Ministère De L'Enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

Université IBN KHALDOUN- TIARET

Préparée au Département des Mathématiques

Présenté par

***DERBAL THELDJA**

***AMEUR NOR ELHOUDA**

***HADJI NAWEL**

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle et Équations différentiel

Sujet de mémoire

Introduction à La Mesure De Non Compacité Et Quelques Applications

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Présentée et soutenue publiquement le 01/07/2019

devant le Jury composé de

***Mokhtari Mokhtar**	**MAA**	**Président**
***SOUID MOHHAMED SAID**	**MCA**	**Encadreur**
***Bendaoud Abed Sid Ahmed**	**MCB**	**Examinateur**

Dédicace

louange à dieu ,le seul et l'unique

A mon cher père et ma chère mère

A mes chers frères et mes chéres sœurs

A tous mes oncles et tantes

A tous mes proches

A tous mes amis

A tous ce qui j'aime

Ce mémoire leurs est dédie

D.Theldja

Dédicace

A mon cher père et ma chère mère

A mes chers frères et mes chéres sœurs

A mon oncle

A tous mes proches

A tous mes amis

A tous ce que j'aime

Ce mémoire leurs est dédie

H.Nawel

Dédicace

Je dédie ce travail à :

A mon cher père et ma chère mère.

A mon cher mari.

A mes chers frères et mes chéres sœurs

Mes oncles, mes tantes et leur famille.

Tous mes amis, mes collègues

A. Nor Elhuda

Remerciement

Tout d'abord nous remercions ALLAH le tout miséricordieux qui nous a donné la force et Le courage pour réaliser ce travail.

Le grand merci à notre promoteur Mr.Souid Mohammed Said pour ses conseils et son aide et qui a mis à disposition tous les nécessaires pour réaliser ce mémoire.

Nous voudrons remercier en deuxième lieu les membres de jury Dr. Mokhtari Mokhtar pour le grand honneur qu'il nous fait en présidant le jury de notre soutenance, Dr. Bendaoud Abed Sid Ahmed pour l'honneur qu'il nous fait d'avoir accepter l'examen de notre travail.

Nous remercions également toute l'équipe pédagogique de l'Université Ibn Khaldoun-Tiaret-spécialement département de mathématique pour leur encadrement durant notre cursus universitaires.

Enfin Nous tenons à remercier toutes les personnes qui nous ont conseillé lors de la rédaction de ce mémoire : Nos familles, nos amis, nos professeurs, et nos camarades de promotion.

Notations et Conventions

On utilise les notation suivantes :
- E étant un espace de Banach et Ω un sous ensemble borné de E On notera par :

✓ $\|.\|$ sa norme.

✓ $\overline{\Omega}$ la fermeture de Ω .

✓ $\partial\Omega$ la frontière de Ω .

✓ $B(x_0, r)$ la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.

✓ $\overline{B}(x_0, r)$ la boule fermée de centre x_0 et de rayon r .

✓ $diam(A)$ diamètre de l'ensemble A.

✓ $dim(A)$ dimension de l'ensemble A.

✓ $\alpha(.)$ la mesure de non-compacité de Kuratowski.

✓ $conv(A)$ l'enveloppe convexe de l'ensemble A.

✓ $\overline{conv}(A)$ l'enveloppe convexe fermé de l'ensemble A.

✓ I_d l'application identique.

✓ θ le zéro de l'espace E.

✓ $C^k(I,J)$: l'ensemble des fonctions $f : I \to J$ K fois continûment différentiables sur I.

✓ $C(I,J)$: l'espace des fonctions continues sur I à valeurs dans J.

✓ $L^p([a,b])$: l'espace des fonctions mesurables sur $[a,b]$ et vérifiant $\int_a^b |u(t)|^p dt < \infty$.

✓ $p.p.$: Presque par tout

✓ M_E : la famille de toutes les parties bornées et non vide de E

✓ N_E : la famille de tous les sous-ensembles relativement compacts et non vide de E

Table des matières

Introduction

Le but de ce travail est de donner un aperçu sur la notion de la mesure de non compacité des ensemble bornés et nous sommes concentrés sur le rôle de cette mesure dans la théorie du point fixe pour prouver l'existence des solutions dans quelques applications aux équations intégrales.
La technique utilisée c'est de ramener l'étude de notre problème a la recherche d'un point fixe d'un opérateur intégral convenablement construit. En appliquant des théorèmes de point fixe et la mesure de non compacité
L'idée de définir une mesure de non compacité pour des parties bornées d'un espace de Banach quelconque est à Kuratowski [30], L'extension de cette théorie pour des opérateurs est dûe essentiellement à G. Darbo [19] et N.B. Sadovski [45]. Ces auteurs définissent une classe générale d'opérateurs complètement continus.
En règle générale, les applications de la mesure de non compacité sont caractérisées par une certaine perte de compacité qui se pose dans des nombreux domaines : les équations intégrales avec des noyaux fortement singuliers, les équations différentielles sur des domaines non bornés, les équations différentielles fonctionnelles de type neutre, des opérateurs différentiels linéaires, les opérateurs de superposition non linéaires entre des espaces de fonctions diverses, les problèmes aux valeurs initiales dans des espaces de Banach.
En effet, plusieurs de transport, ainsi qu'en biologie ; nombreuses intégrales sont des cas particuliers d'équations intervenant dans la théorie de transfert radiatif [17] ou dans d'autres domaines.
La théorie de la mesure de non compacité est développée dans les livres suivants :

J.Appell [4, 5],Akhmerov, Kamenskií, potapov, Sadovski [1], Ayerbe Toledano, Dominguez Benairdes lôpez Acedo [7], B. Bollobas, W. Fulton, A.Katok, F. Kirwan, p.sarnak, A. Dold, B. Eckmann[16], Kuratowski [?], Gohberg, Goldenstein et Markus [?], M. Vaeth [49], de nombreux chercheurs ont contribué à la théorie de la mesure de non compacité voir par exemple les articles de J. Appell [3], A. Ambrosetti [6], N.A.Erzakova [25], M.Vaeth [48] qui a étais appliquées a divers problèmes aux limites par
J.Appell [3] Banaś, Caballero, Rocha et Sadarangani [11], Banaś , Rocha, Sadarangani [?] ,Banaś, Rzepka [12], et Benchohra, Darwish [13], El-sayed and B.Rzepka[46].
Ce mémoire se compose en quatre chapitres .

Dans **le premier Chapitre** (intitulé **"Préliminaire"**), on presente un rappel sur les notions de l'analyse fonctionnelle et on donnons quelques notations, définitions des notions générales utilisées dans les différents chapitres du ce mémoire.
Le deuxième chapitre on présente quelques définitions et notions préliminaires sur la mesure de non compacité comme la mesure de Kuratowski et Hausdorff sur les ensembles borné et les opérateurs, nous présenterons également quelques propriétés fondamentales ainsi que quelques théorème associes à la mesure de non compacité
Dans **Le troisième chapitre** nous avons présenté quelques théorèmes du point fixe qui liés à la mesure de non compacité dans l'espace de Banach en mettant l'accent sur la plus importante est le théorème de Darbo.
Le quatrième chapitre est consacré à quelques application de la mesure de non compacité pour prouver l'existence des solutions aux équations intégrales non-linéaires de type Hammerstein à l'aide d'un théorie importante, la théorie du point fixe notamment le théorème du point fixe de Darbo .

Mots clés : la mesure de non compacité, équations intégrales, équations différentielles, équation intégrale non-linéaires, espace de Banach, Le théorème du point point fixe.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Quelques Notions D'analyse Fonctionnelle

1.1.1 Quelques Espaces Fonctionnels

Définition 1.1. ***(Espace Vectoriel Normé)***
Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle norme sur l'espace E toute application notée $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant les propriétés suivantes : pour tout x,y dans E et α dans $\mathbb{K}$,

(i) $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ *(homogénéité).*

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire) .*

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé .

Définition 1.2. ***(Espace Métrique Complet)***
On dit que E est un espace métrique complet si et seulement si toutes les suites de Cauchy convergent .

Définition 1.3. ***(Espace de Banach)***
Un espace de Banach est un espace vectoriel complet.

Définition 1.4. *(**Espace** C[a,b])*
L'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ *, de norme*

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

1.1.2 Espace L^p

Définition 1.5. *Soit* n *un entier tel que* $n \geq 1$ *on désigne par* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *muni de la mesure de Lebesgue on définit, pour tout* $p \in [1, +\infty[$ *,l'espace*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \ \textit{mesurable},\ \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

que l'on munit de la norme $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$
Pour $y \in L^p[0, T]$*, la norme et donnée par*

$$\|y\|_p = \begin{cases} \left(\int_0^T |y|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & \textit{pour} \quad 1 \leq p < \infty \\ ess\sup_{t\in[0,T]} |y(t)| & \textit{pour} \quad\quad p = \infty \end{cases}$$

1.1.3 Définitions et Notations

Dans cette section, nous rassemblons quelques définitions et notations que nous utiliserons par la suite.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, X un sous-ensemble de E et ∂X la frontière de X. De plus

$$diam X = \sup\{\|x - y\|; x, y \in X\}$$

le diamètre de X et

$$dist(x, X) = \inf\{\|x - y\|; y \in X\}$$

si X est un sous-ensemble de E, alors $\overline{X}$ et $\overline{conv X}$ sont la fermeture et l'adhérence de l'enveloppe convexe de X (intersection de tous les ensembles convexe qui contiennent

X) (respectivement)

$$\overline{B}_r(E) = \overline{B}_r = \{x \in E : \|x\| \leq r\}, \quad \overline{B}_1(E) = \overline{B}(E)$$

la boule fermée dans E de centre 0 et rayon r,et

$$S_r(E) = \partial B_r = \{x \in E : \|x\| = r\}, \quad S_1(E) = S(E)$$

la sphère dans E.

Définition

Soit I_1, I_2 et $J = [0, T]$ des intervalles dans $\mathbb{R}$ et un réel $0 \leq q < \infty$. Une fonction $h : J \times I_1 \longrightarrow I_2$ est dite L^q-Carathéodory si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) L'application $t \longrightarrow h(t, y)$ est mesurable pour tout $y \in I_1$.

(ii) L'application $y \longrightarrow h(t, y)$ est continue pour $p.p$ $t \in J$.

(iii) Pour tout $r > 0$, il existe $\mu_r \in L^q(J, \mathbb{R}_+)$ tel que $|y| \leq r$ implique que $|h(t, y)| \leq \mu_r(t)$ pour p.p $t \in J$.

