RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université IBN KHALDOUN Tiaret
Faculté de Mathématiques et Informatique
Département des Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Appliquée
Option : Analyse fonctionnelle et équations différentielles

Mémoire

Présentée en vue d'obtenir le diplôme de MASTER

Présenté par :

Halis Fatiha
Announ Fatiha
Hebiche Hadda

Intitulé :

Existence de solutions pour des équations différentielles du premier ordre sur les échelles de temps

Soutenu le :15/07/2019

Devant de jury :

Président :	**BENHABI Mohammed** : M.A.A *U IBN KHALDOUN TIARET*
Encadreur :	**BENDOUMA Bouharket** : M.A.A *U IBN KHALDOUN TIARET*
Examinateur :	**MAHROUZ Tayeb** : M.A.A *U IBN KHALDOUN TIARET*

Année Universitaire : 2018/2019

Remerciements

Avant de commencer la prṕrésentation de ce travail, nous tenons à remercier sincèrement et profondément en premier lieu notre Dieu ****ALLAH**** *le tout puissant.*

Nous devons exprimer notre gratitude à Mr ****Bendouma Bouharket**** *d'avoir accepter de nous encadrer avec enthousiasme et beaucoup d'attention, ainsi que pour sa gentillesse, sa disponibilitéé, et ses conseils qui nous ont permis d'avancer, dans le cadre du mémoire, dans touts la période de nos travaille.*

Nous tenons à remercier aussi les membres de jury ****Benhabi.M*****et* ****Mahrouz.T**** *d'avoir accepter d'examiner ce modeste travail.*
Et sans oubli remerciement le chef département á Mr ****Larabi. A**** *sur son modeste avec les étudiants (nos camarades),et son attention et contribution beaucoup aides pour les étudiants de départements.*

Dédicaces

Avant touts je remercie ***ALLAH*** de m avoir donner la force et le courage pour réaliser ce modeste travail el hamdoulilah
je dédie modeste travail à : Ma chére mère et mon cher père qui m ont soutenue et encouragé durant ces années d'études ,à ma chére Sœur«Anfal» et mes chers frères «Nacrelddin» et «Abd Elrahman» , à tout la familles «Halis»,à mes amis ,Sans oublier mes prof qui m ont appris beaucoup de chose durant toutes ces années et spécialement le prof encadrant Mr «Bendoma.B»merci pour votre aide et votre compréhension, avec mes vœux de succès et de réussite à tous mes collègue ,et nous demandons à **Dieu** puissant de perpétuer nos moments de joie et de plaisir.
FATIHA .H

Tout ma gratitude enners Dieu le toute puissant qui ma dennee la foi le courage est qui aeclaire meon chemin pour que je puisse ettendre cet objectif
Je dedie ce succes a mon cher pere qui est la fierte de ma vie et de ma lumiere et a ma mere que j'aime , et a mes soeurs et a mon seul frere «Ibrahim» J'etends aussi ce succes a la famille «Announ» et la famille « Benagrouba» et a tous ceux qui me connaissent de pres ou de loin et mes colegue diplomes,á tout mes amis et les amis fbk que DIEU m'a ressemble.
FATIHA .A

Je dédie : A chére à mes familles ,à mes parents qui ont été les plus généreux de mon soutien dans cette vie , à touts les familles «Hebiche» et «Benalia» ,à mes frères «Bachir ,Hassane, Hocin, Abd.k,Massoda,Mariam ,Soltana, Khayra ,Nassima, Wahiba,» «Nariman» à mes amis , á mon professeur qui a été la premier personne ,à mes collègue dans cette travaille et à tout ceux qui en un aide dans ce travaille
HADDA.H

Table des matières

Introduction

La théorie des échelles de temps a été introduite par Stéphan Hilger dans sa thèse de doctorat en 1988, afin d'unifier l'analyse continue et l'analyse discrète en developpant une théorie sur les équations dynamiques sur les échelles de temps, la où on peut produire des resultats plus généraux qui peuvent etre appliquer dans plusieurs domaines continus et discrets.

Les équations dynamiques sur les échelles de temps on été étudiées par plusieurs auteurs en utilisant les théorémes du points fixes, la méhode des sous et sur solutions, la méhode de tube solution (voir [2, 3, 5, 6, 7, 10]...).

Dans ce mémoire, nous présentons des résultats d'existence de solutions pour d'équations dynamiques du premier ordre sur les échelles de temps. L'intérêt pour l'existence de solutions d'équation différentielle non-linéaire ne date pas d'hier. Beaucoup de résultats connus sur le sujet font appel à la technique appelée majoration a priori des solutions.

L'objectif est de modifier le problème initial judicieusement de sorte que si l'on prouve qu'une solution du problème modifié existe, elle est aussi solution du problème initial.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres.

Dans le **Chapitre 1**, nous présentons les résultats principaux sur la Δ-différentiabilité et Δ-intégrabilité sur les échelles de temps, et nous rappelons quelques définitions et théoremes de l'analyse fonctionnelle.

Dans le **Chapitre 2**, nous présentons les résultats principaux sur la ∇-différentiabilité, ∇-intégrabilité et la fonction exponentielle sur les échelles de temps.

Dans le **Chapitre 3**, nous étudierons des équations dynamiques linéaires homogènes et non homogènes du premier ordre, nous donnons quelque résultats d'éxistence de solutions des problèmes à valeurs initiales et quelques exemples des problèmes associés.

Dans le **Chapitre 4**, nous introduirons une notion de tube-solution pour obtenir un théorème d'existence pour l'équation dynamique non-linéaire du premier ordre avec condition periodique. Cette nouvelle notion est équivalente à la notion de sous- et sur-solution introduite par A.H. Zaidi [10]. L'objectif de cette méthode est de prouver que si une solution $y \in C^1_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ existe, alors elle est incluse dans un tube solution, i.e. on peut trouver des fonctions $v \in C^1_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ et $M \in C^1_{ld}([0, b], [0, \infty)))$ telles que

$$|y(t) - v(t)| \leq M(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Dans le cas des systèmes d'équations dynamiques, les notions de sous- et de sur-solution ont été généralisées pour celle de tube-solution par H. Gilbert [7] lorsque le système est du premier ordre.

Mots Clés : Calculs sur les échelles de temps, équation dynamique du premier ordre, conditions aux limites, sous et sur solutions, tube-solution, théorèmes d'existence, théorème du point fixe de Schauder.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats principaux sur la Δ-différentiabilité et Δ-intégrabilité sur les échelles de temps, et nous rappelons quelques définitions et théoremes de l'analyse fonctionnelle. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [1, 2, 3, 4].

1.1 Calculs sur les échelles de temps

Définition 1.1 *Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un ensemble non vide fermé de l'ensemble de nombre réels $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.1.1 *Les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ sont des échelles de temps, tandis que les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ et $]0;1[$ ne sont pas des échelles de temps.*
On sous-entend que la topologie de $\mathbb{T}$ est induite par celle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2 *Soit $\mathbb{T}$ une echelle de temps. Pour $t \in \mathbb{T}$, On définit :*
i) L'opérateur de saut-avant $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par

$$\sigma(t) := \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}.$$

ii) L'opérateur de saut-arriere $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par

$$\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

iii) - La fonction de granulation en avant $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ par

$$\mu(t) := \sigma(t) - t.$$

- *La fonction de granulation en arrière :* $\nu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ *par*

$$\nu(t) := t - \rho(t)$$

Par convention, on suppose :

$\inf \phi = \sup \mathbb{T}$ (i.e $\sigma(t) = t$ si $\mathbb{T}$ admet un maximum t)

$\sup \phi = \inf \mathbb{T}$ (i.e $\rho(t) = t$ si $\mathbb{T}$ admet un minimum t).

Définition 1.3 *Soit* $\mathbb{T}$ *échelle de temps,* $t \in \mathbb{T}$ *:*

1) *Si* $\sigma(t) > t$*, on dit que* t *est un point dispersé à droite* (rs)*.*
2) *Si* $\sigma(t) = t$ *et* $t < \sup \mathbb{T}$*, on dit que* t *est un point dense à droite* (rd)*.*
3) *Si* $\rho(t) < t$*, on dit que* t *est un point dispersé à gauche* (ls)*.*
4) *Si* $\rho(t) = t$ *et* $t > \inf \mathbb{T}$*, on dit que* t *est un point dense à gauche* (ld)*.*
5) *Si un point est dispersé à droite et à gauche,(i.e* $\rho(t) < t < \sigma(t)$*), on dit qu'il est isolé.*
6) *Si un point est dense à droite et à gauche,(i.e* $t{=}\sigma(t){=}\rho(t)$*), on dit qu'il est dense.*

Définition 1.4 *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction.*
- *On définit la fonction* $f^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *par*

$$f^\sigma(t) := (f \circ \sigma)(t) = f(\sigma(t)), \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

- *On définit la fonction* $f^\rho : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *par*

$$f^\rho(t) := (f \circ \rho)(t) = f(\rho(t)), \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Exemple 1.1 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps,* $t \in \mathbb{T}$*.*
1. Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$*, on a :*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t.$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\} = \sup(-\infty, t) = t.$$

Donc, chaque point de $\mathbb{R}$ *est dense :* $\mu(t) = \nu(t) = 0$ *.*
2. Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *on a :*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\}$$

$$= \inf\{t+1, t+2, t+3, ...\} = t+1$$
$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z} : s < t\}$$
$$= \sup\{t-1, t-2, t-3, ...\} = t-1.$$

Donc, chaque point de $\mathbb{Z}$ est isolé et on a : $\mu(t) = \nu(t) = 1$.

Définition 1.5 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, $t \in \mathbb{T}$:*

i) Si $\mathbb{T}$ admet un maximum M dispersé à gauche, on pose $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$, sinon $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.

ii) Si $\mathbb{T}$ admet un minimum m dispersé à droite, on pose $\mathbb{T}_k = \mathbb{T} - \{m\}$, sinon $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$.

