République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
La recherche Scientifique
Université Ibn Khaldoun – Tiaret –

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département des MATHEMATIQUES

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

DOMAINE : Mathématiques et Informatique

FILIERE : Mathématiques

SPECIALITE : Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par

Boussekine Fatima

Larouci Nesrine

Sadou Saadia

Safi Nadjet

Intitulé par

La stabilité des opérateurs de Fredholm

Soutenu le 02 /07/2019 Devant Le Jury Composé de :

Mr. *: M.tayeb*, MAA	Président
Mr : B.*Mohammed*, MAA	Encadreur
Mr : *Z.Ismail*, MAA	Examinateur

Année Universitaire : 2018/2019

Remerciement

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieux qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce travail.

Nous tenons à remercier notre encadreur Mr Benhabi Mohammed pour son soutient, sa présence et pour ses précieux conseils qui sont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené un bon port.

Nous tenons à remercier monsieur le président et messieurs les membres de jury de nous faire l'honneur d'apprécier notre travail.

Enfin nous tenons également à remercier tous les personnes qui sont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

★ ★ ★

*__________ *Je dédie ce travail à* __________*

A Ma très cher mère pour tout son amour et son dévouement

A L'âme de mon grand-père

A Ma grand-mère qui a toujours là pour moi et que je souhaite une bonne santé

A Mes adorables sœurs : Dalila, Zahia et Sonia pour leur soutien moral .

A Toutes ma famille en particulier

A Tous mes amis de l' université de Tiaret et mes collègues et tous ceux qui m'estiment

Merci d'être toujours la pour moi

________________ *Sadou Saadia* ________________

*_________ *Je dédie ce travail à* _________*

A Maman qui m'a soutenu et encouragé durant ces années d'études.

A Mes sœurs : Denia,n Hanan, Nacira, Achwak et mon frère Ghalem qui m'ont toujours encouragé durant cette années d'études

A mon époux Chafaa Mohamed Amin qui m'a aidé et supporté dans les moments difficile

A mes belles-sœurs : Nadjet , Fatima et MALIKA

A toute ma familles et mes amies

_____________ *Boussekine Fatima* _____________

*——— *Je dédie ce travail à* ———*

A mes chers parents, pour leur soutien tout au long de mes études.

A mes sœurs : Bakhta et Halima, à mes frères Abdselam et Omar pour leurs encouragement

A toute ma famille et mes amies

——— *Safi nadjet* ———

*__________ *Je dédie ce travail à* __________*

A mes très chers parents .Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l' amour dont ils ne cessent de me combler.

A Ma grand-mère mama aicha qui a toujours là pour moi et que je souhaite une bonne santé

A mes cher frère nourdine ,djamel , atala, abdou mes chères sœurs khadija , houria , brhahoum , reghia , nabila , manal , hadjoja pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral,

A tous les membres de ma famille larouci et adem et mes amis, __________ *Larouci Nesrine* __________

Table des matières

1 Opérateur de Fredholm borné **9**

1.1 Semi Fredholm . . . 9

1.2 Opérateur de Fredholm . . . 14

1.3 l'adjoint d'un Opérateur de Fredholm . . . 16

1.3.1 L'adjoint d 'un opérateur . . . 16

1.3.2 Adjoint d'un opérateur de Fredholm . . . 19

1.4 produit d'opérateur de Fredholm . . . 25

1.5 alternative de Fredholm . . . 27

2 opérateurs de Fredholm non bornés **29**

2.1 Généralités sur les opérateurs non bornés . . . 29

2.1.1 notions générales des opérateurs linéaires non bornés . . . 29

2.1.2 Opérateur fermés . . . 31

2.1.3 Adjoint d'un opérateur non borné . . . 32

2.1.4 L'opérateur symétrique . . . 34

2.1.5 L'opérateur auto-adjoint . . . 35

2.1.6 spectres et résolvante . . . 35

2.2 opérateur de Fredholm . . . 37

2.2.1 translation dans l_F^2 . . . 38

2.2.2 translation à droite . . . 39

2.2.3 translation à gauche . . . 40

2.2.4 Co-norme d'un opérateur fermé et opérateur de Fredholm non bornés 41

3 Stabilité de Fredholm 50

3.1 Stabilité des opérateurs fe Fredholm dans le cas borné 50

3.1.1 application 54

3.2 Stabilité des opérateurs de Fredholm dans le cas non borné : 56

3.2.1 Stabilité des opérateurs non bornés 56

3.2.2 Stabilité des opérateurs de Fredholm non bornés : 63

3.2.3 Algèbre de Calkin 69

Notations

A : Opérateur de Fredholm.

H : Espace de Hilbert.

$L(H, H')$: L'ensemble des opérateurs bornée

$\mathbb{C}$: L'ensemble des nombres.

complexe.

dim : Dimension.

$N(A) = \ker(A)$: Noyau.

$R(A) = Im(A)$: Image.

$D(A)$: Domaine de définition de l'opérateur.

ind : L'indice.

$\mathbb{N}$: L'ensemble des nombres naturel.

$\mathbb{R}$: L'ensemble des nombres réel.

$B'_{H'}$: La boule unité fermé.

E, F : Espace vectoriel normé.

X, Y : Espace de Banach.

$C(H, H)$: L'ensemble des opérateurs fermé.

$(E, \|.\|_E)$: Espace normé.

$\mathbb{Z}$: L'ensemble des nombres entiers.

V : Opérateur entier.

K : Compact.

$\oplus$: Somme direct.

$c(A)$: La co-norme.

$G(A)$: Le graphe d'opérateur A.

$\phi(X,Y)$: L'ensemble des opérateurs semi-Fredholm.

Introduction générale

Le mathématicien Ivar Fredholm a développé grâce à ces travaux sur les équations intégrales une grande partie de l'analyse fonctionnelle.
Il a développé sa théorie à partir du théorème connu sous le nom d' Alternative de Fredholm qui concerne la résolution de l'équation

$$\lambda f - Tf = g........(1)$$

avec T un opérateur agissant sur X(par exemple les opérateurs intégraux à noyau).Ce théorème affirme que l'équation (1) admet une solution unique pour tout g appartenant à X ou bien l'équation homogène $\lambda f - Tf = 0$ admet n solution linéairement indépendantes (ce qui équivaut à $codimension(R(T - \lambda I) = n))$ et dans ce cas l'équation non homogène (1) est résoluble si et seulement si g vérifie n conditions d'orthogonalité.
La théorie de Fredholm est un premier pas vers la théorie des opérateurs de Fredholm.
La théorie de Fredholm donne des informations sur les solutions de l'équation (1) en utilisant la dimension du noyau de $T(\dim N(T))$ et la dimension du quotient de l'espace par l'image codimension $R(T)$ ce qui a fait émerger une nouvelle classe d'opérateurs, les opérateurs de Fredholm.
Cette classe est très importantes pour plusieurs raisons une de ces raisons est le rôle joué par l'indice dans l'analyse et la géométrie, qui est définie par :

$$ind(T) = \dim N(T) - co \dim R(T).$$

Les apports de Fredholm furent rapidement connus des mathématiciens, après que Holmgren exposa en 1902 à Gottingen la théorie de Fredholm.
Hilbert comprit rapidement l'importance des travaux de Fredholm. Pendant le premier quart du vingtième siècle, En 1903, Fredholm publie la version complète de sa théorie dans Acta Mathématica. Hilbert généralise la théorie de Fredholm pour inclure la théorie des valeurs propres, ce qui va le conduire à la notion d' espace de Hilbert. Fredholm décédé le 17 aout 1927 à Danderyd. L'étude importante dans cette théorie est la propriété de stabilité des opérateurs de Fredholm c'est le but du troisième chapitre de notre travail.
Ce résultat a été prouvé pour la première fois par F.V.Atkinson en 1951 [**1**] pour le cas borné, tout en concluant que l 'ensemble des opérateurs de Fredholm est ouvert dans [**5**] l'ensemble des opérateurs bornés et l'indice d'un opérateur de Fredholm est constant sur chaque composante de l'ensemble résolvant essentiel.
Au cours de cette année, Atkinson [**1**] établit un autre type de stabilité pour cette classe d'opérateurs par rapport aux perturbations de type compact en 1952, le critère de stabilité s'élargit au cas borné par M.G.Krein et M.A.Krasnoslky [**7**] et par B.Sg.Nagy[**11**]. Plusieurs formes ont été données à ce résultat qui ont pour base la création des métriques (distances)sur l'espace $C(H)$ des opérateurs fermés sur un espace de Hilbert$H$. Une première distance d sur $C(H)$ a été introduite par Newburgh [**12**] en 1951. Ceci a été réalisé en définissant d'abord la distance entre deux opérateurs fermés comme la distance entre deux sous-espaces fermés de H et ensuite prendre la distance entre deux opérateurs fermés comme la distance entre leurs graphes.
M.G.Krein [**7**] et M.A.Krasnoselky [**7**] ont obtenu une deuxième métrique g sur $C(H)$ équivalente à d définie par :

$$g(A,B) = \|P_{G(A)} - P_{G(B)}\|_{L(H\times H)}$$

où $P_{G(A)}$ et $P_{G(B)}$ sont respectivement les projections orthogonales dans $H \times H$ sur le graphe $G(A)$ de l'opérateur A et le graphe $G(B)$ de l'opérateur B.
EN 1963. H.Corde et J.Ph. labrousse ont construit une troisième métrique p, plus pratique équivalente aux deux premiers distance, p est définie en fonction de l'opérateur borné $R_A = (1 + A^*A)^{-1}$, R_{A^*} et AR_A et par suite énoncèrent le premier théorème de stabilité des opérateurs de Fredholm non bornés et conclurent que l'ensemble des opérateurs de fredholm est ouvert dans $C(H)$.

Description du travail

L'objectif de notre travail est de présenter les opérateurs de Fredholm dans les deux cas borné et non borné et de réécrire d'une manière aisée ces théorèmes de stabilité ainsi que leur démonstrations, le travail s'achève par une application sur les opérateurs de Hilbert-Shmidt et l'algèbre de Calkin.
contrairement au cas borné, la stabilité dans le cas non borné devient difficile à démonter, raison pour laquelle on a été contraint d'introduire des outils mathématiques pour faciliter l'accès à ces résultats.
Le mémoire est constitué de trois chapitres :
Le premier chapitre consacré à la définition des opérateurs semi-Fredholm et les opérateurs de Fredholm dans le cas borné sur un espace de Hilbert H. On peut définir les opérateurs de Fredholm d'une autre manière équivalente en utilisant les sous-espaces de codimensions finis. On s'intéresse aussi a l'adjoint d'un opérateur de Fredholm et à l'alternative de Fredholm.
Le deuxième chapitre est consacré à la définition des opérateurs fermés à images fermés car ses opérateurs permettent de définir des opérateurs de Fredholm non borné dans un espace de Hilbert H.On commence par définir la con-orme d'un opérateur linéaire A noté $c(A)$ et on établit le lien entre $Im(A)$ et la con-orme $c(A)$ et la relation entre $c(A)$ et $c(A*)$,On définit ainsi la con-orme d'un opérateur linéaire A suivant un sous-espace F de H.

Au troisième chapitre on étudie la stabilité des opérateurs de Fredholm borné et non borné, Dans ce chapitre, on montre que les perturbations faible n'influent pas sur l'ensemble des opérateurs de Fredholm non bornées, contrairement au cas bornée, la stabilité nécessite une condition sur la norme de l'opérateur bornée, cette propriété de stabilité sera traduite sous forme des théorèmes de stabilités . On achève ce chapitre par des applications sur les opérateurs de Hilbert-Schmid et l'algèbre de Calkin

Chapitre 1

Opérateur de Fredholm borné

Dans ce chapitre on définit les opérateurs semi-Fredholm et les opérateurs de Fredholm dans le cas borné sur un espace de Hilbert H. On peut définir les opérateurs de Fredholm d'une autre manière équivalente en utilisant les sous-espaces de co-dimensions finis. On s'intéresse aussi a l'adjoint d'un opérateur de Fredholm et à l'alternative de Fredholm.
Dans tout ce qui suit on note par $L(H, H')$ l'ensemble des opérateurs bornés d 'un espace de Hilbert H dans un autre espace de Hilbert H' et $L(H) = L(H, H')$.

1.1 Semi Fredholm

Définition 1.1. *Soit $A \in L(H, H')$.*

A est dit un opérateur semi-Fredholm à droite (respectivement à gauche) s'il existe un opérateur borné $B \in L(H^{'}, H)$ et un opérateur K compact sur $H^{'}$ (respectivement sur H)
tel que :

$$AB = 1 + K(respectivement\ BA = 1 + K)$$

Proposition 1.1. *Si $A \in L(H, H')$ et $\lambda \in C$ et $\lambda \neq 0$, alors $Im(A - \lambda)$ est fermé* *dans* H' *et* $\dim\ker(A-\lambda) = \dim\ker(A-\lambda)^* < +\infty$

Preuve

Supposons que $\lambda \in \sigma(A)$

Posons $\triangle = \sigma(A)\backslash\lambda, H_\lambda = E(\lambda)H, H_\triangle = E(\triangle)H, A_\lambda = A\backslash H_\lambda$ *et* $A_\triangle = A\backslash H_\triangle$.

$\lambda \notin \sigma(A_\triangle)$, *alors* $A_\triangle - \lambda$ est inversible. Mais $Im(A_\triangle - \lambda) = E(\triangle)H = H_\triangle$.

Comme $Im(A-\lambda) = (A-\lambda)H_\lambda + (A-\lambda)H_\triangle = Im(A_\lambda - \lambda) + H_\triangle$, *et* $\dim H_\lambda < +\infty$ *alors* $Im(A-\lambda)$ est fermé.

Remarquons que :

$$H/Im(A-\lambda) \approx H_\lambda/Im(A_\lambda - \lambda).$$

Comme $\dim H_\lambda < +\infty$, alors : $\dim[H/Im(A-\lambda)] = \dim H_\lambda - \dim Im(A_\lambda - \lambda) = \dim\ker(A-\lambda) < +\infty$ car $\ker(A-\lambda) \subseteq E(\lambda)H = H_\lambda$.

Mais $[H/Im(A-\lambda)]^* = [Im(A-\lambda)]^\perp = \ker(A-\lambda)^*$, par conséquent $\dim\ker(A-\lambda) = \dim\ker(A-\lambda)^* < +\infty$.

Théorème 1.1. *L'orthogonalité* $F^\perp$ *de* F *est un sous espace vectoriel supplémentaire de* F *dans* E

preuve :

L'intersection $F \bigcap F^\perp = 0$ est réduit à 0 que le produit scalaire est non dégénéré de plus tout $x \in E$ s'écrit évidement

$$\begin{aligned} x &= x - p_F(x) + P_F(x) et\ on\ a \\ & \quad x - p_F(x) \in F^\perp \\ x &= F^\perp + F \end{aligned}$$

On note P_F est la projection sur$F$ parallèlement à $F^{\perp}$.

Proposition 1.2. *Soit $A \in L(H,H')$, alors les 3 assertions suivantes sont équivalentes :*

1) A semi –Fredholm à gauche .

2) ImA est fermé dans $H^{'}$ et $\dim\ker A < +\infty$.

