \frac{\pi}{2}$ *et* $\alpha'(0) = \alpha'(2\pi) = 0$.
La fonction $\beta(t) = \frac{3\pi}{2}$ *est une sur-solution de ce problème car :*

$$\begin{aligned} \beta''(t) + \sin \beta(t) - h(t) &= \sin \frac{3\pi}{2} - h(t) \\ &= -1 - h(t) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

avec $\beta(0) = \beta(2\pi) = \frac{3\pi}{2}$ *et* $\beta'(0) = \beta'(2\pi) = 0$.
Puisque h *est continue et* $\alpha \leq \beta$, *d'après le Théorème 3.1, ce problème admet une*

solution u *telle que*

$$\frac{\pi}{2} \leq u(t) \leq \frac{3\pi}{2}, \forall t \in [0, 2\pi].$$

Remarque 3.2. *Comme nous allons le voir dans l'exemple suivant, le Théorème 3.1 n'est pas valable si* $\alpha \geq \beta$.

Exemple 3.2.3.

$$\begin{cases} u'' = -u + \sin t \qquad \textit{pour } t \in]0, 2\pi[\\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi). \end{cases}$$

On voit que $\alpha(t) = 1$ *est une sous-solution de ce problème car :*

$$\alpha''(t) + \alpha(t) - \sin(t) = 1 - \sin t \geq 0$$

et $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = 1$ *et* $\alpha'(0) \geq \alpha'(2\pi) = 0$.
La fonction $\beta(t) = -1$ *est une sur-solution car :*

$$\beta''(t) + \beta(t) - \sin(t) = -1 - \sin t \leq 0$$

avec $\beta(0) = \beta(2\pi) = 1$, $\beta'(0) \leq \beta'(2\pi)$.
Mais le problème n'admet pas de solutions.
En effet, soit l'équation

$$u''(t) = -u(t) + \sin t.$$

En multipliant les deux membres par $\sin t$ *et en intégrant de* 0 *à* 2π, *on trouve*

$$\int_0^{2\pi} u''(t) \sin t dt = \int_0^{2\pi} (-u(t) + \sin t) \sin t dt.$$

Or

$$\int_0^{2\pi} u''(t) \sin t dt = -\int_0^{2\pi} u(t) \sin t dt$$

et

$$\int_0^{2\pi}(-u(t)+\sin t)\sin t dt = \pi - \int_0^{2\pi} u(t)\sin t dt.$$

Alors le problème n'admet pas de solutions bien qu'il admet une sous-solution et une sur-solution.

Exemple 3.2.4. *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} u''(t) = ku^{2n+1} + h(t) \qquad \text{pour } t \in]0, 2\pi[\\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases}$$

où $k > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *et* $h \in C([0, 2\pi])$. *On pose* $r_1 = -\left(\frac{\|h\|_\infty}{k}\right)^{\frac{1}{2n+1}}$ *et* $r_2 = \left(\frac{\|h\|_\infty}{k}\right)^{\frac{1}{2n+1}}$. *Nous avons*

$$f(t, r_1) = -\|h\|_\infty \leq 0 \qquad \text{et} \qquad f(t, r_2) = \|h\|_\infty + h(t) \geq 0.$$

On a ainsi

$$f(t, r_1) \leq 0 \leq f(t, r_2).$$

D'après le corollaire 3.1, il existe une solution u telle que :

$$r_1 \leq u(t) \leq r_2, \forall t \in [0, 2\pi].$$

3.3 Existence de solutions $W^{2,1}$

En considérant la preuve du Théorème 3.1, on voit que l'argument dans le cas où le minimum de $u - \alpha$ est atteint en $t_0 \in]0, 2\pi[$ est différent de l'argument utilisé dans le cas où $t_0 \in \{0, 2\pi\}$. Dans ce dernier cas nous avons utilisé une intègrale et ceci peut être généralisé et c'est la clé de la méthode.