Exemple 1.2 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et soit $\mathbb{T} = [a, b]$*
1. *Si b est dense a gauche $[a, b]^k = [a, b]$.*
2. *Si b est dispersé a gauche $[a, b]^k = [a, b) = [a, \rho(b)]$.*

Définition 1.6 *Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite régulière, si sa limite à droite existe en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$, et sa limite à gauche existe en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*

Définition 1.7 *Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$, et si sa limite à gauche existe et finie en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*
On note :
– L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont rd-continues sur $\mathbb{T}$ par

$$\mathrm{C}_{rd} = \mathrm{C}_{rd}(\mathbb{T}) = \mathrm{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Théorème 1.1 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ on a :*
1. *Si f est continue, alors f est rd-continue.*
2. *Si f est rd-continue, alors f est régulière.*
3. *L'opérateur de saut à droite σ est rd-continue.*
4. *Si f est rd-continue (resp. régulière), alors $f \circ \sigma$ est rd-continue (resp. régulière).*
5. *Si f est rd-continue (resp. régulière) et g est continue, alors $g \circ f$ est rd-continue (resp. régulière).*

1.2 Δ-différentiabilité

Définition 1.8 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $t \in \mathbb{T}^k$. On dit que f est Δ-différentiable en t s'il existe un nombre réel $f^\Delta(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de t (i.e, $\mathcal{U} = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ pour certain $\delta > 0$) tel que*

$$\left| f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s) \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \qquad \textit{pour tout} s \in \mathcal{U}.$$

On appelle $f^\Delta(t)$ la Δ-dérivée de f en t.
Si f est Δ-différentiable en tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors $f^\Delta : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est appelée la delta dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

- L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ qui sont différentiables et ses dérivées sont rd-continues sur $\mathbb{T}$ par

$$\mathrm{C}^1{}_{rd} = \mathrm{C}^1{}_{rd}(\mathbb{T}) = \mathrm{C}^1{}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Exemple 1.3 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction*
1. *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. on a $\sigma(t) = t$ alors :*

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t).$$

2. *Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. on a $\sigma(t) = t + 1$ alors :*

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

où Δ l'opérateur de différence .

Théorème 1.2 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $t \in \mathbb{T}^k$.*

1) *Si f est Δ-différentiable en t, alors f est continue en t.*
2) *Si t est dispersé à droite et f est une fonction continue en t, alors f est différentiable en t et*

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

3) *Si t est dense à droite alors f est Δ-différentiables en t, si seulement si* $\lim\limits_{s\to t}\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$ *existe et finie. Dans ce cas on a*

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}.$$

4) *Si f est Δ-différentiable en t, alors*

$$f^{\sigma}(t)=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t). \tag{1.1}$$

Exemple 1.4 *Soit $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ une fonction définie par :*

1. *$f(t)=\alpha$ pour tout $t\in\mathbb{T}$, où $\alpha\in\mathbb{R}$ est constante. alors $f^{\Delta}(t)=0$ par ce que on a pour tout $\varepsilon>0$*

$$|[f(\sigma(t))-f(s)]-0[\sigma(t)-s]|=|\alpha-\alpha|=0\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|$$

pour tout $s\in\mathbb{T}$.

2. *$f(t)=t$ pour tout $t\in\mathbb{T}$, alors $f^{\Delta}(t)=1$, par ce que on a pour tout $\varepsilon>0$:*

$$|[f(\sigma(t))-f(s)]-1[\sigma(t)-s]|=|(\sigma(t)-s)-(\sigma(t)-s)|=0\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|$$

pour tout $s\in\mathbb{T}$.

Théorème 1.3 *Soient $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ deux fonctions Δ-différentiables en $t\in\mathbb{T}^k$ alors :*

1) *$f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ est Δ-différentiable en t et*

$$(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t).$$

2) *Pour tout constante $\alpha\in\mathbb{R}$. $\alpha f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ est Δ-différentiable en t et*

$$(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t).$$

3) *$fg:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ est Δ-différentiable en t et*

$$(fg)\Delta(t)=f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)=f(t)g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)). \tag{1.2}$$

4) *Si* $f(t)f^{\sigma}(t) \neq 0$, *alors* $\dfrac{1}{f}$ *est* Δ-*différentiable en* t *et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

5) *Si* $g(t)g^{\sigma}(t) \neq 0$, *alors* $\dfrac{f}{g}$ *est* Δ-*différentiable en* t *et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}. \tag{1.3}$$

Exemple 1.5 *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction définie par* $f(t) = t^2$, *on a :*

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s\to t}\frac{(\sigma(t))^2 - s^2}{\sigma(t) - s} = \sigma(t) + t \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}^k$$

1. *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *on a* $\sigma(t) = t$ *et* $\rho(t) = t$, *alors :*

$$f^{\Delta}(t) = f'(t) = 2t.$$

2. *Si* $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, *on a* $\sigma(t) = t + h$ *et* $\rho(t) = t - h$ *alors :*

$$f^{\Delta}(t) = 2t + h.$$

Pour $h = 1$ $(i, e\mathbb{T} = \mathbb{Z})$ *on a* $f^{\Delta}(t) = \Delta f(t) = 2t + 1$.

Remarque 1.1 *La règle* $(fog)^{\Delta} = f^{\Delta}(g(t)).g^{\Delta}(t)$, *n'est pas vérifie pour toutes les échelles de temps.*

Théorème 1.4 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continûment différentiable et* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction delta différentiable. Alors* fog *est delta différentiable et on a :*

$$(fog)^{\Delta}(t) = \left\{\int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t))dh\right\} g^{\Delta}(t).$$

Exemple 1.6 *Soit* $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que :* $g(t) = t^2$ *et* $f(x) = \exp(x)$. *on a*

$$g^{\Delta}(t) = 2t + 1, \; f'(x) = \exp(x) \qquad et \qquad (fog)(t) = \exp(t^2).$$

D'après le théorème (1.2), *on a :*

$$\begin{aligned}(fog)^{\Delta}(t) &= \left\{\int_0^1 f'(g(t)+h\mu(t)g^{\Delta}(t)dh\right\}g^{\Delta}(t)\\ &= (2t+1)\int_0^1 exp(t^2+h(2t+1))dh\\ &= exp(t^2)(exp(2t+1)-1)\end{aligned}$$

D'autre part on calcule $(fog)^{\Delta}(t)$ *sur* $\mathbb{Z}$ *:*

$$\begin{aligned}(fog)^{\Delta}(t) &= \Delta f(g(t)) = f(g(t+1)) - f(g(t))\\ &= exp(t^2)(exp(2t+1)-1).\end{aligned}$$

1.3 Δ-intégrabilité

Définition 1.9 *La fonction* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est dite la* Δ*-antidérivée de* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *si*

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \quad pour\ chaque\ t \in \mathbb{T}^k.$$

- On définit l'intégrale de Cauchy par :

$$\int_a^b f(t)\Delta(t) = F(b) - F(a), pour\ tout \quad a, b \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.10 *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction régulière , on définit l'intégrale indéfinie par :*

$$\int f(t)\Delta(t) = F(t) + c,$$

où c *est une constante arbitraire et* F *est la* Δ*-antidérivée de* f*.*

Théorème 1.5 *Toute fonction rd-continue possède une* Δ*-antidérivée. En particulier ,si* $t_0 \in \mathbb{T}$*, alors la fonction* F *définit par :*

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau)\Delta\tau, \quad pour\ tout \quad t \in \mathbb{T},$$

est une Δ*-antidérivée de* f*.*

Théorème 1.6 *Tout fonction continue f sur $[a, b]$ est Δ-intégrable.*

Théorème 1.7 *Si $f \in C_r d$ et $t \in \mathbb{T}^k$, alors*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta(\tau) = \mu(t)f(t).$$

Théorème 1.8 *Si $a, b, c \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C_r d$, alors :*

1. $\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t.$

2. $\int_a^b (\alpha f(t))\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t.$

3. $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t.$

4. $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t.$

5. $\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta} g(t)\Delta t.$

6. $\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t.$

7. $\int_a^a f(t)\Delta t = 0.$

8. *Si $|f(t)| \leq g(t)$ sur $[a, b]$, alors $|\int_a^b f(t)\Delta t| \leq \int_a^b g(t)\Delta t.$*

9. *Si $f(t) \geq 0$ pour tout $a \leq t \leq b$ alors $\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0.$*

Théorème 1.9 *Soient $a, b \in \mathbb{T}$et $f \in C_r d$*

1.*Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

où l'intégrale à droite est l'intégrale usuelle de Riemann.

2. *Si $[a, b]$ ne contient que des points isolés, alors*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) & si\ a<b \\ 0 & si\ a=b \\ -\sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) & si\ a>b \end{cases}$$

3. *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *alors*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & si\ a<b \\ 0 & si\ a=b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) & si\ a>b \end{cases}$$

Exemple 1.7 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps :*
1. *Soit* $a, b \in \mathbb{T}$, *on a :*

$$\int_a^b c\Delta t = c\int_a^b 1\Delta t = c(b-a).$$

2. *On calculons* $\int_0^t s\Delta s$ *sur* $\mathbb{T}$ *:*

-Pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *on a :*

$$\int_0^t s\Delta s = \int_0^t sds = \left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^t = \frac{1}{2}t^2.$$

-Pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *on a :*

$$\int_0^t s\Delta s = \sum_{s=0}^{t-1} s = \frac{t(t-1)}{2}.$$

1.4 Rappels d'analyse fonctionnelle

Définition 1.11 *(Espace de Banach) On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur les corps* $\mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$.

Soit $J := [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. $C(J, \mathbb{R})$ est l'espace de Banach des fonctions x continues définie de J dans $\mathbb{R}$ avec la norme

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in J} |x(t)|.$$

Définition 1.12 *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* $T : E \longrightarrow F$ *est une fonction continue. On dit que* T *est compacte si* $\overline{T(E)}$ *est compact. On dit que* T *est complètement continue si* $\overline{T(B)}$ *est compact pour tout sous-ensemble borné* $B \subset E$.

