République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ibn Khaldoun – Tiaret –

Faculté des Mathématiques et d'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

FILIERE : Mathématiques

SPECIALITE :Analyse Fonctionnelle et Applications

Présenté par :

***BRAHMI NOUREDDINE**

***FERHAYA BENAOUDA**

***KEDDAD BACHIR**

***NASRI BRAHIM**

THÈME DU MEMOIRE :

Calcul fractionnaire sur les échelles de temps

Soutenu le 16/07/2019 devant Le Jury Composé de :

M . MOKHTARI Mokhtar	MCA	Président
M . SOFRANI Mohammed	MAA	Examinateur
M . MAAZOUZ Kadda	MCB	Encadreur

Année universitaire : 2018 / 2019

Introduction

La théorie de l'échelle de temps a été développé en ****1988**** *par* ****Stefan Hilger**** *dans sa thése de doctorat dans le but d'unifier et de publier une analyse continue séparée.*
Les applications standard ont récemment attiré l'attention de nombreux chercheurs ****Riemann,Leibniz**** *dans de nombreux domaines, notamment l'économie et la biologie.*
****Par exemple**** *les équations différentielles fractionnaires qui régissent le comportement des substances visqueuses avec des phénoménes de mémoire et de fluage.*
En 1996, ****Kolwankar**** *et* ****Gangal**** *ont proposé un opérateur de dérivée fractionnaire local pour les fonctions trés irréguliéres et indiscernables de* ****Weierstrass****.
Cette thése comprend quatre chapitres.

Remerciements

Avant toute chose, nous tenons á remercier ****Allah**** *le tous puisant, pour nous avoir donné la force et la patience.*

Avant de commencer la présentation de ce travail , Nous devons également exprimer notre gratitudes au Docteur ****K.Maazouz**** *Pour compléter cette recherche et donne la main et nous fournir les informations nécessaires pour compléter cette recherche, nous le remercions beaucoup.*

Dédicace

Nous remercions les membres du jury d'avoir accepte de revoir notre travail
Nous donnons ce travail humble aux chers paraents ,que Dieu nous a confiés et qui nous sommes habitues á notre éducation
*Á tous les membres de nos famille **KEDDAD**, **BRAHMI**, **FERHAYA**,et **NASRI**,.*
á tous les amis et proches sans exception . . . .
Á nos chers professeurs et á tous mes camarades de classe, et á la fin,2018/2019.
j'espére qu'Allah fera de mon travail un avantage qui profitera á tous les étudiants en attente de leur diplôme.

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on présente les résultats principaux sur la différentiabilité et l'intégration sur les échelles de temps. Puis on traite du calcul différentiel pour les fonctions de plusieurs variables (sur les échelles de temps arbitraires), en particulier les fonctions à deux variables.

1.1 Définition d'une échelle de temps

Définition 1.1 *Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous-ensemble non vide fermé de l'ensembele des nombres réels $\mathbb{R}$.*
Par exemple, les ensemble $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ et $[0,1] \cup [2,3]$ sont des échelles de temps, tandis que les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ et $(0,1)$ ne sont pas des échelles de temps.

Définition 1.2 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps. Pour $t \in \mathbb{T}$, on définit :*

-L'opérateur de saut avant $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par $\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$.
-L'opérateur de saut arrière $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par $\rho(t) = sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$.
-La fonction de granulation $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ par $\mu(t) = \sigma(t) - t$.
-La fonction granulation en arrière $\gamma : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ par $\gamma(t) = t - \rho(t)$.

Dans cette dèfinition, on suppose :
$inf\ \phi = sup\ \mathbb{T}$ (i.e $\sigma(t) = t$ si $\mathbb{T}$ admet un maximum t).
$sup\ \phi = inf\ \mathbb{T}$ (i.e $\rho(t) = t$ si $\mathbb{T}$ admet un minimum t).

Exemple 1.1 *considérons l'échelle de temps,*
1.$\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^2 = \{n^2 : n \in \mathbb{N}_0\}$

nous avons :
$\sigma(n^2) = (n+1)^2$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *et*
$\mu(n^2) = \sigma(n^2) - n^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1.$
par conséquent
$\sigma(t) = (\sqrt{t}+1)^2$ *et* $\mu(t) = 1 + 2\sqrt{t}$ *pour* $t \in \mathbb{T}$
$\rho(t) = (\sqrt{t}-1)^2$ *et* $\gamma(t) = 1 - 2\sqrt{t}$ *pour* $t \in \mathbb{T}$
2.*Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{Z} = \{z : z \in \mathbb{Z}\}$ *on a :*

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} \\ &= inf\{t+1, t+2, t+3, ...\} = t+1. \\ \rho(t) &= sup\{s \in \mathbb{Z} : s < t\} \\ &= sup\{t-1, t-2, t-3, ...\} = t-1. \end{aligned}$$

Donc, chaque point de $\mathbb{Z}$ *est isolé et on a :* $\mu(t) = \gamma(t) = 1.$

Définition 1.3 *Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps*
-Si $\mathbb{T}$ *admet un maximum* M *dispersé à gauche, on définit l'ensemble*
$\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$*, si non* $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.
-Si $\mathbb{T}$ *admet un minimum* m *dispersé à droite, on définit l'ensemble*
$\mathbb{T}_k = \mathbb{T} - \{m\}$ *, si non* $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$.
-Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction on définit la fonction*
$f^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *(resp.* $f^\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$*) par* $f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}$
(resp. $f^\rho(t) = f(\rho(t))$*) (i.e* $f^\sigma = fo\sigma$ *et* $f^\rho = fo\rho$*).*
-Soit $a, b \in \mathbb{T}$ *tel que* $a < b$*, On définie l'intervalle* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{T}$ *par :*

$$[a, b] = [a, b]_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Définition 1.4 *Une fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *et dite régulière, si sa limite à droit existe en tout point rd de* $\mathbb{T}$*, et sa limite à gauche existe en tout point ld de* $\mathbb{T}$.

Définition 1.5 *Une fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est dit rd-continue si elle est continue en tout point dense à droit de* $\mathbb{T}$ *et si sa limite à gauche existe et est finie en tout point dense à gauche de* $\mathbb{T}$ *.*
On note :

-L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *qui sont rd-continue sur* $\mathbb{T}$ *par :*

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

-L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *qui sont différentiables et ses dérivées sont rd-continues sur* $\mathbb{T}$ *par* $C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T}) = C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$

Théorème 1.1 *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *on a :*

1. *Si* f *est continue, alors* f *est rd-continue.*
2. *Si* f *est rd-continue, alors* f *est régulière.*
3. *L'opérateur de saut à droit* σ *est rd-continue.*
4. *Si* f *est rd-continue (resp.régulière), alors* f^σ *est rd-continue (resp.régulière)*
5. *Si* f *est rd-continue (resp. régulière) et* g *est continue, alors* gof *est rd-continue (resp.régulière).*

1.2 La dérivée

1.2.1 Delta dérivée

Définition 1.6 *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction et soit* $t \in \mathbb{T}^k$. *On dit que* f *est* Δ-*différentiable en* t *s'il existe un nombre réel* $f^\Delta(t)$ *tel que pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un voisinage* U *de* t *(i.e :* $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ *pour certain* $\delta > 0$ *) tel que :*

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]\right| \leqslant \epsilon|\sigma(t) - s| \qquad \text{pour tout} \quad s \in U.$$

On appelle $f^\Delta(t)$ *la* Δ-*dérivée de* f *en* t.
-*Si* f*est* Δ-*différentiable (différentiable) en tout* $t \in \mathbb{T}^k$, *alors* $f^\Delta : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ *est appelée la Delta dérivée de* f *sur* $\mathbb{T}^k$.

Remarque 1.1 *On dit que la fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est* Δ-*différentiable en* $t \in \mathbb{T}^k$ *s'il existe*

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \longrightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} \qquad s \neq \sigma(t)$$

Remarque 1.2 *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction*

1. *Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *On a* $\sigma(t) = t$ *alors :*

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

2. *Pour* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *On a* $\sigma(t) = t + 1$ *alors :*

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

.
Où Δ *est l'opérateur de différence.*

Théorème 1.2 *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction et soit* $t \in \mathbb{T}^k$

1. *Si* f *est différentiable (* Δ*-différentiable) en* t*, alors* f *est continue en* t.
2. *Si* t *est disperesé à droite et* f *est une fonction continue en* t*, alors* f *est diffèrentiable en* t *et*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

3. *Si* t *est dense à droite, alors* f *est différentiable en* t *si seulement si* $\lim\limits_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ *existe et est finie. Dans ce cas on a :*

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

4. *Si* f *est différentiable en* t*, alors* $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$.

Exemple 1.2 *Soit* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction définie par :*

1. $f(t) = t^2$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}$*, alors* $f^{\Delta}(t)) = t + \sigma(t)$
2. $g(t) = \sqrt{t}$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}$*,avec* $t > 0$ *alors ,* $g^{\Delta}(t)) = \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{\sigma(t)}}$.

1.2.2 Propriétés de delta dérivée

Théorème 1.3 *Soit* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions* Δ*-différentiables en* $t \in \mathbb{T}^k$ *alors :*

1. $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*

$$(f + g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

2. *Pour tout constante* $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $\alpha f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$$

3. $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$$

4. *Si* $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$*, Alors* $\frac{1}{f}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

5. *Si* $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$*, Alors* $\frac{f}{g}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

1.2.3 La dérivée seconde

Définition 1.7 *Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite deux fois dérivable sur $\mathbb{T}^{k^2} = (\mathbb{T}^k)^k$ si la dérivée f^Δ est différentiable sur $\mathbb{T}^{k^2}$, et on note la dérivée second de f par $f^{\Delta\Delta} = (f^\Delta)^\Delta : \mathbb{T}^{k^2} \to \mathbb{R}$, de même, on définit la dérivée d'ordre supérieur $n \in \mathbb{N}$ de f sur $\mathbb{T}^{k^n} = (\mathbb{T}^{k^{n-1}})^k$ par :*

$$f^{\Delta^n} = (f^{\Delta^{n-1}})^\Delta : \mathbb{T}^{k^n} \to \mathbb{R}$$

Remarque 1.3 *-Enfin, on note $\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t)).\rho^2(t) = \rho(\rho(t)).\sigma^n(t)$ et $\rho^n(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont définies en conséquences, on pose :*

$$\sigma^0(t) = \rho^0(t) = t, \;\; f^{\Delta^0} = f \quad et \quad \mathbb{T}^{k^0} = \mathbb{T} \; .$$

Exemple 1.3 *Soit $q > 1$*

$$q^{\mathbf{z}} := \left\{ q^k : k \in \mathbf{Z} \right\} \qquad et \qquad \overline{q^z} := q^{\mathbf{z}} \cup \{0\}$$

. et Nous considérons ici l échelle de temps $\mathrm{T} = \overline{q^z}$. Nous avons :

$$\sigma(t) = \inf \{q^n : n \in [m+1, \infty)\} = q^{m+1} = qq^m = qt$$

si $t = q^m \in \mathbb{T}$ et évidemment $\sigma(0) = 0$. Nous obtenons donc

$$\sigma(t) = qt \quad et \quad \rho(t) = \frac{t}{q} \quad pour \quad t \in \mathbb{T}$$

et par conséquent

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = (q-1)t \quad pour \quad t \in \mathbb{T}$$

Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, alors

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(qt) - f(t)}{(q-1)t} \quad pour\ tout \quad t \in \mathrm{T} \backslash \{0\}$$

et

$$f^\Delta(0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(0) - f(s)}{0 - s} = \lim_{s \to 0} \frac{f(s) - f(0)}{s}$$

donc

$$\begin{aligned} f^{\Delta\Delta} &= \frac{f^{\Delta}(\sigma(t)) - f^{\Delta}(t)}{\mu(t)} \\ &= \frac{f^{\Delta}(qt) - f^{\Delta}(t)}{(q-1)t} \\ &= \frac{\frac{f\left(q^2t\right)-f(qt)}{q(q-1)t} - \frac{f(gt)-f(t)}{(q-1)t}}{(q-1)t} \\ &= \frac{f\left(q^2t\right) - f(qt) - qf(qt) + qf(t)}{q(q-1)^2t^2} \\ &= \frac{f\left(q^2t\right) - (q+1)f(qt) + qf(t)}{q(q-1)^2t^2}. \end{aligned}$$

1.2.4 La dérivée d'une fonction composée

Théorème 1.4 *Soit deux fonction $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que la fonction fog soit définie sur un intervalle contenant un réel t, si g est dérivable en t et si f est dérivable en $g(t)$, alors la fonction fog est dérivable en t et*

$$(fog)'(t) = f'(g(t)).g'(t)$$

.