On dit que la fonction $h : J \times I_1 \longrightarrow I_2$ est de Carathéodory si (i) et (ii) sont satisfaites.

Théorème 1.1. ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)[15]***
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx et soit (f_n) une suite de fonctions de L^1. On suppose que
a) *$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ p.p. sur Ω.*
b) *Il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω.*
Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$.

Lemme 1.1. ***(lemme de Vitali)***
Soit (x_n) une suite de fonctions x_n dans $L^p(\mathbb{R}_+), 1 \leq p \leq \infty$ telle que $x_n(t) \to x(t)$ quand $n \to \infty$ pour p.p $t \in \mathbb{R}_+$. Alors $x \in L^p(\mathbb{R}_+)$ et $x_n \to x$ dans $L^p(\mathbb{R}_+)$

si et seulement si

(i) *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *telle que*

$$\int_A |x_n(t)|^p dt < \varepsilon$$

pour tout n *et chaque sous-ensemble mesurable* $A \subset \mathbb{R}_+$ *avec* $meas(A) < \delta$.

(ii) *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une sous-ensemble* $A \subset \mathbb{R}_+$ *telle que* $meas(A) < \infty$ *et*

$$\int_{\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{A}} |x_n(t)|^p dt < \varepsilon$$

pour tout n.

Définition 1.6. ***(Recouvrements)***

Soit E *un ensemble et* A *une partie de* E. *On dit Qu'une famille* $(B_i)_{i \in I}$ *de parties de* E *recouvrement de* A *si leur réunion* $\bigcup\limits_{i \in I} B_i$ *contient* A.

C'est-à-dire,

$$A \subset \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Terminologie : Si l'interval I est fini on parlera de recouvrement fini .

Commentaire : Si $A = E$ puisque $\bigcup\limits_{i \in I} B_i \subset E$, on a l'égalité :

$\bigcup\limits_{i \in I} B_i = E.$

Définition 1.7. ***(Compacités)***

Soit (E, d) *un espace métrique. On dit que* (E, d) *est précompact ou bien (totalement borné) si pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un recouvrement fini de* E *dont le diamètre* $\leq \epsilon$.

Autrement dit :

(E, d) est précompact si pour tout $\epsilon > 0$, on peut recouvrir E par un nombre fini de boule de rayon ε.

Définition 1.8. *Un espace métrique* (E, d) *est dit compact s'il est précompact et complet.*

Proposition 1.1. *Soit (E, d) un espace métrique complet, et A une partie de E,*

$$A \text{ est compact } \Leftrightarrow A \text{ est précompact et fermée.}$$

Remarque 1.1. *Un ensemble M définie dans un espace métrique complet est relativement compact si et seulement si il est totalement bornée.*

Proposition 1.2. *Soit X un espace vectoriel normé. On a les équivalences :*

$$\begin{aligned} dimX < \infty &\Leftrightarrow \text{ la boule } \overline{B}(0,1) \text{ compact,} \\ &\Leftrightarrow \text{ la frontière } \partial B(0,1) \text{ compact,} \\ &\Leftrightarrow \text{ de toute suite de } \overline{B}(0,1) \text{ on peut extraire une sous-suite convergente.} \end{aligned}$$

Convexité

Définition 1.9. ***(Ensemble Convexe)***
Soit E un espace vectoriel , A une partie de E. On dite que A est convexe si

$$\forall x, y \in A, \quad \forall \lambda \in]0,1[, \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in A.$$

Définition 1.10. ***(Fonction Convexe)***
Soit E un espace vectoriel, f une fonction $f : E \to]-\infty; +\infty[$ est dite convexe si $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad \forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in]0,1[.$

Définition 1.11. *L'enveloppe convexe de A notée par $conv(A)$ est la plus petite partie convexe de E qui contient A.*
C'est-à-dire,

$$conv(A) = \cap\{K \subset E : K \supset A, \ K \text{ est convex}\}$$

Il est défini de façon équivalente comme l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A :

$$x \in conv(A) \Leftrightarrow \exists x_i \in A, \ \exists \lambda_i \in \mathbb{R}^+, \text{ avec } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \text{tels que } x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Quelques Propriétés De L'enveloppe Convexe

Soit E un espace vectoriel et A une partie de E, alors :

1. $conv(A)$ est convexe.
2. $A \subset conv(A)$.
3. L'enveloppe convexe fermée de A est l'intersection de toutes les convexes fermées de E contenant A. On la notera $\overline{conv}(A)$.
   Autrement dit,
   L'enveloppe convexe fermée de A est l'adhérence de l'enveloppe convexe de A.
   C'est-à-dire,
   $$\overline{conv}(A) = \cap\{K \subset E : K \supset A,\ K \text{ est fermée et convexe}\}.$$
4. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné alors $\overline{conv}(A) = conv(\overline{A})$.
5. Si A un compact de $\mathbb{R}^n$, alors $conv(A)$ est compacte.

Théorème 1.2. ***(Théorème De Mazur)***
Si K est une partie compacte d'un espace de Banach X, alors l'enveloppe convexe fermée $\overline{conv}(K)$ est compacte.

Propriétés Élémentaires de Diamètre

1. $0 \leq$ diam(A)$< +\infty$ pour chaque sous-ensemble A non vide borné de E.
2. Si $A \subset B \Rightarrow$diam(A)$\leq$ diam(B).
3. diam($\overline{A}$) $= diam(A)$.
4. **Théorème d'intersection de Cantor** Si (A_n) une suite d'ensembles décroissante de fermés(bornés) non vide de E et $\lim\limits_{n \to +\infty} diam(A_n) = 0$, alors $A_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ est un ensemble non vide donc réduite exactement à un point.
5. diam(A+B)$\leq$ diam(A)+diam(B).

6. diam(λ A)=$|\lambda|$ diam(A), $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
7. diam(A+x)=diam(A), $\forall x \in E$
8. diam(conv A)=diam(A).

Définition 1.12. *Soit E un espace de Banach , $T : E \to E$ un opérateur*

1. *T est dit* ***continu*** *si pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ dans E tel que $(x_n)_{n\in N}$ converge vers x dans E, la suite $(Tx_n)_{n\in N}$ converge vers Tx.*

2. *T est dit* ***compact****, si pour tout borné B de E, $T(B)$ est relativement compact.*

3. *T est dit* ***complètement continu*** *si T est continue et si l'image de tout borné B de E est relativement compact.*

4. *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

Définition 1.13. *(**Distance de Hausdorff**)*
La Distance de Hausdorff entre deux ensembles non-vide bornés A et B est définie par :

$$\mathcal{H}(A,B) = \max\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}\|x-y\|, \sup_{x\in B}\inf_{y\in A}\|x-y\|\}.$$

Notons que : $\mathcal{H}(A,B) \geq 0$ *et* $\mathcal{H}(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

Équation Integrale

Une équation integrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement est une fonction d'une ou plusieurs variables, se produit sous signe intégrale.

Définition 1.14. *On appelle équation intégrale toute équation de la forme*

$$\int_E K(x,y,\varphi(y))dy = \lambda\varphi(x) + f(x) \tag{1.1}$$

où E est un espace mesuré, $f(x)$ une fonction mesurable donnée sur E, λ un scalaire donné qui peut être réel ou complexe et $K(x,y,\varphi(y))$ une fonction mesurable sur E^3 appelée noyau de l'équation intégrale.

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction φ *qui satisfait l'équation* (1.1).

Définition 1.15. *On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les limites d'intégration sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des limites de l'intégration.*

Chapitre 2

Introduction À La Mesure De Non Compacité Dans L'espace De Banach

2.1 Bref historique

La notion de la mesure de non compacité a été introduite en 1930 par K.Kuratowski [36] dans le cadre de la généralisation du théorème de G.Cantor (sur les ensembles emboîtés [?]).
Cette notion a été étendue par G.Darbo et N.B.Sadovski [19, 47] .Ces auteurs définissent une nouvelle classe d'opérateurs complètement continus.
Depuis les théorèmes de Mönch [38], N.B.Sadovski[47] et G.Darbo [19] la résolution du problème de Cauchy

$$\frac{du}{dt} + Au(t) = f(t, u(t)) \quad \text{p.p.} \quad t \in [0, T], \tag{2.1}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.2}$$

S'est considérablement développée (voir par exemple [1, ?, 14, 18, 20, 21, 26, 27, 33, 34, 35, 38, 39, 41]).
Dans ce chapitre on présente quelques définitions et notions préliminaire sur la mesure

de non compacité comme la mesure de Kuratowski et Hausdorff sur les ensembles bornés et les opérateurs , nous présenterons quelques propriétés fondamentaux ainsi que quelques théorèmes associes à la mesure de non compacité.

2.2 Notion De La Mesure de Non Compacité

Définition 2.1. *Soient E un espace de Banach et $(A, \leq)$ ensemble partiellement ordonné. L'application*

$$\gamma : P(E) \to A$$

est dite mesure de non compacité $\mathcal{MNC}$ dans E si

$$\gamma(\overline{convA}) = \gamma(A).$$

Remarque 2.1. *Si D est dense dans X , alors $\overline{convX} = \overline{convD}$, d'où*

$$\gamma(X) = \gamma(D) \quad pour\ tout \quad X \in \mathcal{P}_b(X).$$

Proposition 2.1. *La mesure de non compacité est dite :*
(i) Monotone *si pour tout $X, Y \in P(E), X \subseteq Y \Longrightarrow \gamma(X) \leq \gamma(Y)$.*

(ii) Non singulière *si $\gamma(a \cup X) = \gamma(X)$ pour tout $a \in E, X \in P(E)$.*

(iii) Invariante *par réunion avec les compacts si $\gamma(K \cup X) = \gamma(X)$ pour tout $K \in M_E$ et $X \in P(E)$.*

(iv) semi-additive *si $\gamma(X \cup Y) = \max\{\gamma(X), \gamma(Y)\}$pour tout $X, Y \in P(E)$.*

(v) Invariante *par symétrie par rapport l'origine si $\gamma(-X) = \gamma(X)$ pour tout $X \in P(E)$.*

(vi) Réelle *si* $A = \mathbb{R}_+ = [0, \infty]$ *et* $\gamma(X)$ *pour tout* $X \in M_E$.
Dans ce cas, prenons $\gamma := \mu$ *où*

$$\mu : M_E \to [0, \infty]$$

est la mesure de non-compacité dans E *qui satisfait les conditions suivantes :*

(vii) *La famille* $Ker\mu = \{X \in M_E : \mu(X) = 0\} \neq \emptyset$ *et* $ker\mu \subset N_E$.