Définition 1.13 *(Ensemble équicontinue) Un ensemble F de $C([a,b],\mathbb{R})$ est dit équicontinu, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$, tel que, pour tout $t_1, t_2 \in [a,b], |t_2 - t_1| \leq \delta$ on a :*

$$\|f(t_2) - f(t_1)\| \leq \varepsilon, \quad \textit{pour tout} \quad f \in F.$$

Définition 1.14 *(Ensemble uniformément borné) F est dit uniformément borné dans $C([a,b],\mathbb{R})$ s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que $\|y\|_\infty \leq M$ pour tout $y \in F$.*

Théorème 1.10 *(Arzela-Ascoli) Soit $B \subset C([a,b],\mathbb{R})$, B est relativement compact dans $C([a,b],\mathbb{R})$ si et seulement si :*

(a) *B est uniformément borné.*

(b) *B est équicontinu.*

Théorème 1.11 *(Théorème du point fixe de Schauder) Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach E et $A : C \to C$ une application compact i.e $(\overline{A(C)}$ est compact). Alors A admet au moins un point fixe (i.e il existe un point x_0 dans C tel que $f(x_0) = x_0$).*

Chapitre 2

∇-différentiabilité et ∇-intégrabilité sur les échelles de temps

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats principaux sur la ∇-différentiabilité, ∇-intégrabilité et la fonction exponentielle sur les échelles de temps.

Définition 2.1 *Une fonction $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dit ld-continue si elle est continue en tout point dense a gauche de $\mathbb{T}$,et si sa limite a droite existe et finie en tout point dense a droite de $\mathbb{T}$*
On note :
L'ensemble des fonction $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont ld-continues sur $\mathbb{T}$ par

$$C_{ld} = C_{ld}(\mathbb{T}) = C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Proposition 2.1 *Les espaces $C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ et $C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ sont des espaces de Banach pour la norme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]_\mathbb{T}} |f(t)|.$$

Théorème 2.1 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, on a :*

1. *Si f est continue ,alors f est ld-continue.*
2. *Si f est ld-continue ,alors f est régulière.*

3. l'opérateur ρ est ld-continue.

4. Si f est ld-continue, alors f^ρ est ld-continue.

2.1 ∇-différentiabilité

Définition 2.2 *Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $t \in \mathbb{T}_k$, on dit que f est ∇-différentiable en t s'il existe un nombre réel $f^\nabla(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de t (i.e $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ pour certain $\delta > 0$) telle que*

$$|f^\rho(t) - f(s) - f^\nabla(t)(\rho(t) - s)| \leq \varepsilon|\rho(t) - s|, \qquad \textit{pour tout } s \in U$$

On appelle $f^\nabla(t)$ la ∇-dérivée de f en t.
si f est ∇-différentiable en tout $t \in \mathbb{T}_k$, alors $f : \mathbb{T}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée la ∇ dérivée de f sur $\mathbb{T}_k$.
- L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui ∇-différentiables et ses dérivées sont ld-continues sur $\mathbb{T}$ par

$$C^1_{ld} = C^1_{ld}(\mathbb{T}) = (\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Théorème 2.2 *Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $t \in \mathbb{T}_k$.*

1) Si f est ∇-différentiable en t, alors f est continue en t.

2) Si t est dispersé à gauche et f est une fonction continue en t, alors f est ∇-différentiable en t et

$$f^\nabla(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)}$$

3) Si t est dense à gauche alors f est ∇-différentiable en t, si et seulement si $\lim\limits_{s\to t} \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$ existe et finie .Dans ce cas on a

$$f^\nabla(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

4) Si f est ∇-différentiable en t, alors

$$f^\rho(t) = f(t) - \nu(t) f^\nabla.$$

Preuve.

1) Supposons que f est ∇-différentiable en t, soit $0 < \epsilon < 1$. On définit $\epsilon^{'} = \epsilon[1 + |f^{\nabla}(t)| + 2\nu(t)]^{-1}$, alors $0 < \epsilon^{'} < 1$.
La définition de la ∇-dérivée, entraine, qu'éton donné $0 < \epsilon^{'} < 1$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_t$ de t, alors

$$\left| f(\rho(t)) - f(s) - f^{\nabla}(t)\,(\rho(t) - s) \right| \leq \epsilon^{'}\,|\rho(t) - s|$$

pour $s \in \mathcal{V}_t$. alors on a pour tout $s \in \mathcal{V}_t \cap]t - \epsilon^{'}, t + \epsilon^{'}[$ et

$$\begin{aligned} |f\,(t) - f\,(s)\,| \leq & \Big| \left[f^{\rho}(t) - f(s) - f^{\nabla}(t)\,(\rho(t) - s)\right] \\ & \quad - \left[f^{\rho}(t) - f(t) + \nu(t) f^{\nabla}(t)\right] + f^{\nabla}(t)\,(t - s) \Big| \\ \leq & \ \epsilon^{'}|\,(\rho(t) - s)\,| + \epsilon^{'}\nu(t) + |f^{\nabla}(t)||t - s| \\ \leq & \ \epsilon^{'}[\nu + |t - s| + \nu(t) + |f^{\nabla}(t)|] \\ \leq & \ \epsilon. \end{aligned}$$

d'où la continuité de f.

(ii) Supposons que f est continue en t et t est dispersé à gauche. Par continuité

$$\lim_{s \to t} \frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s} = \frac{f(\rho(t)) - f(t)}{\rho(t) - t} = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)}.$$

Par conséquent, étant donné $\epsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_t$ de t, tel que

$$\left| \frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s} - \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)} \right| \leq \epsilon$$

pour tout $s \in \mathcal{V}_t$. Il s'ensuit que

$$\left| [f(\rho(t)) - f(s)] - \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)}(\rho(t) - s) \right| \leq \epsilon|\rho(t) - s|$$

pour tout $s \in \mathcal{V}_t$. Donc

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)}.$$

Théorème 2.3 *Soient $f, g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions ∇-différentiable en $t \in \mathbb{T}_k$ alors*

1. *$f + g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est ∇-différentiable en t et*
$$(f+g)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t) + g^{\nabla}(t).$$
2. *Pour tout constant $\alpha \in \mathbb{R}.\alpha f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est ∇-différentiable en t et*
$$(\alpha f)^{\nabla}(t) = \alpha f^{\nabla}(t).$$
3. *$fg : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est ∇-différentiable en t et*
$$(fg)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t)g(t) + f(\rho(t))g^{\nabla}(t) = f(t)g^{\nabla}(t) + f^{\nabla}(t)g(\rho(t))$$
4. *Si $f(t)f^{\rho}(t) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f}$ est ∇-différentiable en t et*
$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\nabla}(t) = -\frac{f^{\nabla}(t)}{f(t)f(\rho(t))}.$$
5. *Si $g(t)g^{\rho}(t) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est ∇-différentiable en t et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}(t) = \frac{f^{\nabla}(t)g(t) - f(t)g^{\nabla}(t)}{g(t)g(\rho(t))}.$$
6. *Si f et f^{∇} sont continues, alors*
$$\left(\int_a^t f(t,s)\nabla s\right)^{\nabla} = f(\rho(t),t) + \int_a^t f^{\nabla}(t,s)\nabla s.$$

Exemple 2.1.1 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(t) = t^2$, on a :*

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s\to t}\frac{(\sigma(t))^2 - s^2}{\sigma(t) - s} = \sigma(t) + t \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}^k \\ f^{\nabla}(t) &= \lim_{s\to t}\frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s} = \lim_{s\to t}\frac{(\rho(t))^2 - s^2}{\rho(t) - s} = \rho(t) + t \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}_k \end{aligned}$$

1. *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ on a $\sigma(t) = t$ et $\rho(t) = t$, alors :*
$$f^{\Delta}(t) = f'(t) = 2t \text{ et } f^{\nabla}(t) = f'(t) = 2t$$
2. *Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, on a $\sigma(t) = t + h$ et $\rho(t) = t - h$, alors :*
$$f^{\Delta}(t) = 2t + h \text{ et } f^{\nabla}(t) = 2t - h$$
Pour $h = 1$ (i.e $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$) on a $f^{\Delta}(t) = \Delta f(t) = 2t + 1$ et $f^{\nabla}(t) = \nabla f(t) = 2t - 1$ où ∇ est l'opérateur de différence arrière .

Théorème 2.4 *(Relation entre ∇-dérivée et Δ-dérivée)*

1. *Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est ∇-différentiable sur $\mathbb{T}_\kappa$ et si f^∇ est continue sur $\mathbb{T}_\kappa$, alors f est Δ-differentiable sur $\mathbb{T}^\kappa$ et*
$$f^\Delta(t) = f^\nabla(\sigma(t)) \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^\kappa.$$
2. *Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable sur $\mathbb{T}^\kappa$ et si f^Δ est continue sur $\mathbb{T}^\kappa$, alors f est ∇-differentiable sur $\mathbb{T}_\kappa$ et*
$$f^\nabla(t) = f^\Delta(\rho(t)) \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}_\kappa.$$

Remarque 2.1 *- Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, la Δ-dérivée (la ∇-dérivée) équivaut à la dérivée au sens classique et les équations aux échelles de temps deviennent des équations différentielles.*
- Si $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, les équations aux échelles de temps deviennent des équations aux différences finies.

2.2 ∇-intégrabilité

Définition 2.3 *La fonction $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite la ∇-antidérivée de $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ si*
$$F^\nabla(t) = f(t), \quad \textit{pour chaque } t \in \mathbb{T}_k.$$
- On définit l'intégrale de Cauchy par :
$$\int_a^b f(t)\nabla(t) = F(b) - F(a), \textit{pour tout} \quad a, b \in \mathbb{T}.$$

Définition 2.4 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière , on définit l'intégrale indéfinie par :*
$$\int f(t)\nabla(t) = F(t) + c,$$
où c est une constante arbitraire et F est la ∇-antidérivée de f.