Remarque 1.4 *la règle $(fog)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(g(t)).g^{\Delta}(t)$, n'est pas vérifie pour toutes les échelles de temps.*

Exemple 1.4 *Soit $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sont définies par $f(t) = t^2$, $g(t) = t^2$ on a :*

$$\sigma(t) = t+1, f^{\Delta}(t) = 2t+1,\ g^{\Delta}(t) = 2t+1 \quad et \quad (fog)(t) = f(g(t)) = t^4$$

D'ou

$$(fog)^{\Delta}(t) = \Delta(fog)(t) = (fog)(t+1) - (fog)(t) = (t+1)^4 - t^4 = 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1$$

D'autre part

$$f^{\Delta}(g(t)).g^{\Delta}(t) = [2t^2+1](2t+1) = 4t^3 + 2t^2 + 2t + 1$$

Donc $\quad (fog)^{\Delta}(t) \neq f^{\Delta}(g(t)).g^{\Delta}(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{Z}$.

Théorème 1.5 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continûment différentiable et* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction Delta différentiable. Alors* fog *est Delta différentiable et on a*

$$(fog)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t))dh \right\} g^{\Delta}(t)$$

Définition 1.8 *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. est dite pré-différentiable avec (une région de différentiation)* D *tel que* $D \subset \mathbb{T}^k$ *et* $\mathbb{T}^k \backslash D$ *est dénombrable et ne contient pas des points dispersé à droit de* $\mathbb{T}$*, et* f *est différentiable en tout* $t \in D$ *.*

1.2.5 Théorème de la valeur moyenne

Théorème 1.6 *Soit* f *est une fonction continue sur* $[a, b]$ *est delta dérivable sur* $[a, b)$ *alors il existe* $\xi, \xi' \in [a, b)$ *telle que*

$$f^{\Delta}(\xi')(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant f^{\Delta}(\xi)(b - a).$$

Corollaire 1.1 *Soit* f *est une fonction continue sur* $[a, b]$ *qui est delta-dérivable à chaque point de* $[a, b)$*. Si* $f^{\Delta}(t) = 0$ *pour tout* $t \in [a, b)$*, alors* f *est une fonction constante sur* $[a, b]$ *.*

Corollaire 1.2 *Soit* f *une fonction continue sur* $[a, b]$ *qui est delta-dérivable à chaque point de* $[a, b)$*. Alors* f *est croissante, décroissante, non décroissante et non croissante sur* $[a, b]$ *si* $f^{\Delta}(t) > 0$ *, et* $f^{\Delta}(t) < 0$ *,* $f^{\Delta}(t) \geqslant 0$*,* $f^{\Delta}(t) \leqslant 0$ *pour tout* $t \in [a, b)$ *respictivement .*

Théorème 1.7 *Soit* $a, b \in \mathbb{T}$*,* $\alpha = min\{a, b\}$ *et* $\beta = max\{a, b\}$ *et soit* f *une fonction continue sur* $[\alpha, \beta]$ *qui est delta-dérivable sur* $[\alpha, \beta)$*. Alors il existe* $\xi, \xi' \in [\alpha, \beta)$ *tel que*

$$f^{\Delta}(\xi')(a - b) \leqslant f(a) - f(b) \leqslant f^{\Delta}(\xi)(a - b).$$

1.2.6 Nabla dérivée

Définition 1.9 *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction et soit* $t \in \mathbb{T}_k$*.On dit que* f *est* ∇*-différentiable en* t *s'il existe un nombre réel* $f^{\nabla}(t)$ *tel que pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe un voisinage* U *de* t *(i.e,*$U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ *pour certain* $\delta > 0$*) tel que :*

$$\left|[f(\rho(t)) - f(s)] - f^{\nabla}(t)[\rho(t) - s]\right| \leqslant \epsilon|\rho(t) - s| \quad \text{pour tout} \quad s \in U$$

On appelle $f^{\nabla}(t)$ *la* ∇*-dérivée de* f *en* t*. Si* f *est nabla-différentiable (différentiable au sens nabla) en* t *pour tout* $t \in \mathbb{T}_k$*, alors* $f^{\nabla} : \mathbb{T}_k \to \mathbb{R}$ *est alors appelée le (nabla) dérivée de* f *sur* $\mathbb{T}_k$*.*

1.3 L'intégration

1.3.1 Existance de la primitive

Théorème 1.8 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction réglée, Alors il existe une fonction F qui sur-différentiable avec une région de différentiation D tel que :*

$$F^{\Delta}(t) = f(t) \qquad \textit{pour tout} \quad t \in D$$

-La fonction F est appelée la fonction primitive de f .

Définition 1.10 *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est une fonction réguliére, on définit l'intégrale indéfinie par :*

$$\int f(t)\Delta(t) = F(t) + c$$

Où c est une constante arbitraire et F est la primitive de f .
-On définit l'intégrale de Cauchy par

$$\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a) \qquad \textit{pour tout } a, b \in \mathbb{T}.$$

-La fonction $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est appelée la primitive de $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$F^{\Delta}(t) = f(t) \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Théorème 1.9 *Toute fonction rd-continue posséde une primitive .*
En particulier, si $t_0 \in \mathbb{T}$, alors la fonction F définit par :

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\Delta\tau \qquad \textit{pour tout} \ \ t \in \mathbb{T}$$

est une primitive de f.

Théorème 1.10 *Si $f \in C_{rd}$ et $t \in \mathbb{T}^k$, alors*

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = \mu(t)f(t).$$

Théorème 1.11 *Si $f^{\Delta} \geqslant 0$ alors f est croissante.*

Théorème 1.12 *Si* $a,\ b,\ c \in \mathbb{T},\ \alpha \in \mathbb{R}$ *et* $f, g \in C_{rd}$, *alors :*

1. $\displaystyle\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t$
2. $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t))\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t$
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$
4. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$
5. $\displaystyle\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$
6. $\displaystyle\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t$
7. *Si* $f(t) = 0$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = 0$
8. *Si* $|f(t)| \leqslant g(t)$ *sur* $[a, b)$ *alors* $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leqslant \int_a^b g(t)\Delta t$
9. *Si* $f(t) \geqslant 0$ *pour tout* $a \leqslant t \leqslant b$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t \geqslant 0.$

Théorème 1.13 *Soit* $\upsilon : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction strictement croissante et* $\tilde{\mathbb{T}} = \upsilon(\mathbb{T})$ *est une échelle de temps. Si* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est une fonction rd-continue et* υ *est différentielle avec une dérivative rd-continue, alors pour* $a, b \in \mathbb{T}$

$$\int_a^b f(t)\upsilon^{\Delta}(t)\Delta t = \int_{\upsilon(a)}^{\upsilon(b)} (fo\upsilon^{-1})(s)\tilde{\Delta}s.$$

1.3.2 L'intégrale impropre

Définition 1.11 *Si* $a \in \mathbb{T}, \sup \mathbb{T} = \infty$, *et* f *est rd-continue sur* $[a, \infty)$, *alors on définit l'intégrale impropre par :*

$$\int_a^{\infty} f(t)\Delta t = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)\Delta t$$

-Si cette limite existe, on dit que l'intégrale impropre est convergente.
-Si cette limite n'existe, on dit que l'intégrale impropre est divergente.

Chapitre 2

Dérivée et l'intégrale fractionnaire

Dans ce chapitre, on présente les résultats principaux sur dérivée et l'intégrale fractionnaire sur le échelle de temps. puis on définit l'integral et la dérivée fractionnaire et leurs propriétés.

2.1 Dérivée fractionnaire

Définition 2.1 *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction ,et soit* $\alpha \in]0,1]$ *en* $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ *Pour* $\alpha \in]0,1] \cap \{1/q : q$ *est un nombre impair*$\}$ *(resp.* $\alpha \in]0,1] \backslash \{1/q : q$ *est un nombre impair* $\}$*). On définie* $f^{(\alpha)}(t)$ *le nombre réel (á condition que il existe) pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* U *un* δ*-voisinage de* t *,* $U \subset \mathbb{T}$ *. (resp. á gauche* δ*-un voisinage de* t *,*$U^- \subset \mathbb{T}$ *) tel que :*

$$\left|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{(\alpha)}(t)[\sigma(t) - s]^{\alpha}\right| \leq \epsilon|\sigma(t) - s|^{\alpha}.$$

-pour tout $s \in \mathcal{U}$ *(resp.*$s \in \mathcal{U}^-$*). On appele* $f^{(\alpha)}(t)$ *la dérivée fractionnaire de* f *d'ordre* α *en* t*.*

Théorème 2.1 *On Suppose que* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *et soit* $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$*.*
les proprietés suivantes ont lieu :
(i) *Soit* $\alpha \in]0,1] \cap \{1/q : q$ *est une nombre impair* $\}$ *.*
-Si t *est dense á droite et* f *admet une dérivée fractionnaire d'ordre* α *en* t*, alors* f *est continue en* t*.*
(ii) *Soit* $\alpha \in]0,1] \backslash \{1/q : q$ *est une nombre impair* $\}$*.*
-Si t *est dense á droite et* f *admet une dérivée fractionnaire d'ordre* α *en* t*, alors* f *est continue á gauche en* t*.*

(iii) Si f est continue en t et t est dispersé á droite, alors f admet une dérivée fractionnaire d'ordre α en t avec

$$f^{(\alpha)}(t) = \frac{f^{\sigma}(t) - f(t)}{(\mu(t))^{\alpha}}$$

(iv).Soit $\alpha \in]0,1] \cap \{1/q : q$ est une nombre impair $\}$.
-Si t est dense á droite, alors f admet une dérivée fractionnaire d'ordre α en t ,si est seulement si, la limite

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{(t-s)^{\alpha}},$$

existe et est finie. Dans ce cas :

$$f^{(\alpha)}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{(t-s)^{\alpha}} \ .$$

(v). Soit $\alpha \in]0,1] \backslash \{1/q : q$ est une nombre impair $\}$.
-Si t est dense á droite, alors f admet une dérivée fractionnaire d'ordre α en t ,si est seulement si, la limite

$$\lim_{s \to t^{-}} \frac{f(t) - f(s)}{(t-s)^{\alpha}}$$

existe et est finie. Dans ce cas on a :

$$f^{(\alpha)}(t) = \lim_{s \to t^{-}} \frac{f(t) - f(s)}{(t-s)^{\alpha}} \ .$$

(vi).Si f admet une dérivée fractionnaire d'ordre α en t, alors :

$$f(\sigma(t)) = f(t) + (\mu(t))^{\alpha} f^{(\alpha)}(t) \ .$$

Preuve 2.1 *(i). Supposons que f admet une dérivée fractionnaire en t.Alors il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de t tel que :*

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{(\alpha)}(t)[\sigma(t) - s]^{\alpha} \right| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|^{\alpha}$$

pour $s \in \mathcal{U}$. De plus pour tout $s \in \mathcal{U} \cap \,]t-\epsilon, t+\epsilon[$

$$\begin{aligned} [f(t) - f(s)| \leq & |[f^{\sigma}(t) - f(s)] - f^{(\alpha)}(t)[\sigma(t) - s]^{\alpha}| \\ & + |[f^{\sigma}(t) - f(t)] - f^{(\alpha)}(t)[\sigma(t) - t]^{\alpha}| \\ & + \left[f^{(\alpha)}(t)[\sigma(t) - s]^{\alpha} - [\sigma(t) - t]^{\alpha} \right| \end{aligned}$$

puisque t est une point dense á droite ;

$$\begin{aligned}|f(t)-f(s)| &\leq |[f^\sigma(t)-f(s)]-f^{(\alpha)}(t)[\sigma(t)-s]^\alpha|+|f^{(\alpha)}(t)[t-s]^\alpha| \\ &\leq \epsilon|t-s|^\alpha+\left|f^{(\alpha)}(t)\right|\,|t-s|^\alpha \\ &\leq \epsilon^\alpha[\epsilon+|f^{(\alpha)}(t)|].\end{aligned}$$

Il suite la fonction f est continue en t.