3) Il existe un opérateur $B \in L(H^{'},H)$ et un opérateur F de rang fini sur H telle que $BA = 1+F$.

preuve

1) $\Rightarrow$ 2) Supposons que A est semi-Fredholm à gauche et montrons que ImA est fermé dans $H^{'}$ et la $\dim\ker A < +\infty$ A est semi-Fredholm à gauche c'est-à- dire il existe un opérateur B borné de $H^{'}$ dans H et un opérateur compact K sur H tel que : $BA = 1+K$
par définition $\ker BA$:

$$\ker BA = \{x \in H, BAx = 0\} \supset \{x \in H; Ax = 0\} = \ker A.$$

donc $\ker BA \supset \ker A \Longrightarrow \dim\ker A \leq \dim\ker BA$ d 'autre part $\ker BA = \ker(1+K)$ et $1+K$ est le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$, donc il est de dimension égale 1 qu'elle est finie par conséquence $\dim\ker A < \infty$
$ImA = \{BAx; x \in H\} = \{(1+K)x; x \in H\} = Im(1+k)$
On a $ImBA$ est fermé dans $H^{'}$ donc il existe $c > 0$ tel que :

$$\|BAh\| \geq C\|h\|, \forall h \in H$$

si $h \in (\ker BA)^{\perp}$ puisque $\|BAh\| \leq C.d\,(h.\ker BA)$

$$\begin{aligned}\|BAh\| &\geq \|C\| \\ \|B\|\|Ah\| &\geq \|h\| \\ \|Ah\| &\geq (C/\|B\|)\|h\| \\ \|Ah\| &\geq C^{'}\|h\|\end{aligned}$$

$A\,(\ker BA)^{\perp}$ est un fermé mais $ImA = A\,(\ker BA)^{\perp}+A\,(\ker BA)$ et comme $A\,(\ker BA)$ est de dimension fini par conséquent, ImA est fermé dans $H^{'}$.

2) $\Longrightarrow$ 3)

On suppose que ImA est fermé dans $H^{'}$ et $\dim \ker A < +\infty$ et montrer qu'il existe un opérateur $B \in L(H, H^{'})$ et un opérateur F de rang fini sur $H^{'}$ telle que $BA = 1 + F$

On pose $A_1 = A/\,(\ker A)^{\perp}$ alors A_1 est inversible de $(\ker A)^{\perp}$ dans ImA

A_1 est un espace quotient donc est un anneau alors elle est inversible de plus on a $(\ker A)^{\perp} = ImA$

en effet ,montrons que A_1 est bijective :

A_1 est surjective :

Soit $y \in ImA$ cherchons $x \in (\ker A)^{\perp}$ tel que $A_1 x = y$

comme $y \in ImA$ alors il existe $t \in H$ tel que $y = A(t)$

d'autre part, comme $\ker A$ est fermé on a d'après le théorème de la projection orthogonale :

$$H = \ker A \oplus (\ker A)^{\perp}$$

par conséquence

$$t = t_1 + t_2$$

Avec $t_1 \in \ker A$ et $t_2 \in (\ker A)^{\perp}$

$t_2 = p(t)$ où p est la projection orthogonale sur $(\ker A)^{\perp}$ et $q = 1 - p$ est la projection

orthogonale sur $\ker A$ dans $H(H = q - p)$
Posons $x = t_2 \in (\ker A)^{\perp}$, $A_1 x = A_1 t_2 = A t_2 = A t = y$ donc A_1 est surjective .
A_1 injective :
Soit $x \in (\ker A)^{\perp}$ tel que :

$$A_1 x = 0$$

alors

$$x \in (\ker A) \cap (\ker A)^{\perp} = 0$$

donc

$$x = 0$$

D' ou A_1 existe
Soit $p^{'}$ la projection sur ImA dans $H^{'}$, et définissons B de H dans $H^{'}$ par $B = A_1^{-1} p^{'}$.
Calculons BA . Soit $x \in H$, $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \ker A$ et $x_2 \in (\ker A)^{\perp}$, alors $BA(x) = A_1^{-1} p^{'} A x = A_1^{-1} A x = A_1^{-1} A x_2 = A_1^{-1} A_1 x_2 = x_2 = x - x_1$.
Si $F = -q$ où q est la projection dans H sur $\ker A$, alors :

$$BA = I + F$$

et

$$ImF = Imq = \ker A$$

Or on a $\ker A$ de dimension finie alors ImF de rang fini et donc compact .
3) $\Longrightarrow$ 1) D'après la définition 1.1 , avec $K = F$.
Si ImA est fermé dans $H^{'}$ et $\dim\ker A < +\infty$ et $co\dim ImA < +\infty$

1.2 Opérateur de Fredholm

Définition 1.2. [***10***] *Soit* $A \in L(H, H')$

A est dit un opérateur de Fredholm si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1) ImA *est fermé.*
2) $\dim(\ker A)$ *est finie.*
3) $co\dim(ImA)$ *est finie.*

Définition 1.3. [***6***] *L'indice d'un opérateur de Fredholm est la fonction à valeur entier suivante :*

$$ind : F(X, Y) \mapsto Z$$
$$A \mapsto ind(A) = \dim(\ker A) - \dim(co\ker A)$$

Exemple : Considérons deux espace R^m et R^n muni de la norme euclidienne.
Soit $A : X \mapsto Y$ un opérateur linéaire continue
finalement, dim(ker) et $\dim(co\ker A)$ sont finie et ImA est fermée.

Alors :

$$\begin{aligned} ind(A) &= \dim(\ker A) - \dim(co\ker A) \\ &= \dim(\ker A) - \dim(R^n/ImA) \\ &= \dim(\ker A) - (\dim(R^n) - \dim(ImA)) \\ &= \dim(\ker A) - \dim(R^n) + \dim(ImA) \\ &= \dim(R^m) - \dim(R^n) \in (m-n) \end{aligned}$$

On peut définir les opérateur de Fredholm on utilise les espaces de Banach .

Définition 1.4. *[10] Soient X, Y deux espaces de Banach.On dit que $A \in L(X,Y)$ est un opérateur de Fredholm, s'il existe un sous-espace fermé $X_1 \subset X$ de codimension finie, tel que la restriction de A à X_1 soit un isomorphisme de X_1 sur $Y_1 = A(X_1)$, et que $co\dim_y A(X_1) < +\infty$.*
Autrement dit :on a $co\dim_x(X_1) < +\infty$, $co\dim_y A(X_1) < +\infty$ et il existe une constante $C > 0$, tel que :

$$\forall x \in X_1, \|Ax\|_Y \geq C\|x\|_X.$$

Définition 1.5. *On dit que $A \in L(X,Y)$ est un plongement de X dans Y s'il existe une constante $C > 0$ tel que :*

$$\forall x \in X; \|Ax\|_Y \geq C\|x\|_X$$

il est clair que les opérateurs proches de A vérifie encore la propriété, mais pour un $C' < C$ voisin de C :
Par l'inégalité triangulaire, on aura pour tout $x \in X$

$$\|(A+S)x\|_Y \geq \|Ax\|_Y - \|Sx\|_X \geq C\|x\| - \|S\|\|x\| \geq (C - \|S\|)\|x\|$$

Ce qui montre que $A' = A + S$ est encore un plongement si $\|S\| < C$
l'image par un plongement A de tout sous-espace fermé de X est fermé dans Y

Lemme 1.1. *Si A est un plongement de X dans Y et si la codimension de $A(X)$ dans Y (finie ou infinie)est supérieure ou égale àk il en est de même pour les opérateurs A' voisins de A.*
Si A est un plongement et si la codimension de $A(X)$ dans Y est finie et égale à k, il en est de même pour les opérateurs A' voisins de A.
Si A est un plongement et si la codimension de $A(X)$ dans Y est infinie, il en est de même pour les opérateurs A' voisins de A.

Proposition 1.3. *Un opérateur $A \in L(X,Y)$ est un presque plongement si et seulement si son noyau est de dimension finie et son image fermé. Dans ce cas, la restriction A_1 de A à tout supplémentaire X_1 du $\ker A$ est un plongement de X_1 dans Y.*

Preuve

Supposons $\ker A$ de dimension finie et $A(X)$ fermé. On peut trouver X_1 fermée tel que $X = X_1 \oplus \ker A$, alors $A(X_1) = A(X)$ est un espace de Banach, et $A_1 = A_{/X_1} \in L(X_1, A(X))$ est une bijection continue. D'après le théorème d'isomorphisme de Banach, la bijection inverse est continue, donc A_1 est un isomorphisme de X_1 sur $A(X_1)$.
Si $S \in L(A(X), X_1)$ est l'inverse de A_1, on a

$$\forall x \in X_1, \|x\| = \|S.Ax\| \leq \|S\|\|Ax\| \Rightarrow \|Ax\| \geq \|S\|^{-1}\|x\|$$

ce qui donne la propriété de plongement pour A_1, avec $C = \|S\|^{-1}$

1.3 l'adjoint d'un Opérateur de Fredholm

1.3.1 L'adjoint d 'un opérateur

Définition 1.6. *Soit l'opérateur $T \in L(H)$. L'adjoint de Test l ' opérateur linéaire borné, noté T^*, vérifiant*

$$\langle x, Ty\rangle = \langle T^{*}x, y\rangle, \forall x, y \in H$$

Définition 1.7. *Soient X et Y deux espaces de Banach et T un opérateur borné de X dans Y. L 'adjoint de T noté $T^{'}$, est l'opérateur borné de Y^{*} dans X^{*} vérifiant*

$$(T'\ell)(x) = \ell(T(x)).$$

Théorème 1.2. *[4] Soient X et Y deux espaces de Banach .*
Soit A un opérateur linéaire de X dans Y , On suppose que le graphe, $G(A)$ est fermé dans $X \times Y$ alors, A est continue.

preuve :
On considère sur X les deux normes .
$\|x\|_1 = \|x\|_X + \|A(x)\|_X^1$ et $\|x\|_2 = \|x\|_X$ ces normes sont appelées les normes du graphe. Comme $G(A)$ est fermé, X muni de le norme $\|.\|_1$ est un espace de Banach, d'autre part $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$, par conséquence ces deux normes sont équivalentes . Il existe une constante $C \geq 0$ telle que $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ donc $\|T(x)\|_y \leq C\|X\|_X$.
Existence et unicité :
Tout opérateur sur H admet un unique adjoint en effet. Soit B un opérateur borné et soit Y un vecteur de H. L'application qui à un vecteur x associe $\langle B(x) \mid Y\rangle$ est une forme linéaire continue le théorème de représentation de Riesz garantit l'existence d'un unique vecteur z tel que cette forme linéaire continue coïncidé avec l'application qui à X associe
$\langle x \mid z\rangle$. l'application B^{*} qui à Y associe z est alors l'adjoint de B.
Réciproquement, si deux applications quelconques

$$B, B^{*} : H \longrightarrow H^{*} \text{ vérifiant :}$$

$$\forall x, y \in H \langle B(x) \mid y\rangle = \langle X \mid B^{*}(y)\rangle$$

.

Alors on a la proposition suivant :

Proposition 1.4. B, B^* *sont toutes deux linéaires et continues*

preuve

1 la linéarité est une conséquence directe des propriétés de bilinéarités et de non dégénérescence du produit scalaire et on utilise le faite que :

$$\forall X, Y_1, Y_2 \in H, \forall \lambda \in K$$
$$\langle x \mid B^*(Y_1 + \lambda Y_2)\rangle = \langle B(x) \mid y_1 + \lambda Y_2\rangle = \langle B(x) \mid y_2) + \overline{\lambda}(B(x) \mid y_2\rangle$$

On en déduit

$$\langle x \mid B^*(y_1 + \lambda Y_2)\rangle = \langle x \mid B^*(y_1)\rangle + \langle x \mid \lambda B^*(y)_2\rangle$$

donc

$$\langle x \mid B^*(y)_1 + \lambda B^*(y)_2 - A^*(y_1 + \lambda Y_2)\rangle = 0$$

l'égalité (1) est vrai pour toutes les vecteurs de x ce qui montre que le terme de droit est nul .Cette nullité démontre le caractère linaire de A^*.

Pour monter la continuité de B^*, il suffit grâce au théorème du graphe fermé vérifier que si x_n tend vers x est si $B^*(x_n)$ tend vers Y, alors $B^*(x) = Y$. Or ces deux hypothèses impliquent(en utilisant l'équation d'adjonction) que pour tout Z , $\langle Z \mid B^*(x)_n\rangle$ tend à la fois vers $\langle Z \mid B^*(x)\rangle$ et vers $\langle Z \mid y\rangle$ donc que $B^*(x) - Y$ est nul (car orthogonal à tout Z) .

Remarque :

. Tout opérateur sur H admet un unique adjoint.

. L'adjoint de l'opérateur T est linéaire.

. Si l'opérateur T est borné alors l'adjoint est aussi et ils ont même norme d'opérateur.

. Un opérateur est borné, si et seulement s'il est continue.

1.3.2 Adjoint d'un opérateur de Fredholm

Les résultats suivantes nous sers à démontré quelques propriétés par suites

Lemme 1.2. *[10] Soit* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces normés et* $A \in B(E, F)$ *un opérateur borné alors :*

1) $\ker A^* = (ImA)^\circ$

2) $\ker A = (ImA^*)^\circ$

3) $\ker A^* = (ImA)^\perp$

Preuve

$$\begin{aligned}
1) \ker A^* &= \{y^* \in F^* | 0 = A^*y^* = y^* \circ A\} \\
&= \{y^* \in F^* | y^* | ImA = 0\} \\
&= \{y^* \in F^* | y^*(y) = 0 \textit{ pour } \textit{ tout } y \in ImA\} \\
&= (ImA)^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2)(ImA^*)^\circ &= \{x \in E | x^*(x) = 0 \textit{ pour tout } x^* \in ImA^*\} \\
&= \{x \in E | 0 = (A^*y^*)x \textit{ pour tout } y^* \in F^*\} \\
&= \{x \in E | 0 = y^*(Ax) \textit{ pour tout } y^* \in F^*\} \\
&= \{x \in E | 0 = Ax\} \\
&= \ker A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3)\forall x \in E, x \in \ker A^* &\Leftrightarrow \forall y \in E(A^*(x|y)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall y \in F(x|Ay) = 0 \\
&\Leftrightarrow x \in (ImA)^\perp
\end{aligned}$$

Théorème 1.3. *[3] Soit M un sous-ensemble fermé d'un espace normé $(E, \|.\|_E)$, alors sont isomorphe*

(1) $M^\circ \cong (E/M)^*$
(2) $M^* \cong (E^*/M^\circ)$

Preuve :

(1) Soit $\Pi : x \longrightarrow E/M$ L'application quotient et soit $A : y^* \longrightarrow y^*\Pi$. Clairement A est un opérateur linéaire de $(E/M)^*$ dans M°. Si $x^* \in M^\circ$ alors $M \subset \ker x^*$. alors la propriété universelle du quotient garanti qu'il existe un unique $y^* \in (E/M)^*$ tel que $x^* = y^*\pi$ et de plus $\|y^*\|_{(E/M)}* = \|E^*\|_{E^*}$
Autrement dit A est bijectif et $\|y^*\|_{(E/M)^*} = \|Ay^*\|_{E^*}$
en conséquence, A est même un isomorphisme isométrique de $(E/M)^*$ dans M°.

(2) Soit $A : E^*/M^\circ \mapsto M^*$ l'application qui envoie un élément de $x^* + M^\circ \in E^*/M^\circ$ sur la restriction de x^* à M. Puisque deux éléments $x_1^* + M^\circ$ et $x_2^* + M^\circ$ de E^*/M° sont égaux si et seulement si $x_1^*|M = x_2^*|M$, A est bien-défini. Il est aussi injectif par définition et clairement linéaire.
Maintenant, si $m^* \in M^*$ et $x_{m^*}^*$ est une extension de Hahn-Banach de m^* à E, alors $A(x^*m^* + M^\circ) = m^*$, ainsi A est surjectif. Il s'agit donc d'un isomorphisme.