Théorème 2.5 *Toute fonction ld-continue $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ a une ∇-antidérivée. En particulier ,si $t_0 \in \mathbb{T}$, alors la fonction F définit par :*
$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\nabla(\tau), \textit{ pour tout } t \in \mathbb{T},$$

est une ∇-antidérivée de f.

Théorème 2.6 *Si $f \in C_{ld}$ et $t \in \mathbb{T}_k$, alors*

$$\int\limits_{\rho(t)}^{t} f(\tau)\nabla(\tau) = \nu(t)f(t).$$

Preuve.

D'aprés le Théorème 2.5, il existe une ∇-antidérivée F de f, on a :

$$F^{\nabla}(t) = f(t) \;\; et \;\; F(t) - F(\rho(t) = \nu(t)F^{\nabla}(t)$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\rho(t)}^{t} f(\tau)\nabla(\tau) &= F(t) - F(\rho(t)) \\ &= \nu(t)F^{\nabla}(t) \\ &= \nu(t)f(t).\end{aligned}$$

Théorème 2.7 *Si $f^{\nabla} \geq 0$, alors f est croissante.*

Preuve.

Soit $f^{\nabla} \geq 0$ pour tout $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ et soit $s,t \in \mathbb{T}$ avec $a \leq s \leq t \leq b$, on a

$$\int_{s}^{t} f^{\nabla}(\tau)\nabla(\tau) \geq 0 \; et \; \int_{s}^{t} f^{\nabla}(\tau)\nabla(\tau) = f(t) - f(s).$$

D'où $f(t) - f(s) \geq 0$, alors $f(t) \geq f(s)$.
Donc f est croissante.

Théorème 2.8 *Si $a,b,c \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}$ et $f,g \in C_ld$, alors :*

1. $\int_a^b [f(t) + g(t)]\nabla t = \int_a^b f(t)\nabla t + \int_a^b g(t)\nabla t.$
2. $\int_a^b (\alpha f(t))\nabla t = \alpha \int_a^b f(t)\nabla t.$
3. $\int_a^b f(t)\nabla t = -\int_b^a f(t)\nabla t$ *et* $\int_a^a f(t)\nabla t = 0.$

4. $\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^c f(t)\nabla t + \int_c^b f(t)\nabla t$.
5. $\int_a^b f(\rho(t))g^{\nabla}(t)\nabla t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\nabla}g(t)\nabla t$.
6. *Si* $|f(t)| \leq g(t)$ *sur* $[a,b]$, *alors* $|\int_a^b f(t)\nabla t| \leq \int_a^b g(t)\nabla t$.
7. *Si* $f(t) \geq 0$ *pour tout* $a \leq t \leq b$ *alors* $\int_a^b f(t)\nabla t \geq 0$.

Théorème 2.9 *Soient* $a, b \in \mathbb{T}$ *et* $f \in C_{ld}$.

1. *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *alors*

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^b f(t)dt$$

où l'intégrale à gauche est l'intégrale usuelle de Riemann.

2. *Si* $[a,b]$ *ne contient que des points isolé, alors*

$$\int_a^b f(t)\nabla(t) = \begin{cases} \sum\limits_{t\in[a,b]} \nu(t)f(t), & si\ a < b \\ 0 & si\ a = b \\ -\sum\limits_{t\in[a,b]} \nu(t)f(t), & si\ a > b \end{cases}$$

3. *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *alors*

$$\int_a^b f(t)\nabla(t) = \begin{cases} \sum\limits_{t=a}^{b-1} f(t), & si\ a < b \\ 0 & si\ a = b \\ -\sum\limits_{t=b}^{a-1} f(t), & si\ a > b \end{cases}$$

Preuve.

1. Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, on a $f^{\nabla}(t) = f'(t)$, alors $\int_a^b f^{\nabla}(t)\nabla t = \int_a^b f'(t)dt$
2. $[a;b]$ est un intervalle qui ne contient que des points isolés, donc $[a,b] = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, ou $a = t_0 < t_1 < t_2 ... < t_n = b$, d'aprés (4) du

Théorème 2.8, alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\nabla t &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\nabla t \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\rho(t_{i+1})}^{t_i+1} f(t)\nabla t \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \nu(t_{i+1}) f(t_{i+1}) \\
&= \sum_{t\in(a,b]} \nu(t) f(t).
\end{aligned}$$

3. Pour $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, on a $\nu(t)=1$ et d'aprés (2), donc

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \begin{cases} \displaystyle\sum_{t=a}^{b-1} f(t) & si\ a<b \\ 0 & si\ a=b \\ \displaystyle-\sum_{t=b}^{a-1} f(t) & si\ a>b \end{cases}$$

Exemple 2.1 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps :*
1. *Soit $a,b\in\mathbb{T}$, on a :*

$$\int_a^b c\nabla t = c\int_a^b 1\nabla t = c(b-a).$$

2. *On calculons $\displaystyle\int_0^t s\nabla s$ sur $\mathbb{T}$:*
-Pour $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ on a :

$$\int_0^t s\nabla s = \int_0^t s ds = \left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^t = \frac{1}{2}t^2.$$

-Pour $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ on a :

$$\int_0^t s\nabla s = \sum_{s=0}^{t-1} s = \frac{t(t-1)}{2}.$$

2.3 la fonction exponentielle

Dans cette section, nous définissons une fonction importante sur une échelle de temps qui généralise la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.5 *Une fonction $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite ν-régressive si :*

$$1 - \nu(t)p(t) \neq 0, \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}_\kappa.$$

On note L'ensemble des fonctions ν-régressives et ld-continues par $\mathcal{R}_\nu$ et on note par $\mathcal{R}_\nu^+ = \{p \in \mathcal{R}_\nu : 1 - \nu(t)p(t) > 0\}$ pour tout $t \in \mathbb{T}$ l'ensemble des fonctions ν-régressives positives.

Remarque 2.2 *Si $p \in C_{ld}$ et $p(t) \leq 0$, pour tout $t \in \mathbb{T}$, alors $p \in \mathcal{R}_\nu^+$.*

Définition 2.6 *On définit*

- *L'addition $\oplus_\nu$ dans $\mathcal{R}_\nu(\mathbb{T})$ par*

$$(p \oplus_\nu q)(t) = p(t) + q(t) - p(t)q(t)\nu(t), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}_k, \textit{ et } p, q \in \mathcal{R}_\nu.$$

- *La soustraction $\ominus_\nu$ dans $\mathcal{R}_\nu(\mathbb{T})$ par*

$$(p \ominus_\nu q)(t) = p(\oplus_\nu(\ominus_\nu q))(t) = \frac{p(t) - q(t)}{1 - \nu(t)q(t)}, \textit{ pour tout } t \in \mathbb{T}_k, \textit{ et } p, q \in \mathcal{R}_\nu.$$

Remarque 2.3 *$(\mathcal{R}_\nu(\mathbb{T}), \oplus_\nu)$ est un groupe commutatif.*

Définition 2.7 *Si $p \in \mathcal{R}_\nu$, alors on définit la fonction nabla exponentielle $\hat{e}_p$ par :*

$$\hat{e}_p(t, s) = \begin{cases} \exp\Big(-\displaystyle\int_s^t \frac{\log(1 - \nu(\tau)p(\tau))}{\nu(\tau)} \nabla\tau \Big), & \textit{si } \nu > 0, \\ \exp\Big(\displaystyle\int_s^t p(\tau)\nabla\tau \Big), & \textit{si } \nu = 0, \end{cases}$$

pour $t, s \in \mathbb{T}$. Où log *désigne le logarithme nipérien.*

Théorème 2.10 *Si $p \in \mathcal{R}_\nu$, alors la fonction nabla exponentielle $\hat{e}_p(., t_0) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est une solution du problème à valeur initiale :*

$$x^\nabla(t) = px(t), \qquad x(t_0) = 1.$$

Lemme 2.1 *Si $p \in \mathcal{R}_\nu$, alors on a*

$$\hat{e}_p(t,r)\hat{e}_p(r,s) = \hat{e}_p(t,s) \text{ pour tout } s,t,r \in \mathbb{T}.$$

Preuve.

On suppose que $p \in \mathcal{R}_\nu$, et soit $s,t,r \in \mathbb{T}$. Alors

$$\begin{aligned}
&\hat{e}_p(t,r)\hat{e}_p(r,s) \\
&= \exp\Big(-\int_t^r \frac{\log(1-\nu(\tau)p(\tau))}{\nu(\tau)}\nabla\tau\Big)\exp\Big(-\int_r^s \frac{\log(1-\nu(\tau)p(\tau))}{\nu(\tau)}\nabla\tau\Big) \\
&= \exp\Big(-\int_t^r \frac{\log(1-\nu(\tau)p(\tau))}{\nu(\tau)}\nabla\tau - \int_r^s \frac{\log(1-\nu(\tau)p(\tau))}{\nu(\tau)}\nabla\tau\Big) \\
&= \exp\Big(-\int_t^s \frac{\log(1-\nu(\tau)p(\tau))}{\nu(\tau)}\nabla\tau\Big) \\
&= \hat{e}_p(t,s).
\end{aligned}$$

Théorème 2.11 *Soit $p,q \in \mathcal{R}_\nu$ et soit $s,t,r \in \mathbb{T}$. Alors*

1. $\hat{e}_0(t,s) \equiv 1$ *et* $\hat{e}_p(t,t) \equiv 1$,
2. $\hat{e}_p(\rho(t),s) = (1-\nu(t)p(t))\hat{e}_p(t,s)$,
3. $\dfrac{1}{\hat{e}_p(t,s)} = \hat{e}_{\ominus_\nu p}(t,s)$,
4. $\hat{e}_p(t,s) = \dfrac{1}{\hat{e}_p(s,t)} = \hat{e}_{\ominus_\nu p}(s,t)$,
5. $\hat{e}_p(t,s)\hat{e}_p(s,r) = \hat{e}_p(t,r)$,
6. $\hat{e}_p(t,s)\hat{e}_q(t,s) = \hat{e}_{p\oplus_\nu q}(t,s)$,
7. $\dfrac{\hat{e}_p(t,s)}{\hat{e}_q(t,s)} = \hat{e}_{p\ominus_\nu q}(t,s)$,
8. $\left(\dfrac{1}{\hat{e}_p(t,s)}\right)^\nabla = \dfrac{-p(t)}{\hat{e}_p^\rho(t,s)}$,
9. $\hat{e}_p(t,\rho(s))\hat{e}_p(s,r) = \dfrac{\hat{e}_p(t,r)}{1-\nu(s)p(s)}$.