(ii). La preuve est similaire á de (i), on considère un voisinage á gauche $\mathcal{U}^-$ oú lieu de $\mathcal{U}$.

(iii),On suppose que f continue en t et que t est dense á droite,

Par continuité

$$\lim_{s\to t}\frac{f^\sigma(t)-f(s)}{(\sigma(t)-s)^\alpha}=\frac{f^\sigma(t)-f(t)}{(\sigma(t)-t)^\alpha}=\frac{f^\sigma(t)-f(t)}{(\mu(t))^\alpha}$$

-Par conséquent, étant donné $\epsilon>0$ et $\alpha\in]0,1]\cap\{1/q\ ,q$ est un nombre impair$\}$, il existe un voisinage U de t (ou un voisinage $\mathcal{U}^-$ si $\alpha\in]0,1]\backslash\{1/q\ ,q$ est un nombre impaire$\}$) tel que :

$$\left|\frac{f^\sigma(t)-f(s)}{(\sigma(t)-s)^\alpha}-\frac{f^\sigma(t)-f(t)}{(\mu(t))^\alpha}\right|\leq\epsilon$$

pour tout $s\in\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}^-$). Il s'ensuit que

$$\left|[f^\sigma(t)-f(s)]-\frac{f^\sigma(t)-f(t)}{(\mu(t))^\alpha}(\sigma(t)-s)^\alpha\right|\leq\epsilon|\sigma(t)-s|^\alpha$$

pour tout $s\in\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}^-$). Par conséquent, nous obtenons le résultat :

$$f^{(\alpha)}(t)=\frac{f^\sigma(t)-f(t)}{(\mu(t))^\alpha}\ .$$

(iv). Supposons que f admet une dérivée fractionnaire d'ordre α en t , et t est dense á droite. Soit $\epsilon>0$ donner.puisque f admet une dérivée fractionnaire d'ordre α en t , il existe un voisinage U de t tel que :

$$|[f^\sigma(t)-f(s)]-f^{(\alpha)}(t)(\sigma(t)-s)^\alpha|\leq\epsilon|\sigma(t)-s|^\alpha$$

pour tout $S\in\mathcal{U}$ puisque $\sigma(t)=t$

$$\left|[f(t)-f(s)]-f^{(\alpha)}(t)(t-s)^\alpha\right|\leq\epsilon|t-s|^\alpha$$

pour tout $S\in\mathcal{U}$ Il s'ensuit que

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{(t-s)^\alpha}-f^{(\alpha)}(t)\right|\leq\epsilon$$

pour tout $s \in \mathcal{U}, s \neq t$ *, Par conséquent, nous obtenons le résultat :*

$$f^{(\alpha)}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{(t-s)^{\alpha}} \ .$$

Maintenant, supposons que la limite

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{(t-s)^{\alpha}} = L$$

existe et t *est dense á droite. Alors il existe* U *tel que*

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{(t-s)^{\alpha}} - L \right| \leq \epsilon$$

pour tout $s \in \mathcal{U}$ *,comme* t *est dense á droite*

$$\left| \frac{f^{\sigma}(t) - f(s)}{(\sigma(t)-s)^{\alpha}} - L \right| \leq \varepsilon \ .$$

De plus ,

$$|[f^{\sigma}(t) - f(s)] - L(\sigma(t)-s)^{\alpha}| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|^{\alpha},$$

On conclu que f *admet une dérivée fractionnaire d'ordre* α *en* t
et $f^{(\alpha)}(t) = L$*.*
(v) *La preuve est similaire á la preuve de* (iv) *, ou lieu de considérant un voisinage* U *de* t *on considére un voisinage de gauche* $\mathcal{U}^{-}$ *de* t*.*
(vi)*. Si* $\sigma(t) = t$ *, alors* $\mu(t) = 0$ *et*

$$f^{\sigma}(t) = f(t) = f(t) + (\mu(t))^{\alpha} f^{(\alpha)}(t).$$

Par contre, Si $\sigma(t) > t$*, alors par* (iii)

$$f^{\sigma}(t) = f(t) + (\mu(t))^{\alpha} \cdot \frac{f^{\sigma}(t) - f(t)}{(\mu(t))^{\alpha}} = f(t) + (\mu(t))^{\alpha} f^{(\alpha)}(t).$$

Remarque 2.1 *La fonction* f *est toujours continue en tout point isoler* t*. (* $\mathbb{T}$ *est munit de la topologie usuelle unduite de* $\mathbb{R}_{+}$ *).*

Proposition 2.1 *Si* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est définie par* $f(t) = c$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}$*,* $\quad$ *,*$c \in \mathbb{R}$ *Alors*

$$f^{(\alpha)}(t) = 0.$$

Preuve 2.2 *Si t est disperser á droite, alors, par le Théoréme* 2.1 *alors* (iii), *on a :*

$$f^{(\alpha)}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{(\mu(t))^{\alpha}} = \frac{c - c}{(\mu(t))^{\alpha}} = 0.$$

Supposons que t soit dense á droite . Alors, par le Théoréme 2.1 (iv) *et* (v), *il suit que*

$$f^{(\alpha)}(t) = \lim_{s \to t} \frac{c - c}{(t - s)^{\alpha}} = 0.$$

Proposition 2.2 *Si* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est définie par* $f(t) = t$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}$,*Alors :*

$$f^{(\alpha)}(t) = \begin{cases} (\mu(t))^{1-\alpha} & si\ \alpha \neq 1 \\ 1 & si\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Preuve 2.3 *D'aprés le Théoréme* 2.1 (vi), *il s'ensuit que*
$\sigma(t) = t + (\mu(t))^{\alpha} f^{(\alpha)}(t)$, *c'est-á -dire* $\mu(t) = (\mu(t))^{\alpha} f^{(\alpha)}(t)$
si $\mu(t) \neq 0$ *alors* $f^{(\alpha)}(t) = (\mu(t))^{1-\alpha}$ *et la relation est prouvée .*
Supposons maintenant que $\mu(t) = 0$, *c'est-á-dire* $\sigma(t) = t$ *Dans ce cas, c est á droite et parle,le Théoréme* 2.1 (iv) *et* (v) *il s'ensuit que*

$$f^{(\alpha)}(t) = \lim_{s \to t} \frac{t - s}{(t - s)^{\alpha}}$$

Donc, $\alpha = 1$, *alors* $f^{(\alpha)}(t) = 1$ *; si* $0 < \alpha < 1$ *alors :* $f^{(\alpha)}(t) = 0$.
Considérons maintenant les deux cas classiques $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *et* $\mathrm{T} = h\mathbb{Z}, h > 0$.

Corollaire 2.1 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *admet une dérivée fractionnaire d'ordre* α *au point* $t \in \mathbb{R}$ *si,est seulement si,la limite*

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{(t - s)^{\alpha}}$$

existe et est finie.Dans ce cas,

$$f^{(\alpha)}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{(t - s)^{\alpha}}. \tag{1}$$

Preuve 2.4 *. On a,* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *et tous des points sont denses á droite. le résultat est déduit le Théoréme* 2.1 *(iv) et (v). On note que si* $\alpha \in]0,1] \backslash \{1/q : q$ *est un nombre impaire*$\}$ *, alors la limite á un sens seulement á gauche.*

Corollaire 2.2 *Soit* $h > 0$. *Si* $f : h\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *alors* f *admet une dérivée fractionnaire d'ordre* α *en* $t \in h\mathbb{Z}$ *avec :*

$$f^{(\alpha)}(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h^{\alpha}}.$$

Preuve 2.5 *Soit,*$\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ *et tous points sont dispersé á droite. le résultat découle du Théoréme* 2.1 *(iii).*
Maintenant on donne un exemple .

Exemple 2.1 *Soit* $\mathbb{T}$ *l'ensemble de Cantor. On ddémontre que* $\mathbb{T}$ *n'est pas de points isolé, et cela*

$$\sigma(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{3^{m+1}} & si\ t \in L \\ t & si\ t \in \mathbb{T} \backslash L \end{cases}$$

oú

$$L = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^{m+1}} : m \in \mathbb{N} \quad et \quad a_k \in \{0,2\} \quad pour\ tous\ 1 \leq k \leq m \right\}$$

Ainsi,

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{1}{3^{m+1}} & si\ t \in L \\ 0 & si\ t \in \mathbb{T} \backslash L \end{cases}$$

Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *continue et* $\alpha \in]0,1]$ *; il découle du Théoréme* 2.1 *que la dérivée fractionnaire d'ordre* α *de la fonction* f *définie sur l'ensemble de Cantor est donnée par*

$$f^{(\alpha)}(t)=\begin{cases}\left[f\left(t+\frac{1}{3^{m+1}}\right)-f(t)\right]3^{(m+1)\alpha} & si\ t\in L\\ \lim_{s\rightsquigarrow t}\frac{f(t)-f(s)}{(t-s)^{\alpha}} & si\ t\in\mathbb{T}\backslash L\end{cases}$$

oú $\lim_{s\sim t}=\lim_{s\to t}$ *si* $\alpha=1/q$ *avec* q *un nombre impair,* $\lim_{s\sim t}=\lim_{s\to t^{-}}$.
Dans le théoréme qui suit on donne la dérivée fraction d'une sommes ,produit et soit utilesée la fonction.

Théorème 2.2 *On suppose que* $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *admet une dérivée fractionnaire d'ordre* α *en* $t\in\mathbb{T}^{k}$*,donc :*
(i) . $f+g:T\to\mathbb{R}$ *admet une dérivée fractionnaire en* t *avec*
$(f+g)^{(\alpha)}(t)=f^{(\alpha)}(t)+g^{(\alpha)}(t)$
(ii). *Pour tout constante* $\lambda,\lambda f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *admet une dérivée fractionnaire en* t *avec*
$(\lambda f)^{(\alpha)}(t)=\lambda f^{(\alpha)}(t)$.
(iii). *La fonction* $fg:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ *admet une dérivée fractionnaire en* t *avec*
$(fg)^{(\alpha)}(t)=f^{(\alpha)}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{(\alpha)}(t)=f(t)g^{(\alpha)}(t)+f^{(\alpha)}(t)g(\sigma(t))$.
(iv). *Si* $f(t)g(\sigma(t))\neq 0$, *Alors* $\dfrac{1}{f}$ *admet une dérivée fractionnaire en* t *avec :*
$\left(\frac{1}{f}\right)^{(\alpha)}(t)=-\frac{f^{(\alpha)}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$.
(v). *Si* $g(t)g(\sigma(t))\neq 0$,*alors* $\dfrac{f}{g}$ *admet une dérivée fractionnaire en* t *avec :*
$\left(\dfrac{f}{g}\right)^{\sigma}(t)=\dfrac{f^{(\alpha)}(t)g(t)-f(t)g^{(\alpha)}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$.