Théorème 1.4. ***[13](théorème de l' Image fermée)***
Soient X et Y deux espaces de Banach, alors pour tout $A \in B(X, Y)$ les assertions suivantes sont équivalentes .
(1) ImA *est fermée.*
(2) $ImA = (\ker A)^\circ$.
(3) ImA^* *est fermée.*
(4) $ImA^* = (\ker A)^\circ$

Preuve

(1) $\Leftrightarrow$ (2) il découle du théorème 1.3 et du lemme 1.2 que

$$\overline{ImA} = (ImA)^{\circ} = (\ker A^{*})$$

(1) $\Leftrightarrow$ (4) D'après le lemme 1.2,

$$(\ker)^{\circ} = (ImA^{*})^{\circ} \supset ImA^{*}$$

nous avons l'application

$$\begin{aligned} S : X/\ker A &\to ImA \\ x + \ker A &\to T(x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme . Maintenant, si $x \in (\ker A)^{\circ}$, alors l'unique application

$$\overline{x} : (x + \ker A) \to x^{*}(x)$$

définie par la propriété universelle du quotient est un élément de $(X/\ker A)^{*}$. Par conséquent, $\overline{x} \circ S^{-1} \in (ImA)^{*}$. Donc il existe $y^{*} \in Y^{*}$ tel que $y^{*}|ImA = \overline{x} \circ S^{-1}$. Ainsi, pour tout $x \in X$

$$\begin{aligned} (A^{*}y^{*})x = y^{*}(Ax) &= (\overline{y} \circ S^{-1})(Ax) \\ &= (\overline{x} \circ S^{-1})(S(x + \ker A)) \\ &= \overline{x}(x + \ker A) = x^{*}(x). \end{aligned}$$

C'est-à-dire $A^{*}y^{*} = x^{*}$. Par conséquent $(\ker A)^{\circ} \subset imA^{*}$ et donc $(\ker A)^{\circ} = ImA^{*}$

$4 \Longrightarrow 3$ D'après la proposition

Soit $(X, \|.\|)$ un espace normé, $A \subset X$ un sous-ensemble de X et $B \subset X^*$ un sous-ensemble de X^*. Définissons

$$A^\circ = \{x \in X^* \mid x^*(x) = 0 \textit{ pour tout } x \in A\}$$

$$B^\circ = \{x \in X \mid x^*(x) = 0 \textit{ pour tout } x^* \in B\}$$

Les ensembles A° et B° sont fermés.

L'ensemble $B^\circ = \cap_{x^* \in X^*} \ker x^*$ est fermé en tant qu'intersections de fermés.
Soit Z_n^* une suite dans A° qui converge vers un certain $Z^* \in X$. Alors en particulier, $Z_n^*(x) \longrightarrow Z^*(x)$ pour tout $x \in X$. Or $Z_n^* \mid_A = 0$ pour tout $n \in N$, ce qui entraine que $Z^* \mid_A = 0$. Par conséquent, $Z^* \in A^\circ$ et ce dernier fait fermé.
D'après cette proposition les ensembles polaires sont des fermés

Théorème 1.5. ***[3](L'adjoint d'un opérateur de Fredholm)***

Soit X, Y deux espaces de Banach et $A \in L(X, Y)$ un opérateur de Fredholm. On considère alors son adjoint définie par :

$$\begin{aligned} A^* : Y^* &\longrightarrow X^* \\ Y^* &\longrightarrow y^* \circ A \end{aligned}$$

Nous allons montrer que A^* est aussi un opérateur de Fredholm et que sont indice est l'opposé de celui de A .
. On a X^*, Y^* sont des espaces de Banach puis E et F sont des espaces normés . On sait que $A^* \in B(Y^*, X^*)$. il reste avoir que
1) ImA^* est fermée

2) $\dim(\ker A^*) < +\infty$
3) $\dim(X^*/ImA^*) < +\infty$

preuve :
1) Étant donné que A est Fredholm, son image ImA est fermé , ce qui équivaut à dire que ImA^* est fermé, d'après le théorème de l'image fermé.

2) En appliquant le théorème 1.3.3 au sous-espace $KerA$ de X, il vient :

$$(KerA)^* \cong X^*/(\ker A)^\circ$$

Or le théorème de l'image fermée fournit $(\ker A)^\circ = ImA^*$, ainsi :

$$(\ker A)^* \cong X^*/(\ker A)^\circ = X^*/ImA^*$$

Donc

$$dim(X^*/ImA^*) = \dim(\ker A^*) = \dim(\ker A) < \infty$$

Par hypothèse

3)En appliquant le théorème 1.3.3 au sous-espace ImA de Y, il vient :

$$(Y/ImA)^* \cong (ImA)^\circ$$

En outre le lemme 1.3.2 fournit

$$(ImA)^\circ = \ker A^*$$

, par conséquent :

$$(Y/ImA)^*(ImA)^\circ = KerA^*$$

ainsi

$$\dim(\ker A^*) = \dim(Y/ImT)^* = \dim(Y/ImA) < \infty$$

Dans ce paragraphe on va trouver une relation entre l'indice d 'un opérateur de Fredholm et l'indice d' adjoint d'un opérateur de Fredholm

Remarque

$\dim\ker(T-\lambda) = \dim\ker(T-\lambda)^* < +\infty$

Théorème 1.6. *[3] Soit $A \in L(H, H')$.*
A est de Fredholm si et seulement si A^* est de Fredholm dans ce cas

$$ind(A) = -ind(A^*).$$

Preuve

La preuve de se théorème découle directement par le théorème 1.3 et le théorème 1.5
.
Par conséquence A^* est un opérateur de Fredholm donc :

$$\begin{aligned} ind(A^*) &= \dim\ker A^* - co\dim ImA^* \\ &= co\dim ImA - \dim\ker A \\ &= -ind(A) \end{aligned}$$

Corollaire 1.1. *[2]*

Pour tout opérateur de Fredholm $A : X \mapsto Y$ nous pouvons reformulé l'indice sous la forme suivante :

$$ind(A) = \dim(\ker A) - \dim(\ker A^*)$$

preuve

Découle du point (3) du théorème 1.5 où nous avons montrer que

$$\dim(co\ker A) = \dim(Y/ImA) = \dim(\ker A^*)$$

1.4 produit d'opérateur de Fredholm

Une propriété intéressante de l'indice est que l'indice de produit d'opérateurs de Fredholm est simplement la somme des indices composants.

Lemme 1.3. *[6]*

Soient X, Y des espaces de Banach et $A \in B(X, Y)$.
Soit M un espace de X de codimension finie n alors A est de Fredholm si et et seulement si la restriction :
$A_0 : M \to Y$ *est de Fredholm de plus :*
$ind(A) = ind(A_0) + n$
preuve
Si le résultat est vrai pour $n = 1$, il se généralise par récurrence :
posons :
$X = M \oplus vecteur X_1$ *considèreront les* 2 *cas possibles suivants :*
-Si $A(X_1) \notin ImA_0$, alors
$A(X) = A_0(M) \oplus vecteur A(x_1)$ *et* $\ker A_0 = \ker A$, *ainsi* ,$d(A_0) = d(A) + 1$ *et* $n(A_0) = n(A)$, *d'où* $ind(A) = ind(A_0 + 1)$
- Si $A(x_1) \in ImA_0$, alors $ImA = ImA_0$ et il existe $u \in M$ tel que :
$A(X_0) = A_0(u)$ *de plus* , $\ker A = \ker A_0 \oplus Vect x_1 - u$.
Ainsi , $d(A_0) = d(A)$ *et* $n(A_0) = n(A) - 1$, *d'où* $ind(A) = ind(A_0) + 1$.

Notations

Soit $A : X \to Y$, un opérateur de Fredholm alors :
$\ker A$ et Im A admettant des supplémentaires ($\ker A$ est continue et sa dimension

est finie) .
On peut écrire $X = \ker A \oplus X_0$ et $Y = ImA \oplus y_0$, comme $X_0 \cong ImA$, on peut définir une application bijective :
$\widetilde{A} : X_0 \times Y_0 \to Y$ par
$\widetilde{A}(x_0, y_0) = A(x_0) + y_0$ on appelleÃ la bijection associée à A .

Théorème 1.7. *[6] Soient $X, YetZ$ trois espaces de Banach .*
Si $A : X \to Y$ et $B : Y \to Z$ sont des opérateurs de Fredholm, alors BA est un opérateur de Fredholm, de plus :

$$indBA = indA + indB$$

.

preuve
Soit $\widetilde{A}$ la bijection associe à A et posons A_0, la restriction de $\widetilde{A}$ à X_0 (notons que A_0 est aussi la restriction de $\widetilde{A}$ à X_0) comme $\widetilde{A}$ est un isomorphisme et que B est Fredholm, l'opérateur $B\widetilde{A}$ en identifiantX_0 et $X_{0\times}0$, on obtient que BA_0 est la restriction commune de BA et $B\widetilde{A}$ à X_0 .
$B\widetilde{A}$ est Fredholm $\Longleftrightarrow$ BA_0 est Fredholm $\Longleftrightarrow$ BA est Fredholm.

$$\begin{aligned} ind\ BA &= ind\ BA_0 + \dim\ (X/X_0) \\ &= ind\ B\widetilde{A} - \dim\ (X_0 \times y_0/X_{0\times}0) + n(A) \\ &= ind\ B + ind\ A. \end{aligned}$$

Lemme 1.4. *[2]*

Supposons que H admet les décompositions $H = M \oplus N = M' \oplus N'$ et soit A un opérateur donne :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & X \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

$M \oplus N \to M' \oplus N'$ ou $A_1 : M \to M'$, $X : N \to M'$ et $A_2 : N \to N'$. Supposons

A_1 est inversible et que N et N' sont de dimensions finis alors A est de Fredholm et $ind(A) = \dim N - \dim N'$

preuve

On a $ImA = M' \oplus N' \bigcap ImA$ ou $N' \bigcap ImA$ est de dimension finie donc fermé .
Soit l'application $Y : \ker(A_2) \to \ker(A)$ définie par $Y(h) = -A_1^{-1}(h) \oplus$ il est facile de voir que Y est bijective et donc : $\dim \ker(A_2) = \dim \ker(A)$ de même il est facile de voir que $ImA = M' \oplus ImA_2$ d'ou en prenant l'orthogonal : $\ker(A^* = \ker(A^{*_2})$ anis A est de Fredholm et $ind(A) = \dim \ker(A_2^*)$ soit γle rang de la matrice A_2 .
$indA = \dim(N - r) - \dim(N' - r) = \dim N - \dim N'$

1.5 alternative de Fredholm

A l'époque de l'article de Fredholm (1903), il n'y avait pas plus d'espaces de Banach que la théorie des opérateurs compact, donc Fredholm s'intéressait à la résolution d'équation intégral de la forme suivante :
étant donnés un noyau $K(x, y)$ et une fonction continue g sur $[0, 1]$, peut-on trouve f continue sur $[0, 1]$ qui vérifie l'équation intégrale :

$$f(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy + g(x), \forall x \in [0, 1]$$

Si le noyau K est continue sur le carré, il résulte du théorème d'Ascoli que l'opérateur intégral A_K de noyau K est compact de $C([0, 1])$ dans lui-même, et on est train d'essayer de résoudre une équation de la forme $(Id - K)f = g$.Fredholm découvre dans le langage de l'époque que l'indice de $Id - K$ est nul, ce qui le conduit à formuler ce qui est reste connu sous le nom d'alternative de Fredholm.

Proposition 1.5. *[2] Soit A un opérateur compact sur H, alors $I - A$ est un opérateur de Fredholm d'indice nul.*

preuve

D'après la proposition 1.1 *on a $Im(I - A)$ est fermé dans H' et* $\dim(H/Im(I - A)) =$

$co\dim Im(I-A) < +\infty = \dim\ker(I-A)$ *Alors* $(I-A)$ *est Fredholm donc :*

$$ind(I-A) = \dim\ker(I-A) - co\dim Im(I-A) = 0$$

.

Proposition 1.6. *Soit* $A \in L(H, H')$*, si* A *est bijectif alors* A *est de Fredholm d'indice nul.*

Preuve : Comme A est bijectif, alors $\ker A = 0$, par conséquent

$\dim\ker A < \infty$. De plus $R(A) = H'$ est fermé et $co\dim R(A) = 0$, donc l'opérateur A est de Fredholm

$$ind(A) = \dim\ker A - co\dim R(A) = 0 - 0 = 0$$

Proposition 1.7. *Soit* $A \in L(H, H')$*, si* $\dim H < +\infty$ *et* $\dim H' < +\infty$*, alors* A *et est de Fredholm. Dans ce cas* $ind(A) = \dim H - \dim H'$

Preuve : Comme $\dim H < +\infty$, et $\dim H' < +\infty$, alors
$\dim\ker A < +\infty$, $co\dim R(A) < +\infty$ et $R(A)$ est fermé donc A est de Fredholm.

$ind(A) = \dim\ker A - co\dim R(A) = \dim\ker A - \dim H' + \dim R(A) = \dim H - \dim H'$

Chapitre 2

opérateurs de Fredholm non bornés

Dans ce chapitre on considère H et H' deux espaces de Hilbert, et A un opérateur linéaire défini de H dans H' de domaine $D(A)$ un sous-espace vectoriel de H d'image A dans H', avant cela on donne aperçu général sur les opérateurs non bornés, graphe, noyau, image, la notion de l'adjoint, le spectre, la résolvante et on définit les opérateurs fermés à image fermée et on exprime quelques propriétés qui seront utiles plus tard On achève notre travail par définir la co-norme $c(A)$ d'un opérateur linéaire fermé de domaine dense dans un espace de Hilbert H et on étudie les opérateurs de Fredholm non bornés.

2.1 Généralités sur les opérateurs non bornés

2.1.1 notions générales des opérateurs linéaires non bornés

Définition 2.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et T un opérateur linéaire défini de sous espace vectoriel $D(T) \subset E$ dans F. $D(T)$ est appelé le domaine de l 'opérateur T .*

Définition 2.2. *Un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H est un couple $(D(T), T)$ ou $D(T)$ est un sous espace vectoriel de H et T est un opérateur non borné de domaine $D(T)$.*
Dans la suite on suppose que $D(T)$ est dense dans H.

Exemple :
Soit T l'opérateur de multiplication par x défini de L^2 dans $L^2(R)$ par

$$Tf(x) = xf(x)$$

T a pour domaine

$$D(T) = \left\{f \in L^2(R)/xf(x) \in L^2(R)\right\}$$

tel que le produit scalaire sur $L^2(R)$ est

$$\langle f, g\rangle = \int f(x)\bar{g}(x)dx$$

Alors :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in L^2(R)$$

mais $xf(x) \notin L^2(R)$ car $\int xf(x)dx$ est divergente, alors T est un opérateur non borné.

Définition 2.3. *Soit $T \in L(H)$*

*1.On appelle **noyau** de T le sous-espace* $\ker(T)$ *tel que :*

$$\ker(T) = N(T) = \{x \in D(T) : T(x) = 0_X\} \text{ de } X.$$

.