(viii) Régulière *(c.à.d),* $\mu(X) = 0 \iff X$ *est relativement compact.*

(ix)$\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y)$ *pour* $\lambda \in [0, 1]$.

(x) μ *est dite* ***semi-norme*** *si :*$\begin{cases} \mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X) \\ \mu(X+Y) \leq \mu(X) + \mu(Y) \end{cases}$

(xi) Lipschitzienne *si* $|\mu(X) - \mu(Y)| \leq L_\mu d(X, Y)$*, où* L_μ *est dite la semi-métrique de Hausdorff.*

(xii) *Si* $\{X_n\}$ *est une suite d'ensembles de* M_E *telle que* $X_{n+1} \subset X_n, \overline{X_n} = X_n, (n = 1, 2, \cdots)$*, et si* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(X) = 0$*,alors* $X_\infty = \cap X_n$.

La mesure de non-compacité μ *s'appelle aussi fonctionnelle régulière de Sadovskij. Nous allons voir par suite des exemples sur la mesure réelle de non compacité qui vérifient toutes les propriétés ci dessus.*

Définition 2.2. *: Une mesure de non compacité* μ *est dite Lipschitzienne si satisfait la condition de Lipschitz*

$$|\mu(X) - \mu(Y)| \leq \mu(B(E))\mathcal{H}(X, Y)$$

pour tous $X, Y \subset E$ *et* $B(E)$ *la boule fermée dans* E *de centre* 0 *et de rayon* 1.

De plus cette distance de Hausdorff sur X est uniformément continue.

Définition 2.3. *: Une application $\mu : \mathcal{P}_b(E) \to \mathbb{R}_+$, est appelée une mesure de non compacité dans E si elle satisfaite les conditions suivantes :*

1. $Ker\mu(X) = \{X \in \mathcal{P}_b(E) : \mu(X) = 0\}$ *est non vide et* $ker\mu(X) \subset \mathcal{P}_{rcp}(E)$.
2. $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$.
3. $\mu(\overline{X}) = \mu(X)$.
4. $\mu(convX) = \mu(X)$.
5. $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y)$ *pour* $\lambda \in [0, 1]$.
6. *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fermés de* $\mathcal{P}_b(E)$ *telle que* $A_{n+1} \subset A_n(n = 1, 2, ...)$ *et si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$, *alors l'ensemble d'intersection* $A_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *est non vide. La famille ker μ décrit en 1 est appelé le noyau de la mesure de non compacité μ.*

   Une mesure de non compacité μ est appelée sous-linéaire si elle satisfaite deux conditions suivantes :
7. $\mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X)$.
8. $\mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y)$.

   De plus, si μ satisfait la condition.
9. $\mu(X \cup Y) = \max\{\mu(X), \mu(Y)\}$

   μ est appelée mesure de non compacité sous-linéaire avec la propriété maximale.

2.3 La Mesure de Non Compacité de Kuratowski

Définition 2.4. [31] *Soient $(E, \|.\|)$ un espace Banach et M un sous -ensemble de E. La $\mathcal{MNC}$ de Kuratowski est une application $\alpha : \mathcal{P}_b(E) \to \mathbb{R}_+$ définie par :*

$$\alpha(M) = \inf\{\varepsilon > 0 : M \in \mathcal{P}_b(E), \textit{admet un recouvrement fini par des ensemble de diam} \leq \varepsilon\}$$

Autrement dit,

$\alpha(M) = \inf\{\varepsilon > 0 : \exists M_1, M_2, \ldots, M_n \subset M \text{ tels que : } \quad M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i \quad \text{et} \quad diam M_i \leq \varepsilon\}.$

Remarque 2.2. *:*

1. *La définition de la mesure de non-compacité de Kuratowski est significative non seulement pour les espaces de Banach mais également pour les espaces métriques arbitraires.*
2. $0 \leq \alpha(A) \leq diam(A) < \infty, \quad \forall A \in \mathcal{A}.$
3. A *est fini* $\Longrightarrow \alpha(A) = 0.$

2.3.1 Propriétés élémentaires de $\mathcal{MNC}$ de Kuratowski

Proposition 2.2. *Soient E un espace de Banach et $\mathcal{A}$ la famille des ensembles bornés de E. Alors, la fonction α est vérifie les propriétés suivantes :*

1. ***Régularité :*** $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \overline{A}$. *est compact.*
2. ***Monotonie :*** $A \subset B \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(B) \quad (\alpha$ *est croissante*$)$.
3. ***invariante par passage à la fermeture :*** $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$.
4. ***Semi-additivité :*** $\alpha(A \bigcup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}, \forall A, B \in \mathcal{A}$.
5. $\alpha(A \bigcap B) \leq \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}, \forall A, B \in \mathcal{A}$.
6. ***Semi-homogénéité :*** $\alpha(\lambda A) = |\lambda| \alpha A, \forall \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{A}$.
7. ***Semi-additivité algébrique :*** $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B) \quad , \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$.
8. ***invariante par translation :*** $\alpha(A + x) = \alpha(A) \quad \forall A \in E$.
9. ***invariante par passage à l'enveloppe convexe :*** $\alpha(conv(A)) = \alpha(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$.
10. $|\alpha(A) - \alpha(B)| \leq 2\mathcal{H}(A, B)$

Démonstration :
soient $A, B \in \mathcal{A}$.

1. Comme E est un espace de Banach , alors

$$\begin{aligned} \overline{A} \quad \text{est compact} \quad &\Leftrightarrow \quad A \quad \text{est totalement borné (définition (1.7).)} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists B_i, i = 1, \cdots, n \quad \text{tel que} \quad A \subset \cup_{i=1}^{n} B_i \quad \text{et} \\ &\quad\quad diam(B_i) \leq \varepsilon \quad \forall i \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha(A) = 0. \end{aligned}$$

2. On a $A \subset B$. Donc tout recouvrement de B est un recouvrement de A .
   Par conséquent,
$$\alpha(A) \leq \alpha(B).$$

3. Montrons que $\alpha(A) = \alpha(\overline{A})$. D'une part, on a
$$A \subset \overline{A} \Longrightarrow \alpha(A) \leq \alpha(\overline{A}).$$
   D'autre part, par définition de $\alpha(A)$; $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A_{i=1}^{n}$ tel que $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$ et
   $diam(A_i) \leq \alpha(A) + \varepsilon \quad \forall i = 1, \cdots, n$. Comme $\overline{A} \subseteq \cup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ et $diam(\overline{A_i}) = diam(A_i) \leq \alpha(A) + \varepsilon \quad \forall i = 1, \cdots, n$ on obtient
$$\alpha(\overline{A}) \leq \alpha(A).$$

4. Grâce à la monotonie de α. on a d'une part ,
$$A \subset (A \cup B) \Longrightarrow \alpha(A) \leq \alpha(A \cup B),$$
   et d'autre part,
$$B \subset (A \cup B) \Longrightarrow \alpha(B) \leq \alpha(A \cup B).$$

Alors

$$\max\{\alpha(A), \alpha(B)\} \leq \alpha(A \cup B). \tag{2.3}$$

Réciproquement, posons $\eta = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$. Par définition de $\alpha(A)$ et $\alpha(B)$, On a

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \{A_i\}_{i=1}^{n}$ tel que $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$ et $diam(A_i) \leq \alpha(A_i) \leq \alpha(A) + \varepsilon \leq \eta + \varepsilon \quad \forall i = \overline{1, n}$

et

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{B_j\}_{j=1}^{n}$ tel que $B \subseteq \cup_{j=1}^{n} B_j$ et $diam(B_j) \leq \alpha(B_j) \leq \alpha(B) + \varepsilon \leq \eta + \varepsilon \quad \forall j = \overline{1, m}$

par suite, on a $A \cup B \subseteq (\cup_{i=1}^{n} A_i) \cup (\cup_{j=1}^{m} B)$, ce qui nous donne

$$\alpha(A \cup B) \leq \eta + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Donc,

$$\alpha(A \cup B) \leq \max\{\alpha(A), \alpha(B)\} \tag{2.4}$$

De (2.3) et(2.4) on a le résultat.

5. Grâce à la monotonie de α , on a d'une part, $(A \cap B) \subset A \Longrightarrow \alpha(A \cap B) \leq \alpha(A)$ et d'autre part,
$(A \cap B) \subset B \Longrightarrow \alpha(A \cap B) \leq \alpha(B)$.
Donc
$$\alpha(A \cap B) \leq \min\{\alpha(A), \alpha(B)\}.$$

6. **i)** $\alpha(\lambda A) \leq |\lambda| \alpha(A) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. En effet ; supposons que $A \subseteq \cup_{i=1}^{m} A_i$. Alors $\lambda A \subseteq \cup_{i=1}^{m} \lambda A_i$ et

$$\begin{aligned} diam(\lambda A_i) &= \sup\{|\lambda| \|x - y\| \quad \text{avec} \quad x, y \in A_i \quad \forall i = 1, \cdots, m\} \\ &\leq |\lambda| \sup\{\|x - y\| \quad \text{avec} \quad x, y \in A_i \quad \forall i = 1, \cdots, m\} \\ &\leq |\lambda| diam(A_i), \quad \forall i = 1, \cdots, m \end{aligned}$$

ii) $|\lambda|\alpha(A) \leq \alpha(\lambda A), \forall \lambda \in \mathbb{R}$. En effet ; d'après la monotonie de α on a

$$\begin{aligned}(\lambda^{-1}\lambda A = A) &\implies A \subset \lambda^{-1}\lambda A\\ &\implies \alpha(A) \leq \alpha(\lambda^{-1}\lambda A)\\ &\implies \alpha(A) \leq \alpha(\lambda^{-1}\lambda A) \leq |\lambda|^{-1}\alpha(\lambda A).\end{aligned}$$

De $i)$ et $ii)$ on obtient le résultat.

7. On a par définition de $\alpha(A)$ et $\alpha(B)$: $\exists \{A_i\}_{i=1}^{n}$ tel que $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$ et $diam(A_i) \leq$

   $\alpha(A)+\varepsilon, \quad \forall i = 1, \cdots, n, \quad \exists \{B_j\}_{j=1}^{m}$ tel que $B \subseteq \cup_{j=1}^{m} B_j$ et $diam(B_i) \leq \alpha(B) + \varepsilon,\ \forall j = 1, \cdots, m$ *respectivement. Comme les ensembles* $\{A_i + B_i\}$ *recouvrent l'ensemble* $A + B$, *et*

   $$diam(A_i + B_i) \leq diam(A_i) + diam(B_j).$$

   Alors,
   $$diam(A_i + B_i) \leq \alpha(A) + \alpha(B) + 2\varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0.$$

   En faisant tendre ε vers 0, on obtient , $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$.

8. D'après la propriété de semi-additivité algébrique de α pour $B = \{x\}$ on obtient, $\alpha(A + \{x\}) \leq \alpha(A) + \alpha(\{x\})$; or la propriété de régularité entraîne que $\alpha(\{x\}) = 0$, (car l'ensemble $\{x\}$ est fini) ; d'où

   $$\alpha(A + \{x\}) \leq \alpha(A). \tag{2.5}$$

D'autre part on a $A = (A + \{x\}) - \{x\}$, donc

$$\begin{aligned} \alpha(A) &= \alpha(A + \{x\} - \{x\}) \\ &\leq \alpha(\{x\} + A) + \alpha(-\{x\}) \\ &\leq \alpha(\{x\} + A) - \alpha(\{x\}) \\ &\leq \alpha(\{x\} + A), \end{aligned}$$

d'où

$$\alpha(A + \{x\} \geq \alpha(A)) \tag{2.6}$$

de (2.5) et (2.6) on aura l'égalité,
on écrit $\alpha(A + x)$ au lieu de $\alpha(A + \{x\})$.

9. **a)** $A \subset conv(A) \Longrightarrow \alpha(A) \leq \alpha(conv(A))$.

b) On a par définition de $\alpha(A) : \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{A_i\}_{i=1}^n,$ tel que $A \subseteq \cup_{i=1}^n A_i$ et $diam(A_i) \leq \alpha(A) + \varepsilon, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$.
Puisque $diam(A) = diam(conv(A))$, on peut supposer que A_i est convexe $\forall i = 1, 2, \cdots, n$.
Posons $A = \{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) : \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$ et $B(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$

$$\begin{aligned} \alpha(B(\lambda)) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha(A_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i diam(A_i) \\ &\leq (\alpha(A) + \varepsilon) \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ &\leq \alpha(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Montrons que $\cup_{\lambda \in A} B(\lambda)$ est convexe,

soit $z = tx + (1-t)y$ et $\eta = t\lambda + (1-t)\mu$ Il suffit de montrer que si $0 \leq t < 1$,
$x \in B(\lambda)$ et $y \in B(\mu)$, alors $z \in B(\eta)$. En effet , soit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i$ ou $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in A, \mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) \in A$ et $x_i, y_i \in A_i, \forall i = 1, 2, \cdots, n$.
On suppose

$$p_i = \begin{cases} \frac{t\lambda_i}{\eta_i}, & \eta_i > 0; \\ 0, & \eta_i = 0 \end{cases}$$

et $z_i = p_i x_i + (1-p_i) y_i$

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i z_i = \begin{cases} 0, & \eta_i = 0; \\ \sum_{i=1}^{n} t\lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{n} (\eta_i - t\lambda_i) y_i = tx + (1-t)y, & \eta_i > 0. \end{cases}$$

Donc $z = \sum_{i=1}^{n} \eta_i z_i$, par conséquent $z \in B(\eta)$.
Maintenant ,on peut montrer le résultat.
puisque $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \cup_{\lambda} B(\lambda)$ et l'ensemble $\cup_{\lambda \in A} B(\lambda)$ est convexe, donc

$$conv(A) \subset conv(\cup_{i=1}^{n} A_i) \subset \cup_{\lambda \in A} B(\lambda) \Longrightarrow \alpha(conv(A)) \leq \alpha(\cup_{\lambda \in A} B(\lambda)).$$

Comme l'ensemble A est compact, pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nomblre fini de points $\lambda^1, \cdots, \lambda^m$ dans A tel que pour tout $\lambda \in A$ on a

$$\min\{\|\lambda - \lambda^i\| : i = 1, \cdots, n\} < \frac{\varepsilon}{M}$$

ou $M = \sup_{x \in B_i} \|x\| < \infty$ donc, si $\forall x \in \cup_{\lambda \in A} B(\lambda)$, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, $\lambda_i \leq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ alors $\exists j = 1, \cdots, m$ tel que $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \lambda_i^j < \frac{\varepsilon}{M}$. Si on pose $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^j x_i$, alors $\|x - \overline{x}\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \lambda_i^j| \|x_i\| < \varepsilon$ et on a aussi

$$conv(A) \subset \cup_{i=1}^{n} (B(\lambda^{(i)}) + \varepsilon \overline{B(0,1)}),$$

ce qui implique

$$\alpha(conv(A)) \leq \max\{\alpha(B(\lambda^{(i)})) + \alpha(\varepsilon\overline{B(0,1)})\} \leq \alpha(A) + \varepsilon + 2\varepsilon.$$

Et comme ε est arbitraire , on obtient $\alpha(conv(A)) \leq \alpha(A)$.

10. On a par définition de $\alpha(A) : \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\{A_i\}_{i=1}^{n}$ tel que $A \subseteq \cup_{i=1}^{n} A_i$ et $diam(A_i) \leq \alpha(A)+\varepsilon \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$. *Posons* $\eta = \mathcal{H}(A, B)+\varepsilon$, $B_i = \{y \in B$ tel que $\exists x \in A_i, \quad d(x, y) < \eta\} \quad \forall i = 1, \cdots, n$. *Comme* $\mathcal{H}(A, B) < \eta$, on a $B \subseteq \cup_{i=1}^{n} B_i$. Alors

$$daim(B_i) \leq 2\eta + diam(A_i) < 2\mathcal{H}(A, B) + \alpha(A) + 3\varepsilon \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

On fait tendre ε vers 0 on obtient $\alpha(B) \leq 2\mathcal{H}(A, B) + \alpha(A)$.
De même on a $\alpha(A) \leq 2\mathcal{H}(A, B) + \alpha(B)$. Par conséquent, on aura

$$|\alpha(A) - \alpha(B)| \leq 2\mathcal{H}(A, B).$$

Remarque 2.3. *:*
(i) *les propriétés de semi-homogénéité et semi-additivité algébrique nous donnent que la $\mathcal{MNC}$ de Kuratowski α est une semi-norme sur E.*

(ii) *Ce n'est pas facile déterminer la valeur explicite de $\alpha(A)$ pour un ensemble borné A d'un espace de Banach .*

Exemple 2.3.1. *soit $B(0,1)$ la boute unité d'un espace de Banach E de dimension finie.*
Alors

$$\alpha(B(0,1)) = 0.$$

En effet, $\overline{B(0,1)}$ *est compacte* $\Longleftrightarrow dimE < \infty$.
plus généralement, $\alpha(B(x_0, r)) = 0$, *où* $B(x_0, r)$ *est une boule de centre* x_0 *et de*

rayon r dans l'espace E , car $\overline{B(x_0, r)}$ est un compacte de l'espace de dimension finie E.

2.3.2 Théorème De Cantor Généralisé

Théorème 2.1. *[?] Dans un espace métrique complet (E, d) toute suite décroissante de fermées, non vides F_n telle que $\lim_{n\to+\infty} \alpha(F_n) = 0$ est d'intersection compacte non vide.*

Preuve :
(i) $F_\infty = \cap_n F_n$ est compact .En effet, $0 \leq \alpha(F_\infty) \leq \alpha(F_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ car α est croissante.
Donc $\alpha(F_\infty) = 0 \Longrightarrow F_\infty$ relativement compact alors il est compact car c'est un fermé.

(ii) $F_\infty \neq \emptyset$ soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $x_n \in F_n, \forall n$ et soit $C_n = \{x_k, K \geq n\}$; alors $(C_n)_n$ est décroissante et $C_n \subset F_n, \forall n$ car $x_n \in F_n$ et $x_{n+1} \in F_{n+1}$. De plus, $\alpha(C_n) = \alpha(C_n) \leq \alpha(F_n), \forall n$ *Comme* $\lim_{n\to+\infty} \alpha(F_n) = 0$, *alors* $\alpha(C_1) = 0$ et donc l'ensemble est relativement compact. soit donc $\overline{x} = \lim_{n\to+\infty} x_n$,alors $\overline{x} \in F_n, \forall n$ ce qui entraine que $\cap_n F_n \neq \emptyset$.

2.4 La Mesure De Non Compacité De Hausdorff

Définition 2.5. *[28] Soit E un espace de Banach. La $\mathcal{MNC}$ de Hausdorff est une application $\chi : \mathcal{P}_b(E) \to \mathbb{R}_+$ défini par :*

$$\chi(M) = \inf\{\epsilon > 0 : M \in \mathcal{P}_b(E) \text{ admet un recouvrement fini par des boules de rayon } \leq \varepsilon\}$$

Autrement dit,
$\chi(M) = \inf\{\varepsilon > 0 : M \in \mathcal{P}_b(E)$ *admet un* $\varepsilon -$ *réseau dans* $E\}$. *la mesure interne*

de non-compacité de Hausdorff de M est défini par :

$$\chi_i(M) = \inf\{\epsilon > 0 : M \quad \textit{admet un} \quad \varepsilon - \textit{réseau dans} \quad M\}$$

Théorème 2.2. *: [45] Soit $B = B(0,1)$ la boule unité centrée d'un espace de Banach dans E. Alors*

$$\begin{cases} \alpha(B) = \alpha(\overline{B}) = \alpha(\partial B) = 0 \\ \chi(B) = \chi(\overline{B}) = \chi(\partial B) = 0 \quad (\textit{si } E \textit{ est de dimension finie}), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \alpha(B) = \alpha(\overline{B}) = \alpha(\partial B) = 2 \\ \chi(B) = \chi(\overline{B}) = \chi(\partial B) = 1 \quad (\textit{si } E \textit{ est de dimension infinie}). \end{cases}$$

De plus si E est de dimension infinie et soit $B_R = B(x_0, R)$ la boule Ouverte de centre x_0 et de rayon R, alors

$$\alpha(B(x_0, R)) = \alpha(\partial B(x_0, R)) = 2R$$

preuve si E est de dimension finie , le résultat résulte des définitions de la $\mathcal{MNC}$ de Kuratowski et de Hausdorff ; B est relativement compact d'après la régularité de $\mu(\mu = \alpha, \chi)$ alors

$$\begin{cases} \alpha(B) = \alpha(\overline{B}) = \alpha(\partial B) = 0 \\ \chi(B) = \chi(\overline{B}) = \chi(\partial B) = 0 \end{cases}$$

Il reste à considérer le cas ou la dimension est infinie. Comme$B = B(0,1)$, alors$\chi(B(0,1)) \leq 1$. Supposons que $\chi(B(0,1)) = r < 1$. et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon + r < 1$. Il existe $x_1, \cdots, x_m$ dans E tel que

$$B(0,1) \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(x_k, r+\varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{m} x_k + (r+\varepsilon)B(0,1).$$

par suite

$$r = \chi(B) \leq (r+\varepsilon)\chi(B) = r(r+\varepsilon) \Longrightarrow r = 0,$$

ce qui est impossible car B n'est pas relativement compact ; d'où $\chi(B) = 1$. pour la preuve du résultat pour α, nous utiliserons le théorème des antipodes de Lyustrnik-Shnirel'man-Borsnk [page 100, théorème 2.6 [37]].