Preuve 2.6 *Considérons que* $\alpha\in]0,1]\cap\{1/q: q\ \text{est un nombre impair}\}$. *Les preuves pour le cas* $\alpha\in]0,1]\backslash\{1/q: q\ \text{est un nombre impair}\}$ *sont*
similaires : il suffite de choisisser les bons un voisinage á gauche (au sens fractionnaire).
On suppose que f *et* g *sont différentiables* $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$.
(i) *Soit* $\epsilon>0$.*Alors, il existe des voisinage* U_1 *et* U_2 *de* t *avec*

$$\left|f(\sigma(t))-f(s)-f^{(\alpha)}(t)[\sigma(t)-s]^{\alpha}\right|\leq\frac{\epsilon}{2}|\sigma(t)-s|^{\alpha}$$

pour tout $s\in\mathcal{U}_1$
et

$$\left|g(\sigma(t))-g(s)-g^{(\alpha)}(t)[\sigma(t)-s]^{\alpha}\right|\leq\frac{\epsilon}{2}|\sigma(t)-s|^{\alpha}$$

pour tout $s\in\mathcal{U}_2$.

$\mathcal{U} = U_1 \cap \mathcal{U}_2$. *Alors*

$$\begin{aligned}
&\left|(f+g)(\sigma(t)) - (f+g)(s) - \left[f^{(\alpha)}(t) + g^{(\alpha)}(t)\right](\sigma(t)-s)^{\alpha}\right| \\
&= \left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{(\alpha)}(t)[\sigma(t)-s]^{\alpha}\right. \\
&\quad +g(\sigma(t)) - g(s) - g^{(\alpha)}(t)[\sigma(t)-s]^{\alpha}| \\
&\leq \left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{(\alpha)}(t)[\sigma(t)-s]^{\alpha}\right| \quad + |g(\sigma(t)) \\
&-g(s) - g^{(\alpha)}(t)[\sigma(t)-s]^{\alpha}| \\
&\leq \tfrac{\epsilon}{2}|\sigma(t)-s|^{\alpha} + \tfrac{\epsilon}{2}|\sigma(t)-s|^{\alpha} = \epsilon|\sigma(t)-s|^{\alpha}
\end{aligned}$$

pour tout $s \in \mathcal{U}$
Donc, $f+g$ *est différentiable en* t *et* $(f+g)^{(\alpha)}(t) = f^{\alpha}(t) + g^{(\alpha)}(t)$.
(ii) *Soit* $\epsilon > 0$. *Alors existe un voisinage* U *de* t *avec*

$$\left[f(\sigma(t)) - f(s) - f^{(\alpha)}(t)[\sigma(t)-s]^{\alpha}\right| \leq \epsilon|\sigma(t)-s|^{\alpha}$$

pour tout $s \in \mathcal{U}$ *il s'ensuit que*

$$\left|(\lambda f)(\sigma(t)) - (\lambda f)(s) - \lambda f^{(\alpha)}(t)[\sigma(t)-s]^{\alpha}\right| \leq \epsilon|\lambda||\sigma(t)-s|^{\alpha}$$

pour tout $s \in \mathcal{U}$ *Par conséquent,*λf *admet une dérivée fractionnaire en* t *et* $(\lambda f)^{\alpha} = \lambda f^{(\alpha)}$ *en* t.
(iii) *Si* t *est dense á droite, alors Si* t *est dispersé á droite, alors*

$$\begin{aligned}
(fg)^{(\alpha)}(t) &= \frac{(fg)^{\sigma}(t) - (fg)(t)}{(\mu(t))^{\alpha}} = \frac{f^{\sigma}(t) - f(t)}{(\mu(t))^{\alpha}} g(t) + \frac{g^{\sigma}(t) - g(t)}{(\mu(t))^{\alpha}} f^{\sigma}(t). \\
&= f^{(\alpha)}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{(\alpha)}(t)
\end{aligned}$$

L'autre formule de la régle du produit suite en échangeant dans $(fg)^{(\alpha)}(t) = f^{(\alpha)}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{(\alpha)}(t)$ *les fonctions* f *et* g (iv) *On utilisons la dérivée fractionnaire d'une Constante (Proposition* 2.1 *) et Théoréme* 2.2 (iii) *voir la prouve : Proposition* 2.2 *On soit que .*
$\left(f \cdot \frac{1}{f}\right)^{(\alpha)}(t) = (1)^{(\alpha)}(t) = 0$
et,donc par (iii)

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{(\alpha)}(t) f(\sigma(t)) + f^{(\alpha)}(t)\frac{1}{f(t)} = 0$$

puisque nous supposons $f(\sigma(t)) \neq 0$,

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{(\alpha)}(t) = -\frac{f^{(\alpha)}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)^{(\alpha)}(t) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)^{(\alpha)}(t) &= f(t)\left(\frac{1}{g}\right)^{(\alpha)}(t) + f^{(\alpha)}(t)\frac{1}{g(\sigma(t))} \\
&= -f(t)\frac{g^{(\alpha)}(t)}{g(t)g(\sigma(t))} + f^{(\alpha)}(t)\frac{1}{g(\sigma(t))} \\
&= \frac{f^{(\alpha)}(t)g(t) - f(t)g^{(\alpha)}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}
\end{aligned}.
$$

Théorème 2.3 *Soit c une a constante,* $m \in \mathbb{N}$*, et* $\alpha \in]0,1[$

(i). Si f définie par $f(t) = (t-c)^m$,
alors

$$f^{(\alpha)}(t) = (\mu(t))^{1-\alpha}\sum_{\nu=0}^{m-1}(\sigma(t)-c)^{\nu}(t-c)^{m-1-\nu}.$$

(ii). Si g définie par $g(t) = \frac{1}{(t-c)^m}$,
alors

$$g^{(\alpha)}(t) = -(\mu(t))^{1-\alpha}\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{(\sigma(t)-c)^{m-\nu}(t-c)^{\nu+1}}$$

á condition que $(t-c)(\sigma(t)-c) \neq 0$.

Preuve 2.7 *On montre la premiére formule par induction*
Si $m = 1$ *alors* $f(t) = t - c$ *et* $f^{(\alpha)}(t) = (\mu(t))^{1-\alpha}$ α *découle de la Propositions* 2.1 *et* 2.2 *et Théoréme* 2.2 *(i). á présent nous supposons que*

$$f^{(\alpha)}(t) = (\mu(t))^{1-\alpha}\sum_{\nu=0}^{m-1}(\sigma(t)-c)^{\nu}(t-c)^{m-1-\nu}$$

est valable pour $f(t) = (t-c)^m$ *et soit* $F(t) = (t-c)^{m+1} = (t-c)f(t)$*. D'apres le*

(Théoréme 2.2 (iii)) ,nous avans :

$$\begin{aligned} F^{(\alpha)}(t) = (t-c)^{(\alpha)} f(\sigma(t)) + f^{(\alpha)}(t)(t-c) = (\mu(t))^{1-\alpha} f(\sigma(t)) + f^{(\alpha)}(t)(t-c) \\ = (\mu(t))^{1-\alpha}(\sigma(t)-c)^m + (\mu(t))^{1-\alpha}(t)(t-c)\sum_{\nu=0}^{m-1}(\sigma(t)-c)^{\nu}(t-c)^{m-1-\nu} \\ = (\mu(t))^{1-\alpha}\left[(\sigma(t)-c)^m + \sum_{\nu=0}^{m-1}(\sigma(t)-c)^{\nu}(t-c)^{m-\nu}\right] \\ = (\mu(t))^{1-\alpha}\sum_{\nu=0}^{m}(\sigma(t)-c)^{\nu}(t-c)^{m-\nu} \end{aligned}$$

Par conséquent, la partie (i) découle par un raisonnement de recurence .
suivant Pour $g(t) = 1/(t-c)^m = 1/f(t)$, *nous appliquons le Théoéme 2.2 (iv), pour obtenir :*

$$\begin{aligned} g^{(\alpha)}(t) = -\frac{f^{(\alpha)}(t)}{f(t)f(\sigma(t))} = -(\mu(t))^{1-\alpha}\frac{\sum_{\nu=0}^{m-1}(\sigma(t)-c)^{\nu}(t-c)^{m-1-\nu}}{(t-c)^m(\sigma(t)-c)^m} \\ = -(\mu(t))^{1-\alpha}\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{(t-c)^{\nu+1}(\sigma(t)-c)^{m-\nu}} \end{aligned}$$

á condition que $(t-c)(\sigma(t)-c) \neq 0$
Dans les exemple qui suivent on illustre cas speciaux du Théoréme 2.3.

Exemple 2.2 *Soit* $\alpha \in]0,1[$
(i). Si $f(t) = t^2$, $f^{(\alpha)}(t) = (\mu(t))^{1-\alpha}\left[t^2 + t\sigma(t) + (\sigma(t))^2\right]$.
(ii). Si $f(t) = t^3$, *alors* $f^{(\alpha)}(t) = -\frac{(\mu(t))^{1-\alpha}}{t\sigma(t)}$.
(iii). Si $f(t) = 1/t$ *alors* $f^{(\alpha)}(t) = -\frac{(\mu(t))^{1-\alpha}}{t\sigma(t)}$.
D'après les rèsultats dèjà obtenus, il n'est pas difficile de voir que la dèrivèe fractionnaire ne satisfait pas une chaîne règle comme :

$$(f \circ g)^{(\alpha)}(t) = f^{(\alpha)}(g(t))g^{(\alpha)}(t).$$

Exemple 2.3 *Soit* $\alpha \in]0,1[$*.Considèrez* $f(t) = t^2$ *et* $g(t) = 2t$ *Ensuite :*

$$(f \circ g)^{(\alpha)}(t) = \left(4t^2\right)^{(\alpha)} = 4(\mu(t))^{1-\alpha}(\sigma(t)+t) \tag{2}$$

tandis que

$$f^{(\alpha)}(g(t))g^{(\alpha)}(t) = (\mu(2t))^{1-\alpha}(\sigma(2t)+2t)2(\mu(t))^{1-\alpha} \tag{3}$$

et, par exemple, pour $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *il est facile de voir que* $(f \circ g)^{(\alpha)}(t) \neq f^{(\alpha)}(g(t))g^{(\alpha)}(t)$ *Notez que lorsque* $\alpha = 1$ *et* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *notre* $f^{(\alpha)}$ *concide avec la dèrivèe classique* f' .

Théorème 2.4 *(Règle de la chaîne).Soit* $\alpha \in]0,1[$.
On suppose que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue,* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *admet une dèrivèe fractionnaire d'ordre* α *en* $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$*,et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continuellement diffèrentiable. Alors l'existe c dans l'intervalle rèel* $[t, \sigma(t)]$ *avec*

$$(f \circ g)^{(\alpha)}(t) = f'(g(c))g^{(\alpha)}(t). \tag{4}$$

Preuve 2.8 *Soit* $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ *. Tout d'abord, nous considérons que t est dispersés á droite. Dans ce cas :*

$$(f \circ g)^{(\alpha)}(t) = \frac{f(g(\sigma(t))) - f(g(t))}{(u(t))^{(\alpha)}}.$$

Si $g(\sigma(t)) = g(t)$*, alors nous obtenons* $(f \circ g)^{(\alpha)}(t) = 0$ *et* $g^{(\alpha)}(t) = 0$ *et ainsi,* (4) *est valable pour tout c dans l'intervalle réel* $[t, \sigma(t)]$ *et nous pouvons donc supposer que* $g(\sigma(t)) \neq g(t)$*. Par le Théoréme de la valeur moyenne :*

$$\begin{aligned}(f \circ g)^{(\alpha)}(t) &= \frac{f(g(\sigma(t))) - f(g(t))}{g(\sigma(t)) - g(t)} \cdot \frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{(\mu(t))^{(\alpha)}} \\ &= f'(\xi)g^{(\alpha)}(t).\end{aligned}$$

oú ξ *est compris entre* $g(t)$ *et* $g(\sigma(t))$*. Puisque* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue, il y a un* $c \in [t, \sigma(t)]$*, qui nous donne le résultat . Considérons maintenant le cas oú t est dense á droite .Dans ce cas :*

$$\begin{aligned}(f \circ g)^{(\alpha)}(t) &= \lim_{s \to t} \frac{f(g(t)) - f(g(s))}{g(t) - g(s)} \cdot \frac{g(t) - g(s)}{(t-s)^{(\alpha)}} \\ &= \lim_{s \to t} \left\{ f'(\xi_s) \cdot \frac{g(t) - g(s)}{(t-s)^{(\alpha)}} \right\}\end{aligned}$$

Par le Théoréme de la valeur moyenne, oú ξ_s *est compris entre* $g(s)$ *et* $g(t)$*. Par la continuité de g on obtient que* $\lim_{s \to t} \xi_s = g(t)$ *ce qui donne le résultat .*

Exemple 2.4 *Soit* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$*, pour la quelle* $\sigma(t) = t+1$ *et* $\mu(t) = 1$ *et considère les mêmes fonctions que dans Exemple* 2.3 $f(t) = t^2$ *et* $g(t) = 2t$*. On trouver directement la valeur c dans* $[4, \sigma(4)] = [4, 5]$*, Dápres le Théorème* 2.4 *,pour que*

$$(f \circ g)^{(\alpha)}(4) = f'(g(c))g^{(\alpha)}(4) \tag{5}$$

á partir de (2)*, il suit que* $(f \circ g)^{(\alpha)}(4) = 36$ *Parce que* $g^{(\alpha)}(4) = 2$ $f'(g(c)) = 4c$*,l'égalité* (5) *est simplifiée á* $36 = 8c$*, et ainsi* $C = \frac{9}{2}$.