*2.On appelle **Image** de T le sous-espace $Im(T)$ de Y tel que :*

$$Im(T) = R(T) = T\left(D(T)\right) = \{Tx : x \in D(T)\}.$$

2.1.2 Opérateur fermés

Définition 2.4. *Soit $(D(T), T)$ un opérateur non borné sur un espace de Hilbert H.Le graphe de T est le sous espace vectoriel noté $G(T)$ de $H \times H$ défini par :*

$$G(T) = \{(x, Tx), x \in D(T)\}.$$

Lemme 2.1. *Un sous espace $G \subset H \times H$ est le graphe d'un opérateur linéaire si et seulement si*

$$(0, y) \in G \Rightarrow y = 0.$$

Définition 2.5. *On dit qu'un opérateur T est fermé lorsque son graphe est fermé dans $H \times H$ c'est-à-dire :*
$\forall (x_n)_n \subset D(T)$ et $x_n \mapsto x$ dans H et $Tx_n \mapsto y$, alors $x \in D(T)$ et $Tx = y$
. •L'ensemble des opérateurs linéaire fermé de H dans H et à domaines denses est noté par $C(H)$

Théorème 2.1. ***[4](théorème du graphe fermé)***
Soient X et Y deux espaces de Banach et soit $T : X \mapsto Y$ une application linéaire. On suppose que le graphe de T est fermé de $X \times Y$, alors T est continue.

Proposition 2.1. *Soient X et Y deux espaces de Banach, si $T \in CL(X, Y)$ et $D(T) = X$, alors $T \in L(X, Y)$.*

Définition 2.6. *Soient X et Y deux espaces de Banach. On dit que*
$B \subset D(B) : X \mapsto Y$ extension de $T \subset D(T) : X \mapsto Y$ et on note $T \subset B$ si :

1) $D(T) \subset D(B)$

2) $Bx = Tx, \forall x \in D(T)$

3) Si $T \subset B \Rightarrow G(T) \subset G(B)$

Définition 2.7. *Un opérateur T linéaire est dit fermable si T admet une extension fermé.*

Proposition 2.2. *La plus petite extension fermée d'un opérateur fermable est appelé la fermeture de T notée $\overline{T}$.*

Proposition 2.3. *Si T est fermable, B fermé et $T \subset B$ alors $\bar{T} \subset B$.*

Preuve

$\bar{T}$ est une extension fermé de T et soit B extension fermé de A

$$T \subset B, G(T) \subset G(B) \Rightarrow \overline{G(T)} \subset \overline{G(B)} = G(B)$$

D'où :

$$\overline{T} \subset B$$

Remarque Soient X et$Y$ deux espaces de Banach et $T : X \mapsto Y$ un opérateur non borné alors, T est férmable si seulement si

$$\forall (f_n) \subset D(T), f_n \mapsto 0 \text{ si } Tf_n \text{ converge, alors on a } Tf_n \to 0$$

2.1.3 Adjoint d'un opérateur non borné

Définition 2.8. *Soit $(D(T), T)$ un opérateur non borné sur H de domaine $D(T)$ dense. On définit l'adjoint T^* de T par :*

$$\forall x \in D(T), \forall y \in D(T^*), \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

Si l'application $x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ est continue de $D(T)$ dans $\mathbb{C}$ elle possède alors une extension continue à H ce qui permet de définit l'élément T^*y dans H par le théorème de Riesz.

Définition 2.9. *Soit $T : D(T) \subset H \to H$ un opérateur dont le domaine est dense dans H. L'adjoint de T noté T^* son domaine est définit par :*

$$D(T^*) = \{x \in H, D(T) \ni y \to \langle x, Ty\rangle estcontinue\}$$

$D(T^*) =\{\ y \in H_2\ /\ \exists\ C \geq 0\ tel\ que\ |\langle Tx, y\rangle_{H_2}| \exists\ C\|x\|\ pour\ tout\ x \in D(T)\}$

Théorème 2.2. *Soit $(D(T), T)$ un opérateur a domaine dense, alors :*
1) T est fermé dans H.
2) T est fermable si et seulement si $D(T^*)$ est dense.
3) Si T est fermable alors $\overline{T} = T^{**}$ et $(\overline{T})^* = T^*$.

Preuve

1) On muni $H \times H$, du produit usuel

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle_H = \langle x_1, x_2\rangle_H + \langle y_1, y_2\rangle_H.$$

V opérateur unitaire défini sur $H \times H$ tel que :

$$V(x, y) = (-y, x)$$

Pour tous sous-espace vectoriel E de $H \times H$, on a aussi :

$$V(E^{\perp}) = (V(E))^{\perp}$$

En effet : Si $y \in V(E^{\perp})$, alors $Y = V(X)$ tel que $X \in E$ c'est-à-dire $Y = V(X)$ ou $\langle X, Z\rangle = 0, \forall Z \in E$,donc $Y \in (V(E))^{\perp}$ car $\langle Y, V(Z)\rangle = \langle V(X), V(Z) = \langle X, Z\rangle = 0$, $\forall Z \in E$.
Réciproquement, si $Y \in (V(E))^{\perp}$ alors $\langle Y, V(X) = 0$, $\forall X \in E$, de plus il existe $Z \in H \times H$, tel que $Y = V(Z)$, d'où $\langle V(Z), V(X)\rangle = \langle Z, X\rangle = 0$, c'est-à-dire $Z \in E$ et $Y \in V(E^{\perp})$. Soit $(x, y) \in H \times H$

$$\begin{aligned}(x, y) \in [V(G(T))]^{\perp} &\Leftrightarrow \langle (x, y), (-Tz, z)\rangle = 0, \forall z \in D(T)\\ &\Leftrightarrow \langle x, Tx\rangle = \langle y, z\rangle, \forall z \in D(T)\\ &\Leftrightarrow T^*x = y, \forall x \in D(T^*) \Leftrightarrow (x, y) \in G(T^*).\end{aligned} \tag{2.1}$$

D'où $G(T^*) = [V(G(T))]^{\perp} = V[G(T)^{\perp}]$., puisque $[V(G(T))]^{\perp}$ est fermé dans $H \times H$.,

2) Remarquons que $G(T)$ est un sous-espace vectoriel de $H \times H$, on a

$$V^2(G(T)) = G(T) et \overline{G(T)}) = [G(T)^{\perp}]^{\perp} \qquad (2.2)$$
$$= \left\{[V^2 G(T)]^{\perp}\right\}^{\perp} = \left\{V[V(G(T))]^{\perp}\right\}^{\perp}.$$

Si $D(T^*)$ est dense dans H, on peut définir T^{**} et $\overline{G(T)}$ est le graphe de $T^{**} = \overline{T}$.

Inversement, si $D(T^*)$ n'est pas dense dans H, alors $(D(T^*))^{\perp} \neq \{0\}$, soit $\psi \in (D(T^*))^{\perp} / \{0\}$, donc $(0, \psi) \in [V(G(T^*))]^{\perp}$car $\langle (0,\psi), (-T^*\psi f, f) \rangle = \langle 0, T^*, f \rangle + \langle \psi, f \rangle = 0, \forall f \in D(T^*)$, d'où $[V(G(T^*))]^{\perp}$ ne peut pas être le graphe d'un opérateur linéaire sur H et puisque $[V(G(T^*))]^{\perp} = \overline{G(T)}$, ou on voit que T ne peut pas être fermable.

3) Si T est fermable, alors $D(T^*)$ est dense dans H et

$$T^* = (\overline{T^*}) = T^{***} = (\overline{T})^*.$$

2.1.4 L'opérateur symétrique

Définition 2.10. *Un opérateur T dans un espace de Hilbert est dit symétrique si $T \subset T^*$. C'est-à-dire :*

$$D(T) \subset D(A^*), Tu = T^*u \text{ pour } u \in D(T)$$

Il est claire que T est symétrique si et seulement si :

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle \text{ pour } u \in D(T)$$

2.1.5 L'opérateur auto-adjoint

Définition 2.11. *On dit que T un opérateur auto-adjoint si : $T = T^*$, c'est-à-dire :*

1. $D(T) = D(T^*)$,

2. $Tu = T^*u, pour\ tout\ u \in D(T)$.

2.1.6 spectres et résolvante

Définition 2.12. *Soit E un espace normé, et T un opérateur fermé dans E. L'ensemble résolvant de T, noté $\rho(T)$, est constitué de tous les nombres $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que l'opérateur $\lambda I - T$ est une bijection de $D(T)$ sur E avec un inverse borné .*

- *L'opérateur $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$ est appelé la résolvante de T au point $\lambda \in \mathbb{C}$.*
- *Le complémentaire de $\rho(T)$ dans $\mathbb{C}$, noté $\sigma(T)$, s'appelle le spectre de T.*

$$\sigma(T) = \mathbb{C}/\rho(T)$$

donc

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \lambda \notin \rho(T)\}$$

Définition 2.13. ***(valeur régulière)*** *Soit T un opérateur non-borné fermé. On dit que λ est une valeur régulière de T si :*
$T - \lambda I : D(T) \longrightarrow H$ est une application linéaire bijective de $D(T)$ sur H, avec T^{-1} un inverse continue.
Si T n'est pas fermé, T n'admet aucune valeur régulière, donc on a toujours $\sigma(T) = C$

$R_\lambda(T)$ est borné de $Im(T-\lambda I)$ dans $D(T)$ c'est-à-dire

$$\forall\ C \geq 0\ , \|R_\lambda(T)u\| \leq C\|u\|\ \forall u \in Im(T-\lambda I)$$

$\sigma(T)$ est appeler le spectre de l'opérateur T et on a :

1) $\sigma(T) = C/\rho(T)$
2) $C = \sigma(T) \cup \rho(T)$
3) $\sigma(T) \cap \rho(T) = \phi$

Le spectre d'un opérateur non borné est constitué de trois types de spectres, dans ce que suit on va formuler les différents types de spectre avec T est un opérateur non borné de domaine $D(T)$.

Le spectre ponctuel :

$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (T-\lambda I)\}$ n'est pas inversible(n 'est pas injective) de $D(T)$ dans $Im(T-\lambda I)$.
On le note par σ_p est on lit le spectre ponctuel . C'est-à-dire il existe $x \neq 0$ tel que $Tx = \lambda x$, alors on dit que λ est une valeur propre de T et x un vecteur propre associé à λ .
L'ensemble des valeurs propres d'un opérateur T est appeler le spectre ponctuel de T.

Le spectre continu

le spectre continue note par $\sigma_c(T)$ est :
$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\}, (T-\lambda I)$ inversible de $D(T)$ dans $Im(T-\lambda I)$ et $Im(T-\lambda I)$ est dense dans H ; $R_\lambda(T)$ n'est pas borne .

σ_c est appelé le spectre continu de T.

le spectre résiduel

$\sigma_r = \{\lambda \in \mathbb{C}\}, (T - \lambda I)$ inversible de $D(T)$ dans $Im(T - \lambda I)$ et $Im(T - \lambda I)$ n'est pas dense dans H .
C'est-à-dire tout $\lambda \in \sigma(T)$ tel que λ n'est pas une valeur propre .
σ_r est appelé le spectre résiduel de T.

Remarque
Si $\sigma_c(T) = \emptyset$ et $\sigma_r(T) = \emptyset$, alors T devient un opérateur borné .

2.2 opérateur de Fredholm

Définition 2.14. *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur solvable normal non borné.* A *est dit de Fredholm si :*

1) $R(A)$ *est fermé dans* $H^{'}$ *.*
2) $\dim\ker A$ *est finie.*
3) $co\ker R(A)$ *est finie .*

l'indice dans ce cas est la quantité définie par :

$$ind(A) = \dim\ker(A) - co\dim R(A) \in Z$$

L'ensemble des opérateurs de Fredholm définie de H dans $H^{'}$est noté par $F(H, H^{'})$.
remarque $F(H, H^{'}) \subset C(H, H^{'})$.

Proposition 2.4. *Soit* $(A, (D(A))$ *un opérateur non borné solvable normale.*
si $A \in F(H, H^{'})$ *alors* $A^* \in F(H, H^{'})$ *et dans ce cas on a :*

$$ind(A^*) = -ind(A)$$

preuve
La preuve utilisera une quantité appelé la co-norme noté $c(A)$ quand la étudiera plus tard.
Comme A est de Fredholm , $R(A)$ est fermé dans $H^{'}$ donc $c(A) > 0$ or on a déjà $c(A) = c(A^*)$alors $c(A^*) > 0$ par conséquence $R(A^*)$ est fermé dans $H^{'}$ comme

$\dim\ker A^* = \dim(R(A))^\perp$ et en sais d'après des résultat précédent que $(H/R(A))^*$ est isomorphe à $(R(A))^\perp$

$$\dim\ker A^* = \dim(H, R(A))^* = \dim(R(A))^\perp = Co\dim(R(A)) \qquad (3)$$

Nous avons aussi :
$co\dim(R(A^*)) = \dim(H/R(A^*)) = \dim(H/(\ker A)^\perp)$
et comme $H/(\ker A)^\perp$ est isomorphe à $(\ker A)^*$ par conséquence on a :

$$co\dim(R(A^*)) = \dim(\ker A)^* = \dim\ker A \qquad (4)$$

Ainsi l'opérateur A^* est de Fredholm .
D'après (3),(4) on trouve :

$$\begin{aligned} ind(A^*) &= \dim\ker(R(A^*)) \\ &= co\dim(R(A))) - \dim\ker(A) \\ &= -ind(A) \end{aligned}$$

2.2.1 translation dans l^2_F

Considérant F espace vectoriel de l'espace l^2_F des suite $\xi = \{x_n\}_{n\in N}$ à coefficient dans F tel que :

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x|^2 < \infty$$

muni de la norme.

$$\|.\|_2 : l_F^2 \longrightarrow R_+$$
$$\{x_n\} \longrightarrow \|\{x_n\}\|_2 = \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2\}^{\frac{1}{2}}$$

Il s'agit d'un espace de Banach .
Nous allons montrons que cet espace possède deux familles infinies dénombrables d'opérateurs de Fredholm, les translations à droit et translations à gauche.

2.2.2 translation à droite

posons :

$$T_d^1 : l_F^2 \longrightarrow l_F^2$$
$$(x_0, x_1, x_2...) \longrightarrow (0, x_0, x_1....).$$

La translation d'un cran à droite.
Il s'agit d'un opérateur de Fredholm d'indice -1.En effet, T_d^1 est clairement linéaire et les trois conditions de la définition de Fredholm sont vérifiées :
1) le noyau T_d^1 est continue uniquement de le suite indépendant nulle. ainsi :

$$\dim(kerT_d^1) = 0 < \infty.$$

2) le conoyau :

$$Coker(T_d^1) = l_F^2 / R(T_d^1)$$

avec une classe d'équivalence contient tout les suite de l_d^2 de même premier coefficient $x_0 \in F$. Par conséquent la suite $(1, x_1, x_2...)$ constitue donc une base de $Coker(T_d^1)$

et on a :

$$\dim(Coker(T_d^1) = 1 < \infty$$

3) vérifiant que $R(T_d^1)$ est un fermé de l_F^2.
Soit donc $\{x_n\} \subset l_d^2$ une suite qui converge vers un certain

$$\xi = \{\xi_n\} \subset l_d^2$$

par conséquence, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $m \in N$ tel que pour tout $(n \geq m)$, on dit que :

$$\|x_n - \xi\| = \{\sum_{i \geq 0} |x_{n_i} - \xi|^2\}^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

pour tout $n \geq m$ et pour tout i fixé o na :

$$|x_{n_i} - \xi_i|^2 \leq \|x_n - \xi\| < \varepsilon$$

et donc $x_{n_i} \longrightarrow \varepsilon$ pour tout i et en particulier $0 = x_{n_0} \longrightarrow \xi_0$ or la suite identiquement nulle converge vers 0, donc par unicité de la limite nous obtenons ξ_1 et $\xi \in R(T_d^1)$ qui est de ce fait fermé dans l_F^2.
Nous obtenons en outre que l'indice de T_1^1 est :

$$ind(T_d^1) = \dim(kerT_d^1) - \dim(CokerT_d^1) = 0 - 1 = -1$$

2.2.3 translation à gauche

posons :

$$T_g^1 : l_F^2 \longrightarrow l_F^2$$
$$(x_0, x_1, x_2...) \longrightarrow (x_1, x_2...)$$

La translation d'un cran à gauche.
Il s'agit d'un opérateur de Fredholm d'indice 1.En effet T_g^1 est clairement linéaire et les trois conditions de la définition de Fredholm sont vérifiées :

1) le noyau est :

$$\ker(T_g^1) = \{\{x_n\} \in l_F^2 / x_0 \text{ arbitraire} \in F \ x_i = 0 \forall i \geq 1\}$$

Ainsi :

$$\dim(\ker T_g^1) = 1 < \infty$$

2) le conoyau est :

$$Co\ker(T_g^1) = l_F^2 / R(T_g^1) = l_F^2 / l_F^2 = \{0_{l_F^2}\}$$

3) l'image deT_g^1 est l_F^2 tout entier qui est fermé en tant qu'un espace topologique.
Nous obtenons en outre que l'indice de T_g^1 est :

$$ind(T_g^1 = \dim(\ker T_g^1) - \dim(Co\ker T_g^1) = 1 - 0 = 1$$

2.2.4 Co-norme d'un opérateur fermé et opérateur de Fredholm non bornés

Dans tout ce qui est suit l'opérateur A sera considéré non partout définit sur H. Notons $D(A)$ son domaine,on donne et dans la suite la théorie élémentaire de Fredholm non bornées. Avant cela donnons bref une aperçu sur les opérateurs a images fermés. Pour cela il est nécessaire de connaitre les opérateurs fermés à images fermées et d'exprimer quelques propriétés qui seront utiles plus tard.