Théorème 2.12 *(Signe de la nabla fonction exponentielle)Soit $p \in \mathcal{R}_\nu$ et soit $t_0 \in \mathbb{T}$,*

1. *Si $p \in \mathcal{R}_\nu^+$, alors $\hat{e}_p(t,t_0) > 0$, $\forall t \in \mathbb{T}$.*

2. *Si* $1 - \nu p(t) < 0$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}_\kappa$, *alors* $\hat{e}_p(t, t_0)\hat{e}_p(\rho(t), t_0) < 0$.
3. *Si* $1 - \nu p(t) < 0$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}_\kappa$, *alors* $\hat{e}_p(t, t_0)$ *change de signe en touts point* $t \in \mathbb{T}$.

Exemple 2.2 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps et* $p \in \mathcal{R}$, *calculons* $\hat{e}_p(t, s)$.

1. *Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *On a* $\nu(\tau) = 0$ *et*

$$\hat{e}_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t p(\tau)d\tau\right).$$

-*Si* p *est une constante, alors*
$\hat{e}_p(t, s) = e^{p(t-s)}$ *et* $\hat{e}_0(t, s) = 1$, $\hat{e}_p(t, 0) = e^{pt}$ *et* $\hat{e}_1(t, 0) = e^t$.

2. *Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *on a* $\nu(\tau) = 1$ *et*

$$\begin{aligned}
\hat{e}_p(t,s) &= \exp\left(-\int_s^t \log(1-p(\tau))\nabla\tau\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{\tau=s}^{t-1} \log(1-p(\tau))\right) \\
&= \exp\left(log \prod_{\tau=s}^{t-1} \frac{1}{(1-p(\tau))}\right) \\
&= \prod_{\tau=s}^{t-1} \frac{1}{(1-p(\tau))}.
\end{aligned}$$

-*Si* p *est une constante, alors*
$\hat{e}_p(t, s) = (\frac{1}{1-p})^{t-s}$, $\hat{e}_p(t, 0) = (\frac{1}{1-p})^t$ *et* $e_{-1}(t, 0) = \frac{1}{2^t}$.

Chapitre 3

Équations dynamiques linéaires du premier ordre et problèmes à valeurs initiales associés.

Dans ce chapitre, on étudie des équations dynamiques linéaire (homogène et non homogènes) du premier ordre sur les échelles de temps. On donne quelque résultats d'existence et d'unicité de solutions des problèmes à valeurs initiales associes.

Définition 3.1 *Soit la fonction* $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *l'équation :*

$$y^{\nabla}(t) = f(t, y(t), y^{\rho}(t)), \qquad t \in \mathbb{T}_k, \tag{3.1}$$

est dite équation dynamique du premier ordre sur $\mathbb{T}$. *Dans le cas ou l'échelle de temps* $\mathbb{T}$ *est* $\mathbb{N}$ *ou* $h\mathbb{Z}$, $h \in \mathbb{Z}$, *l'équation* (2.1) *est dite équation aux différences.*
Si

$$f(t, y(t), y^{\rho}(t)) = f_1(t)y^{\rho}(t) + f_2(t)$$

ou

$$f(t, y(t), y^{\rho}(t)) = f_1(t)y(t) + f_2(t)$$

pour les fonction f_1 *et* f_2, *alors l'équation (3.1)est dite une équation dynamique linéaire.*
Si $f_2(t) = 0$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}_k$, *l'équation (3.1) est dite homogène. Elle dite*

non homogène dans le cas contraire.
la fonction $y : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite solution de (3.1) si elle vérifie*

$$y^{\nabla}(t) = f(t, y(t), y^{\rho}(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}_k.$$

Exemple 3.1 1− *L'équation* $x^{\nabla}(t) = 5x(t) + 3^{t+2}$, $t \in \mathbb{T}$, *est une équation dynamique lineaire du premier ordre sur* $\mathbb{T}$.

2− *L'équation* $x'(t) = -7tx(t) + 8^t \sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *est une équation différentielle linéaire du premier ordre sur* $\mathbb{R}$.

3− *L'équation* $\nabla x(t) = (t-1)\, x(t-1) + t^3 e^{t-1}$, $t \in \mathbb{Z}$, *est une équation différence lineaire du premier ordre sur* $\mathbb{Z}$.

Définition 3.2 *(équation régressive) Si la fonction* p *est* ν*-régressive* ($p \in \mathcal{R}_{\nu}$)*, alors l'équation dynamique linéaire du premier ordre*

$$y^{\nabla}(t) = p(t)y$$

est dite ν*-régressive.*

3.1 Équations dynamiques linéaires homogènes

Théorème 3.1 *On suppose que* $p \in \mathcal{R}_{\nu}$*, pour* $t_0 \in \mathbb{T}$ *et* $y_0 \in \mathcal{R}$ *fixé. L'unique solution du problème à valeur initiale :*

$$\begin{cases} y^{\nabla}(t) & = p(t)y(t) \qquad , t \in \mathbb{T} \\ y(t_0) & = y_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

est donné par $y(t) = y_0 \hat{e}_p(t, t_0)$*, pour tout* $t \in \mathbb{T}$.

Preuve.

On démontre en premier lieu l'unicité. On supposant qu'il existe y solution de (3.2). D'après la définition de la fonction ∇- exponentielle, on a

$$\begin{aligned}
\left[\frac{y(t)}{\hat{e}_p(t,t_0)y_0}\right]^{\nabla} &= \frac{y^{\nabla}(t)\hat{e}_p(t,t_0) - y(t)\hat{e}_p^{\nabla}(t,t_0)}{\hat{e}_p(t,t_0)\hat{e}_p(\rho(t),t_0)y_0}\\
&= \frac{y^{\nabla}(t)\hat{e}_p(t,t_0) - p(t)y(t)\hat{e}_p(t,t_0)}{\hat{e}_p(t,t_0)\hat{e}_p(\rho(t),t_0)y_0}\\
&= \frac{y^{\nabla}(t) - p(t)y(t)}{\hat{e}_p(\rho(t),t_0)y_0}\\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qui implique que la fonction $\dfrac{y}{y_0\hat{e}_p(.,t_0)}$ est constante, donc

$$\frac{y(t)}{y_0\hat{e}_p(t,t_0)} = \frac{y(t_0)}{y_0\hat{e}_p(t_0,t_0)} = 1,$$

alors toutes les solutions $y(t) = y_0 e_p(t,t_0)$.
Pour l'existence, par le Théorème (2.3) on a

$$\begin{aligned}
\left[y_0\hat{e}_p(t,t_0)\right]^{\nabla} &= y_0\left[\hat{e}_p(t,t_0)\right]^{\nabla}\\
&= y_0 p(t)\hat{e}_p(t,t_0)\\
&= y(t)p(t),
\end{aligned}$$

donc $y(t) = y_0\hat{e}_p(t,t_0)$ est la solution unique du problème à valeur initiale (3.2).

Théorème 3.2 *On suppose que $p \in \mathcal{R}_\nu$, pour $t_0 \in \mathbb{T}$ et $y_0 \in \mathcal{R}$ fixé. L'unique solution du problème à valeur initiale :*

$$\begin{cases} y^{\nabla}(t) &= -p(t)y(\rho(t)) \qquad ,t \in \mathbb{T}\\ y(t_0) &= y_0, \end{cases} \tag{3.3}$$

est donné par $y(t) = y_0\hat{e}_{\ominus_\nu p}(t,t_0)$, pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Preuve.

On a $\ominus_\nu p \in \mathcal{R}_\nu$ car $p \in \mathcal{R}_\nu$. Si on remplace $y(\rho(t))$ par $y(t) - \nu(t)y^{\nabla}(t)$ dans (3.3), on trouve

$$y^{\nabla}(t) = \frac{-p(t)}{1-\nu(t)p(t)}y(t) = \ominus_\nu p(t)y(t).$$

Ainsi, par le Théorème (3.1) la solution existe et unique. Donc $y(t) = y_0\hat{e}_{\ominus_\nu p}(t,t_0)$ est la solution unique du problème à valeur initiale (3.3).

3.2 Equations dynamiques linéaires non homogènes

Définition 3.3 *l'équation dynamique linéaire non homogène du premier ordre*

$$y^{\nabla}(t) = p(t)y(t) + f(t)$$

est régressive si $p \in \mathcal{R}_{\nu}$ *et* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est ld-continue.*

Théorème 3.3 *On suppose que* $p \in \mathcal{R}_{\nu}$ *et* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est ld-continue, soit* $t_0 \in \mathbb{T}$ *et* $y_0 \in \mathbb{R}$ *fixés. La solutions unique du problème*

$$\begin{cases} y^{\nabla}(t) = p(t)y(t) + f(t), \ \textit{pour tout } t \in \mathbb{T} \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.4}$$

est donné par

$$y(t) = \hat{e}_p(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \hat{e}_p(t, \rho(s))f(s)\nabla s.$$

Preuve.