Dans cette partie nous allons considèrer le problème (3.1) en supposant que la fonction f est L^1-Carathéodory et donner un résultat d'existence de solutions de classe $W^{2,1}$.

Théorème 3.2. *Soient α et β respectivement une sous et une sur-solutions $W^{2,1}$ du problème (3.1) telles que $\alpha \leq \beta$ et soit E l'ensemble défini par :*

$$E = \{(t,u) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R} : \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}.$$

On suppose que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est L^1-Carathéodory.
Alors le problème (3.1) admet au moins une solution $u \in W^{2,1}(0,2\pi)$ qui vérifie que :

$$\forall t \in [0,2\pi], \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t).$$

Démonstration.

Pour démontrer ce théorème nous allons procéder de la même manière que dans la démonstration du théorème 3.1. Donc nous allons transformer notre problème en un problème de point fixe,et pour cela nous allons considérer le problème modifié suivant :

$$\begin{cases} u'' - u = f(t,\gamma(t,u)) - \gamma(t,u) & \text{pour } t \in]0,2\pi[\\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases} \tag{3.6}$$

où $\gamma : [0,2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par l'expression (3.3).
Ce problème modifié nous permet de transformer le problème (3.1) en une équation intégrale, en considérant sa solution u définie par :

$$\int_0^{2\pi} G(t,s)\left[f(s,\gamma(s,u(s))) - \gamma(s,u(s))\right] ds.$$

A partir de cette équation intégrale nous allons définir l'opérateur T de $C([0,2\pi])$

dans $C([0,2\pi])$ par :

$$Tu(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s)\left[f(s,\gamma(s,u(s))) - \gamma(s,u(s))\right] ds$$

où G est la fonction de Green associé au problème (3.6).
Pour montrer l'existence de solutions du problème (3.1), nous allons utiliser le théorème de Schauder (Théorème 1.2). Pour cela nous allons montrer que T admet un point fixe en montrant qu'il est continu et que $T([0,2\pi])$ est relativement compact et ceci en utlisant le théorème d'Ascoli-Arzela (Théorème 1.1), c'est-à-dire que nous allons vérifier que $T([O,2\pi])$ est équicontinu et uniformément borné.
***T est continu :**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $C([O,2\pi])$ qui converge vers un élément $u \in C([0,2\pi])$.
Nous avons ; pour tout $t \in [0,2\pi]$:

$$Tu_n(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s)\left[f(s,\gamma(s,u_n(s))) - \gamma(s,u_n(s))\right] ds.$$

Comme f et γ sont continues par rapport à u alors :

$$G(t,s)\left[f(s,\gamma(s,u_n(s))) - \gamma(s,u_n(s))\right] \longrightarrow G(t,s)\left[f(s,\gamma(s,u(s))) - \gamma(s,u(s))\right], p.p.s \in [0,2\pi].$$

De plus on a :

$$\forall s \in [0,2\pi] \qquad \alpha(s) \leq \gamma(s,u_n(s)) \leq \beta(s).$$

Donc il existe une constante $M = \max\{|\alpha\|_\infty, \|\beta\|_\infty\}$ telle que $|\gamma(s,u_n(s))| \leq M$.D'autre part, f est L^1-Carathéodory, alors il existe une fonction $h_M \in L^1(0,2\pi)$ telle que

$$|f(s,\gamma(s,u(s)))| \leq h_M(s), p.p.s \in [0,2\pi].$$

Ceci entraîne que :

$$\begin{aligned}|Tu_n(t)| &\leq \max_{t,s\in[0,2\pi]}|G(t,s)|\int_0^{2\pi}|f(s,\gamma(s,u_n(s)))+M|ds\\ &\leq \max_{t,s\in[0,2\pi]}|G(t,s)|\int_0^{2\pi}[h_M(s)+M]\,ds\\ &\leq \max_{t,s\in[0,2\pi]}|G(t,s)|\left[\|h_M\|_{L^1}+2\pi M\right].\end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Théorème 1.3)