Théorème 2.3. *les mesures de non compacité de Kuratowski et de Hausdorff sont liées par l'inégalité :* $\chi(M) \leq \alpha(M) \leq 2\chi(M)$.

Exemple 2.4.1. *soit* $E = C[0,1]$ *l'espace de Banach de toutes les fonctions continues sur* $[0,1]$ *, muni de la norme du* $\sup X = B(E)$, *alors nous avons*

$$\chi(X) = 1, \quad \alpha(X) = 2,$$

puisque $diam B(E) = 2$ *et le rayon de* $B(E)$ *est* 1.
D'autre part, l'ensemble

$$X := \{\mu \in B(E) : 0 = \mu(0) \leq \mu(t) \leq \mu(1) = 1\} = B^+(E)$$

satisfait

$$\chi(X) = \frac{1}{2}, \quad \alpha(X) = 1$$

puisque $diam B^+(E) = 1$ *et le rayon de* $B(E)$ *est* $\frac{1}{2}$.

2.5 La Mesure De Non Compacité Dans Quelques Espaces Fonctionnels

2.5.1 La Mesure De Non Compacité Dans L'espace $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_+)$

Soit $E = \mathcal{BC}(\mathbb{R}_+)$ un espace de Banach muni de la norme standard $\|x\| = \sup\{|x(t)| : t \geq 0\}$, on désigne par $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_+)$ l'espace des toutes les fonctions réelles, bornées et continues sur $\mathbb{R}_+$. Notons par $\mathcal{P}_b(\mathcal{BC}(\mathbb{R}_+))$ la famille de toutes les parties bornées et non vide de $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_+)$ et par $\mathcal{P}_{rcp}(\mathcal{BC}(\mathbb{R}_+))$ la famille de tous les sous-ensembles relativement compacts et non vides de $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_+)$.

Maintenant, nous rappelons la définition de la mesure de non compacité dans $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_+)$ qui sera utilisée plus loin. Soit X un sous-ensemble non vide borné de $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_+)$ et un nombre positif $T > 0$. Pour $x \in X$ et $\epsilon \geq 0$, on note par $\omega^T(x, \epsilon)$ le module de continuité de la fonction x sur l'intervalle $[0, T]$, qui est

$$\omega^T(x, \epsilon) = \sup\{|x(t) - x(s)| : t, s \in [0, T], |t - s| \leq \epsilon\}.$$

En outre, nous avons

$$\omega^T(X, \epsilon) = \sup\left\{\omega^T(x, \epsilon) : x \in X\right\},$$

$$\omega_0^T(X) = \lim_{\epsilon \to 0} \omega^T(X, \epsilon),$$

$$\omega_0(X) = \lim_{T \to \infty} \omega_0^T(X).$$

De plus supposons

$$\beta(X) = \lim_{T \to \infty} \left\{\sup_{x \in X}\{\sup[|x(t)| : t \geq T]\}\right\}.$$

Enfin, nous définissons la fonction μ de la famille $\mathcal{P}_b(\mathcal{BC}(\mathbb{R}_+))$ par la formule

$$\mu(X) = \omega_0(X) + \beta(X).$$

La fonction μ est une mesure de non compacité sous-linéaire avec la propriété maximale dans l'espace $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_+))$ pour la démonstration voir [1].

2.5.2 La Mesure De Non Compacité Dans L'espace $L^P(\mathbb{R}_+)$

En particulier, la mesure de non compacité dans l'espace de Banach $E = L^P(\mathbb{R}_+)$ est défini comme suit. Soit X un sous-ensemble non vide fixe et borné de $L^P(\mathbb{R}_+)$. Nous notons par $\mathcal{P}_b(L^P(\mathbb{R}_+))$ la famille de toutes les parties bornées et non vide de $L^P(\mathbb{R}_+)$ et par $\mathcal{P}_{rcp}(L^P(\mathbb{R}_+))$ la famille de tous les sous-ensembles relativement compacts et non vide de $L^P(\mathbb{R}_+)$. Pour $x \in X$, on note :

$$\omega(X) = \lim_{\delta \to 0} \sup \left\{ \left(\int_0^{+\infty} |x(t+\delta) - x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, x \in X \right\}$$

et

$$\upsilon(X) = \lim_{T \to +\infty} \sup \left\{ \left(\int_T^{+\infty} |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, x \in X \right\}.$$

Enfin, pour toute partie X de $\mathcal{P}_b(E)$, notons :

$$\mu(X) = \omega(X) + \upsilon(X)$$

μ est une mesure de non compacité dans $L^P(\mathbb{R}_+)$ pour la démonstration voir[10]

Chapitre 3

Quelques Théorèmes Du Point Fixe

Introduction

Les théorèmes de point fixe les plus importants dans l'analyse non-linéaire sont le théorème de point fixe de Schauder et théorèmes de point fixe de Banach-Caccioppoli. Ces deux théorèmes sont apparemment complètement indépendants . Dans les théorèmes de Banach, l'opérateur doit diminuer les distances, en utilisant la contraction, alors que dans le théorème de Schauder, l'opérateur peut agrandir les distances. Les deux théorèmes peuvent être considérés comme des cas spéciaux d'un autre théorèmes de point fixe qui "construit un point" entre les deux théorème : c'est le célèbre théorème de point fixe de Darbo formulé en **1955** dans le cadre de la mesure de non-compacité de Kuratowski [22].

3.1 Quelques théorèmes du point fixe

Définition 3.1. *Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach E dans E, alors pour tout $x \in E$, tel que $x = T(x)$, s'appelle un point fixe de l'opérateur T.*

Définition 3.2. *Soit T un opérateur d'un espace de Banach E dans E, T est une* *contraction, s'il existe une constante* $0 \leq k < 1$ *telle que, pour tout* $x, y \in E$*, on ait*

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

3.1.1 Les Contractions Strictes D'ensembles et Les Application Condensant

soient E et F deux espace de Banach , A un ouvert de E .

Définition 3.3. *(**K-contraction d'ensembles**)*
Soit $f : E \longrightarrow F$ *une application continue et bornée (i.e* f *transforme les bornée de* E *en des bornée de* F*.)*

1. *On dit que* f *est une* ***k-contraction d'ensemble*** *s'il existe* $k \geq 0$*, tel que*

$$\alpha(f(A)) \leq k\alpha(A), \quad \forall A \quad \text{borné de } E \tag{3.1}$$

2. f *est appelée* ***k-contraction stricte d'ensembles*** *(ou* ***contraction stricte d'ensemble****) si* $0 \leq k < 1$.
3. f *est dite* ***condensante*** *si*

$$\alpha(f(A)) < \alpha(A), \quad \forall A \quad \text{borné non relativement compact} \quad (\alpha(A) > 0).$$

Remarque 3.1. *Il est évident que toute application* f *complètement continue , est une k-contraction stricte d'ensemble et toute k-contraction stricte d'ensembles est condensante .*
De plus on a

1. f *est condensante* $\Longrightarrow f$ *est une* 1*-contraction d'ensembles.*
2. f *est complètement continue* $\Longleftrightarrow f$ *est une* 0*-contraction d'ensemble.*

Exemple 3.1.1. *soit* X *un espace normé réel et* $L : X \to X$ *une application linéaire bornée Alors ,* L *est une* $\|L\|$*-contraction d'ensembles.*

Exemple 3.1.2. *Soit X un espace normé réel et $T : D \subset X \to X$ une application lipschitzienne avec la constante de Lipschitz l. Alors ,T est une l-contraction d'ensembles .*

3.1.2 Généralisations du théorème de Schauder

En (**1912**), Brouwer a énoncé son célèbre théorème qui est bien connu dans la théorie du point fixe Ce théorème a beaucoup d'applications dans l'analyse.

Théorème 3.1. *[50]* ***Théorème du point fixe Brouwer***
Soit C un sous ensembles non vide , fermé(borné) et convexe de $\mathbb{R}^n$. Si l'application $F : C \to C$ est continue, alors, F admet au moins un point fixe dans C.

En (**1922**)Banach dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique.

Théorème 3.2. *[29]* ***(Théorème du point fixe de Banach** 1922**)***
Soit (X, d)un espace métrique complet. une application $T : X \to X$ est une contraction avec la constante de Lipschitz k. Alors T a un point fixe unique $x \in X$.

Plus tard en (**1930**), Schauder a prolongé le théorème de Brouwer au cas de dimension infinie

Théorème 3.3. ***(Théorème de Schauder** [8])*
soit X un espace de Banach réel, C une partie non vide , convexe , fermée bornée de X. Si l'application $F : C \to C$ est complètement continu, alors F admet au moins un point fixe dans C.

Corollaire 3.1. *Soit C une partie non vide, compact et convexe d'un espace de Banach X. Si l'application $F : C \to C$ est continue, alors F admet au moins un point fixe dans C.*
Ce théorème a été généralisé par Darbo pour une nouvelle classe d'application définie par la mesure de non compacité de Kuratowski.

En (**1955**) Le théorème de Schauder a été généralisé par Darbo pour une nouvelle classe d'application définie par la mesure de non compacité de Kuratowski.

Théorème 3.4. ***(G.Darbo [42, 43])***
Soit X un espace de Banach, C une partie fermée, bornée, convexe et non vide de X et $F : C \to C$ une k-contraction stricte d'ensembles et continu, alors F admet au moins un point fixe dans C.