Soit y est solution du problème (3.4), on a

$$\begin{aligned} \left[\frac{y(t)}{\hat{e}_p(t, t_0)}\right]^{\nabla} &= \frac{y^{\nabla}(t)\hat{e}_p(t, t_0) - y(t)\hat{e}_p^{\nabla}(t, t_0)}{\hat{e}_p(t, t_0)\hat{e}_p(\rho(t), t_0)} \\ &= \frac{y^{\nabla}(t)\hat{e}_p(t, t_0) - p(t)y(t)\hat{e}_p(t, t_0)}{\hat{e}_p(t, t_0)\hat{e}_p(\rho(t), t_0)} \\ &= \frac{y^{\nabla}(t) - p(t)y(t)}{\hat{e}_p(\rho(t), t_0)} \\ &= \frac{f(t)}{\hat{e}_p(\rho(t), t_0)} \\ &= f(t)\hat{e}_p(t_0, \rho(t)). \end{aligned}$$

On intégré les deux cotés de cette égalité de t à t_0 et on obtient

$$\frac{y(t)}{\hat{e}_p(t, t_0)} - \frac{y(t_0)}{\hat{e}_p(t_0, t_0)} = \int_{t_0}^{t} f(s)\hat{e}_p(t_0, \rho(s))\nabla s.$$

Donc

$$\begin{aligned} y(t) &= \hat{e}_p(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \hat{e}_p(t,t_0)\hat{e}_p(t_0,\rho(s))f(s)\nabla s \\ &= \hat{e}_p(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \hat{e}_p(t,\rho(s))f(s)\nabla s. \end{aligned}$$

Théorème 3.4 *On suppose que* $p \in R$ *et* $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est ld-continue soit* $t_0 \in \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$ *fixé la solution unique du problème*

$$\begin{cases} y^{\nabla}(t) &= -p(t)y(\rho(t)) + f(t), \qquad t \in \mathbb{T} \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases} \tag{3.5}$$

est donné par

$$y(t) = \hat{e}_{\ominus_\nu p}(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \hat{e}_{\ominus_\nu p}(t,s)f(s)\nabla s.$$

Preuve.

Soit y est solution du problème (3.5). On a

$$\begin{aligned} \left[y\hat{e}_p(.,t_0)\right]^{\nabla}(t) &= y^{\nabla}(t)\hat{e}_p(t,t_0) + \hat{e}_p^{\nabla}(t,t_0)y(\rho(t)) \\ &= y^{\nabla}(t)\hat{e}_p(t,t_0) + p(t)\hat{e}_p(t,t_0)y(\rho(t)) \\ &= \hat{e}_p(t,t_0)\left[y^{\nabla}(t) + p(t)y(\rho(t))\right] \\ &= \hat{e}_p(t,t_0)f(t). \end{aligned}$$

On intégré les deux cotes de cette égalité de t_0 à t et on obtient

$$\hat{e}_p(t,t_0)y(t) - \hat{e}_p(t_0,t_0)y(t_0) = \int_{t_0}^{t} \hat{e}_p(s,t_0)f(s)\nabla s.$$

Donc

$$y(t) = \hat{e}_{\ominus_\nu p}(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} \hat{e}_{\ominus_\nu p}(t,s)f(s)\nabla s.$$

3.3 Exemples

Exemple 3.2 *On considère le problème*

$$\begin{cases} x^{\nabla}(t) = -x(t) + 2^t, & \textit{pour tout } t \in \mathbb{Z}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Alors, ce problème est sous la forme (3.4)*, avec* $p(t) \equiv -1,\ f(t) = 2^t,\ t_0 = 0$ *et* $x_0 = 0$.
Comme $p \in \mathcal{R}_\nu(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$*, alors la fonction* $\hat{e}_{-1}(.,.)$ *existe et donnée par*

$$\hat{e}_{-1}(t,s) = (\frac{1}{2})^{t-s} = 2^{s-t}, \qquad \textit{pour tout } t, s \in \mathbb{Z}.$$

Par le Théorème 3.3, la solution de (3.6) *est*

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{e}_{-1}(t,0).0 + \int_0^t \hat{e}_{-1}(t,\rho(s))f(s)\nabla s \\ &= \int_0^t \hat{e}_{-1}(t,s-1).2^s\nabla s \\ &= \int_0^t 2^{s-t-1}.2^s\nabla s \\ &= \int_0^t 4^s 2^{-t-1}\nabla s = 2^{-t-1}\sum_{s=0}^{s=t-1} 4^s = \frac{2^{-t-1}}{3}(4^t-1). \end{aligned}$$

Donc $x(t) = \frac{2^{-t-1}}{3}(4^t-1)$.

Exemple 3.3 *On considère le problème :*

$$\begin{cases} x^{\nabla}(t) = -3x(\rho(t)) + 5t, & \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Alors, ce problème est sous la forme (3.5)*, avec* $p(t) \equiv 3,\ f(t) = 5t,\ t_0 = 0$ *et* $x_0 = 0$.
Comme $p \in \mathcal{R}_\nu(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, alors la fonction* $\hat{e}_{\ominus_\nu 3}(.,.)$ *existe et donnée par*

$$\hat{e}_{\ominus_\nu 3}(t,s) = \hat{e}_{-3}(t,s) = e^{-3(t-s)}, \qquad \textit{pour tout } t, s \in \mathbb{R}.$$

Par le Théorème 3.4, la solution de (3.7) *est*

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{e}_{\ominus_\nu 3}(t,0).0 + \int_0^t 5s\hat{e}_{\ominus_\nu 3}(t,s)\nabla s \\ &= 5\int_0^t e^{-3(t-s)} s ds \\ &= 5e^{-3t}\int_0^t se^{3s} ds. \end{aligned}$$

Donc $x(t) = \frac{5}{9}(e^{-3t} + 3t - 1)$.

Chapitre 4

Équation dynamique non-linéaire du premier ordre

Dans ce chapitre, nous établirons un théorème d'existence pour l'équation dynamique non-linéaire du premier ordre avec condition periodique :

$$\begin{cases} y^{\nabla}(t) = f(t, y(t)), & \text{pour tout } t \in \mathbb{T}_k, \\ y(a) = y(b) \end{cases} \tag{4.1}$$

Ici, $\mathbb{T}$ est une échelle de temps bornée, où on notera $a = \min \mathbb{T}$, $b = \max \mathbb{T}, \mathbb{T}_0 = \mathbb{T} \backslash \{a\}$ et $f : \mathbb{T}_k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Pour obtenir un théorème d'existence pour problème (4.1), nous introduirons la notion de tube-solution associé à (4.1). Cette nouvelle notion est équivalente à la notion de sous- et sur-solution introduite par A.H. Zaidi [10].

Les résultats de ce chapitre se trouvent dans [4].

4.1 Résultat d'existence.

Une solution du problème sera une fonction $y \in C^1_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ satisfaisant (4.1). Introduisons la notion de tube-solution pour le problème (4.1). C'est à partir de cette notion que nous obtiendrons notre résultat d'existence.

Définition 4.1 *Soit $(v, M) \in C^1_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \times C^1_{ld}(\mathbb{T}, [0, \infty))$. On dira que (v, M) est un tube-solution de (4.1) si*

1. *$\Big(y - v(t)\Big)\Big(f(t,y) - v^{\nabla}(t)\Big) \leq M(t)M^{\nabla}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $|y - v(t)| = M(t)$,*
2. *$v^{\nabla}(t) = f(t, v(t))$ pour tout $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ tel que $M(t) = 0$,*
3. *$|v(b) - v(a)| \leq M(a) - M(b)$.*

Si $\mathbb{T}$ est un intervalle réel $[a, b]$, notre définition de tube solution est équivalente à la notion de tube solution introduite dans [9] pour d'équations différentielles ordinaires du premier ordre.

On notera

$$T(v, M) = \{y \in C^1_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) : |y(t) - v(t)| \leq M(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{T}\}.$$

Nous avons besoin des lemmes auxiliaires suivants :

Lemme 4.1 *Si $g \in C^1_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors le problème périodique*

$$\begin{cases} y^{\nabla}(t) + y(t) = g(t), & \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}_{\kappa}, \\ y(a) = y(b), \end{cases} \tag{4.2}$$

admet une solution $y \in C^1_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ donnée par :

$$y(t) = \hat{e}_{-1}(t, b)\left(\frac{\hat{e}_{-1}(a, b)}{\hat{e}_{-1}(a, b) - 1}\int_{(a,b]\cap\mathbb{T}} \frac{g(s)}{\hat{e}_{-1}(\rho(s), b)}\nabla s - \int_{(t,b]\cap\mathbb{T}} \frac{g(s)}{\hat{e}_{-1}(\rho(s), b)}\nabla s\right). \tag{4.3}$$

Preuve.

Soit y est solution du problème (4.2), on a

$$\left[\frac{y(t)}{\hat{e}_{-1}(t, b)}\right]^{\nabla} = \frac{y^{\nabla}(t)\hat{e}_{-1}(t, b) + \hat{e}_{-1}(t, b)y(t)}{\hat{e}_{-1}(t, b)\hat{e}_{-1}(\rho(t), b)} = \frac{g(t)}{\hat{e}_{-1}(\rho(t), b)},$$

On intégré les deux cotés de cette égalité sur $(t, b] \cap \mathbb{T}$ et on obtient

$$y(t) = \hat{e}_{-1}(t, b)\left(y(b) - \int_{(t,b]\cap\mathbb{T}} \frac{g(s)}{\hat{e}_{-1}(\rho(s), b)}\nabla s\right). \tag{4.4}$$

Par (4.2) et (4.4), on obtient

$$y(a) = y(b) = \frac{\hat{e}_{-1}(a,b)}{\hat{e}_{-1}(a,b) - 1} \int_{(a,b]\cap\mathbb{T}} \frac{g(s)}{\hat{e}_{-1}(\rho(s),b)} \nabla s. \tag{4.5}$$

Donc, en substituant (4.5) en (4.4), d'où, on trouver la formule (4.3).

Lemme 4.2 *Soit une fonction $r \in C_{ld}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ telle que $r^{\nabla}(t) < 0$ pour tout $t \in \{t \in \mathbb{T}_\kappa : r(t) > 0\}$. Si $r(a) \leq r(b)$, alors $r(t) \leq 0$, pour tout $t \in \mathbb{T}$.*

Preuve.
Supposons qu'il éxiste un $t \in \mathbb{T}$ tel que $r(t) > 0$. Comme r est continue sur $\mathbb{T}$, alors il existe un $t_0 \in \mathbb{T}$, tel que

$$r(t_0) = \max_{t\in\mathbb{T}} r(t) > 0.$$

Si $t_0 > \rho(t_0)$, on a $\nu(t_0) = t_0 - \rho(t_0) > 0$. Alors $r^{\nabla}(t_0)$ existe est donnée par

$$r^{\nabla}(t_0) = \frac{r(t_0) - r^{\rho}(t_0)}{\nu(t_0)} \geq 0.$$

et comme $r(t_0) > 0$, alors par hypothèse, $r^{\nabla}(t_0) < 0$, d'où la contradiction.

Si $t_0 > a$ et $t_0 = \rho(t_0)$, alors il existe un intervalle $[t_1, t_0]$ tel que

$$r(t) > 0, \qquad \text{pour tout } t \in [t_1, t_0],$$

Alors,

$$r(t_0) - r(t_1) = \int_{t_1}^{t_0} r^{\nabla}(s)\nabla s < 0.$$

Ce qui contredit la maximalité de $r(t_0)$.
Finalement, si $t_0 = b$, alors par hypothèse, il faudrait que $r(a) = r(b)$.
En prenant $t_0 = a$, par ce qui précède, on trouvrait que $r(a) \leq 0$, ce que nous mène directement à la conclusion.

Lemme 4.3 *Soit $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction ∇-différentiable en $t \in \mathbb{T}$. On sait que la fonction $|.| : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to [0,\infty)$ est différentiable. Si $t = \rho(t)$, alors*

$$|x(t)|^{\nabla} = \frac{x(t).x^{\nabla}(t)}{|x(t)|}.$$

Afin de démontrer notre théorème d'existence, nous aurons recours au problème modifié suivant.

$$\begin{cases} y^{\nabla}(t) + y(t) = f(t, \overline{y}(t)) + \overline{y}(t), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}_{\kappa}, \\ y(a) = y(b), \end{cases} \tag{4.6}$$

où

$$\overline{y}(t) = \begin{cases} \dfrac{M(t)}{|y - v(t)|}(y - v(t)) + v(t), & \text{si } |y - v(t)| > M(t), \\ y(t), & \text{si } |y - v(t)| \leq M(t). \end{cases} \tag{4.7}$$

Définissons l'opérateur $T : C(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n) \to C(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ par :

$$\begin{aligned} T_2(y)(t) =&\hat{e}_{-1}(t,b)\left(\frac{\hat{e}_{-1}(a,b)}{\hat{e}_{-1}(a,b)-1} \int_{(a,b]\cap\mathbb{T}} \frac{(f(s,\overline{y}(s)) + \overline{y}(s))}{\hat{e}_{-1}(\rho(s),b)} \nabla s \right. \\ & \left. - \int_{(t,b]\cap\mathbb{T}} \frac{(f(s,\overline{y}(s)) + \overline{y}(s))}{\hat{e}_{-1}(\rho(s),b)} \nabla s \right). \end{aligned}$$

Proposition 4.1 *Si* $(v, M) \in C^1_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \times C^1_{ld}(\mathbb{T}, [0, \infty))$ *est un tube-solution de (4.1), alors l'opérateur* $T : C(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \to C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *est compact.*

Preuve :

Montrons tout d'abord la continuité de l'opératuer T .
Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ convergeant vers y dans $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} &|T(y_n(t)) - T(y(t))| \\ &\leq |(C+1)||\hat{e}_{-1}(t,b)| \int_{(a,b]\cap\mathbb{T}} \Big| \left(f(s,\overline{y}_n(s)) - f(s,\overline{y}(s))\right) + \left(\overline{y}_n(s) - \overline{y}(s)\right) \Big| \nabla s, \\ &\leq \frac{K(C+1)}{m} \int_{(a,b]\cap\mathbb{T}} \Big| |\left(f(s,\overline{y}_n(s)) - f(s,\overline{y}(s))\right)| + |\left(\overline{y}_n(s) - \overline{y}(s)\right)| \Big| \nabla s, \end{aligned}$$

où $K := \max_{t\in\mathbb{T}} |\hat{e}_{-1}(t,b)|$, $C = \left| \dfrac{\hat{e}_{-1}(a,b)}{\hat{e}_{-1}(a,b)-1} \right|$ et $m := \min_{t\in\mathbb{T}} |\hat{e}_{-1}(t,b)|$.

Puisqu'il existe une constante $R > 0$ tel que $|y|_{C(\mathbb{T},\mathbb{R})} < R$, il existe un indice N tell que $|y_n|_{C(\mathbb{T},\mathbb{R})} < R$ pour tout $n > N$. Ainsi, f uniformément

continue sur $\mathbb{T}_k \times B_R(0)$. Alors pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un $\delta > 0$ tel que $x, y \in \mathbb{R}$ où
$|x-y| < \delta < \dfrac{\varepsilon M}{2k(1+C)(b-a)}$, $|f(s,y) - f(s,x)| < \dfrac{\varepsilon M}{2k(1+C)(b-a)}$ pour tout $s \in \mathbb{T}_k$. Par hypothèse, il est possible de trouver un indice $> N$ tel que $|y_n - y|_{C(\mathbb{T},\mathbb{R})} < \delta$ pour $n >$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} |T(y_n)(t) - T(y)(t)| &< \frac{2K(1+C)}{m} \int_{[a,b)\cap\mathbb{T}} \frac{\varepsilon m}{2K(1+C)(b-a)} \Delta s \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui nous convainc de la continuité de T.
Montrons maintenant que l'ensemble $T(C(\mathbb{T},\mathbb{R}))$ est relativement compact. Considérons une suite $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $T(C(\mathbb{T},\mathbb{R}))$ pour tout $n \in N$ il existe une suite $(y_n)_{n\in N} \in C(\mathbb{T},\mathbb{R})$ tell que $z_n = T(y_n(t))$ pour tout $n \in N$. Nous avons

$$|T(y_n(t))| \leq \frac{k(1+C)}{m} \int_{[a,b)\bigcap\mathbb{T}} (|f(s, y_n(s))| + |y_n(s)|) \nabla s.$$

Puisque

$$|\overline{y}_n(s)| \leq R, \qquad \text{pour tout } s \in \mathbb{T} \text{ et tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\mathbb{T}_\kappa \times \overline{B}(0,R)$ est un ensemble sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ et f étant continue sur $\mathbb{T}_\kappa \times \overline{B}(0,R)$, nous pouvons déduire l'existance d'une constante $A > 0$, telle que

$$|f(s, \overline{y}_n(s)| \leq A, \qquad \text{pour tout } s \in \mathbb{T}_\kappa \quad \text{et} \quad \text{tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc,

$$|z_n(t)| = |T(y_n)(t)| \leq \frac{1}{m} K(1+C)(A+R)(b-a) < +\infty.$$

Ainsi, la suite $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée sur $\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R})$.
D'autre part, pour tout $t_1 < t_2 \in \mathbb{T}$, on a

$$\begin{aligned} &|T(y_n)(t_2) - T(y_n)(t_1)| \\ &\qquad \leq \left|\hat{e}_{-1}(b,t_2) - \hat{e}_{-1}(b,t_1)\right| \frac{(C+1)}{m} \int_{(a,b]\cap\mathbb{T}} h(s)\nabla s + K \int_{(t_1,t_2]\cap\mathbb{T}} h(s)\nabla s. \end{aligned}$$

Donc, la suite $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue. Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, on obtient que l'ensemble $T(C(\mathbb{T},\mathbb{R}))$ est relativement compacte dans $C(\mathbb{T},\mathbb{R})$. Ainsi, T est compacte.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat d'existence suivant.

Théorème 4.1 *Si* $(v, M) \in C^1_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \times C^1_{ld}(\mathbb{T}, [0, \infty))$ *est un tube-solution de (4.1), alors le problème (4.1) possède une solution* $y \in C^1_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \cap T(v, M)$.

Preuve.
Par la Proposition 4.1, l'opérateur T est compacte. Ainsi, par le Théorème du point fixe de Schauder, T admet un point fixe. Le Lemme 4.1 nous assure que ce point fixe est une solution du problème (4.6). Il suffit donc de démontrer que pour toute solution y de (4.6), $y \in T(v, M)$.

Considérons l'ensemble $A = \{t \in \mathbb{T}_0 : |y(t) - v(t)| > M(t)\}$. Si $t \in A$ est dense à gauche, alors en vertu de Lemme 4.3 sur l'ensemble $\tilde{A} = \{t \in A : t = \rho(t)\}$, on a que

$$(|y(t) - v(t)| - M(t))^{\nabla} = \frac{(y(t) - v(t))(y^{\nabla}(t) - v^{\nabla}(t))}{|y(t) - v(t)|} - M^{\nabla}(t) \qquad (4.8)$$

Si $t \in A$ est disperé à gauche, nous avons que

$$\begin{aligned}
&(|y(t) - v(t)| - M(t))^{\nabla} \\
&\qquad = \frac{|y(t) - v(t)| - |y(\rho(t)) - v(\rho(t))|}{\nu(t)} - M^{\nabla}(t) \\
&\qquad = \frac{|y(t) - v(t)|^2 - |y(\rho(t)) - v(\rho(t))||y(t) - v(t)|}{\nu(t)|y(t) - v(t)|} - M^{\nabla}(t) \\
&\qquad \leq \frac{\Big(y(t) - v(t)\Big)\Big((y(t) - v(t)) - (y(\rho(t)) - v(\rho(t)))\Big)}{\nu(t)|y(t) - v(t)|} - M^{\nabla}(t) \\
&\qquad = \frac{\Big(y(t) - v(t)\Big)\Big(y^{\nabla}(t) - v^{\nabla}(t)\Big)}{|y(t) - v(t)|} - M^{\nabla}(t).
\end{aligned}$$

Nous allons montrer que $(|y(t) - v(t)| - M(t))^{\nabla} < 0$ pour tout sur A.
Si $t \in A$ et $M(t) > 0$, alors par hypothèse du tube-solution, on a

$$
\begin{aligned}
&(|y(t)-v(t)|-M(t))^{\nabla}\\
&\qquad \leq \frac{\Big(y(t)-v(t)\Big)\Big(f(t,\overline{y}(t))+\overline{y}(t)-y(t)-v^{\nabla}(t)\Big)}{|y(t)-v(t)|}-M^{\nabla}(t)\\
&\qquad = \frac{\Big(\overline{y}(t)-v(t)\Big)\Big(f(t,\overline{y}(t))-v^{\nabla}(t)\Big)}{M(t)}\\
&\qquad\quad + \frac{\Big(y(t)-v(t)\Big)\Big(\frac{(M(t)-|y(t)-v(t)|)}{|y(t)-v(t)|}(y(t)-v(t))\Big)}{|y(t)-v(t)|}-M^{\nabla}(t)\\
&\qquad = \frac{M(t)M^{\nabla}(t)}{M(t)}-(|y(t)-v(t)|-M(t))-M^{\nabla}(t)\\
&\qquad < 0.
\end{aligned}
$$

De plus, si $M(t)=0$, alors par hypothèse du tube-solution, on a

$$
\begin{aligned}
&(|y(t)-v(t)|-M(t))^{\nabla}\\
&\qquad \leq \frac{\Big(y(t)-v(t)\Big)\Big(f(t,\overline{y}(t))+\bar{y}(t)-y(t)-v^{\nabla}(t)\Big)}{|y(t)-v(t)|}-M^{\nabla}(t)\\
&\qquad = \frac{(y(t)-v(t))\Big(f(t,v(t))-v^{\nabla}(t)\Big)}{|y(t)-v(t)|}-|y(t)-v(t)|-M^{\nabla}(t)\\
&\qquad < 0.
\end{aligned}
$$

En posant $r(t)=|y(t)-v(t)|-M(t)$, il en résulte que $r^{\nabla}(t)<0$ pour tout $t\in\{t\in\mathbb{T}_0 : r(t)>0\}$. De plus, par hypothèse du tube-solution, remarquons que $r(a)-r(b)\leq|v(a)-v(b)|-(M(a)-M(b))\leq 0$. Ainsi, les hypothèses du Lemme 4.2 sont satisfaites, ce qui démontre le théorème.

4.2 Exemples

Dans cette partie nous donnons quelques exemples d'applications.

Exemple 4.2.1 *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{cases} x^{\nabla}(t) = -|x(t)|^2 x(t) + x(t), \quad t \in \mathbb{T}_k \\ x(a) = x(b). \end{cases} \tag{4.9}$$

Ici, $f(t,x) = -|x|^2 x + x$, *est continue sur* $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$. *Soit* $M(t) = 1$, *pour* $t \in \mathbb{T}$. *Montrons que* $(v, M) = (0,1)$ *est un tube-solution de* (4.9). *En effet, ona* $v^{\nabla}(t) = 0$,

$M^{\nabla}(t) = 0$, *et* $|v(1) - v(0)| = 0 \leq M(0) - M(1) = 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $|x - v(t)| = M(t)$, *alors* $|x| = 1$, *et on a pour* $t \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned} (x - v(t))\Big(f(t,x) - v^{\nabla}(t)\Big) &= (x)\Big(-|x(t)|^2 x(t) + x(t)\Big) \\ &= -|x|^4 + |x|^2 = 0 \\ &\leq M(t)M^{\nabla}(t) = 0. \end{aligned}$$

Du Théorème 4.1, *on déduit que le problème* (4.9) *admet une solution* x *telle que*

$$|x(t)| \leq 1, \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Exemple 4.2.2 On considère le problème périodique suivant :

$$\begin{cases} x^{\nabla}(t) = \dfrac{-x^3(t) + 3 - 2t}{\sqrt[4]{t}} \quad \text{pour tout} \;\; t \in \mathbb{T}_{\kappa} = (1,2], \\ x(1) = x(2). \end{cases} \tag{4.10}$$

Ici, $f(t,x) = \dfrac{-x^3 + 1 - 2t}{\sqrt[4]{t}}$ est continue sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$. On peut vérifier que $(v, M) = (0,1)$ est un tube-solution pour (4.10). En effet, ona $v^{\nabla}(t) = 0$, $M^{\nabla}(t) = 0$, et $|v(1) - v(0)| = 0 \leq M(0) - M(1) = 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - v(t)| = M(t)$, alors $x = 1$ ou $x = -1$, et on a pour $t \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned} (x - v(t))\Big(f(t,x) - v^{\nabla}(t)\Big) &= (x)\Big(\frac{-x^3 + 3 - 2t}{\sqrt[4]{t}}\Big), \\ &= \begin{cases} \dfrac{-2(2-t)}{\sqrt[4]{t}} & \text{si } x = -1, \\ \dfrac{2(1-t)}{\sqrt[4]{t}} & \text{si } x = 1, \end{cases} \\ &\leq 0 = M(t)M^{\nabla}(t) \;\; \text{pour tout } t \in [1,2]. \end{aligned}$$

D'aprés le Théorème 4.1, le problème (4.10) admet une solution x telle que $|x(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [1, 2]$.

Remarque 4.1 *La notion de tube solution de problème (4.1) est équivalente à la notion de sous- et sur-solution α et β introduite dans [10]. Rappelons cette définition.*

Définition 4.2 Soit α et β deux fonctions ∇-différentiables sur $(0, b]_{\mathbb{T}}$. On dit que α est une sous-solution de (4.1) sur $[0, b]_{\mathbb{T}}$ si
(i) $\alpha^{\nabla}(t) \leq f(t, \alpha(t)), \quad$ pour tout $t \in (0, b]_{\mathbb{T}}$;
(ii) $\alpha(0) = \alpha(b)$.
De même, on dit que β est une sur solution de (4.1) sur $[0, b]_{\mathbb{T}}$ si
(i) $\beta^{\nabla}(t) \geq f(t, \beta(t)), \quad$ pour tout $t \in (0, b]_{\mathbb{T}}$;
(ii) $\beta(0) = \beta(b)$.

Remarquons, si α et β sont respectivement des sous- et des sur solutions de (4.1) telles que $\alpha(t) \leq \beta(t)$ pour tout $t \in (0, b]_{\mathbb{T}}$, alors le couple $(v, M) = ((\alpha + \beta)/2, (\beta - \alpha)/2)$ est un tube-solution pour (4.1). De plus, si (v, M) est un tube solution pour(4.1) avec $v(0) = v(b)$, et $M(0) = M(b)$, alors $\alpha = v - M$ et $\beta = v + M$ sont respectivement sous et sur-solution de (4.1).

Exemple 4.2.3 Considérons le problème :

$$\begin{cases} x^{\nabla}(t) = -x^3(t) - t, \quad \text{pour tout } t \in (0, 1]_{\mathbb{T}}; \\ x(0) = x(1). \end{cases} \tag{4.11}$$

On peut vérifier que $(v, M) = (0, 1)$ est un tube-solution de (4.11). Par le Théorème 4.1, le problème (4.11) possède une solution x telle que $|x(t)| \leq 1$ pour tout $t \in (0, 1]_{\mathbb{T}}$. De plus, nous avons $\alpha = v - M$ et $\beta = v + M$ sont respectivement des sous- et des sur-solutions de (4.11) et $-1 \leq x(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, 1]_{\mathbb{T}}$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous présentons des résultats d'existence de solutions pour des équations dynamiques linéaires du premier ordre sur les échelles de temps. Aussi, nous présentons un résultat d'existence de solutions pour d' équation dynamique non linéaire du premier ordre sur l'échelle de temps, ce résultat est obtenu grâce a la notion de tube solution et théorème de point fixe de Schauder.

Bibliographie

[1] D. Anderson, J. Bullock, L. Erbe, A. Peterson and H. Tran, *Nabla dynamic equations on time scales,* Panamer. Math. J. 13 (2003), no. 1, 1-47.

[2] M. Bohner and A. Peterson, *Dynamic equations on time scales.* Birkhäuser Boston. Boston, MA, 2001.

[3] M. Bohner and A. Peterson, *Advances in dynamic equations on time scales.* Birkhäuser Boston., Boston, MA, 2003.

[4] B. Bendouma, A. Benaissa Cherif and A. Hammoudi, *Systems of first-order nabla dynamic equations on time scales*, Malaya Journal of Mathematik. **6** (2018), no. 4, 757-765.

[5] A. Cabada and D.R. Vivero, *Existence of solutions of first-order dynamic equations with nonlinear functional boundary value conditions*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. **63** (2005), no. 5-7, 697-706.

[6] Q. Dai and C.C. Tisdell, *Existence of solutions to first-order dynamic boundary value problems,* Int. J. Difference. Equ. 1 (2006), no. 1, 1-17.

[7] H. Gilbert, *Existence Theorems for First-Order Equations on Time Scales with* $\Delta-$*Carathéodory Functions,* Adv. Diff. Equ, 2010.

[8] S. Hilger, *Analysis on measure chains a unified approach to continuous and discrete calculus,* Results Math.18 (1990), 18-56.

[9] B. Mirandette, *Résultats d'existence pour des systèmes d'équations différentielles du premier ordre avec tube-solution.* M.Sc. thesis, University of Montréal. 1996.

[10] A. H. Zaidi, *Existence of solutions and convergence results for dynamic initial value problems using lower and upper solutions*, Electro. J. Differ. Equ. (2009), No. 161, 1-13.