$$\|Tu_n - Tu\| \longrightarrow 0$$

dans $C([0,2\pi])$. D'ou la continuité de T.
***$T(C[0,2\pi])$ est équicontinu :**
Nous avons pour tout $s\in[0,2\pi]$,$|\gamma(s,u(s))|\leq M$ où M est costante positive donnée et

$$|f(s,\gamma(s,u(s)))|\leq h_M(s), p.p.s\in[0,2\pi]$$

où h_M est la fonction L^1 associée à l'hypothèse sur f qui est L^1-Carathéodory.
Soit $\varepsilon>0$ et $t_1,t_2\in[0,2\pi]$. Puisque G est uniformement continue, il existe $\delta>0$ telle que :

$$|t_1-t_2|<\delta \Longrightarrow |G(t_1,s)-G(t_2,s)|<\frac{\varepsilon}{\|h_M\|_{L^1}+2\pi M}.$$

Soit $u\in C[0,2\pi)$ et soit $t_1,t_2\in[0,2\pi]$ tel que $|t_1-t_2|<\delta$. Nous avons :

$$\begin{aligned}|Tu(t_1)-Tu(t_2)| &= |\int_0^{2\pi}(G(t_1,s)-G(t_2,s))\left[f(s,\gamma(s,u(s)))-\gamma(s,u(s))\right]ds|\\ &\leq |G(t_1,s)-G(t_2,s)|\int_0^{2\pi}|f(s,\gamma(s,u(s)))-\gamma(s,u(s))|ds\\ &\leq \frac{\varepsilon}{\|h_M\|_{L^1}+2\pi M}\left(\|h_M\|_{L^1}+2\pi M\right)\\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

ce qui prouve que $T(C[0,2\pi])$ est équicontinu.

*$T(C[0,2\pi])$ **est uniformément borné :**

Soit $u \in (C[0,2\pi])$ et $t \in [0,2\pi]$ nous avons :

$$\begin{aligned}
|Tu(t)| &= |\int_0^{2\pi} G(t,s)\,[f(s,\gamma(s,u(s))) - \gamma(s,u(s))]\,ds \\
&\leq \max_{t,s\in[0,2\pi]} |G(t,s)| \int_0^{2\pi} [h_M(s) + M]\,ds \\
&\leq \max_{t,s\in[0,2\pi]} |G(t,s)|\,[\|h_M\|_{L^1} + 2\pi M]
\end{aligned}$$

ce qui montre que $T(C[0,2\pi])$ est uniformément borné. Donc d'aprés le théorème d'Ascoli-Arzela (Théorème 1.1) $T(C[0,2\pi])$ est relativement compact. Par suite par le théorème de point fixe de Schauder (Théorème 1.2) T admet un point fixe dans $C([0,2\pi])$. De plus on a :

$$u'(t) = (Tu)'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\,[f(s,\gamma(s,u(s))) - \gamma(s,u(s))]\,ds \in C([0,2\pi])$$

et

$$u''(t) = u(t) + f(t,\gamma(t,u(t))) - \gamma(t,u(t)) \in L^1(0,2\pi)$$

ce qui implique que $u \in W^{2,1}(0,2\pi)$. Donc u est solution du problème modifié (3.6) avec $u \in W^{2,1}(0,2\pi)$.

Par suite pour montrer que u est une solution du problème (3.1) il suffit de montrer que

$$\forall t \in [0,2\pi], \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t).$$

- $\alpha \leq u$:

On suppose par l'absurde que $u < \alpha$, i.e il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\min_t\{u(t) - \alpha(t)\} = u(t_0) - \alpha(t_0) < 0.$$

t_0 réalise le minimum de $u-\alpha$ implique :

$$D^-(u-\alpha)(t_0) \leq 0 \leq D_+(u-\alpha)(t_0),$$

c'est-à-dire

$$u'(t_0) - D_-\alpha(t_0) \leq u'(t_0) - D^+\alpha(t_0).$$

Donc

$$D_-\alpha(t_0) \geq D^+\alpha(t_0).$$

Alors d'après la définition de sous-solution $W^{2,1}$ (Définition 1.13), il existe un intervalle ouvert I_0 tel que $t_0 \in I_0$, $\alpha \in W^{2,1}(I_0)$ et pour presque tout $t \in I_0$ on a :

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t)).$$

D 'autre part on a $(u-\alpha)'(t_0) = 0$, car t_0 réalise le minimum de $(u-\alpha)$ et puisque $(u-\alpha)(t_0) < 0$ et $(u-\alpha)$ est continue, alors pour tout $t \in I_0$, et t proche de t_0, on a $(u-\alpha)(t) < 0$, ce qui entaîne

$$\begin{aligned}
(u-\alpha)'(t) &= \int_{t_0}^{t} (u''(s) - \alpha''(s))\, ds \\
&= \int_{t_0}^{t} [f(s,\alpha(s)) + u(s) - \alpha(s) - \alpha''(s)]\, ds \\
&= \int_{t_0}^{t} [(f(s,\alpha(s)) - \alpha''(s)) + (u(s) - \alpha(s))]\, ds \\
&< 0
\end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que t_0 réalise le minimum de $(u-\alpha)$. Donc $\alpha \leq u$.

•$u \leq \beta$:

De la même manière on montre que $u \leq \beta$ on en déduit que

$$\forall t \in [0, 2\pi], \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t).$$

Alors u est une solution du problème (3.1).

3.4 Exemple

Exemple 3.4.1. *On considère le problème :*

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u'' = h(u) - h(|t-\pi|) & \textit{pour } t \in]0, 2\pi[\\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases}$$

où $h \in C^1(\mathbb{R})$ est telle que $h'(t) \geq a^2$.
Les fonctions α_1 et α_2 définies par :

$$\alpha_1(t) = -(t-\pi) - \frac{\varepsilon}{a} e^{\frac{-at}{\varepsilon}}$$

et

$$\alpha_2(t) = (t-\pi) - \frac{\varepsilon}{a} e^{\frac{a(t-2\pi)}{\varepsilon}}$$

sont respectivement sous et sur-solution de ce problème car elles vérifient :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \alpha_1'' - h(\alpha_1) + h(|t-\pi|) &= -\varepsilon^2 \frac{a}{\varepsilon} e^{\frac{-at}{\varepsilon}} - h(\alpha_1) + h(|t-\pi|) \\ &= -\varepsilon^2 \frac{a}{\varepsilon} e^{\frac{-at}{\varepsilon}} + \int_{\alpha_1}^{|t-\pi|} h'(s) ds \\ &\geq -\varepsilon^2 \frac{a}{\varepsilon} e^{\frac{-at}{\varepsilon}} + a^2 \left(|t-\pi| + (t-\pi) + \frac{\varepsilon}{a} e^{\frac{-at}{\varepsilon}} \right) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\alpha_2'' - h(\alpha_2) + h(|t-\pi|) &= -\varepsilon^2\frac{a}{\varepsilon}e^{\frac{a(t-2\pi)}{\varepsilon}} - h(\alpha_2) + h(|t-\pi|)\\ &= -\varepsilon^2\frac{a}{\varepsilon}e^{\frac{a(t-2\pi)}{\varepsilon}} + \int_{\alpha_2}^{|t-\pi|} h'(s)ds\\ &\geq -\varepsilon^2\frac{a}{\varepsilon}e^{\frac{a(t-2\pi)}{\varepsilon}} + a^2\left(|t-\pi| - (t-\pi) + \frac{\varepsilon}{a}e^{\frac{-a(t-2\pi)}{\varepsilon}}\right)\\ &\geq 0\end{aligned}$$

La fonction $\alpha(t) = \max(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ *est une sous-solution de ce problème. D'autre part la fonction*

$$\beta(t) = |t-\pi| + \frac{\varepsilon}{a}e^{\frac{-a|t-\pi|}{\varepsilon}}$$

est une sur-solution du problème car en la reécrivant sous la forme :

$$\beta(t) = \begin{cases}(t-\pi) + \frac{\varepsilon}{a}e^{\frac{-a(t-\pi)}{\varepsilon}} & si\ t \geq \pi\\ (\pi - t) + \frac{\varepsilon}{a}e^{\frac{a(t-\pi)}{\varepsilon}} & si\ t \leq \pi\end{cases}$$

on obtient après calcul :

$$\varepsilon^2\beta'' - h(\beta) + h(|t-\pi|) = \begin{cases}\varepsilon^2\frac{a}{\varepsilon}e^{\frac{-a(t-\pi)}{\varepsilon}} - h(\beta) + h(t-\pi) & si\ t \geq \pi\\ \varepsilon^2\frac{a}{\varepsilon}e^{\frac{a(t-\pi)}{\varepsilon}} - h(\beta) + h(\pi-t) & si\ t \leq \pi.\end{cases}$$

Donc

$$\varepsilon^2\beta'' - h(\beta) + h(|t-\pi|) = \begin{cases}\varepsilon^2\frac{a}{\varepsilon}e^{\frac{-a(t-\pi)}{\varepsilon}} - \int_{t-\pi}^{\beta(t)} h'(s)ds & si\ t \geq \pi\\ \varepsilon^2\frac{a}{\varepsilon}e^{\frac{a(t-\pi)}{\varepsilon}} - \int_{\pi-t}^{\beta(t)} h'(s)ds & si\ t \leq \pi\end{cases}$$

et par suite

$$\varepsilon^2\beta'' - h(\beta) + h(|t-\pi|) \leq \begin{cases} \varepsilon^2 \frac{a}{\varepsilon} e^{\frac{-a(t-\pi)}{\varepsilon}} - a^2 \left(t - \pi + \frac{\varepsilon}{a} e^{\frac{-a(t-\pi)}{\varepsilon}} - (t-\pi)\right) & si\ t \geq \pi \\ \varepsilon^2 \frac{a}{\varepsilon} e^{\frac{a(t-\pi)}{\varepsilon}} - a^2 \left(\pi - t + \frac{\varepsilon}{a} e^{\frac{a(t-\pi)}{\varepsilon}} - (\pi - t)\right) & si\ t \leq \pi. \end{cases}$$

D'où

$$\varepsilon^2\beta'' - h(\beta) + h(|t-\pi|) \leq 0.$$

Comme la fonction $h \in C^1$, *alors la fonction* $h(u) - h(|t-\pi|)$ *est* L^1*-Carathéodory sur* $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ *et d'aprés le théorème d'existence (Théorème 3.2) il existe une solution* u *du problème telle que :*

$$\forall t \in [0, 2\pi], \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t).$$

Grâce aux expressions de $\alpha(t)$ *et* $\beta(t)$ *on peut écrire* u *sous la forme :*

$$u(t) = |t-\pi| + o(\varepsilon e^{\frac{a|t-\pi|}{\varepsilon}}).$$

Bibliographie

[1] C. De Coster et P.Habets, Lower and upper solutions in the theory of ODE boundary value problems : Classical and recent results. Edited by C.K chui, Standford university, côte D'opale, France, 2006.

[2] S. Djebali, Degré topologique : Théorie et aplications aux EDO - EDP, Cours policopiés, dpartement de mathématiques, ENS-Kouba, Alger, 1998.

[3] S. Djebali, Problémes aux limites non lineaires associés aux EDO du second ordre, Cours de magister, département de mathématiques, ENS Kouba, Alger, 2001-2002.

[4] I. Rachunkova and M.Tvrdy. Construction of lower and upper functions and ther application to regular and singular boundary value problems. Procedings of the third world congress of Nonlinear Analysis, Brt 6 (Catania, 2000). Nonlinear Analysis, 47 (2001), n° 6, pp. 3937-3948.

[5] I.Rachunkova and M.Tvrdy : Localization of nonsmooth lower and upper functions for periodique boundary value problems , Mathematica Bdremiq, 127 (2002), n°4, pp.531-545.