Démonstration
Soit la suite des ensembles $(A_n)_n$ définie par :

$$A_0 = C \quad \text{et} \quad A_{n+1} = \overline{conv} F(A_n), \quad \forall n \leq 0$$

A_n est une suite de sous ensembles décroissante, convexes, fermés et vérifiant $F(A_n) \subset A_n \quad \forall n$ par conséquent $\tilde{A} = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ est un convexe fermé.
Alors

$$\alpha(A_{n+1}) = \alpha(\overline{conv} F(A_n)) \leq k\alpha(A_n \leq \cdots \leq k^n \alpha(C) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

D'après la théorème(2.1)
$\tilde{A}$ est compact.De plus , $F : C \to C$ est continue . Par conséquent , le théorème de Shauder entreîne que F admet un point fixe $x \in \tilde{A} \subset C$.
D'où le résultat .
En **1967**,Sadovski a généralisé le théorème de Darbo pour application condensant.

Théorème 3.5. *[23]* ***Théorème du point de Sadovski***
Soit C un ensemble non vide, convexe, borné, d'un espace de Banach X et $F : C \to C$ une application condensant.
Alors , F admet un point fixe dans C.

Démonstration. On suppose $m \in C$ et Σ le système de tout les sous ensemble convexes fermés K de C vérifiant $m \in K$ et $F(K) \subset K$.

Posons $B = \cap_{k \in \Sigma} K$ et $Q = \overline{conv}(F(B) \cup \{m\})$ On trouve que

$$B = Q \tag{3.2}$$

En effet ,
d'une part ,on a $m \in B \quad F(B) \subset B, \quad$ alors$Q = \overline{conv}(F(B)) \cup \{m\} \subseteq \overline{conv}B = B$.
D'autre part , $Q \subseteq B$ implique que $F(Q) \subseteq F(B) \subseteq Q, \quad$ donc$Q \in \Sigma$, et par conséquent,$B \subseteq Q$.
D'où

$$\alpha(B) = \alpha(Q) = \alpha(\overline{conv}(F(B)) \cup \{m\}) = \max(\alpha(F(B)), \alpha(\{m\})) = \alpha(F(Q)) \tag{3.3}$$

Comme F est une application condensant,(3.1.2) et (3.3) entraînent que $\alpha(B) = 0$. Ce qui implique que B est compacte et convexe. Par conséquent, le théorème de Shauder entraîne que F admet un point $x \in C$.
En (**1980**), Mönch a généralisé les théorèmes du point fixe de Schauder, de Darbo et de Sadowski dans le théorème suivant. Il s'applique aux application univoques.

Théorème 3.6. *[8](**Mönch**)*
Soit K un sous -ensemble convexe fermé et non vide d'un espace de Banach E . Si $T : K \to K$ une application continue vérifiant la propriété suivante :

$$M \subset K \text{ dénombrable, } M \subset \overline{conv}(x_0 \cup T(M)) \implies \overline{M} \text{ compacte.}$$

Alors,T admet un point fixe dans K.

Chapitre 4

Quelques Applications

Le but de ce chapitre comment utilisé la notion de la mesure de non compacité pour prouver l'existence des solutions d'une équation intégrale à l'aide d'un théorie importante, la théorie du point fixe notamment le théorème du point fixe de Darbo.

4.1 Applications 1

4.1.1 L^p-Résultats D'existence D'une Équation Intégrale Quadratique Non Linéaire

Dans ce paragraphe, nous étudions l'existence des solutions de l'équation intégrale non linéaire

$$x(t) = a(t) + x(t)\int_0^{+\infty} k(t,s)h(s,x(s))ds, \ t \geq 0. \tag{4.1}$$

Par l'utilisation de la notion de mesure de non la compacité dans L^p et le théorème de point fixe de Darbo. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 4.1. *Considérons l'équation intégrale quadratique non linéaire* (4.1). *Supposons que :*

(H1) $(x,s) \longmapsto h(x,s)$ *est une fonction de* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *satisfaisant les conditions* *de Carathéodory.*

(H2) *Il existe* $b \in L^{r'}(\mathbb{R}_+)$ *et* $c > 0$ *telle que* $|h(s, x(s))| \leq b(s) + c|x(s)|^{p/r}$.

(H3) $(t, s) \longmapsto k(t, s)$ *est une fonction de* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $k(t, .)$ *appartient à* $L^{r'}(\mathbb{R}_+)$ $(1/r + 1/r' = 1)$ *pour tout* $t \geq 0$.

(H4) *La fonction* $\Pi : t \longmapsto k_t = \|k(t, .)\|_{r'} \in L^{+\infty}(\mathbb{R}_+)$, *il existe* $M_0 > 0$ *et une fonction* Δ *continue sur un voisinage de* 0 *tel que* $\|k(t, \cdot)\|_{r'} \leq M_0$ *et* $\|\Pi(\cdot + \delta) - \Pi(\cdot)\|_\infty \leq \Delta(\delta)$ *avec* $\Delta(0) = 0$. *De plus, soit la fonction* Ψ *définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par* $\Psi(R) = \|b\|_r + cR^{p/r}$, *et supposons qu'il existe une solution positive* R_0 *de l'inégalité*

$$\|a\|_p + RM_0\Psi(R) \leq R,$$

avec

(H5) $M_0\Psi(R_0) \leq 1$.

Sous les hypothèses ci-dessus, l'équation (4.1) *admet au moins une solution qui appartient à l'espace* $L^p(\mathbb{R}_+)$

Démonstrations

Soit H l'opérateur défini par

$$Hx(t) = a(t) + x(t) \int_0^{+\infty} k(t, s)h(s, x(s))ds, \ t \geq 0$$

Sous les hypothèses (H1)-(H4), nous avons pour $x \in L^p(\mathbb{R}_+)$,

$$|Hx(t)| \leq |a(t)| + |x(t)| \int_0^{+\infty} |k(t, s)|[b(s) + c|x(s)|^{p/r}]|ds.$$

Ensuite, l'inégalité de Hôlder implique

$$\|Hx\|_p \leq \|a\|_p + M_0\Psi(\|x\|_p)\|x\|_p < +\infty.$$

Dans ce qui suit, nous montrons que F est continue sur $L^p(\mathbb{R}_+)$. Soit l'opérateur F défini par

$$Fx(t) = x(t) \int_0^{+\infty} k(t,s)h(s,x(s))ds,$$

Soit $x_n,\ x$ dans $L^p(\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$$

Supposons que $\|Fx_n - Fx\|_p$ ne converge pas vers 0 lorsque $n \to \infty$, donc il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite x_{n_j} extraite de x_n tels que

$$\|Fx_{n_j} - Fx\|_p > \varepsilon,\ \forall\ j = 1, 2, ... \tag{4.2}$$

et x_{n_j} converge vers $x(t)$ quand $n \to \infty$, pour tout $t \geq 0$. Tout d'abord, d'après l'inégalité

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x\|_p + \|x\|_p$$

il s'ensuit que $\|x_n\|_p$ est borné. Tout d'abord, on a

$$|\int_0^{+\infty} k(t,s)h(s,x(s))ds| \leq \|k(t,\cdot)\|_{r'}(\|b\|_r + c\|x_{n_j}\|_r^{p/r}).$$

Le théorème de convergence domaine de Lebesgue et la continuité de F implique que

$$\lim_{n_j\to+\infty}(Fx_{n_j})(t) = (Fx)(t).$$

D'autre part, pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}_+$ ous avons,

$$\int_A |Fx_{n_j}(t)|^P dt \leq \Big[\|k_t\chi_A\|_\infty(\|b\|_p + c\|x_{n_j}\|_p^{p/r})\Big] \int_A |x_{n_j}|^p dt,$$

où χ_A désigne la fonction caractéristique du sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}_+$. Le théorème de

La convergence de Vitali implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \|Fx_{n_j} - Fx\|_p = 0.$$

ce qui contredit (4.2). Par conséquent, l'opérateur F est continue sur $L^p(\mathbb{R}_+)$ et, par conséquent, H est continue sur $L^p(\mathbb{R}_+)$

En outre, d'après l'hypothèse (H4), l'opérateur H transforme la boule B_{R_0} en lui-même.

Maintenant, nous fixons un sous-ensemble non vide X de B_{R_0}. Nous considérons d'abord un nombre réel $A > 0$ et un x arbitraire fixe dans X : Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned}
\Big(\int_A^{+\infty} |Hx(t)|^p\Big)^{1/p} &= \Big(\int_A^{+\infty} \Big|a(t) + x(t)\int_0^{+\infty} k(t,s)h(s,x(s))ds\Big|^p dt\Big)^{1/p} \\
&\leq \Big(\int_A^{+\infty} |a(t)|\Big)^{1/p} + \Big(\int_A^{+\infty} |x(t)|^p \|k(t,.)\|_{r'}(\|b\|_r + c\|x\|_p^{p/r})dt\Big)^{1/r} \\
&\leq \Big(\int_A^{+\infty} |a(t)|\Big)^{1/p} + M_0\Psi(R_0)\Big(\int_A^{+\infty} |x(t)|^p dt\Big)^{1/p}
\end{aligned}$$

En gardant que

$$\lim_{A\to+\infty} \Big(\int_A^{+\infty} |a(t)|\Big)^{1/p} = 0$$

nous obtenons

$$\nu(HX) \leq M_0\Psi(R)\nu(X). \tag{4.3}$$

Ici, $\nu(.)$ est donné par (4.3). D'autre part, considérons un nombre réel $\delta > 0$ et une arbitraire x fixes dans X, puis nous avons

$$\begin{aligned}|Hx(t+\delta)-Hx(t)| &\leq |a(t+\delta)-a(t)| \\ &\quad +\Big|x(t+\delta)\int_0^{+\infty}x(t+\delta,s)h(s,x(s))ds - x(t)\int_0^{+\infty}k(t,s)h(s,x(s))ds\Big| \\ &\leq |a(t+\delta)-a(t)| + |x(t+\delta)-x(t)|\Big(\int_0^{+\infty}|k(t,s)h(s,x(s))|ds\Big) \\ &\quad +|x(t+\delta)|\Big(\int_0^{+\infty}|x(t+\delta,s)-k(t,s)||h(s,x(s))|ds\Big)\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons
$\|Hx(.+\delta)-Hx(.)\|_p \leq \|a(.+\delta)-a(.)\|_p + M_0\Psi(R_0)\|x(.+\delta)-x(.)\|_p + R_0\Psi(R_0)\|\Pi(.+\delta)-\Pi(.)\|_\infty$.
du fait que $\lim_{\delta\to 0}\|a(.+\delta)-a(.)\|_p = 0$ et$\lim_{\delta\to 0}\|\Pi(.+\delta)-\Pi(.)\|_\infty \leq \lim_{\delta\to 0}\Delta(\delta) = 0$, on obtient

$$\mu(HX) \leq M_0\Psi(R_0)\mu(X) \tag{4.4}$$

Ici, μ est la mesure de non compacité dans $L^p(\mathbb{R}_+)$; donnée par (4.4). L'opérateur H est une contraction par rapport à μ. Enfin, depuis $M_0\psi(R) < 1$, puis en appliquant le théorème du point fixe de Darbo, on en conclut que l'équation (4.1) admet au moins une solution dans l'espace $L^p(\mathbb{R}_+)$.

4.2 Applications 2

4.2.1 Résultats D'existence Des Solutions Continues D'équation Intégrale Non Linéaire De Hammerstein

Dans cette section, nous étudions l'existence des solutions dans l'espace de Banach $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_+)$ de l'équation intégrale fonctionnelle suivante :

$$x(t) = g(t) + f(t,x(t))\int_0^{+\infty}k(t,s)h(s,x(s))ds,\ t\geq 0. \tag{4.5}$$

On suppose que les fonctions impliquées dans l'équation (4.5) satisfont aux conditions suivantes :

(i) $g : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $g(t) \to 0$ quand $t \to 0$.

(ii) $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et la fonction $t \to f(t, 0)$ appartient à l'espace $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_+)$,

(iii) il existe une fonction continue $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq m(t)|x-y| \textit{ pour tout } x, y \in \mathbb{R} \textit{ et } t \in \mathbb{R}_+,$$

(iv) $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur chaque rectangle de la forme $\mathbb{R}_+ \times [-v, v]$,

(v) il existe une fonction continue $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et une fonction continue et croissante $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$|h(t,x)| \leq a(t)b(|x|) \textit{ pour } t \geq 0 \textit{ et } x \in \mathbb{R}.$$

(vi) $k : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et il existe des fonctions continues $p, q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tels que les fonctions $p(t)$ *et* $a(t)q(t)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et l'inégalité suivante :

$$|k(t,s)| \leq p(t)q(s)$$

est satisfaite pour $t, s \in \mathbb{R}_+$. De plus, nous supposons que $\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$ et la fonction $m(t)p(t)$ est bornée sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

D'après les hypothèses ci-dessus, nous pouvons facilement en déduire que le constantes F, M, P sont fini définis par les formules

$F = sup[|f(t,0)| : t \geq 0]$

$M = sup[m(t)p(t) : t \geq 0]$

$P = sup[p(t) : t \geq 0]$

et nous désignons par Q la constante $Q = \int_0^\infty a(s)q(s)ds$. Evidemment $Q < \infty$.

Dans ce qui suit, nous supposons l'hypothèse suivante :

(vii) l'inégalité
$$\|g\| + b(r)(MQr + FPQ) \leq r$$
admet une solution positive r_0.

Nous pouvons donner notre résultat principal.

Théorème 4.2. *Sous les hypothèses ci-dessus **(i)**-**(vii)**, l'équation* (4.5) *admet au moins une solution dans l'espace* $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_+)$.

Preuve. Considérons l'opérateur H définie sur $\mathcal{BC}(\mathbb{R}_+)$ par :

$$(Hx)(t) = g(t) + f(t, x(t)) \int_0^{+\infty} k(t,s)h(s, x(s))ds, \ t \geq 0$$

On Observe , d'après les hypothèses (i), (ii) et (iv) - (vi) la fonction Hx est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ pour toute fonction $x \in \mathcal{BC}(\mathbb{R}_+)$. De plus, d'après les hypothèses nous obtenons l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} |(Hx)(t)| &\leq |g(t)| + |f(t, x(t)| \int_0^{\infty} |k(t,s)||h(s, x(s))|ds \\ &\leq \|g\| + [|f(t, x(t)) - f(t,0)| + |f(t,0)|] \int_0^{\infty} p(t)q(s)a(s)b(|x(s)|)ds \\ &\leq \|g\| + [m(t)|x(t)| + |f(t,0)|]b(\|x\|) \int_0^{\infty} p(t)q(s)a(s)ds \\ &\leq \|g\| + m(t)p(t)\|x\||b(\|x\|)Q + FQb(\|x\|)p(t). \end{aligned} \tag{4.6}$$

L'estimation ci-dessus nous permet de déduire que la fonction Hx est bornée sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. De plus, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|Hx\| \leq \|g\| + MQ\|x\|b(\|x\|) + FPQ(\|x\|).$$

Cette inégalité avec (vii) assure qu'il existe un nombre positif r_0 pour le quel l'opérateur H transforme la boule B_{r_0} dans lui-même.
Dans ce qui suit, nous montrons que H est continue sur la boule B_{r_0}. Pour ce faire, nous fixons $\varepsilon > 0$ et prenons $x, y \in B_{r_0}$ tels que $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Ensuite, pour fixé arbitrairement $t \in \mathbb{R}_+$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
|(Hx)(t) - (Hy)(t)| &\leq |f(t, x(t)) - f(t, y(t)| \int_0^\infty |k(t,s)||h(s, x(s))|ds \\
&\quad + |(f(t, y(t)| \int_0^\infty |k(t,s)||h(s, x(s)) - h(s, y(s))|ds \\
&\leq m(t)|x(t) - y(t)| \int_0^\infty p(t)q(s)a(s)b(|x(s)|)ds \\
&\quad + [|f(t, y(t)) - |f(t,0)| + |f(t,0)|] \int_0^\infty p(t)q(s)|h(s, x(s)) - h(s, y(s))]ds \\
&\leq \varepsilon m(t)p(t)b(r_0) \int_0^\infty q(s)a(s)ds + [m(t)r_0 + |f(t,0)|]p(t) \int_0^\infty q(s)\omega_{r_0}(\varepsilon)ds \\
&\leq \varepsilon MQb(r_0) + (Mr_0 + F)P\omega_{r_0}(\varepsilon) \int_0^\infty q(s)ds, \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

où nous avons défini

$$\omega_{r_0}(\varepsilon) = \sup[|h(s,x) - h(s,y)| : \quad s \geq 0, x, y \in [-r_0, r_0], |x - y| \leq \varepsilon].$$

On Observe, d'après l'hypothèse **(iv)** nous déduisons que $\omega_{r_0}(\varepsilon) \to 0$ *quand* $\varepsilon \to 0$. Ainsi, à partir de l'estimation (4.6), nous conclure que l'opérateur H est continue sur la boule B_{r_0}. Maintenant, prenons un ensemble non vide $X \subset B_{r_0}$. Ensuite, fixer arbitrairement $T > 0$ et $\varepsilon > 0$. Choisissez une fonction $x \in X$ et prendre $t, s \in [0, T]$ tel que $|t - s| \leq \varepsilon$.

Alors, en vertu des hypothèses retenues, nous avons

$$
\begin{aligned}
|(Hx)(t)-(Hx)(s)| &\leq |g(t)-g(s)| \\
&\quad+\Big|f(t,x(t))\int_0^\infty k(t,\tau)h(\tau,x(\tau))d\tau - f(s,x(s))\int_0^\infty k(s,\tau)h(\tau,x(\tau))d\tau\Big| \\
&\quad+\Big|f(s,x(s))\int_0^\infty k(t,\tau)h(\tau,x(\tau))d\tau - f(s,x(s))\int_0^\infty k(s,\tau)h(\tau,x(\tau))d\tau\Big| \\
&\leq |g(t)-g(s)| + |f(t,x(t))-f(s,x(s))|\int_0^\infty |k(t,\tau)||h(\tau,x(\tau))|d\tau \\
&\quad+|f(s,x(s))|\int_0^\infty |k(t,\tau)-k(s,\tau)||h(\tau,x(\tau))|d\tau \\
&\leq |g(t)-g(s)| + [|f(t,x(t))-f(t,x(s))| \\
&\quad+|f(t,x(s))-f(s,x(s))|]\int_0^\infty p(t)q(\tau)a(\tau)b(|x(\tau)|d\tau \\
&\quad+[|f(s,x(s))-f(s,0)|+|f(s,0)|]\int_0^\infty |k(t,\tau)-k(s,\tau)|a(\tau)b(|x(\tau)|)|d\tau \\
&\leq \omega^T(g,\varepsilon) + \Big\{m(t)|x(t)-x(s)| + \omega^T_{r_0}(f,\varepsilon)\Big\}b(r_0)p(t)\int_0^\infty a(\tau)q(\tau)d\tau \\
&\quad+\{m(s)|x(s)|+|f(s,0)|\}b(r_0)\int_0^\infty |k(t,\tau)-k(s,\tau)|a(\tau)d\tau \\
&\leq \omega^T(g,\varepsilon) + MQb(r_0)\omega^T(x,\varepsilon) + PQb(r_0)\omega^T_{r_0}(f,\varepsilon) \\
&\quad+(M_Tr_0+F)b(r_0)\int_0^\infty |k(t,\tau)-k(s,\tau)|a(\tau)d\tau, \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

où nous avons défini

$M_T = \max\{m(t) : t \leq T\}$,

$\omega^T_{r_0}(f,\varepsilon) = \sup[|f(t,x)-f(s,x)| : t,s \in [0,T], |t-s| \leq \varepsilon, |x| \leq r_0]$.

En outre, notons que nous pouvons obtenir les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |k(t,\tau)-k(s,\tau)|a(\tau)d\tau &\le \int_0^T |k(t,\tau)-k(s,\tau)|a(\tau)d\tau + \int_T^\infty |k(t,\tau)-k(s,\tau)|a(\tau)d\tau \\ &\le \int_0^T |k(t,\tau)-k(s,\tau)|a(\tau)d\tau + \int_T^\infty [|k(t,\tau)|-|k(s,\tau)|]a(\tau)d\tau \\ &\le A_T \int_0^T |k(t,\tau)-k(s,\tau)|d\tau + \int_T^\infty (p(t)+p(s))q(\tau)a(\tau)d\tau \\ &\le A_T.T\omega^T(k,\varepsilon) + 2P_T \int_T^\infty a(\tau)q(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{4.9}$$

où nous avons défini
$A_T = \max[a(t) : t \in [0,T]]$,
$P_T = \max[p(t) : t \in [0,T]]$,
$\omega^T(k,\varepsilon) = [|k(t,\tau)-k(s,\tau)| : t,s,\tau \in [0,T], |t-s| \le \varepsilon]$.
Maintenant, relies les estimations (4.8) et (4.9) nous obtenons

$$\begin{aligned}\omega^T(Hx,\varepsilon) &\le \omega^T(g,\varepsilon) + MQb(r_0)\omega^T(x,\varepsilon) + PQb(r_0)\omega^T_{r_0}(f,\varepsilon) \\ &+(M_Tr_0+F)b(r_0)\Big[TA_T\omega^T(k,\varepsilon) + 2P_T\int_T^\infty a(\tau)q(\tau)d\tau\Big]. \end{aligned} \tag{4.10}$$

d'après l'hypothèse **(i)**, on obtient que $\omega^T(g,\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. De plus, grace à l'hypothèse **(iii)** on en déduit que la fonction $f = f(t,x)$ est uniformément continue sur l'ensemble $[0,T] \times [-r_0, r_0]$. Ce qui implique
$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \omega^T_{r_0}(f,\varepsilon) = 0$.
De même, à partir de l'hypothèse **(vi)** nous avons
$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \omega^T(k,\varepsilon) = 0$.
Donc, à partir de l'inégalité (4.10), nous obtenons
$\omega^T_0(HX) \le MQb(r_0)\omega^T_0(X) + 2(M_Tr_0+F)b(r_0)P_T\int_T^\infty a(\tau)q(\tau)d\tau$.
Cette inégalité avec la propriété bien connue des intégrales impropres donne l'estimation suivante :

$$\omega_0(HX) \le MQb(r_0)\omega_0(X). \tag{4.11}$$

De plus, prendre une fonction arbitraire $x \in X$ et un nombre $T > 0$. Puis à partir de l'estimation (4.11) on en déduit facilement l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \sup[|(Hx)(t)| : t \geq T] \quad &\leq \quad \sup[|g(t)| : t \geq T] + MQb(r_0) \sup[|x(t)| : t \geq T] \\ &\quad +FQb(r_0) \sup[p(t) : t \geq T]. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Par conséquent, $p(t) \to 0$ et $g \to 0$ quand $t \to \infty$, nous obtenons l'estimation suivante :

$$\beta(HX) \leq MQb(r_0)\beta(X). \tag{4.13}$$

Enfin, reliant les inégalités (4.12) et (4.13) et d'après la définition de la mesure de non compacité de μ de chapitre 2, nous obtenons :

$$\mu(HX) \leq MQb(r_0)\mu(X). \tag{4.14}$$

Maintenant, observer que d'après l'hypothèse **(vii)**, on obtient l'inégalité suivante :

$$MQb(r_0) \leq 1 - \frac{FPQb(r_0) + \|g\|}{r_0} < 1. \tag{4.15}$$

Ainsi, les estimations (4.14) et (4.15) et en vertu le théorème de point fixe de Darbo on déduit que l'opérateur H admet au moins un point fixe dans le boule B_{r_0}.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a présenté la mesure de non compacité de Kuratawski, ses propriétés essentielles ont été étudiés. L'accent a été mis en suite sur quelques applications de cette notion.
nous avons appliqué le théorème de Darbo pour étudier l'existence des solutions d'une équation intégrale non linéaire.
Nous pensons avoir assemblé dans ce mémoire, un ensemble d'outils nécessaires à l'utilisation de cette importante notion en analyse non linéaire.

Bibliographie

[1] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, N.B. Sadovskii, Measures of Noncompactness and Condensing Operators, Birkhauser, Basel, 1992

[2] J.Appell, E.De pascale,A.Vignoli, Nonliear spectral theory, de Gruyter, Berlin,2004

[3] J.Appell, Measure of Noncompactness Condensing Operators and fixe points : An Application-oriented survey, Fixed point theory, vol 6, No.2,2005,157-229.

[4] J.Appell, A.S.Kalitvin, P.P.Zabrejko,Partial integral operators and integro-differential equations , Marcel Dekker,Inc New York.Basel,2000.

[5] J.Appell, E.De pascale,A.vignoli,Nonlinear Spectral theory , Walter de Gruyter, Berlin.New York,2004.

[6] A. Ambrosetti, Un Teoreme di Esistenza par le Equazioni Differnziali negli Spazi di Banac,Rendiconti del seminaro Matematico della Universitá di Padova, tome 39(1967),p.349-361.

[7] J.M. Ayerbe Toledano,T.Dominguez Benairdes,G.Lôez Acedo, Measure of Noncomactness in Metric Fixed point theory ,99,Birkhäuser Verlag , Basel , 1997 .

[8] R.P. Agarwal, M. Meehan and D. O'rRegan, Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press, New York, 2001.

[9] J. Banas, K. Goebel, Measures of Noncompactness in Banach Spaces, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 60, Marcel Dekker, New York and Basel, 1980.

[10] J. Banas, J. Rocha Martinb, K. Sadarangani, On solutions of a quadratic integral equation of Hammerstein type , Mathematical and Computer Modelling 43 (2006) 97-104.

[11] J.Banaś, J.Caballero, J.Rocha and K.Sadarangani , Monotonic solutions of a class of quadratic integral equation of quadratic integral equation of Volterra type, Comp.Math.Appl 49(2005),943-952.

[12] J.Banaś and B.Rzepka, On existence and asymptotic stability of solution of solutions of a nonlinear integral equation , J.Math Anal.Anal.Appl.284(2003)165-173.

[13] M.Benchohra and M.A.Darwish. On monotonic solutions of quadratic integral equation of Hammerstein type ,Inter.J.Math.Sci (2007).

[14] D. Bothe, Multivalued perturbations of m-accretive differential inclusions, Israel J. Math. 108 (1998) 109-138.

[15] H. Brezis, Analyse fonctionnelle Dunod, 2005.

[16] K.M.Case and P.F.zweifel, linear Transport Theory,Addison-Wesley, Reading, MA(1967).

[17] S.Chandrasekher , Radiative Transfer, Dover publications,New York, 1960.

[18] J-F, Couchouron et M. Kamenski, An Abstract Topological Point Of View And a General Averaging Principle In The Theory of Differential Inclusions, Nonlinear Anal. 42 (2000) 1101-1129.

[19] G. Darbo, Punti uniti in transformazioni a codominio non compatto, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 24 (1955), 84-92.

[20] K. Deimling, Multivalued Diffrential Equations, Walter De Gryter, Berlin, New-York, 1992.

[21] K. Deimling, Ordinary Differential Equations in Banach Spaces, Lecture Notes 596, Springer-Verlag.

[22] B.C. Dhage, Condensing Mapping and applications to existence theorems for common solution of dieffrential equations , Bull. Korean Math. Soc. 36 (1999), No. 3, pp. 565- 578.

[23] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Verlag-Berlin, Heidelberg New York , 1985

[24] K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer-Verlag, 1985.

[25] N.A.Erakova, A measure of nonocompactness Pril.Metody Issled Differ .Uravn.,Univ.of Kuybyshev(1982),58-60.

[26] Z. Fan, Q.DONG , G.Li, Semilinear Differntiel Equations with Nonlocal Conditions in Banach Spaces, Inter. Jour. Nonlinear Sci. 2 (2006) 131-139.

[27] X. Fu et K. Ezzinbi, Existance Of Solutions For Neutral Functional Differential Evolution Equations With Nonlocal Conditions, Nonlinear Anal. 54 (2003) 215-227.

[28] I.T. Gohberg, L.S. Goldenstein and A.S Markus, Investigation of Some Proprieties of Bounded Linear Operators in connection with their q-Norms, Vien. Zap Kishinersk Un-ta, 29 (1957) 29-36

[29] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[30] M.A. Krasnosel'skii,Some problems of nonlinear analysis, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 10 (2) (1958) 345-409.

[31] K. Kuratowski, Sur les espace complets, Frund. Math 15, (1930), pp.301-309.

[32] M.Kamenskií, V.Obukhovskií,P.Zecca, Condensing Multivalued maps and Semilinear Differentail Inclusions in Banach Spaces, Gebundene Ausgabe,2001.

[33] M. Kamenskii, V. Obukhovskii , P. Zecca, Semilinear Differential Inclusions with Lower Semicontinuous Nonlinearities, Ann. Mat. pura appl. (IV), Vol. CLXXVIII (2000), pp. 235-244.

[34] M. Kamenskii,V. Obukhovskii , P. Zecca, Condensing multivalued Maps and Semilinear Differntial Inclusions in Banach Spaces, Walter de Gruyter , Co. Berlin, 2001.

[35] M.I. Kamenskii , V. Obukhovskii, Condensing multioperators and Periodic Solutions Of Parabolic Functional-Differential Inclusions In Banach Spaces , Nonlinear Anal. TMA, 120 781-792 (1993).

[36] K. Kuratowski,Sur les espaces complets, Fund. Math. 15 (1930) 301- 309.

[37] Krasnoselski$\breve{i}$, M. A, Topological in Theory of Nonlinear Integral Equation, A Pergamon Press Book, Macmillan, New York, 1964.

[38] H. Mönch, Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces, Nonlinear Anal. 4 (1980), 985-999.

[39] H, Mönch et G.F. Von Harten, On the Cauchy problem for ordinary Differential equations in Banach spaces, Arch. Math. (Basel) 32 (1982), 153-160.

[40] M. Marina, Milovanovi-Arandjelovi.Measure of noncompactness on uniform spaces the axiomatic approach, Filomat 2001, (2001) 26-30.

[41] N.S. Papageorgiou, Functional-differential inclusions in Banach spaces with nonconvex right hand side, Funkcial Ekvac, 32 (1989), 145-156.

[42] D.O'regan , Fixed Point Théorèms for Nonlinear Operators, J.Math. Anal. Appl. Vol. 202 (1996) pp 413-432 :

[43] D.O'regan, Y. J. Cho and Y. Q. Chen, Topological Degree Theory and Applications, Copyright 2006 by Taylor and Francis Group.

[44] R. Precup, On the topological transversality principle, Nonlinear Anal. 20 (1993) 1-9.

[45] N.B. Sadovski, A fixed point principle, Funct. Anal. Appl. 1 (1967) 74-76.

[46] W.G.El-Sayed and B.Rzepka,Nondecreasing solutions of a quadratic integral equations of Urysohn type,Comput.Math.Appl51(6-7)(2006)1065-1074.

[47] N.B. Sadovski, A fixed point principle , Funct. Anal. Appl. 1 (1967) 74-76.

[48] M.Vaeth,On the minimal displacement problem of γ-Lipschitz maps and γ-Lipschitz retractions onto the sphere , Z.Anal .Anwendungen 21(2002),no.4,901-914.

[49] M.Vaeth, Volterra and Integral of Vector Functions , Marcel Dekker, Inc, New York .Basel,2000.

[50] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Vol. I : Fixed Point Theorems, Springer-Verlag, New York, 1986 :

[51] La kshmikantham, V. and Leela, S., Differential and Integral Inequalities, Vol. 1. Academic Press, New York, 1969.