Définition 2.2 *Soit β un nombre réel non négatif. nous définir la dérivée fractionnaire de f d'ordre β par :*
$f^{(\beta)} = \left(f^{\Delta^N}\right)^{(\alpha)}$ $N = \lfloor \beta \rfloor$ *(c'est-á-dire que N est la partie entiére de β) et $\alpha = \beta - N$.*

Exemple 2.5 *Si $f(t) = c$ pour tous $t \in \mathbb{T}, c$ une constante, alors $f^{(\beta)} = 0$ pour tous $\beta \in \mathbb{R}_0^+$.*

Exemple 2.6 *Soit $f(t) = t^2, \mathbb{T} = h\mathbb{Z}, h > 0,$ et $\beta = 1.3$ ensuite, par Définition 2.2, nous avons :*
$f^{(1.3)} = \left(f^{\Delta}\right)^{(0.3)}$ *. Il découle de $\sigma(t) = t + h$ que $f^{(1.3)}(t) = (2t + h)^{(0.3)}$.*
Proposition 2.1 et Théorème 2.3 (i) et (ii) nous permettent décrire que
$f^{(1.3)}(t) = 2(t)^{(0.3)}$.
Nous concluons de Proposition 2.2 $u(t) = h$ que $f^{(1.3)}(t) = 2h^{0.7}$.

2.2 l'intégrale fractionnaire

Définition 2.3 *On suppose que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est une fonction réglée.On définit l'intégrale fractionnaire indéfinie de f d'ordre β, $0 \leq \beta \leq 1$ par :*

$$\int f(t)\Delta^\beta t = \left(\int f(t)\Delta t\right)^{(1-\beta)}$$

oú $\int f(t)\Delta t$ est usuelle indéfinie l'intégrale des échelles de temps.

Remarque 2.2 *Il résulte de la Définition 2.3 que :*

$$\int f(t)\Delta^1 t = \int f(t)\Delta t$$

et

$$\int f(t)\Delta^0 t = f(t).$$

Définition 2.4 *On suppose que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est une fonction réglée*

$$F^\beta(t) = \int f(t)\Delta^\beta t$$

et l'intégrale fractionnaire indéfinie de f d'ordre β avec $0 \leq \beta \leq 1$ non définit l'intégral *fractionnaire de Cauchy par :*

$$\int_a^b f(t)\Delta^\beta t = F^\beta\ (t)\big|_a^b = F^\beta(b) - F^\beta(a), \quad a, b \in \mathbb{T}$$

le théoréme suivant donne certain propriétés de l'intégrale fractionnaire d'ordre β.

Théorème 2.5 *Si* $a,\ b,\ c \in \mathbb{T},\ \xi \in \mathbb{R}$ *et* $f, g \in C_{rd},\ 0 \leq \beta \leq 1$ *alors :*

$(i). \displaystyle\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta^\beta = \int_a^b f(t)\Delta^\beta + \int_a^b g(t)\Delta^\beta t$

$(ii). \int_a^b (\xi f)(t)\Delta^\beta t = \xi \int_a^b f(t)\Delta^\beta t$

$(iii). \displaystyle\int_a^b f(t)\Delta\beta t = -\int_b^a f(t)\Delta^\beta t$

$(iv)\ . \int_a^b f(t)\Delta^\beta t = \int_a^c f(t)\Delta^\beta t + \int_c^b f(t)\Delta^\beta t$

$(v).Si\ f(t) = 0, alors \displaystyle\int_a^b f(t)\Delta^\beta t = 0.$

Preuve 2.9 *Les égalités découlent de la Définitions* 2.3 *et* 2.4*, similaire propriétés de l'intégrale delta des échelles de temps, et les propriétés analogues pour la dérivée fractionnaire des échelles de temps.* (i) *de la Définition* 2.4

$$\int_a^b (f+g)(t)\Delta^\beta t = \int \Big(f(t) + g(t)\Delta^\beta\ t\big|_a^b$$

et, de la Définition 2.3 *,*

$$\int_a^b (f+g)(t)\Delta^\beta t = \left(\int (f(t) + g(t))\Delta t\right)^{(1-\beta)}\Bigg|_a^b$$

découlent des propriétés de l'intégrale delta et Théoréme 2.3 (i)

$$\int_a^b (f+g)(t)\Delta^\beta t = \left(\int f(t)\Delta t\right)^{(1-\beta)} + \left(\int g(t)\Delta t\right)^{(1-\beta)}\Bigg|_a^b$$

En utilisant encore de la Définitions 2.3 *et* 2.3*, on a :*

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(t)\Delta^\beta t &= \int f(t)\Delta^\beta t + \int g(t)\Delta^\beta\ t\big|_a^b \\ &= F^\beta(t) + G^\beta\ (t)\big|_a^b = F^\beta(b) + G^\beta(b) - F^\beta(a) - G^\beta(a) \\ &= \int_a^b f(t)\Delta^\beta t + \int_a^b g(t)\Delta^\beta t\end{aligned}$$

(ii) Les Définitions 2.3 *et* 2.4*,on a :*

$$\int_a^b (\xi f)(t)\Delta^\beta t = \int (\xi f)(t)\Delta^\beta\ t|_a^b = \left(\int (\xi f)(t)\Delta t\right)^{(1-\beta)}\Bigg|_a^b$$

D'après les Propriétés de l'intégral delta et Théoréme 2.3 *(i)*

$$\int_a^b (\xi f)(t)\Delta^\beta t = \xi \left(\int f(t)\Delta t\right)^{(1-\beta)}\Bigg|_a^b$$

(ii). Des Définitions 2.3 *et* 2.4*, on a :*

$$\begin{aligned}\int_a^b (\xi f)(t)\Delta^\beta t &= \xi \int f(t)\Delta^\beta\ t|_a^b = \xi F^\beta\ (t)|_a^b = \xi\left(F^\beta(b) - F^\beta(a)\right)\\ &= \xi \int_a^b f(t)\Delta^\beta t\end{aligned}$$

les Propriétés (iii),(iv),(v) sont une conséquences directe de la Définition 2.4
(iii)

$$\int_a^b f(t)\Delta^\beta t = F^\beta(b) - F^\beta(a) = -\left(F^\beta(a) - F^\beta(b)\right) = -\int_b^a f(t)\Delta^\beta t$$

(iv).

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\Delta^\beta t &= F^\beta(b) - F^\beta(a) = F^\beta(c) - F^\beta(a) + F^\beta(b) - F^\beta(c)\\ &= \int_a^c f(t)\Delta^\beta t + \int_c^b f(t)\Delta^\beta t\end{aligned}$$

(v)

$$\int_0^a f(t)\Delta^\beta t = F^\beta(a) - F^\beta(a) = 0.$$

Exemple 2.7 *Soit* $\mathrm{T} = \mathbb{Z}, 0 \leq \beta \leq 1$ *et* $f(t) = t$ *.On a* $\int t\Delta t = \frac{t^2}{2} + C$ *avec* C *une constante, nous avons :*
$\int_1^{10} t\Delta^\beta t = \int t\Delta^\beta\ t|_1^{10} = \left(\int t\Delta t\right)^{(1-\beta)}\Big|_1^{10} = \left(\frac{t^2}{2} + C\right)^{(1-\beta)}\Big|_1^{10}$

Il découle de l'Exemple 2.2 *avec* $\mu(t) = 1$, *Théoréme* 2.3 (*i*) *et* (*ii*) *et Proposition* 2.1

$$\int_{1}^{10} t\Delta^{\beta} t = \frac{1}{2}\,(2t+1)|_{1}^{10} = \frac{21}{2} - \frac{3}{2} = 9.$$

Chapitre 3

Existence et unicité de solution

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord deux fonctions importantes dans la théorie du calcul fractionnaire. Puis on définit l'intégrale et la dérivée fractionnaire et leurs propriétés.
Nous considérons le problème de valeur initiale suivante :

$$ {}_{t_0}^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + a] = \mathcal{J} \subseteq \mathbb{T}, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{1} $$

$$ {}_{t_0}^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} y\left(t_0\right) = 0. \tag{2} $$

Définition 3.1 *Soit $[a, b]$ un intervalle borné fermé dans $\mathbb{T}$.*
Une fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ est appelée un antidivant de Delta fonction
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Soit F est continue sur $[a, b]$, Delta différentiable sur $[a, b]$, et $F^{\Delta}(t) = f(t)$ pour tout $t \in [a, b)$. Ensuite, on définit Δ-l'intégrale de f de a à b par :

$$ \int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a). $$

Proposition 3.1 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps et f une fonction continue croissante sur l'intervalle $[a, b]$.*
Si F est l'extension de f à l'intervalle réel $[a, b]$ donné par :

$$ F(s) = \begin{cases} f(s) & Si\ s \in \mathbb{T} \\ f(t) & Si\ s \in (t, \sigma(t)) \notin \mathbb{T} \end{cases} $$

Alors

$$\int_a^b f(t)\Delta t \leqslant \int_a^b F(t)dt$$

Définition 3.2 *(Fonction Gamma). Pour les nombres complexes avec un partie réelle positive, la fonction Gamma* $\Gamma(t)$ *est définie par :*

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx, \qquad \mathrm{Re}(x) > 0.$$

Cette intégrale est convergente pour tous les réels positifs.

Définition 3.3 *(Fonction Bêta). La fonction Bêta, également appelée l'intégrale d'Euler de premier type, est la fonction* $\mathrm{B}(x, y)$ *définie par :*

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Remarque 3.1

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, *On a :*

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t).$$

2. La fonction Bêta est liée avec la fonction Gamma par la relation suivante :

$$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Définition 3.4 *(Intégrale fractionnaire sur les échelles de temps).*
Soit $\mathbb{T}$ *une échelle de temps,* $[a, b]$ *un intervalle de* $\mathbb{T}$ *et* h *est un intégrable sur* $[a, b]$.
Soit $0 < \alpha < 1$.*Alors l'intégrale fractionnaire (à gauche) de l'ordre* α *de* h *est définie par :*

$${}_a^{\mathbb{T}}I_t^\alpha h(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)\Delta s.$$

où Γ *est la fonction Gamma.*

Définition 3.5 *(Dérivée de fractionnaire sur échelles de temps).*
Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, $t \in \mathbb{T}, 0 < \alpha < 1$, et $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville (à gauche) d'ordre α de h est définie par :

$$ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_a^t (t-s)^{-\alpha} h(s) \Delta s \right)^{\Delta} \tag{3} $$

Remarque 3.2 *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors la Définition 3.5 donne le classique (à gauche) dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville . Pour différentes extensions du dérivée fractionnaire sur échelles de temps, en utilisant l'approche Caputo au lieu de la Riemann-Liouville, .*

Remarque 3.3 *Pour les approches locales à la calcul fractionnaire sur les échelles de temps nous renvoyons le lecteur . Nous pouvons cependant facilement généraliser notre définition de dérivée fractionnaire $\alpha > 0$. En effet, passons a $\alpha \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$. Alors, il existe $\beta \in (0,1)$ tel que $\alpha = [\alpha] + \beta$, où $[\alpha]$ est la partie entière de α, et nous pouvons ensemble*

$$ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} h = {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\beta} h^{\Delta^{[\alpha]}} $$

Les opérateurs fractionnaires d'ordre négatif sont définies comme suit.