Finalement, on achève notre travail par la définition de la co-norme $c(A)$ d'un opérateur linéaire fermé de domaine dense dans un espace de Hilbert H, et on revient à cette dernière plus précisément.
D'après ce qui précède on note :
1) $C(H, H^{'})$ l'espace des opérateurs linéaires fermés de H dans $H^{'}$ et à domaine dense dans $H^{'}$.
2) Si $A \in C(H, H^{'}), G(A)$ désigne le graphe de A tel que :

$$G(A) = \{(x, AX), x \in D(A)\}.$$

Proposition 2.5. *[6] Soient $H, H^{'}$ deux espaces de Hilbert et A un opérateur fermé si :*

$$B^{'}_{H'}(r) \subset \overline{AB_H(1)} \text{ Alors } B^{'}_{H'}(r) \subset AB_H(1)$$

preuve
Il suffit de montrer que $B^{'}_{H'}(r) \subset AB_H(1\backslash 1-\varepsilon)$. Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$.
Soit

$$y \in B^{'}_{H}{'}(r) \Rightarrow \|y\|_{H'} < r$$

alors : $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ tel que :

$$\|y\|_{H'} < r(1-\varepsilon_0)$$

Ou bien

$$\tfrac{y}{1-\varepsilon_0} \in B^{'}_{H'}(r)$$

D'autre part on a :

$$B^{'}_{H'}(r\varepsilon_0^n) \subset AB_H(\varepsilon_0^n), \forall n \in \mathbb{N}$$

En effet :

$$\text{si } z \in B'_{H'}(r\varepsilon_0^n) \Rightarrow \|z\|_{H'} < (r\varepsilon_0^n)$$

Ou bien :

$$\tfrac{z}{\varepsilon_0^n} < r \Longrightarrow \tfrac{z}{\varepsilon_0^n} \in B'_{H'}(r) \subset \overline{AB'_{H'}(1)} \Longrightarrow z \in \varepsilon_0^n AB_H(1) = z \in \overline{\varepsilon_0^n AB_H(r)}$$

par récurrence :

pour n=0 on a :

$B'_{H'}(r) \subset \overline{AB_H(1)}$ comme

$$y \in B'_{H'}(r) \ \exists\ x_0 \in B_H(1) \text{ tel que } \|y - Ax_0\|_{H'} < r\varepsilon_0 \Longrightarrow (y - Ax_0) \in B'_{H'}(r\varepsilon_0)$$

pour n=1 on a :

comme $(y - Ax_0) \in B'_{H'}(r)$ $\exists$ $x_1 \in B_H(\varepsilon_0)$ tel que :

$$\|y - Ax_0 - Ax_1\| < r\varepsilon_0^2 \Longrightarrow (y - Ax_0 - Ax_1) \in B'_{H'}(r\varepsilon_0^2)$$

En réitérant ce procédé, on obtient une suite

$$(x_n)_{n\in N} \in B_H(r\varepsilon_0^n)$$

tel que :

$$\|y - \sum_{i=0}^{n} Ax_i\| < r\varepsilon^{n+1} \qquad (6)$$

ou bien :

$$(y - \sum_{i=0}^{n} Ax_i) \in B'_{H'}(r\varepsilon_0^{n+1})$$

on a :

$$\forall n \in N, \|x_n\| < \varepsilon_0^n$$

par conséquence :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_0^n = \frac{1}{1 - \varepsilon_0}.$$

Ainsi de suite :

$$z_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$$

est de Cauchy .
car si

$$n < m : \|z_n - z_m\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{m} x_i \right\| = \sum_{i=n+1}^{m} \|x_i\| \ .$$
$$\sum_{i=n+1}^{m} \|x_i\|_{n,m \longrightarrow \infty} \longrightarrow 0$$

alors (z_n) converge uniformément vers x dans H et on a d'après (6) $(AZ_n)_n$ converge vers y dans $H^{'}$,et comme A est fermé alors d'après la définition du domaine d'opérateur $x \in D(A)$ et $Ax = y$ alors $y \in AB_H(\frac{1}{1-\varepsilon})$.

Théorème 2.3. *[4] Soit $H, H^{'}$ deux espaces de Hilbert.*
Si A est fermé et $R(A) = H^{'}$ alors A est une application ouverte .

preuve
Pour montrer que A est une application ouvert il suffit de montrer que :
$\forall\ y_0 \in H^{'}, \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ r > 0$ tel que $y_0 + B^{'}_{H^{'}} \subset Y_0 + AB_{H^{'}}(\varepsilon)$.
D'après la proposition précédente :
Il suffit de montrer l'existence d'un nombre $r > 0$ tel que :

$$B_{H^{'}}(r) \subset \overline{AB_H(\varepsilon)} \text{ comme } R(A) = H^{'} \text{ alors}$$
$$H^{'} = A[\bigcup_{n=0}^{\infty} nB_H(1)] = \bigcup_{n=0}^{\infty} nAB_H(1) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{nAB_H(1)}$$

comme$H^{'}$ est de Hilbert alors $\overline{AB}(1)$ est d'intérieur non vide ,d'après le théorème de Baire , donc il existe un ouvert V de H et $\rho \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\rho\overline{AB_H}(1) = \overline{\rho AB_H}(1)$$

et

$$V \subset \overline{AB_H(\frac{\varepsilon}{2})}$$

or :

$$0 \in V - V \subset \overline{AB_H(\frac{\varepsilon}{2})} - \overline{AB(\frac{\varepsilon}{2})} \subset \overline{AB_{H(\frac{\varepsilon}{2})}}$$

comme $V - V$ est un voisinage ouvert de 0, il exits $r > 0$ tel que

$$B'_{H'}(r) \subset V - V \subset \overline{AB_H(\varepsilon)}$$

Remarque :

1) $(A, D(A))$ est fermé si est seulement si pour tout suite $(x_n)_{n \in N}$ dans $D(A), x_n \longrightarrow x$ dans H et $Ax \longrightarrow Y$ dans H', implique que $x \in D(A)$ et $Ax = Y$.

2) On dit que A est fermable si $\overline{G(A)}$ est le graphe d'un opérateur non borné que l'on note par $\overline{A}$ avec son domaine $D(\overline{A})$.

3)Tout opérateur borné est fermé, mais il existe des opérateurs fermés qui ne sont pas bornés.

4) Si $D(A)$ est fermé et A continue, alors A est fermé.

Avant de donné la définition de la co-norme, i est utile de rappeler quelques propriétés de l'espace quotient. En effet pour tout opérateur A fermé, le sous espace $kerA$ est un sous espace vectoriel de Hilbert de norme définie par :

$$\|\widetilde{U}\| = \inf_{u \in \widetilde{U}} \|u\| = d(u, \ker A) \qquad (1)$$

$\widetilde{U}$ est la classe d'équivalence de u sur cet espace l'opérateur de $D(A) \ker A \longrightarrow H$ de défini par $\widetilde{A}\widetilde{U} = AU, \forall u \in \widetilde{U}$ est linéaire, fermé et inversible et son inverse $\widetilde{A}^{-1}$ et de domaine $R(A)$:

$$R(A^{-1}) : R(A) \longrightarrow D(A)/kerA$$

$$\widetilde{A}\widetilde{U} \longrightarrow \widetilde{A}^{-1}[\widetilde{A}\widetilde{u}] = \widetilde{u}$$

de norme :

$$\|\widetilde{A}\|^{-1} = \sup_{\widetilde{u}\in D(A)} \frac{\|\widetilde{u}\|}{\|\widetilde{A}\widetilde{u}\|} \text{ ,avec } u \notin \ker A \qquad (2)$$

de plus si $y \in \widetilde{U}$ alors $\complement_{\ker A}^{(u-y)}$ c'est à dire que $y = u - z$ ou $z \in \ker A$, alors :

$$\|\widetilde{u}\| = \inf_{y\in\widetilde{u}} \|u\| = \inf_{z\in\ker A} \|u - z\| = d(u, \ker A)$$

tel que

$$u \in \ker A \qquad (3)$$

Les relation 1 et 2 nous donnent :

$$\|\widetilde{A}^{-1}\| = \sup_{\substack{\tilde{u}\in\ker A\\ u\notin\ker A}} \frac{\|\widetilde{u}\|}{\|\widetilde{A}\widetilde{u}\|} = \sup_{\substack{\tilde{u}\in\ker A\\ u\notin\ker A}} \frac{d(u, \ker A)}{\|Au\|}$$

Définition 2.15. *Soit $K \notin \ker(A)$,$(A, D(A))$ un opérateur non borné.*
On appel co-norme ou module minimal réduit d'un opérateur A non borné, noté par $c(A)$ la quantité :

$$c(A) = \inf_{x\in D(A)\cap kerA^{\perp}} \frac{\|Ax\|_{H'}}{\|x\|_H}$$

Remarque Comme $\ker A$ est fermé de H, alors $H = \ker A \oplus \ker A^{\perp}$ et puisque $u \notin \ker A$ alors $u \in (\ker A)^{\perp}$ et par suite la con-orme est donné par :

$$c(A) = \inf_{u\in D(A)\cap(kerA)^{\perp}} \frac{\|Au\|_{H'}}{\|u\|_{H'}} = \frac{1}{\|\widetilde{A}^{-1}\|}$$

$c(A) = 0$, si $\widetilde{A}^{-1}$ est non borné et $c(A) = \infty$ si $\widetilde{A}^{-1} = 0$

Définition 2.16. *Soit $A \in C(H, H^{'})$ un opérateur non borné sur H et F un sous espace de H contenant $kerA$,alors on définit*

$$c_F(A) = \inf_{u\in D(A)\cap F^{\perp}} \frac{\|Au\|_{H'}}{\|u\|_H}$$

$c(F)$ est appelée la co-norme de A suivant F

Proposition 2.6. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné de H dans $H^{'}$*
A à un inverse borné si et seulement si A est injectif et à image fermé dans $H^{'}$.

preuve :

Supposons que A à un inverse borné et montrons que $R(A)$ est fermé dans$H^{'}$
Soit $\overline{R(A)}$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in N}$ dans $R(A)$ tel que $x_n \longrightarrow y$, quand $n \longrightarrow \infty$ dans $H^{'}$, or $((x_n))_{n\in N} \in R(A)$, alors il existe une suite $(t_n)_{n\ N} \in D(A)$ tel que :
$x_n = At_n$, d'où $At_n \longrightarrow y$, quand $n \longrightarrow \infty$ dans $H^{'}$. Comme A est non borné, alors il existe $K > 0$ tel que :
$\|At_n - At_m\|_{H'} > K\|t_n - t_m\|_H$, et comme $t_n \longrightarrow y$, alors la suite (t_n) est une suite de Cauchy dans H.
D'où $((t_n)$ convergente vers t, et puisque A est fermé, alors $t \in D(A)$ et :

$$At = y \text{ ,avec } y \in R(A)$$

Par conséquence, $R(A)$ est fermé dans $H^{'}$.
Inversement. Puisque A est bijectif de $D(A)$ dans $R(A)$ et $R(A)$ est un espace de Banach, alors A^{-1} est fermé de $R(A)$ dans H, par conséquence A^{-1} est borné de $R(A)$ dans H d'après le théorème de graphe fermé.

Proposition 2.7. ***[6]*** *Soit (A,D(A)) un opérateur non borné de H dans $H^{'}$*
1) $R(A)$ est fermé si et seulement si $c(A) > 0$.
2) $c(A^*) = c(A)$.

preuve

1) D'après la définition de l'opérateur $\widetilde{A}^{-1}$, la con-orme $c(A) > 0$ si et seulement si $\widetilde{A}^{-1}$ est borné donc fermé (d'après le théorème de graphe fermé), et puisque $D(\widetilde{A}^{-1} = R(A)$ il résulte que $\widetilde{A}^{-1}$ est borné si et seulement si $R(A)$ est fermé,

par conséquence $c(A) > 0$ si et seulement si $R(A)$ est fermé dans H .
2) Soit $Z = R(A)$ et A_1 l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned} A_1 : D(A) &\longrightarrow Z \\ u &\longrightarrow A_1 u = Au \end{aligned}$$

Considérons l'opérateur $\widetilde{A}$ induite parA_1 et exprimé par :

$$\begin{aligned} \widetilde{A_1} : D(A)/\ker A &\longrightarrow z \\ [u] &\longrightarrow \widetilde{A_1}([u]) = A_1 u \end{aligned}$$

$\widetilde{A_1}$est injectif et on a

$$c(A_1) = \inf_{u \in D(A_1) \cap (\ker A_1)^{\perp}} \frac{\|A_1 u\|_{H'}}{\|u\|_H} = \inf_{u \in D(A_1) \cap (\ker A_1)^{\perp}} \frac{\|Au\|_{H'}}{\|u\|_H} = c(A) > 0$$

D'après (1) de la proposition précédente, on a $R(\widetilde{A}$ est fermé et on a $\widetilde{A^{-1}}$ est borné, et par suite $\widetilde{A_1^*}$ est aussi inversible d'inverse borné tel que :

$$(\widetilde{A_1^*}) = (\widetilde{A}_1^{-1})^*$$

comme $\ker A^* = R(A)$, alors $H/\ker A^* = H/R(A^{\perp})$, et en sais que $H/R(A^{\perp})$ isomorphe au dual de $R(A)$ par l'application $[y^*] = y_r^*$, ou y^* est la relation de y à z, en particulier :

$$\|y_r^*\| R(A)^* = \|[y^*]\| H/R(A)$$

2) on a :

$$\|\widetilde{A^*}y^*\|_{D(A)/\ker A} = \|\widetilde{A_1^*}y_r^*\|_{D(A)/\ker A}$$

Donc puis $R(A)$ est fermé dans H' et A_1 est l'opérateur induit par A, alors on a pour tout $y^* \in D(A^*)$,

$$\|\widetilde{A^*}y^*\| = \|\widetilde{A_1^*}y_r^*\| = \|A^*y^*\|$$

3) Comme $(\widetilde{A_1^*})^{-1} = (\widetilde{A_1^{-1}})^*$ et$\widetilde{A_1^{-1}}$ est borné alors :

$$\|(\widetilde{A_1^*})^{-1}\| = \|(\widetilde{A^{-1}}_1)^*\| = \|\widetilde{A}_1^{-1}\|$$

Il est résulte d'après les trois étapes $1), 2), 3)$ que

$$c(A^*) = \inf_{y^* \in D(A^*)} \frac{\|A^*y^*\|}{\|y^*\|} = \inf_{y^* \in D(A^*)} \frac{\|\widetilde{A_1^*}y_r^*\|}{\|y_r^*\|} = \frac{1}{\|\widetilde{(}A_1^*)^{-1}\|} = c(A_1) = c(A)$$

avec$y \notin \ker A^*$.

Proposition 2.8. *Soit $(A, D(A))$ opérateur non borné de domaine dense dans H alors on a :*
1)$\dim(\ker A^*) = co\dim R(A)$*.*
2)Si A est fermé et $R(A)$ est fermé, alors $\dim\ker A = co\dim R(A^*)$.

preuve 1)on sait :

$$(\overline{R(A)})^\perp = R(A)^\perp = \ker A^*$$
$$\overline{R(A)} = (\ker A^*)^\perp$$

on a :

$$\dim \tfrac{H}{R(A)} = \dim(\tfrac{H}{R(A)})^* = \dim(R(A))^\perp = \dim\ker A^*$$

2)on a aussi :

$$\overline{R(A^*)} = (\ker A)^\perp$$

$$R(A)^\perp = (\ker A^*)$$

o na :

$$co\dim R(A^*) = \dim \tfrac{H}{R(A)^*} = \dim \tfrac{H}{(\ker A)\perp} = \dim\ker A^* = \dim\ker A$$

Appellation : Un opérateur fermé à image fermé est appelé un opérateur solvable normal .

Chapitre 3

Stabilité de Fredholm

Dans ce chapitre, on montre que les perturbations faible n'influent pas sur l'ensemble des opérateurs de Fredholm non bornées, contrairement au cas bornée, la stabilité nécessite une condition sur la norme de l'opérateur bornée, cette propriété de stabilité sera traduite sous forme des théorèmes de stabilités . On achève ce chapitre par des applications sur les opérateurs de Hilbert-Schmid et l'algèbre de Calkin

3.1 Stabilité des opérateurs fe Fredholm dans le cas borné

Définition 3.1. *[4] Soient X et Y deux espaces de Banach, et soit $F \in L(X, Y)$. F est appelé perturbation de Fredholm, si $U + F \in \Phi(X, Y)$ chaque fois que $U \in \Phi(X, Y)$.F est appelée perturbation de Fredholm supérieure(respectivement inférieure), si $U + F \in \Phi_+(X, Y)$(respectivement $U + F \in \Phi_-(X, Y)$)chaque fois que $U \in \Phi_+(X, Y)$(respectivement $U \in \Phi_-(X, Y)$).les ensembles des perturbation de Fredholm, semi-Fredholm à droite et semi-Fredholm à gauche sont,respectivement,notés $F(X, Y)$,$F_+(X, Y)$ et $F_-(X, Y)$.En générale, nous avons*

$$K(X, Y) \subseteq F_+(X, Y) \subseteq F(X, Y).$$

$$K(X,Y) \subseteq F_{-}(X,Y) \subseteq F(X,Y).$$

Théorème 3.1. *Soit $A \in B(H,H')$ un opérateur semi-Fredholm à gauche(respectivement à droite). Si K est un opérateur compact de H dans H', alors $A+K$ est un opérateur semi-Fredholm à gauche(respectivement à droite) et l'indice de $A+K$ est l'indice de A.*

Peuve

Comme A est semi-Fredholm à gauche, alors il existe un opérateur B dans $B(H,H')$ et un opérateur F compact sur H de sorte que

$$BA = 1 + F.$$

Comme K est compact alors BK reste compact, par conséquent :

$$BA + BK = I + F$$

Alors

$$B(A+K) = 1 + (F + BK)$$

Or l'opérateur F est compact alors :$F + BK$ est compact, d'où $A + K$ est semi-Fredholm à gauche.
Soit A un opérateur de Fredholm, alors il existe un opérateur de Fredholm B et un opérateur compact L tel que :

$$AB = 1 + L$$

Or d'après le théorème 1.7 BA est de Fredholm de plus $ind(BA) = ind(B) + ind(A)$
Et comme L est compact alors $1 + L$ est de Fredholm et $ind(1 + L) = 0$,
Donc $ind(A) + ind(B) = 0$ ou bien : $ind(B) = -ind(A)$.
D'autre part, On a :$BA+BK = B(A+K) = 1+(L+BK)$ et $(L+BK)$ est compact, alors $1 + (L + BK)$ est de Fredholm, alors :

$$ind(B(A+K)) = ind(B) + ind(A+K) = 0$$

et

$$ind(B) = -ind(A+K)$$

par conséquence,on a :

$$ind(A+K) = ind(A).$$

Théorème 3.2. *Soient $A \in L(H, H^{'})$ un opérateur de Fredholm et $\widetilde{A}$ la bijection associée.*
Si $B \in L(H, H')$ tel que :

$$\|B\| < \|\widetilde{A}^{-1}\|^{-1}$$

Alors, on a :

$$1) \dim\ker(A+B) \leq \dim\ker A$$
$$2) co\dim Im(A+B) \leq co\dim ImA$$
$$3) A+B \ est \ de \ Fredholm$$
$$4) ind(A+B) = ind(A)$$

Preuve

A est Fredholm et $\widetilde{A}$:$H_0 \times H_0^{'} \to H'$ est la bijection associée $\widetilde{A}(x_0, y_0) = Ax_0 + y_0$
On pose $C = A + B$ et on considère :

$$\widetilde{C} : H_0 \times H_0^{'} \to H'$$
$$(x_0, y_0) \to Cx_0 + y_0$$

$\forall (x_0, y_0) \in H_0 \times H_0^{'}$

$$\|\widetilde{A}(x_0, y_0) - \widetilde{C}(x_0, y_0)\| = \|Ax_0 + y_0 - Cx_0 - y_0\| = \|(A-C)x_0\| \leq \|A - C\|\|x_0\|$$

d'où :

$$\|\widetilde{A} - \widetilde{C}\| \leq \|A - C\| = \|A - A + B\| = \|B\| < \|\widetilde{A}^{-1}\|^{-1}$$

$\widetilde{C}$ est un opérateur borné inversible puisque
$\widetilde{C} = \widetilde{C} - \widetilde{A} + \widetilde{A} = \widetilde{A}[I + \widetilde{A}^{-1}(\widetilde{C} - \widetilde{A})]$ et $\|\widetilde{A}^{-1}(\widetilde{C} - \widetilde{A}) < 1$

Donc : $\widetilde{C}^{-1} = [I + \widetilde{A}^{-1}(\widetilde{C} - \widetilde{A})]^{-1}\widetilde{A}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\widetilde{A}^{-1}(\widetilde{C} - \widetilde{A}))^n\widetilde{A}^{-1} \in L(H', H_0 \times H_0')$
Soit l'opérateur

$$C_0 : H_0 \times \{0\} \to H'$$

$$(x_0, 0) \to Cx_0$$

C_0 est la restriction commune de C et $\widetilde{C}$ sur $H_0 \times \{0\}$.
Comme $H_0 \simeq ImA$ et A est de Fredholm, alors $co\dim ImA < +\infty$ et $co\dim H_0 < +\infty$ donc $co\dim[H_0 \times \{0\}] < +\infty$. Par conséquent, d'après la proposition 1.1, C et $\widetilde{C}$ sont aussi de Fredholm, et on a :

$$ind(C) = ind(C_0) + co\dim H_0$$

Mais

$$ind(C_0) = ind(\widetilde{C}) - \dim H_0^{'}$$

car $\ker C_0 = \{(x, 0) \in H_0 \times \{0\} : Cx = 0\} \subset \ker \widetilde{C}$. D'où

$$ind(C) + ind(\widetilde{C}) - \dim H_0^{'} + co\dim H_0$$

. Or, $\widetilde{C}$ est bijectif donc $ind(\widetilde{C}) = 0$, ce qui nous donne que $ind(C_0) = -\dim(H_0^{'})$.
Alors

$$\begin{aligned} ind(C) &= ind(C_0) + co\dim(H_0) \\ &= \dim\ker A - co\dim ImA \\ &= indA \end{aligned}$$

Car $co\dim H_0 = \dim\ker A$ et $\dim H_0^{'} = co\dim ImA$.
Ce qui monter que A est un opérateur de Fredholm d'indice égal à l'indice de l'opérateur A.
2) Comme $H = \ker A \oplus H_0$ et $\widetilde{C}$ est inversible, alors

$$\dim\ker C \leq \dim H/H_0 = \dim\ker A$$

3)

$$\begin{aligned} co\dim ImC &= -indC + \dim\ker C \\ &\leq -indA + \dim\ker A \\ &\leq co\dim ImA \end{aligned}$$

Remarque Ce théorème montre que l'ensemble des opérateurs de Fredholm est un ouvert dans $L(H, H')$.

Corollaire 3.1. *L'application* $ind : \mathbb{F}(H, H') \to \mathbb{Z}$ *est constante sur toutes les composantes connexes de* $\mathbb{F}(H, H')$

3.1.1 application

1) (opérateur de Hilbert-Schmidt) :
Soit

$$K : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow C(a < b)$$

une fonction continue pour toute $f \in L^2([a, b])$, on considère la fonction K_f définie pour $t \in [a, b]$ par

$$(Kf)(t) = \int_b^a K(t, s)f(s)ds.$$

alors
1)K est un opérateur de Hilbert-schmidt de l'espace de Hilbert $L^2([a, b])$ sur lui même
Pour tout $t \in [a, b]$ fixé, notons K_t la fonction $s \longrightarrow k(t, s)$. En termes du produit scalaire de $L^2([a, b])$, on peut écrire :

$$(Kf)(t) =< k_f, \overline{f} > \ldots (1)$$

Considérons une base hilbertienne $(e_n)_{n\in N^*}$ de $L^2([a, b])$. D'après(1), on a

$$\|Ke_n\| = \int_b^a | < K_t, e_n > |^2 dt$$

D'où en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|Ke_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_b^a | < k_t, \overline{e_n} > |^2 dt \\ &= \textstyle\int_b^a \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} | < K_t, \overline{e_n} > |^2 dt\end{aligned}$$

mais $\sum_{n=1}^{\infty} | < k_t, \overline{e_n} > |^2 = \|k_t\|^2$ (formule de Bessel-parseval).
Ainsi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ke_n\|^2 = \int_b^a \|K_t\|^2 dt = \int_b^a \int_b^a |K(t,s)|^2 dt ds < \infty$$

2)Soit $\lambda \in C^*$, l'équation $Tf - f = g$ vérifie l'une ou l'autre des deux assertions suivantes (alternative de Fredholm) ou bien , pour tout $g \in L^2([a,b])$, il existe une unique solution f ou bien il existe un sous espace strict N de $L^2([a,b])$, tel que si $g \in N$, l'équation admet une infinité de solutions et si $g \notin N$, l'équation n'admet pas de solutions.
3) **Un exemple d'alternative de Fredholm en dimension 1**
L'existence de K résulte du théorème d'identification de Riesz de la continuité de l'application trace .K est auto-adjoint puisque $\langle Ku, v\rangle_{H^1(R^+)}, \forall u, v \in H^1(R^+)$. Enfin, il est de rang 1 car $\forall u, v \in H^1(R^+)$, il existe une combinaison linéaire de u et v qui s'annule en 0 :

$$au(0) + bv(0) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad aKu + bKv = 0.$$

Si K admettait deux vecteurs propres linéairement indépendants, il ne serait pas de rang 1 mais au moins $2 \ldots Ku = \lambda u$ donne $-u'' + u = 0(R^+)$
$u'(0) + \lambda u(0) = 0$
Que l'on résoudre facilement dans $H^1(R^+)$ et on trouve : $\lambda = 1$ et $u = e^{-x}$.
le problème suivant :

{trouver u tel que $-u'' + u = f(R^+)$ avec $u'(0) + \alpha k u(0) = 0$ }
admet la formulation variationnelle suivante :

$$u \in H^1(R^+), \int_{R^+}(u'vO' + uv)dx - \alpha u(0)v(0) = \int_{R^+} fvdx. \text{ Pour tout } v \in H^1(R^+),$$

cela s'écrit aussi en utilisant le théorème d'identification de Riez

$$u - \alpha K u = g$$

Avec $(g, v)_{H^1(R^+) = \int_{R^+}} fvdx$. D'après l'alternative de Fredholm, si $\alpha \neq 1$, le problème admet donc une solution unique $u \in H^1(R^+)$.
- Si $\alpha = 1$, (toujours d'après l'alternative de Fredholm) le problème admet une solution si et seulement si $\int_{R^+} fe^{-x}dx = 0$.
Cette solution n'est pas unique puis que on peut lui rajouter αe^{-x}.

3.2 Stabilité des opérateurs de Fredholm dans le cas non borné :

3.2.1 Stabilité des opérateurs non bornés

Soit H un espace de Hilbert et M, N deux sous-espaces fermés de H.

Définition 3.2. *Notons par P_M et P_N la projection orthogonale sur M et N respectivement, alors si $x \in M$ la distance $d(x, M)$ entre x et M est donnée par :*

$$d(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$$

Donc :

$$d(x, M) = \|(I - P_M)x\| = \|x - P_M x\|.$$

Définition 3.3. *Soient M, N deux sous-espaces fermés de H.On pose*

$$d(N, M) = \|(I - P_M)P_N\| + \|(I - P_N)P_M\|$$

et

$$\delta(N, M) = \|(I - P_M)P_N\|$$

Nous avons les résultats suivantes :

Lemme 3.1. *$d(M, N)$ défini une métrique sur l'ensemble de tous les sous-espaces linéaires fermés de H.*
Il s'avère que la métrique $d(N, M)$ est étroitement liée à ce qu'on appelle la métrique entre deux sous-espaces linéaires fermés définie par la formule :

$$g(N, M) = \|P_M - P_N\|$$

H.O.Corde et J.Ph.Labrousse ont montré que $g(M, N)$ est une métrique sur $C(H, H')$ équivalente à $d(N, M)$ de façons que :

$$g(N, M) \leq d(N, M) \leq 2g(N, M)$$

Comme le graphe $G(A)$ de l'opérateur fermé A est un sous-espace fermé de l'espace $H \times H$, alors on a la définition suivante :

Définition 3.4. *Soient A, B deux opérateurs fermés de $C(H, H')$ de graphes $G(A)$, $G(B)$.*
Notons par $P_{G(A)}, P_{G(B)}$ la projection orthogonale dans $H \times H$ sur $G(A)$ et $G(B)$ respectivement.

posons :

$$\delta(A, B) = \|(I - P_{G(B)})P_{G(A)}\|_{L(H \times H)} = \delta(G(A), G(B))$$

$$g(A, B) = \|P_{G(A)} - P_{G(B)}\|_{L(H \times H)} = g(G(A), G(B))$$

Proposition 3.1. *g est une distance sur $C(H, H')$ mais δ ne l'est pas.*
En effet, δ ne vérifie pas la condition de symétrique :

Soit $A, B \in C(H, H')$

$$\delta(A,B) = \|(I - P_{G(B)})P_{G(A)}\|$$

$$\delta(A,B) = \|(I - P^*_{G(B)})P^*_{G(A)}\| = \|[P_{G(A)}(I - P_{G(B)})]^*\|$$

$$\delta(A,B) = \|P_{G(A)}(I - P_{G(B)})\| = \delta(G(B)^{\perp}, G(A)^{\perp}) \neq \delta(B,A).$$

preuve

Vérifions que g est une distance sur $C(H, H')$.

$i)$ Soit $A, B \in C(H, H')$, alors :

$$\begin{aligned} g(A,B) = 0 &\Leftrightarrow \|P_{G(A)} - P_{G(B)}\| = 0 \\ &\Leftrightarrow P_{G(A)} = P_{G(B)} \\ &\Leftrightarrow G(A) = G(B) \\ &\Leftrightarrow A = B. \end{aligned}$$

$ii)$ Soit $A, B \in C(H, H')$, alors :

$$\begin{aligned} g(A,B) &= \|P_{G(A)} - P_{G(B)}\| = \|-(P_{G(B)} - P_{G(A)})\| \\ g(A,B) &= \|P_{G(B)} - P_{G(A)}\| = g(B,A) \end{aligned}$$

$iii)$ Soit $A, B, C \in C(H, H')$

$$\begin{aligned} g(A,C) = \|P_{G(A)} - P_{G(C)}\| &= \|P_{G(A)} - P_{G(B)} + P_{G(B)} - P_{G(C)}\| \\ &\leq \|P_{G(A)} - P_{G(B)}\| + \|P_{G(B)} - P_{G(C)}\| = g(A,B) + g(B,C) \end{aligned}$$

Proposition 3.2. *Soit* $A, B \in C(H, H')$, *on a :*

$i)$ $\delta(A,B) = \delta(B^*, A^*)$

$ii)$ $g(A,B) = \max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\} = g(B^*, A^*)$.

Preuve

$i)$ Définissons l'opérateur V par :

$$\begin{aligned} V : H \times H &\mapsto H \times H \\ (x, y) &\mapsto V(x, y) = (-y, x) \end{aligned}$$

V est une isométrie car :
$\|V(x, y)\|_{H\times H} = \|(-y, x)\|_{H\times H} = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}} = \|(x, y)\|_{H\times H}$.
V est surjectif par construction, donc V est un opérateur unitaire.
De plus, on a :

$$\begin{aligned} V^2(x, y) &= V \circ V(x, y) = V(-y, x) = (-x, y) \\ &= -(x, y), \ d'ou \ V^2 = -I_{H\times H} \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$G(A^*) = [V(G(A))]^\perp = V[G(A)^\perp]$$

On remarque que

$$V[G(A^*)] = V^2[G(A)^\perp] = G(A)^\perp$$

Notons par

$$U_{G(B)G(A)} = (I - P_{G(B)})P_{G(A)}$$

$$W_{G(B)G(A)} = P_{G(B)}P_{G(A)}$$

donc, $U_{G(B)G(A)}$ est une projection orthogonale, alors on a

$$U_{G(B)G(A)} = U^*_{G(B)G(A)}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\delta(A,B) &= \|U_{G(B)G(A)}\| = \|U^*_{G(B)G(A)}\| \\ &= \|[(I-P_{G(B)})P_{G(A)}]^*\| = \|P^*_{G(A)}(I-P^*_{G(B)}) \\ &= \|P_{G(A)}(I-P_{G(B)})\| = \|(I-P_{G(A)^\perp})P_{G(B)^\perp}\|\end{aligned}$$

Puisque $G(A)$ et $G(A^*)$ sont fermé dans $H \times H$ et comme

$$P_{V[G(A^*)]}(x,y) = VP_{G(A^*)}(x,y);\ \forall x,y \in H$$

alors

$$\begin{aligned}\delta(A,B) &= \|(I-P_{G(A)^\perp})P_{G(B)^\perp}\| \\ &= \|(I-P_{V[G(A^*)]})P_{V[G(B^*)]}\| \\ &= \|V[(I-P_{G(A^*)})P_{G(B^*)}]\| \\ &= \|(I-P_{G(A^*)})P_{G(B^*)}\| = \delta(B^*,A^*)\end{aligned}$$

$ii)$ Montrons que $g(A,B) = \max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\}$

$$\begin{aligned}\delta(A,B) &= \|(I-P_{G(B)})P_{G(A)} \\ &= \|(P_{G(A)}-P_{G(B)})P_{G(A)}\|\end{aligned}$$

d'où

$$\delta(A,B) \leq g(A,B) \qquad (4)$$

De même pour $\delta(B,A)$

$$\delta(B,A) = \|(P_{G(B)}-P_{G(A)})P_{G(B)}\|$$

D'où

$$\delta(B,A) \leq \|P_{G(B)}-P_{G(A)}\| = g(A,B) \qquad (5)$$

Alors, d'après(4)et(5)on a

$$\max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\} \leq g(A,B) \qquad (6)$$

Réciproquement

Si $x \in H \times H$:

$$\begin{aligned}
\|P_{G(A)}x - P_{G(B)}x\|^2 &= \|P_{G(A)}x - P_{G(B)}P_{G(A)}x + P_{G(B)}P_{G(A)}x - P_{G(B)}x\|^2 \\
&= \|(I - P_{G(B)})P_{G(A)}x - P_{G(B)}(I - P_{G(A)})x\|^2 \\
&= \|(I - P_{G(B)})P_{G(A)}x\|^2 + \|P_{G(B)}(I - P_{G(A)})x\|^2 \\
&- 2\langle (I - P_{G(B)})P_{G(A)}x, P_{G(B)}(I - P_{G(A)})x\rangle \\
&= \|(I - P_{G(B)})P_{G(A)}x\|^2 + \|P_{G(B)}(I - P_{G(A)})x\|^2 \\
&- 2\langle P_{G(A)}x, P_{G(B)^\perp}P_{G(B)}(I - P_{G(A)})x\rangle
\end{aligned}$$

Or $P_{G(B)^\perp}P_{G(B)} = 0$, d'où

$$\begin{aligned}
\|P_{G(A)}x - P_{G(B)}x\|^2 &= \|(I - P_{G(B)})P_{G(A)}x\|^2 + \|P_{G(B)}(I - P_{G(A)})x\|^2 \\
&\leq \|(I - P_{G(B)})P_{G(A)}\|^2\|P_{G(A)}x\|^2 + \|P_{G(B)}(I - P_{G(A)})\|^2\|(I - P_{G(A)})x\|^2 \\
&\leq \delta^2(A,B)\|P_{G(A)}x\|^2 + \delta^2(B,A)\|(I - P_{G(A)})x\|^2 \\
&\leq \max\left\{\delta^2(A,B),\delta^2(B,A)\right\}[\|P_{G(A)}x\|^2 + \|(I - P_{G(A)})x\|^2] \\
&\leq \max[\{\delta(A,B),\delta(B,A)\}]^2\|x\|^2
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\|(P_{G(A)} - P_{G(B)})x\| \leq \max[\delta(A,B),\delta(B,A)]\|x\|$$

alors

$$\|P_{G(A)} - P_{G(B)}\| \leq \max[\delta(A,B),\delta(B,A)] \qquad (7)$$

De (6) et (7) on a

$$g(A,B) = \max(\delta(A,B), \delta(B,A)).$$

Définition 3.5. *Soit$(A, D(A))$ un opérateur non borné sur H, de domaine $D(A)$ dense dans H.*
On défini l'opérateur R_A par :

$$R_A = (I + A^*A)^{-1}$$

Admettons les propriétés suivantes de l'opérateur R_A qui vont être utiles par la suite.

Proposition 3.3. *Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné sur H, de domaine $D(A)$ dense dans H, alors on a*
i) R_A est un opérateur symétrique positive dont l'image est dense et égale à $D(A^*, A)$ et $D(R_A) = H$. En outre

$$A^*AR_A = I - R_A$$

ii) L'opérateur AR_A est aussi borné et en particulier on a

$$\|R_A\|_{L(H,H')} \leq 1, \ \ \|AR_A\|_{L(H,H')} \leq 1$$

iii) $AR_Au = R_{A^*}Au$ pour tout $u \in D(A)$ et on déduit que

$$(AR_A)^* = A^*R_{A^*}$$

Proposition 3.4. *Si $A \in C(H, H')$ l'opérateur R_A a une unique racine carré symétrique, borné et positive qu'on la note par*

$$S_A = \sqrt{R_A}$$

Dont l'image est dense dans H, et vérifiant :

$$\|S_Au\|_H^2 = \langle u, R_Au\rangle_H$$

De plus $ImS_A = D(A)$ *et si* $u \in D(A)$ *on a* $S_{A^*}Au = AS_Au$
On en déduit comme précédemment que
i) L'opérateur AS_A *est aussi borné et en particulier on a*

$$\|S_A\|_{L(H,H')} \leq 1, \ \|AS_A\|_{L(H,H')} \leq 1.$$

ii) $(AS_A)^* = A^*S_{A^*}$.
iii) $\|S_Au\|_H^2 + \|AS_Au\|_H^2 = \|u\|_H^2$ *pour tout* $u \in H$.
Pour quelques applications, il est utile d'avoir une deuxième métrique plus pratique sur $C(H,H')$, *qu'on note par* $p(A,B).p(A,B)$ *et est définie par*

$$p(A,B) = [\|R_A - R_B\|^2 + \|R_{A^*} - R_{B^*}\|^2 + \|AR_A - BR_B\|^2 + \|A^*R_{A^*} - B^*R_{B^*}\|^2]^{\frac{1}{2}}$$

3.2.2 Stabilité des opérateurs de Fredholm non bornés :

Proposition 3.5. *[9]* $L(H,H')$ *est un sous-espace ouvert de* $C(H,H')$.*C'est-à-dire que si* $A \in L(H,H')$ *et si* $B \in C(H,H')$ *avec* $p(A,B) < \frac{1}{\sqrt{1+\|A\|^2}}$, *alors* $B \in L(H,H')$ *et* $\|A - B\| \leq \sqrt{1+\|A\|^2}\sqrt{1+\|B\|^2}p(A,B)$.
Preuve *Soit* $x \in D(B)$, *alors*

$$\|Bx\| \leq \|Ax\| + \|(B-A)x\|$$

De plus

$$\frac{1}{\sqrt{1+\|A\|^2}}\|(B-A)x\| \leq \|R_{A^*}(B-A)x\|$$
$$\leq \|R_{A^*} - R_{B^*}\|\|Bx\| + \|(R_{B^*}B - R_{A^*}A)x\|$$

Donc
$\|(B-A)x\| \leq \sqrt{1+\|A\|^2}[\|R_{A^*} - R_{B^*}\|\|Bx\| + \|R_{B^*}B - R_{A^*}A\|\|x\|]$

$\leq \sqrt{1+\|A\|^2}p(A,B)[\|Bx\|+\|x\|]$

Puisque $p(A,B) < \frac{1}{\sqrt{1+\|A\|^2}}$ *ceci implique* $\exists\varepsilon > 0$ *tel que* $\sqrt{1+\|A\|^2}p(A,B) \leq (1-\varepsilon)$ *ce qui donne*

$$\|Bx\| \leq \|A\|\|x\| + (1-\varepsilon)\|Bx\| + (1-\varepsilon)\|x\|$$

Ce qui montre que B *est borné et on a*

$$\|Bx\| \leq \frac{1}{\varepsilon}(1+\|A\|)\|x\|$$

Mais puisque B *est borné alors,* B^* *l'est aussi et* $\|B^*-A^*\| = \|B-A\|$*.Nous avons*

$$\|B-A\| \leq \sqrt{1+\|A\|^2}[\|R_{A^*}-R_{B^*}\|\|B\| + \|R_{B^*}B - R_{A^*}A\|]$$

De même

$$\|B^*-A^*\| \leq \sqrt{1+\|A\|^2}[\|R_A-R_B\|\|B\| + \|B^*R_{B^*} - A^*R_{A^*}\|]$$

Par sommation des deux équation, on obtient

$$\begin{aligned} 2\|B-A\| &\leq \sqrt{1-\|A\|^2}p(A,B)(1+\|B\|) \\ &\leq \sqrt{1+\|A\|^2}p(A,B)\sqrt{2}\sqrt{1+\|B\|^2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\|B-A\| \leq \sqrt{1+\|A\|^2}\sqrt{1+\|B\|^2}p(A,B).$$

Corollaire 3.2. *[8] Si on pose* $v = R_Au + B^*R_{B^*}Au$ *on obtient* $v \in D(B)$ *et*

$$\|v-u\| \leq \|R_A - R_B\|\|u\| + \|A^*R_{A^*} - B^*R_{B^*}\|\|Au\| \qquad (8)$$

$$\|Au - Bv\| \leq \|AR_A - BR_B\|\|u\| + \|R_{A^*} - R_{B^*}\|\|Au\| \qquad (9)$$

Théorème 3.3. ***[11]****(Premier théorème de stabilité)* $\forall A \in F(H,H')$, $\forall B \in C(H,H')$ *tel que* $p(A,B) < \frac{c(A)}{\sqrt{1+c(A)}}$, *alors* $B \in F(H,H')$ *et* $ind(A) = ind(B)$.

La démonstration du théorème découle directement des lemmes suivants :

Lemme 3.2. *[8] Si B appartient à l'ensemble des opérateurs à images fermés et $A \in C(H, H')$ et F est un sous-espace fermé de H contenant* $\ker A$ *tel que* $\lambda = \delta(\ker B, F) < 1$. *Alors :*

$$\sqrt{1-\lambda^2}c(B) - c_F(A) \leq \sqrt{1+c_F^2}(A)\sqrt{1+c^2(B)}p(A,B).$$

Lemme 3.3. *[9] Si B appartient à l'ensemble des opérateurs à images fermés tel que* $\dim \ker B = 0$, *alors si $A \in C(H, H')$ est tel que $p(A,B) < \frac{c(B)}{\sqrt{1+c^2(B)}}$, on obtient*

$$|c(A) - c(B)| \leq \sqrt{1+c^2(A)}\sqrt{1+c^2(B)}p(A,B)$$

Preuve : Du théorème 3.2.2

Supposons que $\dim \ker A < +\infty$. Donc puisque

$$\delta(\ker B, \ker A) \leq \frac{\sqrt{1+c^2(A)}}{c(A)}p(A,B) < 1$$

On doit avoir aussi que $\dim \ker B < +\infty$.
Maintenant soit F un sous-espace de dimension finie de H engendré par $\ker B$ et $\ker A$, alors F est un sous-espace fermé contenant $\ker A$, et par conséquent $\lambda = \delta(\ker A, F) = 0$, et en appliquant le lemme 3.2.3, on obtint

$$c(A) - c_F(B) \leq \sqrt{1+c^2(A)}\sqrt{1+c^2F(B)}p(A,B)$$

Ceci signifie que $c_F(B) > 0$ sinon

$$c(A) \leq \sqrt{1+c^2(A)}p(A,B) < c(A).$$

Qui donne une contradiction, mais $c_F(B) > 0$ signifie que l'image de B_F, la restriction de B à $F^{\perp}$, est fermé et puisque F est de dimension finie, ceci signifie que ImB est fermée, donc $\dim ImB/ImB_F < +\infty$. D'où le résultat.