Définition 3.6 *Si $-1 < \alpha < 0$, alors la dérivée d'ordre α est l'intégrale fractionnaire de l'ordre $-\alpha$, c'est-à-dire :*

$$ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} = {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{-\alpha}. $$

Définition 3.7 *Si $-1 < \alpha < 0$, alors l'intégrale de d'ordre α est la dérivée fractionnaire de l'ordre $-\alpha$, c'est-à-dire :*

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} = {}_a^{\mathrm{T}}D_t^{-\alpha}. $$

3.1 Quelque Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

Proposition 3.2 *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps avec la dérivée Δ, et $0 < \alpha < 1$. En suite :*

$$ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} = \Delta \circ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}. $$

Preuve 3.1 *Soit* $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *De* (3) *nous avons :*

$$
\begin{aligned}
{}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} h(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_a^t (t-s)^{-\alpha} h(s) \Delta s \right)^{\Delta} \\
&= \left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} h(t) \right)^{\Delta} = \left(\Delta \circ_a^{\mathbb{T}} I_t^{1-\alpha} \right) h(t).
\end{aligned}
$$

Proposition 3.3 *Pour toute fonction* h *intégrable sur* $[a, b]$, *le l'intégrale de Riemann-Liouville* Δ*-fractionnaire de satisfait :*

$$
{}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\beta} = {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha+\beta}
$$

pour $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$.

Preuve 3.2 *Par Définition,*

$$
\begin{aligned}
\left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} \circ_a^{\mathbb{T}} I_t^{\beta} \right)(h(t)) =& {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} \left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\beta}(h(t)) \right) \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\beta}(h(s)) \right) \Delta s \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left((t-s)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-u)^{\beta-1} h(u) \Delta u \right) \Delta s \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s (t-s)^{\alpha-1} (s-u)^{\beta-1} h(u) \Delta u \Delta s \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \Bigg[\int_a^s (t-s)^{\alpha-1} (s-u)^{\beta-1} h(u) \Delta u \\
& + \int_s^t (t-s)^{\alpha-1} (s-u)^{\beta-1} h(u) \Delta u \Bigg] \Delta s \\
=& \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left[\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-u)^{\beta-1} h(u) \Delta u \right] \Delta s
\end{aligned}
$$

D'aprés le théorème de Fubini,en changeant l'ordre d'intégration obtenir :

$$
\begin{aligned}
\left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} \circ_a^{\mathbb{T}} I_t^{\beta} \right)(h(t)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left[\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-u)^{\beta-1} h(u) \Delta s \right] \Delta u \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left[\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-u)^{\beta-1} \Delta s \right] h(u) \Delta u \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left[\int_u^t (t-s)^{\alpha-1} (s-u)^{\beta-1} \Delta s \right] h(u) \Delta u
\end{aligned}
$$

$s = u + r(t-u), r \in \mathbb{R}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\beta}\right)(h(t)) \\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left[\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1}(t-u)^{\alpha-1} r^{\beta-1}(t-u)^{\beta-1}(t-u)dr\right] h(u)\Delta u \\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r^{\beta-1} dr \int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1} h(u)\Delta u \\
&\qquad = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1} h(u)\Delta u \\
&\qquad = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-u)^{\alpha+\beta-1} h(u)\Delta u \\
&\qquad = {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha+\beta} h(t).
\end{aligned}$$

Proposition 3.4 *Pour toute fonction h intégrable sur $[a,b]$ on a :*

$$ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} h = h.$$

Preuve 3.3 *Par les Propositions 3.2 et 3.3, nous avons :*

$$ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} h(t) = \left[{}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}\left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}(h(t))\right)\right]^{\Delta} = \left[{}_a^{\mathbb{T}}I_t h(t)\right]^{\Delta} = h(t)$$

.

Corollaire 3.1 *Pour $0 < \alpha < 1$, nous avons :*

$$ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{-\alpha} = Id$$

et

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{-\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} = Id$$

où Id désigne l'opérateur d'identité.

Preuve 3.4 *De la Définition 3.7 et de la Proposition 3.4. nous avons :*

$$ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{-\alpha} = {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} = Id$$

de la Définition 3.6 et Proposition 3.4, nous avons :

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{-\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} = {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} = Id.$$

Définition 3.8 *Pour $\alpha > 0$,Soit un ${}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}([a,b])$ dénote l'espace de fonctions pouvant être représentées par le Δ-intégrale de Riemann - Liouville d'ordre α de quelque $\mathcal{C}([a,b])$-fonction.*

Théorème 3.1 *Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$ et $\alpha > 0$. Pour que $f \in {}_a^{\mathrm{T}}I_t^{\alpha}([a,b])$, il est nécessaire et suffisant que :*

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} f \in C^1([a,b]) \tag{4}$$

et

$$\left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} f(t)\right)\Big|_{t=a} = 0. \tag{5}$$

Preuve 3.5 *On Suppose que :*

$$f \in {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}([a,b]), f(t) = {}_a^{\pi}I_t^{\alpha} g(t)$$

pour certains

$$g \in \mathcal{C}([a,b])$$

et

$${}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}(f(t)) = {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}\left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} g(t)\right).$$

De la Proposition 3.3,nous avons :

$${}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}(f(t)) = {}_a^{\mathbb{T}}I_t g(t) = \int_a^t g(s)\Delta s$$

par conséquent,

$${}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} f \in \mathcal{C}([a,b])$$

et

$$\left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} f(t)\right)\Big|_{t=a} = \int_a^t g(s)\Delta s = 0$$

Inversement, supposons que $f \in \mathcal{C}([a,b])$ satisfait à (4) et (5). Ensuite, par la formule de Taylor appliquée à la fonction ${}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} f$, on a :

$${}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} f(t) = \int_a^t \frac{\Delta}{\Delta s}{}_a^{1-\alpha} f(s)\Delta s, \quad \forall t \in [a,b]$$

Soit $\varphi(t) = \frac{\Delta}{\Delta t} {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} f(t)$ *Notez que* $\varphi \in \mathcal{C}([a,b])$ *par* (4).
Maintenant, par Proposition 3.3*, nous avons :*

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}(f(t)) = {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1}\varphi(t) = {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}\left[{}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}(\varphi(t))\right] $$

Et ainsi

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}(f(t)) - {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}\left[{}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}(\varphi(t))\right] = 0 $$

Ensuite

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}\left[f - {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}(\varphi(t))\right] = 0. $$

De l'unicité de la solution à l'équation intégrale d'Abel, cela implique que $f - {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}\varphi = 0$*.*
Ainsi, $f = {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}\varphi$ *et* $f \in {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}[a,b]$*.*

Théorème 3.2 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $f \in \mathcal{C}([a,b])$ *satisfaire à la condition Théorème* 3.1*. Ensuite,*

$$ \left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha}\right)(f) = f. $$

Preuve 3.6 *D'après le Théorème* 3.1 *et la Proposition* 3.3*, nous avons :*

$$ {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} f(t) = {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} \circ {}_a^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha}\left({}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}\varphi(t)\right) = {}_a^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha}.\varphi(t) = f(t). $$

3.2 Existence de solutions aux PVI fractionnaires

Dans cette section, nous prouvons l'existence d'une solution au Problème de valeur initiale d'ordre fractionnaire (1) - (2) définie sur l échelle de temps .Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps et

$$ \mathcal{J} = [t_0, t_0 + a] \subset \mathbb{T}. $$

Alors la fonction $y \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ est une solution de probléme (1) - (2) si

$$ {}_{t_0}^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} y(t) = f(t,y) \qquad sur \mathcal{J}, $$

$$ {}_{t_0}^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} y(t_0) = 0 $$

.

Lemme 3.1 *Soit* $0 < \alpha < 1$,$\mathcal{J} \subseteq \mathbb{T}$, *et* $f : \mathcal{J} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *. La fonction* y *est une solution du problème* (1) -(2) *si est seulement si, cela fonction est une solution de l'équation intégrale suivante :*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s.$$

Preuve 3.7 *Par le Théorème* 3.2*,*

$${}_{t_0}^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} \circ \left({}_{t_0}^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha}(y(t)) \right) = y(t)$$

a partir de (3) *nous avons :*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s.$$

Théorème 3.3 *On suppose que* $\mathcal{J} = [t_0, t_0 + a] \subseteq \mathbb{T}$*. La valeur initiale des problèmes* (1) - (2) *a une solution unique sur* $\mathcal{J}$ *si la fonction* $f(t, y)$ *est une fonction bornée continue dense à droite telle que il existe* $M > 0$ *pour laquelle* $|f(t, y(t))| < M$ *sur* $\mathcal{J}$ *et le Condition de Lipshitz*
$\exists L > 0 : \forall t \in \mathcal{J}$ *et* $x, y \in \mathbb{R}, \quad \|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant L\|x - y\|.$

Preuve 3.8 *Soit* $\mathcal{S}$ *l'ensemble des fonctions rd-continues sur* $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{T}$ *Pour* $y \in \mathbb{R}$ *, définie par :*

$$\|y\| = \sup_{t \in \mathcal{J}} \|y(t)\|$$

Il est facile de voir que $\mathcal{S}$ *est un espace de Banach avec cette norme. Le sous-ensemble de* $\mathcal{S}(\rho)$ *et l'opérateur* T *sont définies par :*

$$\mathcal{S}(\rho) = \{X \in \mathcal{S} : \|X_s\| \leqslant \rho\}$$

et

$$\mathrm{T}(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s$$

ensuite

$$|\mathrm{T}(y(t))| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} M \Delta s \leqslant \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \Delta s.$$

Depuis $(t-s)^{\alpha-1}$ *est une fonction monotone croissante,*
en utilisant Proposition 3.3 *nous pouvons écrire que :*

$$\int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \Delta s \leqslant \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} ds$$

En conséquence

$$|\mathrm{T}(y(t))| \leqslant \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} ds \leqslant \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \frac{a^{\alpha}}{\alpha} = \rho$$

En considérant $\rho = \frac{Ma^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$ *, nous concluons que* T *est un opérateur de* $\mathcal{S}(\rho)$ *à* $\mathcal{S}(\rho)$*. En outre,*

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{T}(x) - \mathrm{T}(y)\| \quad &\leqslant \frac{1}{\Gamma(x)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| \Delta s \\
&\leqslant \frac{L\|x-y\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \Delta s \\
&\leqslant \frac{L\|x-y\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-1} ds \\
&\leqslant \frac{L\|x-y\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)} \frac{a^{\alpha}}{\alpha} = \frac{La^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \|x-y\|_{\infty}
\end{aligned}$$

pour $x, y \in \mathcal{S}(\rho)$*.Si* $\frac{La^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \leqslant 1$ *alors c'est une map de contraction.*
Ce implique l'existence et l'unicité de la solution au problème (1) - (2).