Si $\dim \ker B = +\infty$, alors $co \dim ImB = \dim \ker A^* < +\infty$, par conséquent $p(A^*, B^*) < \frac{c(A^*)}{\sqrt{1+c^2(A^*)}}$, Puisque $p(A, B) = p(A^*, B^*), c(A) = c(A^*)$ et alors $B^* \in F(H, H')$ ainsi $B \in F(H, H')$.

Montrons que $ind(A) = ind(B)$. D'après ce qui précède, B et donc B^* ont une image fermée, en outre $\delta(\ker B, \ker A) < 1$ et $\delta(\ker B^*, \ker A^*) < 1$ c'est-à-dire que $\dim \ker A^* \geq \dim \ker B^*$ et $co \dim ImA \geq co \dim ImB$.

Supposons que $\dim \ker A < +\infty$ et sont $\dim \ker A \geq \dim \ker B + n$ où $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq \dim \ker A - \dim \ker B$, alors

$$ImB^* \cap \ker A = (\ker B)^{\perp} \cap \ker A$$

Contient un sous-espace M de dimension n.

Soit $N = \{u \in D(B^*), u \perp \ker B^*, B^* u \in M\}$, alors $\dim N = n$.Finalement :

Soit $T = N \oplus \ker B^*$, alors $\dim T = n + \dim \ker B^*$. On veut montrer que $\dim T \leq \dim \ker A^*$, c'est-à-dire T ne contient aucun élément différent de zéro $u + w, u \in \mathbb{N}, w \in \ker B^*$, orthogonal à $\ker A^*$.

Supposons qu'il existe un élément $u + w$ et soit $v = R_{A^*}(u + w) = R_{A^*}(u + w) + AR_A B^*(u+w)$ et puisque $B^*(u+w) = B^* u \in \ker$. Alors, comme $\langle A^* u, B^*(u+w) \rangle = 0$ On a

$$\|A^* v - B^*(u + w)\|^2 = \|A^* v\|^2 + \|B^*(u + w)\|^2$$

$$\|v - (u - w)\|^2 = \|(I - R_{A^*})(u + w)\|^2 = \|u + w\|^2 - \langle u + w, v \rangle - \|A^* v\|^2$$

La sommation des deux égalités donne

$$\|u + w\|^2 + \|B^*(u + w)\|^2 = \|v - (u + w)\|^2 + \|A^* v - B^*(u + w)\|^2 + \langle u + w, v \rangle.$$

Puisque $u + v$ est orthogonal à $\ker A^*$ et en utilisant

$$\|R_A u\|^2 + \|AR_A u\|^2 = \langle u, R_A u \rangle$$

On obtient

$$(1 + c^2(A))\|v\|^2 \leq \|v\|^2 + \|A^*v\|^2 = \langle u + w, v\rangle \leq \|v\|\|u + w\|$$

Donc

$$\|v\| \leq \frac{1}{1 + c^2(A)}\|u + w\|$$

Et donc

$$|\langle u + w, v\rangle| \leq \frac{\|u + w\|^2}{1 + c^2(A)}$$

Utilisant (8) et (9) du corollaire 3.2.1, obtient
$\|u+w\|^2 + \|B^*(u+w)\|^2 \leq [\|A^*R_{A^*} - B^*R_{B^*}\|\|u+w\| + \|R_A - R_B\|\|B^*(u+w)\|]^2 +$
$[\|R_{A^*} - R_{B^*}\|\|u + w\| + \|AR_A - BR_B\|\|B^*(u + w)\|]^2 + \frac{\|u+w\|^2}{1+c^2(A)}$
$\leq p^2(A, B)[\|u + w\|^2 + \|B^*(u + w)\|^2] + \frac{\|u+w\|^2}{1+c^2(A)}$
$< [\frac{c^2(A)}{1+c^2(A)} + \frac{1}{1+c^2(A)}][\|u + w\|^2 + \|B^*(u + w)\|^2]$
Contradiction, donc $\dim\ker A^* = \dim\ker B^* + n$
Si $\dim\ker B^* = +\infty$ on a $\dim\ker A^* = +\inf$ et $ind(A) = ind(B)$
Avant de donner le deuxième théorème de stabilité admettons le lemme suivant :

Lemme 3.4. *[5] Soient $(A, D(A))$ et $(B, D(B))$ deux opérateurs tel que B est A-borné de borne relative inférieure à 1, alors, $S = A+B$ est fermable si est seulement si A est fermable, en particulier S est fermé si est seulement si A est fermé.*

Théorème 3.4. *Soit $A \in F(H, H')$ et B est A-borné de borne relative à inférieure à 1.*
Si $D(A) \subset D(B)$ et $0 \leq a < 1,\ b \geqslant 0$ tel que $a < (1 - b)c(A).Alors$

$$(A + B) \in F(H, H') \ et \ ind(A + B) = ind(A)$$

Preuve :

Comme l'opérateur B est A-borné de borne relative a inférieure à 1, alors $S = A + B \in C(H, H')$ est un opérateur fermé d'après le lemme 3.2.5 introduisons une nouvelle norme définie sur $D(A)$ à partir l'hypothèse :

$$\|u\|_{D(A)} = (a+\varepsilon)\|u\|_H + (b+\varepsilon)\|Au\|_{H'},\ \forall u \in D(A),\ \forall \varepsilon > 0 \qquad (10)$$

alors $(D(A), \|.\|)_{D(A)}$ est un espace de Banach.
Appelons$(D(A), \|.\|)_{D(A)} = \widehat{H}$.
On définit les opérateurs $\widehat{A}$ *et* $\widehat{B}$ de $\widehat{H}$dans H'. Alors puisque B est A-borné on a $\widehat{A} \in \pounds(\widehat{H}, H')$ et $\widehat{B} \in \pounds(\widehat{H}, H')$.
Puisque $ImA = Im\widehat{A}$, donc $\widehat{A}$ est un fermé car A est un opérateur de Fredholm, donc on a

$$co\dim Im\widehat{A} = co\dim ImA$$

et

$$\dim\ker A = \dim\ker\widehat{A}$$

Alors $co\dim ImS = co\dim Im\widehat{S}$ et $\dim\ker S = \dim\ker\widehat{S}$, si $\widehat{S} = \widehat{A} + \widehat{B}$.
L'idée de la preuve est comparer $c(\widehat{A})$ et $c(A)$

$$c(\widehat{A}) = \inf_{u \in D(\widehat{A}), u \notin \ker\widehat{A}} \frac{\|\widehat{A}u\|_{H'}}{\|\widehat{u}\|} = \inf_{u \in D(\widehat{A}), u \notin \ker\widehat{A}} \frac{\|Au\|_{H'}}{\|\widehat{u}\|}$$

avec $\widehat{u} \in \widehat{H}/\ker A$
. Or on a

$$\|\widehat{u}\|_{D(A)} = \inf_{z \in \ker A} \|u - z\| \qquad (11)$$

On appliquent la relation (10)à (11) on obtient

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}\|_{D(A)} &= \inf[(a+\varepsilon)\|u-z\|_H + (b+\varepsilon)\|A(u-z)\|_{H'}] \\
&= (a+\varepsilon)\|\widehat{u}\| + (b+\varepsilon)\|Au\|
\end{aligned}$$

Car $Az = 0$, donc

$$
\begin{aligned}
c(\widehat{A}) &= \inf_{u\in D(\widehat{A})} \frac{\|Au\|_{H'}}{\|\widehat{u}\|} = \inf_{u\in D(\widehat{A})} \frac{\|Au\|_{H'}}{(a+\varepsilon)\|\widehat{u}\| + (b+\varepsilon)\|Au\|} \\
&= \inf \frac{\|Au\|_{H'}/\|\widehat{u}\|}{(a+\varepsilon)+(b+\varepsilon)\|Au\|\|\widehat{u}\|} = \frac{c(A)}{(a+\varepsilon)+(b+\varepsilon)c(A)}
\end{aligned}
$$

Le fait que $a < (1+b)c(A)$ donc on a $c(\widehat{A}) > 1$ avec ε suffisamment petit.
Comme $\|\widehat{B}\| \leq 1$, alors $\|\widehat{B}\| \leq c(\widehat{A})$ et puisque $\widehat{B}$ est borné dans $\widehat{H}$, alors on a :

$$Im(A+B) = Im(\widehat{A}+\widehat{B}) \ et \ \ker(A+B) = \ker(\widehat{A}+\widehat{B})$$

alors

$$\dim\ker(A+B) \leq \dim\ker A$$

$$co\dim Im(A+B) \leq co\dim ImA$$

Et puisque A est de Fredholm alors $A+B$ l'est aussi.
Si $a = 0$ le théorème reste vrai. En effet dans ce cas on a $\varepsilon + bc(A) < c(A)$
Par la relation (10), on a $\|Bu\|_{H'} \leq \varepsilon\|u\|_H + b\|Au\|_{H'}$ donc il suffit de prendre $\varepsilon = a'$.

3.2.3 Algèbre de Calkin

Rappelons que $K(H)$ est un idéal fermé de $L(H)$, ce qui nous permis de définir espace vectoriel $L(H), K(H)$.
On peut facilement vérifier que $(L(H)K(H), +, ., 0)$ est un algèbre appelée dans la littérature mathématique algèbre de Calkin [3].
Si $A \in L(H)$, alors la classe d' équivalence de A dans l' algèbre de Calkin est $\widetilde{A} = A + K(H)$.
En particulier $\widetilde{O} = K(H)$, si I est l' identité de $L(H)$, alors $\widetilde{I} = I + K(H)$.
alors tous les éléments de la classe $\widetilde{I}$ de I sont des opérateurs de Fredholm d'indice 0. (Voir la proposition 1.5).
Soit π la surjection canonique définie $L(H)$ dans $L(H)/k(H)$ par $\pi(A) = A + K(H)$

.

La relation fondamentale entre algèbre de Calkin et les opérateurs de Fredholm est exprimé par le théorème d'Atkinson [2].

Théorème 3.5. *[1] Soit $A \in L(H)$ AlorsA est un opérateur de Fredholm sur H $(A \in F(H))$ si $\pi(A) = \widetilde{A}$ est inversible dans $L(H)/K(H)$ (pour la loi de composition de $L(H)/k(H)$)*

Preuve

Si $A \in F(H)$, alors d'après la proposition 1.1, il existe $B \in L(H)$ tel que $(I - BA) \in K(H)$ et $(I - AB) \in k(H)$, par conséquent, $\pi(I - BA) = \pi(I - AB) + \pi(0) = \widetilde{o}$ Donc

$$\begin{aligned} \pi(I) &= \pi(A) + (B) \\ &= \pi(B)\pi(B) \end{aligned}$$

C'est- à -dire que $\pi(B)$ est l'inverse de $\pi(A)$ dans $L(H)/K(H]$.
Réciproquement supposons que $\pi(A)$ est inversible dans $L(H)/K(H)$ donc il existe $B \in L(H)$

$$\pi(A)\pi(B) = \pi(B)\pi(A) = \pi(I)$$

Ou bien

$$\pi(I - BA) = (I - AB) = \pi(0) = K(H)$$

Donc il existe deux opérateurs $K_1, K_2 \in K(H)$ tels que

$$\begin{aligned} I &= AB + K_1 \\ I &= BA + K_2 \end{aligned}$$

Il vient alors de proposition 1.1 que $A \in F(H)$

Remarques 3.1. *D'après le théorème de stabilité on sait que si* $K \in k(H)$ *alors,* $A + K \in F(H)$ *et* $ind(A + K) = ind(A)$ *pour tout* $A \in F(H)$*. En utilisant les propriétés d'une algèbre, on peut aussi vérifier que la réciproque est vraie, c'est-à-dire :*

$$K \in K(H) \Leftrightarrow (A + K) \in F(H), \forall A \in F(H)$$

Nous pouvons aussi caractériser les opérateurs de Fredholm sur H *d'indice nul à l'aide du résultat suivant :*

Théorème 3.6. *Soit* $A \in F(H)$*.*
$ind(A) = 0$ *si est seulement s'il existe un opérateur* $B \in L(H)$ *de rang fini tel que* $A + B$ *soit inversible dans* $L(H)$

Preuve

Supposons que $\dim ImB < \infty$ et $A + B$ est inversible dans $L(H)$, alors $B \in K(H), (A + B) \in F(H)$ et $ind(A + B) = ind(A)$
Comme $(A + B)$ est inversible, alors

$$ind(A + B) = 0 = ind(A)$$

Inversement, supposons que $ind(A) = 0$.
Comme $\dim \ker A = co\dim ImA < \infty$, il existe deux complémentaires X_0 *et* Y_0 dans H respectivement de $\ker A$ et ImA :

$$H = \ker A \oplus X_0 = ImA \oplus Y_0$$
$$\dim \ker A = \dim Y_0$$

Par conséquent, il existe un opérateur inversible A_0 des $\ker A$ dans Y_0 (propriétés de la dimension finie)
Soit P la projection de H sur X_0 rang de $\ker A$. Posons $B = A_0(I - P)B$ est bine défini,(I - P)est la projection sur $\ker A$ le rang de X_0 et B étant de rang fini.
D'autre part,

$$(A+B)x = [A + A_0(I-P)]x = 0$$

comme $A_x \in \Im A$ et $A_0(I-P)x$ donc

$$A_x \in \Im A \cap y_0 = \{0\}$$
$$A_0(I-P)x \in ImA \cap y_0 = \{0\}$$

D'où, $A_x = 0$ et $x = P_x$

Par suite,$x \in \ker A \cap X_0 = \{0\}$, Par conséquent, $\ker(A+B) = \{0\}$ et$A+B$ est inversible .

Conclusion

Notre travail consiste à vérifier que l'ensemble des opérateurs de Fredholm est un ouvert dans l'ensemble des opérateurs fermés, mais pour montrer ces résultats, Labrousse,F.V.Atkinson et M.G.Krein,il ont été obliger à introduire des métrique (d, g, ρ) pour facilité les preuves et bien sur la quantité la co-norme.

Bibliographie

[1] :F V , Atkinson , THE Normal soblvability of linear equation in normed spceces , Mat sbornik 28 (70)(1951)3-4 .

[2] : G, Aubrun . Théorie des opérateurs . M1 Mathématique de la Réunion . 30-31 .

[3] : H,Ariyah. Elliptic operators discrete groupes and von newman algebras . Astérique, 1976. 43-72 .

[4] : H,Brezis . Analyse fonctionnel Théories et application . Masson Paris, 1983 . 18-34 .

[5] : G ,Djellouli. Résonances des systèmes à plusieurs corps et théorie de Fredholm . Thèse de Doctorat Université Djalali Liabes, Sidi bel-abbés 2007.

[6] :A, khelfaoui, Les opérateurs de Fredholm . Mémoire de Master , 2012-2013 .

[7] : M G , Kerein Krasnoselski . Théorèmes fondamentaux sur l'extension d'opérateurs hermitiens . USP Math Nauk, 1947 .60-106 .

[8] :T,Kato . Perturbation Theory for linear operators . Springer Verlag New York , 1966 .

[9] :G PH ,Labrousse . Quelque topologie sur des espaces d'opérateurs dans l'espace de Hilbert . Dept de Math Université de Nice, 1970 .

[10] :R, Megginson . An introduction to Banach space theory Gaduate text in mathematics . Springer Verlag, New York 1998.

[11] :sg B, Nagy . On the stability of the index of unbrounded linear transformation . Act Math Acad, Sci Hung 3 1952 . 49-52 .

[12] : J D ,Newburgh . Atopolory for closed operators . Annals of Mathematics . Volume 53 N, 1951 .

[13] : B,Rryan . Rynne and Martin a youngs on linear functional .

[14] : W ,Rudin.Function Theory in the unite balle of c^n . Springer Verlag, 1980.