Théorème 3.4 *On Suppose que* $f : \mathcal{J} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction rd-continue bornée telle qu'il existe* $M > 0$ *avec* $|f(t, y)| \leqslant M$ *pour tout* $t \in \mathcal{J}, y \in \mathbb{R}$ *. Alors le problème* (1) - (2) *a un solution sur* $\mathcal{J}$*.*

Preuve 3.9 *Nous utilisons le théorème à points fixes de Schauder pour prouver que* T *définie par* (3) *a un point fixe.*
La preuve est donné en plusieurs étapes.
Étape 1 : T *est continue. Soit* y_n *un séquence telle que* $y_n \to y$ *dans* $\mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ *Ensuite, pour chaque* $t \in \mathcal{J}$*.*

$$\begin{aligned}
&\left|T\left(y_{n}\right)(t)-T(y)(t)\right| \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{0}}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\left|f\left(s, y_{n}(s)\right)-f(s, y(s))\right| \Delta s \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{0}}^{t}(t-s)^{\alpha-1} \sup_{s \in \mathcal{J}}\left(s, y_{n}(s)\right)-f(s, y(s))| \Delta s \\
&\qquad \leqslant \frac{\left\|f\left(\cdot, y_{n}(\cdot)\right)-f(\cdot, y(s))\right\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{0}}^{t}(t-s)^{\alpha-1} \Delta s \\
&\qquad \leqslant \frac{\left\|f\left(\cdot, y_{n}(\cdot)\right)-f(\cdot, y(\cdot))\right\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{0}}^{t}(t-s)^{\alpha-1} d s \\
&\qquad \leqslant \frac{\left\|f\left(\cdot, y_{n}(\cdot)\right)-f(\cdot, y(\cdot))\right\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)} \frac{a^{\alpha}}{\alpha} \\
&\qquad \leqslant \frac{a^{\alpha}\left\|f\left(\cdot, y_{n}(\cdot)\right)-f(\cdot, y(\cdot))\right\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha+1)} .
\end{aligned}$$

Puisque f est une fonction continue, nous avons :

$$\begin{aligned}
\left|T\left(y_{n}\right)(t)-T(y)(t)\right|_{\infty} \leqslant & \frac{a^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|f\left(\cdot, y_{n}(\cdot)\right)-f(\cdot, y(\cdot))\right\|_{\infty} \\
& \rightarrow 0 \text{ comme } n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

Étape 2 : la carte T envoie des ensembles liés en ensembles liés en $\mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ En effet, il suffit de montrer que pour tout ρ il existe une constante positive l , pour chaque $y \in B_{\rho}=\left\{y \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R}):\|y\|_{\infty} \leqslant \rho\right\}$, nous avons : $\|\mathrm{T}(y)\|_{\infty} \leqslant l$. Par hypothèse, pour chaque $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{T}(y)(t)| & \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{0}}^{t}(t-s)^{\alpha-1}|f(s, y(s))| \Delta s \\
& \leqslant \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{0}}^{t}(t-s)^{\alpha-1} \Delta s \\
& \leqslant \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{0}}^{t}(t-s)^{\alpha-1} d s \\
& \leqslant \frac{M a^{\alpha}}{\alpha \Gamma(\alpha)}=\frac{M a^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}=l
\end{aligned}$$

Étape 3 : la carte T envoie des ensembles bornés en équicontinue ensembles de $\mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$. Soit $t_{1}, t_{2} \in \mathcal{J}$; $t_{1}<t_{2}$; B_{ρ} est un ensemble borné de $\mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ comme à l'étape 2 et

$y \in B_\rho$. Ensuite,

$$
\begin{aligned}
\left|T(y)\left(t_2\right)-T(y)\left(t_1\right)\right| & \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{t_0}^{t_1}\left(t_1-s\right)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s\right. \\
& -\int_{t_0}^{t_2}\left(t_2-s\right)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s| \\
& \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} | \int_{t_0}^{t_1}\left(\left(t_1-s\right)^{\alpha-1}-\left(t_2-s\right)^{\alpha-1}\right. \\
& \left.+\left(t_2-s\right)^{\alpha-1}\right) f(s, y(s)) \Delta s \\
& -\int_{t_0}^{t_2}\left(t_2-s\right)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s| \\
& \leqslant \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{t_0}^{t_1}\left(\left(t_1-s\right)^{\alpha-1}-\left(t_2-s\right)^{\alpha-1}\right) \Delta s+\int_{t_1}^{t_2}\left(t_2-s\right)^{\alpha-1} \Delta s\right| \\
& \leqslant \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_{t_0}^{t_1}\left(\left(t_1-s\right)^{\alpha-1}-\left(t_2-s\right)^{\alpha-1}\right) d s+\int_{t_1}^{t_2}\left(t_2-s\right)^{\alpha-1} d s\right| \\
& \leqslant \frac{M}{\Gamma(x+1)}\left[\left(t_2-t_1\right)^\alpha+\left(t_1-t_0\right)^\alpha-\left(t_2-t_0\right)^\alpha\right]+\frac{M}{\Gamma(x+1)}\left(t_2-t_1\right)^\alpha \\
& =\frac{2 M}{\Gamma(\alpha+1)}\left(t_2-t_1\right)^\alpha+\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\left(t_1-t_0\right)^\alpha-\left(t_2-t_0\right)^\alpha\right] .
\end{aligned}
$$

Comme $t_1 \rightarrow t_2$, la partie droite de l'inégalité ci-dessus tend à zéro.
En conséquence des étapes 1 à 3, conjointement avec le Théorème d'Arzela - Ascoli, nous concluons que $T: \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ est complètement continue.
Étape 4 : limites a priori. Maintenant, il reste à montrer que l'ensemble $\Omega=\{y \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R}): y=\lambda \mathrm{T}(y), 0<\lambda<1\}$ est borné. Soit $y \in X$. Puis $y=\lambda \mathrm{T}(y)$ pour quelque $0<\lambda<1$. Ainsi, pour chaque $t \in \mathcal{J}$, on a :

$$
y(t)=\lambda\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t(t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \Delta s\right]
$$

Nous complétons cette étape en considérant l'estimation de l'étape 2.
En conséquence du théorème des points fixes de Schauder, nous comprendre que T a un point fixe, ce qui est la solution du problème (1) -(2).

Chapitre 4

Opérateurs fractionnaires généralisés sur échelles de temps

Dans ce chapitre,nous commençons par généraliser les concepts de intégrale et dérivée fractionnaire, en introduisant le concept de intégrale et dérivée fractionnaire aux échelles de temps d'une fonction avec par le respecte à un autre fonction.

4.1 Dérivée et intégrale généralisée

Définition 4.1 *(Intégrale fractionnaire généralisée sur les échelles de temps).*
Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, $[a, b]$ est un intervalle de $\mathbb{T}$, h est une fonction intégrable sur $[a, b]$ et g est monotone ayant une dérivée delta g^{Δ} avec $g^{\Delta}(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$. Soit $0 < \alpha < 1$. Ensuite, l'intégrale fractionnaire généralisée (à gauche) d'ordre α de h avec à g est définie par :

$$ {}_{a;g}^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} h(t) = \int_a^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (g(t) - g(s))^{\alpha-1} g^{\Delta}(s) h(s) \Delta s. $$

Définition 4.2 *(Dérivée fractionnaire généralisée sur des échelles de temps).*
Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, $[a, b]$ est un intervalle de $\mathbb{T}$, h est une fonction intégrable sur $[a, b]$, et g est monotone ayant une dérivée delta g^{Δ} avec $g^{\Delta}(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$. Soit $0 < \alpha < 1$. Ensuite, la dérivé fractionnaire généralisé (à gauche) d'ordre α de h par rapport à g est définie par :

$$ {}_{a;g}^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{g^{\Delta}(t)} \left(\int_a^t (g(t) - g(s))^{-\alpha} g^{\Delta}(s) h(s) \Delta s \right)^{\Delta}. $$

Remarque 4.1 *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors les Définitions* 4.1 *et* 4.2 *donnent, respectivement, le bien Intégrale fractionnaire généralisée connue et dérivée de Riemann-Liouville. Soit z une fonction monotone ayant une dérivée delta z^{Δ} avec $g^{\Delta}(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathcal{J}$. Nous considérons le problème de valeur initiale suivante :*

$$\begin{cases} {}_{t_0;z}^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + a] \quad = \mathcal{J} \subseteq \mathbb{T}, \quad 0 < \alpha < 1, \\ {}_{t_0;z}^{\mathbb{T}}I_t^{\alpha} y(t_0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Où ${}_{t_0;z}^{\mathbb{T}}D_t d^{\alpha}$ et ${}_{t_0;z}^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha}$ est la dérivée et intégrale fractionnaire généralisée de Riemann - Liouville avec respect à une fonction z, et $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une droite fonction continue. Notre objectif principal est d'obtenir des conditions pour l'existence et l'unicité de solution à problème (1)*. Dans ce qui suit, $\mathbb{T}$ est une échelle de temps donnée et $\mathcal{J} = [t_0, t_0 + a] \subseteq \mathbb{T}$.*

Lemme 4.1 *Soit $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{T}$ et $f : \mathcal{J} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Fonction $y \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ est une solution du problème* (1) *si est seulement si est une solution de équation l'intégrale suivante :*

$$y(t) = \frac{z^{\Delta}(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t) - z(s))^{\alpha-1} z^{\Delta}(s) f(s, y(s)) \Delta s.$$

Preuve 4.1 *Par les Définitions* 4.1 *et* 4.2*, nous avons :*

$${}_{t_0;z}^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t) - z(s))^{-\alpha} z^{\Delta}(s) y(s) \Delta s$$

et

$$\begin{aligned} {}_{t_0;z}^{\mathbb{T}}D_t^{\alpha} y(t) &= \frac{1}{z^{\Delta}(t)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_{t_0}^{t} (z(t) - z(s))^{-\alpha} z^{\Delta}(s) y(s) \Delta s \right)^{\Delta} \\ &= \frac{1}{z^{\Delta}(t)} \left({}_{t_0;z}^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} y(t) \right)^{\Delta} \\ &= \frac{1}{z^{\Delta}(t)} \left(\Delta \circ {}_{t_0;z}^{\mathbb{T}}I_t^{1-\alpha} \right) y(t). \end{aligned}$$

En outre

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathbb{T}}_{t_0;z}I^{\alpha}_{t}\left[{}^{\mathbb{T}}_{t_0;z}D^{\alpha}_{t}y(t)\right] &= \frac{1}{z^{\Delta}(t)}\left({}^{\mathbb{T}}_{t_0;z}I^{\alpha}_{t}\left({}^{\mathbb{T}}_{t_0;z}I^{1-\alpha}_{t}y(t)\right)\right)^{\Delta} \\
&= \frac{1}{z^{\Delta}(t)}\left({}^{\mathbb{T}}_{t_0;z}I^{1}_{t}y(t)\right)^{\Delta} \\
&= \frac{1}{z^{\Delta}(t)}y(t)
\end{aligned} \tag{2}
$$

Il découle de (1), (2) *et de la Définition* 4.1 *que*

$$
\begin{aligned}
y(t) &= z^{\Delta}(t)\, {}^{\mathbb{T}}_{t_0;z}I^{\alpha}_{t}\left[{}^{\mathbb{T}}_{t_0;z}D^{\alpha}_{t}y(t)\right] \\
&= z^{\Delta}(t)\, {}^{\mathbb{T}}_{t_0;z}I^{\alpha}_{t}f(t, y(t)) \\
&= \frac{z^{\Delta}(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(z(t)-z(s))^{\alpha-1}z^{\Delta}(s)f(s, y(s))\Delta s.
\end{aligned}
$$

Théorème 4.1 *Soit* $f : \mathcal{J} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue et supposons qu'il existe une constante* $L > 0$ *telle que :*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq L\|u - v\|_{\infty}$$

pour $t \in \mathcal{J}$ *et* $u, v \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$. *Si*

$$\frac{Lz^{\Delta}(t)M_{\alpha}(t)}{(t-t_0)\,\Gamma(\alpha)} < 1, \qquad t \in \mathcal{J}, \tag{3}$$

où

$$M_{\alpha}(t) = \frac{\int_{t_0}^{t}(z(t)-z(s))^{\alpha-1}z^{\Delta}(s)ds}{t-t_0} \tag{4}$$

Alors problème (1) *a une solution unique sur* $\mathcal{J}$.

Preuve 4.2 *Nous transformons le problème* (1) *en un problème de point fixe. considérer l'opérateur* $F : \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ *définie par*

$$F(y)(t) = \frac{z^{\Delta}(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(z(t)-z(s))^{\alpha-1}z^{\Delta}(s)f(s, y(s))\Delta s \tag{5}$$

Nous devons prouver que F *a un point fixe, ce qui est une solution unique de* (1) *sur* $\mathcal{J}$. *Pour cela, nous montrons que* F *est une contraction.*

Soit $x, y \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$. *Pour* $t \in \mathcal{J}$, *on a :*

$$\begin{aligned}|F(x)(t) - F(y)(t)| &= \left| \frac{z^\Delta(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t) - z(s))^{\alpha-1} z^\Delta(s)[f(s, x(s)) - f(s, y(s))]\Delta s \right| \\ &\leq \frac{z^\Delta(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t) - z(s))^{\alpha-1} z^\Delta(s)|f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\Delta s \\ &\leq \frac{Lz^\Delta(t)\|x - y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t) - z(s))^{\alpha-1} z^\Delta(s)\Delta s \\ &\leq \frac{Lz^\Delta(t)\|x - y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t) - z(s))^{\alpha-1} z^\Delta(s) ds\end{aligned}$$

Ensuite, il résulte de (4) *que*

$$|F(x)(t) - F(y)(t)| \leq \frac{Lz^\Delta(t) M_\alpha(t)\,(t - t_0)}{\Gamma(\alpha)} \|x - y\|_\infty$$

Par (3) , *F est une contraction et donc, par le théorème de cartographie de contraction, nous déduire que F a un point fixe unique. Ce point fixe est la solution unique de* (1). *Maintenant, nous donnons notre deuxième résultat principale, qui est un résultat d'existence basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, appliquée à des systèmes complètement continues.*

Théorème 4.2 *On suppose que* $f : \mathcal{J} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *soit une fonction bornée rd-continue tel qu'il existe* $N > 0$ *avec* $|f(t, y)| \leq N$ *pour tout* $t \in \mathcal{J}, y \in \mathbb{R}$. *Alors le problème* (1) *a une solution sur* $\mathcal{J}$.

Preuve 4.3 *Nous utilisons le théorème à points fixes de Schauder pour prouver que F définie par :* (5) *a un point fixe. La preuve est donnée en quatre étapes. Étape* 1 *: F est continue. Soit* y_n *une suite telle que* $y_n \to y$ *dans* $\mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$.*Ensuite, pour chaque* $t \in \mathcal{J}$,

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{z^{\Delta}(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t)-z(s))^{\alpha-1} z^{\Delta}(s) \left| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \right| \Delta s \\
&\leq \frac{z^{\Delta}(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t)-z(s))^{\alpha-1} z^{\Delta}(s) \sup_{s\in\mathcal{J}} \left| f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) \right| \Delta s \\
&= \frac{z^{\Delta}(t) \left\| f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot)) \right\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t)-z(s))^{\alpha-1} z^{\Delta}(s) \Delta s \\
&\leq \frac{z^{\Delta}(t) \left\| f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot)) \right\|_{\infty}}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t)-z(s))^{\alpha-1} z^{\Delta}(s) ds \\
&\leq \frac{z^{\Delta}(t) M_{\alpha}(t) (t-t_0)}{\Gamma(\alpha)} \left\| f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot)) \right\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

Puisque f est une fonction continue, nous avons :

$$|F(y_n)(t) - F(y)(t)|$$

$$\leq \frac{z^{\Delta}(t) M_{\alpha}(t) (t-t_0)}{\Gamma(\alpha)} \left\| f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot)) \right\|_{\infty} \longrightarrow 0$$

comme $n \to \infty$.
Étape 2 : la carte F envoie des ensembles liés en ensembles liés en $\mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$. Il est assez pour montrer qu'il existe une constante l positive telle que :

$$F(y) \in B_l = \{F(y) \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R}) : \|\mathrm{F}(y)\|_{\infty} \leq l\}$$

Par hypothèse, pour chaque $t \in \mathcal{J}$, on a :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{F}(y)(t)| &\leq \frac{z^{\Delta}(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t)-z(s))^{\alpha-1} z^{\Delta}(s) |f(s, y(s))| \Delta s \\
&\leq \frac{z^{\Delta}(t) N}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t)-z(s))^{\alpha-1} z^{\Delta}(s) \Delta s \\
&\leq \frac{z^{\Delta}(t) N}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t)-z(s))^{\alpha-1} z^{\Delta}(s) ds \\
&\leq \frac{z^{\Delta}(t) N M_{\alpha}(t) (t-t_0)}{\Gamma(\alpha)} = l
\end{aligned}$$

Étape 3 :la carte F envoie bornée ensembles bornée en ensembles équi-continues dans $\mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{R})$. Soit $t_1,t_2\in\mathcal{J}$,$t_1<t_2$. Ensuite

$$\begin{aligned}
&|F(y)\,(t_2)-F(y)\,(t_1)| \\
&\leq \frac{z^{\Delta}(t)}{\Gamma(\alpha)}|\int_{t_0}^{t_1}\left(z\left(t_1\right)-z(s)\right)^{\alpha-1}z^{\Delta}(s)f(s,y(s))\Delta s \\
&-\int_{t_0}^{t_2}\left(z\left(t_2\right)-z(s)\right)^{\alpha-1}z^{\Delta}(s)f(s,y(s))\Delta s| \\
&\leq \frac{z^{\Delta}(t)}{\Gamma(\alpha)}|\int_{t_0}^{t_1}\left(\left(z\left(t_1\right)-z(s)\right)^{\alpha-1}-\left(z\left(t_2\right)-z(s)\right)^{\alpha-1}\right. \\
&+\left(z\left(t_2\right)-z(s)\right)^{\alpha-1})z^{\Delta}(s)f(s,y(s))\Delta s \\
&-\int_{t_0}^{t_2}\left(z\left(t_2\right)-z(s)\right)^{\alpha-1}z^{\Delta}(s)f(s,y(s))\Delta s| \\
&\leq \frac{z^{\Delta}(t)N}{\Gamma(\alpha)}|\int_{t_0}^{t_1}\left(\left(z\left(t_1\right)-z(s)\right)^{\alpha-1}-\left(z\left(t_2\right)-z(s)\right)^{\alpha-1}\right)z^{\Delta}(s)\Delta s \\
&+\int_{t_1}^{t_2}\left(z\left(t_2\right)-z(s)\right)^{\alpha-1}z^{\Delta}(s)\Delta s| \\
&\leq \frac{z^{\Delta}(t)N}{\Gamma(\alpha)}|\int_{t_0}^{t_1}\left(\left(z\left(t_1\right)-z(s)\right)^{\alpha-1}-\left(z\left(t_2\right)-z(s)\right)^{\alpha-1}\right)z^{\Delta}(s)ds \\
&+\int_{t_1}^{t_2}\left(z\left(t_2\right)-z(s)\right)^{\alpha-1}z^{\Delta}(s)ds|
\end{aligned}$$

Comme $t_1\to t_2$, la partie droite l'inégalité ci-dessus tend à zéro. Comme conséquence des étapes 1 à 3, ainsi que du théorème d'Arzela-Ascoli, nous conclure que $F:\mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{R})\to\mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{R})$ est complètement continue.
Étape 4 : délimitation a priori des solutions. Il reste à montrer que l'ensemble
$\mathcal{E}=\{y\in\mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{R}):y=\lambda F(y),\quad 0<\lambda<1\}$
est borné. Soit $y\in\mathcal{E}$ un élément quelconque. Ensuite, pour chaque $t\in\mathcal{J}$,
$y(t)=\lambda F(y)(t)=\lambda\frac{z^{\Delta}(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(z(t)-z(s))^{\alpha-1}z^{\Delta}(s)f(s,y(s))\Delta s$
Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq \left| \frac{z^{\Delta}(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t)-z(s))^{\alpha-1} z^{\Delta}(s) f(s,y(s)) \Delta s \right| \\
&\leq \frac{z^{\Delta}(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t)-z(s))^{\alpha-1} z^{\Delta}(s) |f(s,y(s))| \Delta s \\
&\leq \frac{z^{\Delta}(t) N}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t)-z(s))^{\alpha-1} z^{\Delta}(s) \Delta s \\
&\leq \frac{z^{\Delta}(t) N}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} (z(t)-z(s))^{\alpha-1} z^{\Delta}(s) ds \\
&\leq \frac{z^{\Delta}(t) N M_{\alpha}(t) \left(t-t_0\right)}{\Gamma(\alpha)}
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{J}$ est borné. En conséquence du théorème des points fixes de Schauder, nous concluons que F a un point fixe, qui est la solution de (1).

4.2 Exemples

Quand la fonction z est l'identité Id, nous avons :

$$I_{a;Id}^{\alpha} = I_{a}^{\alpha}$$

c'est-á-dire que nous obtenons l'intégrale fractionnaire á gauche ordinaire de Riemann-Liouville.
Dans ce cas trés particulier, l'existence d'une solution au probléme
fractionnaire (1) sur des échelles de temps.
Nous couvrons ici la situation générale : existence de solution à probléme de la valeur initiale fractionnaire (1), pour une fonction générale z. Soit $z(t) = t^2, \mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}}, \alpha = \frac{1}{2}$, et $t_0 = 0$. Alors , $\sigma(t) = 2t$

$$\begin{aligned}
\left(I_{0;t^2}^{\alpha} f\right)(t) &= \frac{\left(t^2\right)^{\Delta}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{t} \left(t^2 - s^2\right)^{\alpha-1} \left(s^2\right)^{\Delta} f(s) \Delta s \\
&= \frac{\left(t^2\right)^{\Delta}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t} \left(t^2 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(s^2\right)^{\Delta} f(s) \Delta s
\end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$F(y)(t) = \frac{\left(t^2\right)^{\Delta}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t} \left(t^2 - s^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(s^2\right)^{\Delta} f(s, y(s)) \Delta s$$

et nous avons :

$$
\begin{aligned}
|F(x)(t)-F(y)(t)| &\leq \frac{(t+\sigma(t))L\|x-y\|_\infty}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left(t^2-s^2\right)^{-\frac{1}{2}} (s+\sigma(s))\Delta s \\
&= \frac{(t+2t)L\|x-y\|_\infty}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left(t^2-s^2\right)^{-\frac{1}{2}} (s+2s)\Delta s \\
&\leq \frac{3tL\|x-y\|_\infty}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \left(t^2-s^2\right)^{-\frac{1}{2}} (3s)ds \\
&\leq \frac{9t^2L}{\sqrt{\pi}}\|x-y\|_\infty
\end{aligned}
$$

Dans cet exemple

$$M_\alpha(t) = \frac{\int_0^t \left(t^2-s^2\right)^{-\frac{1}{2}} (3s)ds}{t}$$

est réduit $M_\alpha(t) = 3$.choisissez b tel que
$b = \frac{9t^2L}{\sqrt{\pi}} < 1$
Alors les conditions du Théoréme 4.1 sont satisfaites, et nous concluons qu'il existe une solution $y \in C(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ de fonction (1).

Conclusion

Notre but principal dans ce mémoire est détudier de la dérivée et l'intégrale fractionnaire sur les échelles de temps,et l'existence et l'unicité de solution pour premiére fraction de Riemann-Liouville probléme de valeur sur échelle de temps. Ce résultat est obtenu par l'utilisation du théorème de point fixe de Banach.

Bibliographie

[1] Gusein Sh.Jusein Ov : *Integration on bone Sales*

[2] N.R.O.Bastos,D.Mozyrska,D.F.M.Torres,Fractional derivatives and integral on time scales via the inverse generalized Laplace transform.

[3] Benkhettou, N., Hassani, S., Torres, D.F.M., in press-b. A conformable fractional calculus on arbitrary time scales.

[4] N. R. O. Bastos, R. A. C. Ferreira and D. F. M. Torres, Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations.