REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE TIARET
Faculté des mathématiques et informatiques
Département de Mathématiques

Mémoire de Master 2

Spécialité : *Mathématiques*
Option : *Analyse fonctionnelle et équations différentielles*

Présenté par

HAMEURLAINE HADJER
BOUHEKA REKIA
HEMAID KHALDIA

Dérivation fractionnaire au sens de Hilfer et application aux équations différentielles fractionnaires

Encadreur :

M.HEDIA

Table des matières

0.1 Introduction

De nos jours, les équations différentielles fractionnaires ont reçu beaucoup d'attention car elles ont immergée dans diverses applications de la science de l'ingénierie à partir de l'étude de la description exacte des phénomènes complexes tels que le contrôle, la viscoélasticité, l'électrochimie, les milieux poreux et de nombreux autres branches de la science.
Quand on introduit la notion de la dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de la dérivée à la fonction dérivée elle-même, et par là -même introduire la dérivée seconde. Puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration, opération inverse de la dérivée, peut éventuellement être considérée comme une dérivée d'ordre " moins un". On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordres successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire. Il existe plusieurs définitions des dérivées fractionnaires mais les plus populaires sont aux sens de Riemann-liouville et Caputo voir le chapitre (2), Pendant longtemps plusieurs définitions, suite aux travaux de Joseph Liouville et Bernhard Riemann au milieu du 19ème siècle, ont coexisté sans qu'il y ait une parfaite compatibilité entre elles. Récemment, Hilfer a introduit un forme généralisée de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-liouville.
Parmi ces définitions nous sommes intéressée de définition de la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer ce qui est un interpolation entre les dérivées fractionnaires aux sens de Riemann-liouville et Caputo.

Dans ce mémoire nous avons comme un objectif principal d'étudier la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer et application aux équations différentielles.

Notre mémoire est organisée comme suit : dans le premier chapitre on présente quelques définitions et lemmes qui nous seront utiles pour la suite de ce travail, puis on présente dans le deuxième chapitre les notions de la dérivation fractionnaire aux sens de Riemann-Liouville et Caputo, dans le troisième chapitre on définie la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer, après dans le chapitre 4 on applique les dérivées fractionnaires aux sens de Riemann-Liouville et Caputo aux équations différentielles pour étudier l'existence et l'unicité des solutions de problème fractionnaire de Cauchy en utilisant le théorème du point fixe de Banach, et dans le dernier chapitre on applique la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer aux équations différentielles pour étudier l'existence et l'unicité des solutions de problème fractionnaire de Cauchy à l'aide du théorème du point fixe de Banach.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Quelques fonctions spéciales

1.1.1 La fonction Gamma

Définition 1.1 [4]
La fonction Gamma d'Euler est une fonction qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels, et même aux nombres complexes. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, on définit la fonction Gamma par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \, t^{z-1} \, dt. \tag{1.1}$$

En intégrant par partie dans (1.1)*, on montre que*

$$\Gamma(z+1) = z \, \Gamma(z), \quad R(z) > 0. \tag{1.2}$$

La propriété (1.2) *permet d'établir que*

$$\Gamma(n+1) = n! \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.1.2 la fonction Bêta

Définition 1.2 [4]
La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombres complexes z et w par :

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1} \, (1-t)^{w-1} \, dt \quad R(z) > 0, \; R(w) > 0. \tag{1.3}$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\ \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\quad R(z)>0,\ R(w)>0. \tag{1.4}$$

Il s'ensuit de (1.4) *que*

$$B(z,w)=B(w,z)\quad Re(z)>0,\ R(w)>0.$$

1.2 Intégrale de Riemann-Liouville

Définition 1.3 [4]

Soit $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue. On appelle intégrale de Riemann-Liouville de* f *l'intégrale suivante :*

$$(I_a^\alpha f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\ f(t)\ dt, \tag{1.5}$$

où α *est un réel (ou même complexe) convenablement choisi.*

Exemple 1

Considérons la fonction $f(x)=(x-a)^\beta$. *Alors*

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\ (t-a)^\beta\ dt. \tag{1.6}$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $t=a+(x-a)\tau$, *on a*

$$t : a \longrightarrow x,$$

donc

$$\tau : 0 \longrightarrow 1,$$

et

$$dt=(x-a)\ d\tau.$$

Alors

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (x-a)^{\alpha-1}\ (1-\tau)^{\alpha-1}\ (x-a)^\beta\ \tau^\beta\ (x-a)\ d\tau \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\ \tau^\beta\ d\tau. \end{aligned}$$

Mais

$$\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\ \tau^{\beta}\ d\tau = \beta(\alpha, \beta+1).$$

Donc

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\ \frac{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}, \end{aligned}$$

après utilisation la fonction bêta d'Euler, on a pour $\alpha = 1$

$$I_a^1(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}(x-a)^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1}(x-a)^{\beta+1},$$

car

$$\Gamma(z+1) = z\ \Gamma(z).$$

Proposition 1.1 [4]
Soit $f \in C^m([a,b))$. *Pour* x *fixé l'application* $\alpha \longrightarrow (I_a^{\alpha} f)(x)$ *définie pour* $Re(\alpha) > 0$ *est holomorphe.*

Proposition 1.2 [4]
Soit $f \in C^0([a,b))$. *Pour* α, β *complexes tels que* $Re(\alpha) > 0$ *et* $Re(\beta) > 0$ *on a*

$$I_a^{\alpha}(I_a^{\beta} f) = I_a^{\alpha+\beta} f.$$

Et pour $Re(\alpha) > 1$ *on a*

$$\frac{d}{dx} I_a^{\alpha} f = I_a^{\alpha-1} f. \tag{1.7}$$

Remarque 1
On a

$$(I_a^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x d\left[\frac{-(x-t)^{\alpha}}{\alpha}\right] f(t)\ dt.$$

Par une intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned} (I_a^{\alpha} f)(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha} f'(t)\ dt \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(a) + (I_a^{\alpha+1} f')(x). \end{aligned} \tag{1.8}$$

1.3 Théorème du point fixe de Banach

Théorème 1.1 [3]
Soit (U,d) un espace métrique complet non vide, $T : U \to U$ un opérateur tel que pour quelque soit $(u,v) \in U$ on a

$$d(Tu,Tv) \leq w\ d(u,v),\ 0 \leq w < 1,$$

alors l'opérateur T a un point fixe unique u^*. De plus, si $T^k,\ k \in \mathbb{N}$, un suite d'opérateurs définie par :

$$T^1 = T,\ T^k = TT^{k-1},\ k \in \mathbb{N}\backslash\{1\},$$

alors pour quelque soit $u_0 \in U$ la suite $\{T^k u_0\}_{k=1}^{+\infty}$ converge vers le point fixe u^*.

1.4 Quelques espaces et lemmes fondamentaux

Soit $0 < a < b < \infty$. On considère les espaces de Banach suivants :
1)$C[a,b]$ l'espace des fonctions continues de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|f\|_c = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

2)$C_\gamma[a,b] = \{f :]a,b] \to \mathbb{R}, f \cdot g \in C[a,b] \qquad g(x) = (x-a)^\gamma\ 0 \leq \gamma < 1\}$, muni de la norme :

$$\|f\|_{c_\gamma} = \sup_{[a,b]} |(x-a)^\gamma f(x)|.$$

3)$C_\gamma^n[a,b] = \left\{f \in C^{n-1}[a,b], f^{(n)} \in C_\gamma[a,b]\ n \in \mathbb{N}\right\}$, muni de la norme :

$$\|f\|_{c_\gamma^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\|_c + \|f^{(n)}\|_{c_\gamma}.$$

Lemme 1.1 [3]
Soit $\alpha > 0$ et $0 \leq \gamma < 1$. Alors I_{a+}^α est borné de $C_\gamma[a,b]$ en $C_\gamma[a,b]$.

Lemme 1.2 [3]
Pour $\alpha > 0$, $I_{a+}^\alpha : C[a,b] \to C[a,b]$.

Lemme 1.3 [3]

Soit $f \in L^1(a,c)$ *(*$L^1(a,c)$ *est l'espace des fonctions intégrables sur* (a,c)*) alors*

$$\lim_{x\to c+}\int_a^c (x-t)^{\alpha-1}\ f(t)\ dt = \int_a^c (c-t)^{\alpha-1}\ f(t)\ dt = \Gamma(\alpha)\ I_{a+}^{\alpha} f(c) \quad \alpha > 0.$$

Lemme 1.4 [3]

Soit $\alpha > 0$ *et* $0 \leq \gamma < 1$. *Si* $\gamma \leq \alpha$, *alors* I_{a+}^{α} *est bornée de* $C_\gamma[a,b]$ *en* $C[a,b]$.

Lemme 1.5 [3]

Soient $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \gamma < 1$. *Si* $f \in C_\gamma[a,b]$ *et* $I_{a+}^{1-\alpha} f \in C_\gamma^1[a,b]$, *alors*

$$I_{a+}^{\alpha} \circ \left(\frac{d}{dx} I_{a+}^{1-\alpha} f\right)(x) = f(x) - \frac{I_{a+}^{1-\alpha} f(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1} \quad \forall x \in]a,b].$$

Lemme 1.6 [3]

Soit $0 \leq \gamma < 1$ *et* $f \in C_\gamma[a,b]$, *alors*

$$I_{a+}^{\alpha} f(a) = \lim_{x\to a^+} I_{a+}^{\alpha} f(x) = 0 \qquad 0 \leq \gamma < \alpha.$$

Lemme 1.7 [3]

Soient $0 \leq \gamma < 1$, $a < c < b$, $g \in C[c,b]$ *et* $g \in C_\gamma[a,c]$ *alors* g *est continue au point* c *et* $g \in C_\gamma[a,b]$.

Chapitre 2

Dérivation fractionnaire

2.1 Dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.1 [4]

Soit $\alpha \in]m-1, m[$ *avec* $m \in \mathbb{N}^*$*, on appelle dérivée d'ordre* α *au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par :*

$$({}^{RL}D_a^{\alpha} f)(x) = \left(\tfrac{d}{dx}\right)^m [(I_a^{m-\alpha} f)(x)].$$

Exemple 2

Prenons la fonction $f(x) = (x-a)^{\beta}$, avec β un réel on aura

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \circ I_a^{m-\alpha}(x-a)^{\beta} \qquad (2.1)\\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}(x-a)^{\beta+m-\alpha}\right]\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^{\beta+m-\alpha}\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}\\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé la formule :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^\beta &= \beta(\beta-1)...(\beta-m+1)(x-a)^{\beta-m} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)}(x-a)^{\beta-m}.\end{aligned}$$

Il est claire que la formule (2.2) devient pour $\alpha = 1$ à

$$\begin{aligned}{}^{RL}D_a^1(x-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1} \\ &= \beta(x-a)^{\beta-1} \\ &= \frac{d}{dx}(x-a)^\beta.\end{aligned}$$

Remarque 2
Dans l'exemple précédent si on prend $\beta = 0$ on obtient

$$\begin{aligned}{}^{RL}D_a^\alpha 1 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \quad (\ \Gamma(1) = 1\ ).\end{aligned}$$

C'est-à-dire que La dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

Lemme 2.1 [4]
Soit $\alpha \in\ ]m-1, m[$ et f une fonction vérifiant ${}^{RL}D_a^\alpha f = 0$ (appartenant au noyau de l'opérateur ${}^{RL}D_a^\alpha$). Alors

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)}(x-a)^{j+\alpha-m},$$

oú les C_j sont des constantes quelconques.

Preuve 1 *Comme $({}^{RL}D_a^\alpha f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m [I_a^{m-\alpha} f](x) = 0$, alors on a*

$$[I_a^{m-\alpha} f](x) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j (x-a)^j.$$

Par application aux deux membres I_a^α on obtient

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha \circ [I_a^{m-\alpha} f](x) &= I_a^\alpha \circ \sum_{j=0}^{m-1} C_j (x-a)^j \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} C_j I_a^\alpha (x-a)^j \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} C_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} (x-a)^{j+\alpha}.
\end{aligned}$$

Par la dérivation classique on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}\right)^m [I_a^m f](x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(\sum_{j=0}^{m-1} C_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} (x-a)^{j+\alpha}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} C_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^{j+\alpha} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} C_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha)} \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+\alpha+1-m)} (x-a)^{j+\alpha-m} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} C_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} (x-a)^{j+\alpha-m}.
\end{aligned}$$

Proposition 2.1

L'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville $^{RL}D_a^\alpha$ *possède les propriétés suivantes :*

1. $^{RL}D_a^\alpha$ *est un opérateur linéaire.*
2. $^{RL}D_a^\alpha \circ ^{RL} D_a^\beta \neq ^{RL} D_a^\beta \circ ^{RL} D_a^\alpha \neq ^{RL} D_a^{\alpha+\beta}$.
3. $\lim\limits_{\alpha\to m-1} {}^{RL}D_a^\alpha f = f^{(m-1)}$ *et* $\lim\limits_{\alpha\to m} {}^{RL}D_a^\alpha f = f^{(m)}$.
4. $^{RL}D_a^\alpha \circ I_a^\alpha = id$.
5. $[(I_a^\alpha \circ ^{RL} D_a^\alpha) f](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j-m+\alpha}}{\Gamma(j-m+\alpha+1)} \left\{ \lim_{\substack{x\to a\\ >}} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{m-\alpha} f \right](x) \right\}$.

Preuve 2 *Pour la linéarité c'est une simple vérification :*
Soient $f,\ g \in C([a,b[)$ *et Soient* $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
[{}^{RL}D_a^{\alpha}(\lambda\ f + \delta\ g)](x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[I_a^{m-\alpha}(\lambda\ f + \delta\ g)(x)\right] \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\lambda\ I_a^{m-\alpha} f(x) + \delta\ I_a^{m-\alpha} g(x)\right] \\
&= \lambda \left(\frac{d}{dx}\right)^m I_a^{m-\alpha} f(x) + \delta \left(\frac{d}{dx}\right)^m I_a^{m-\alpha} g(x) \\
&= \lambda\ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) + \delta\ {}^{RL}D_a^{\alpha} g(x) \\
&= \left[\lambda\ {}^{RL}D_a^{\alpha} f + \delta\ {}^{RL}D_a^{\alpha} g\right](x),
\end{aligned}$$

donc

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha}(\lambda\ f + \delta\ g) = \lambda\ {}^{RL}D_a^{\alpha} f + \delta\ {}^{RL}D_a^{\alpha} g. $$

Pour le troisième point on a
Si f *est de classe* C^m *alors on peut écrire pour* $0 \leq j \leq m-1$

$$ f(x) = [I_a^m f^{(m)}](x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a). \tag{2.3} $$

Où
I_a^m *: est l'intégrale entier d'ordre* m.
$f^{(m)}$ *: la dérivée d'ordre* m.
$f^{(j)}(a)$ *: la dérivée d'ordre* j *appliquée à* a.

Appliquons l'opérateur $I_a^{m-\alpha}$ *aux deux membres de* (2.3) *on obtient*

$$
\begin{aligned}
(I_a^{m-\alpha} f)(x) &= I_a^{m-\alpha}\left[I_a^m f^{(m)}(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)\right] \\
&= I_a^{m-\alpha}\left[I_a^m f^{(m)}\right](x) + I_a^{m-\alpha}\left[\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)\right] \\
&= (I_a^{2m-\alpha} f^{(m)})(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} I_a^{m-\alpha}(x-a)^j f^{(j)}(a) \\
&= (I_a^{2m-\alpha} f^{(m)})(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+m-\alpha)}(x-a)^{j+m-\alpha} f^{(j)}(a),
\end{aligned}
$$

comme $\Gamma(j+1) = j!$ *alors*

$$
(I_a^{m-\alpha} f)(x) = (I_a^{2m-\alpha} f^{(m)})(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j+m-\alpha}}{\Gamma(j+1+m-\alpha)} f^{(j)}(a).
$$

Appliquons l'opérateur $\left(\frac{d}{dx}\right)^m$ *aux deux membres de l'égalité*

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\left(I_a^{m-\alpha} f\right)(x)\right] &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[\left(I_a^{2m-\alpha} f^{(m)}\right)(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j+m-\alpha}}{\Gamma(j+1+m-\alpha)} f^j(a)\right] \\
&= [I_a^{m-\alpha} f^{(m)}](x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j+1-\alpha)} f^j(a).
\end{aligned}
$$

(d'après la formule (1.7)*).*

Quand $\alpha \underset{<}{\longrightarrow} m$ *on obtient*

$$
\lim_{\substack{\alpha \to m \\ <}} ({}^{RL}D_a^\alpha f)(x) = \lim_{\substack{\alpha \to m \\ <}} (I_a^{m-\alpha} f^{(m)})(x) + \lim_{\substack{\alpha \to m \\ <}} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j+1-\alpha)} f^{(j)}(a).
$$

Mais l'intégrale de Riemann-Liouville est holomorphe en α *donc continue et de là*

$$
\lim_{\substack{\alpha \to m \\ <}} (I_a^{m-\alpha} f^{(m)})(x) = [I_a^0 f^{(m)}](x) = f^{(m)}(x),
$$

où

$$\begin{aligned}[I_a^0 f^{(m)}](x) &= f^{(m)}(a) + (I_a^1 f^{(m+1)})(x)\\ &= f^{(m)}(a) + \int_a^x f^{(m+1)}(t)\ dt\\ &= f^{(m)}(x),\end{aligned}$$

(d'après la formule (1.8)*).*

Comme la fonction gamma est continue on a

$$\lim_{\substack{\alpha\to m\\ <}} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(j+1-\alpha)} f^{(j)}(a) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j-m}}{\Gamma(j+1-m)} f^{(j)}(a).$$

On a

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j-m}}{\Gamma(j+1-m)} f^{(j)}(a) = 0.$$

En effet

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j-m}}{\Gamma(j+1-m)} f^{(j)}(a) &= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-m)} (x-a)^{j-m}\ \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1)}\\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^j\ \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j+1)}.\end{aligned}$$

Puisque chaque terme $\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^j$ *est nul (car* $0 \le j \le m-1$*) alors*

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j-m}}{\Gamma(j+1-m)} f^{(j)}(a) = 0.$$

D'où

$$\lim_{\substack{\alpha\to m\\ <}} ({}^{RL}D_a^\alpha f)(x) = f^{(m)}(x),$$

et avec la même manière on obtient

$$\lim_{\substack{\alpha\to (m-1)\\ <}} ({}^{RL}D_a^\alpha f)(x) = f^{(m-1)}(x).$$

Pour la quatrième propriété on a

$$\begin{aligned}
({}^{RL}D_a^\alpha \circ I_a^\alpha)f &= \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m \circ I_a^{m-\alpha} \circ I_a^\alpha\right] f \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m [(I_a^{m-\alpha} \circ I_a^\alpha)f] \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m [(I_a^m)f] \\
&= I_a^0 f \\
&= f.
\end{aligned}$$

Pour la dernière propriété on utilise la propriété 4, *avec*

$$({}^{RL}D_a^\alpha \circ I_a^\alpha \circ^{RL} D_a^\alpha)f =^{RL} D_a^\alpha f,$$

qui donne

$${}^{RL}D_a^\alpha[(I_a^\alpha \circ^{RL} D_a^\alpha)f - f] = 0,$$

à partir du lemme (2.1) *on aura*

$$[(I_a^\alpha \circ^{RL} D_a^\alpha)f](x) - f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j(f) \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)}(x-a)^{j+\alpha-m}. \qquad (2.4)$$

Par application aux deux membres $I_a^{m-\alpha}$ *on obtient*

$$I_a^{m-\alpha}[\ [(I_a^\alpha \circ^{RL} D_a^\alpha)f](x) - f(x)\ ] = I_a^{m-\alpha}\left[\sum_{j=0}^{m-1} C_j(f) \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)}(x-a)^{j+\alpha-m}\right]$$

$$\begin{aligned}
[(I_a^m \circ^{RL} D_a^\alpha)f](x) - [I_a^{m-\alpha} f](x) &= \sum_{j=0}^{m-1} C_j(f) \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} I_a^{m-\alpha}(x-a)^{j+\alpha-m} \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} C_j(f) \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} \frac{\Gamma(j+\alpha-m+1)}{\Gamma(j+1)}(x-a)^j \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} C_j(f)\ (x-a)^j.
\end{aligned}$$

Or si $0 \leq j \leq m-1$ *alors* $\lim_{x \to a^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j [I_a^m g](x) = \lim_{x \to a^+} [I_a^{m-j} g](x) = 0$ *et aussi*

$$\lim_{x \to a^+} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\right)^j (x-a)^k = \begin{cases} j! \text{ si } k = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Donc

$$j! c_j(f) = -\lim_{x \to a^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j [I_a^{m-\alpha} f](x).$$

L'équation (2.4) *devient*

$$[(I_a^\alpha \circ^{RL} D_a^\alpha) f](x) - f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} - \lim_{x \to a^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^j [I_a^{m-\alpha} f](x) \frac{(x-a)^{j+\alpha-m}}{\Gamma(j+1+\alpha-m)},$$

d'où

$$[(I_a^\alpha \circ^{RL} D_a^\alpha) f](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j+\alpha-m}}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} \left\{ \lim_{x \to a^+} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{m-\alpha} f \right](x) \right\}.$$

2.2 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.2 [4]

Soit $\alpha \in]m-1, m[$ *et* $f \in C^m([a,b))$. *On appelle dérivée de* f *au sens de Caputo la fonction définie par :*

$$({}^C D_a^\alpha f)(x) = (I_a^{m-\alpha} f^{(m)})(x). \tag{2.5}$$

Remarque 3

On a

$${}^C D_a^\alpha (1) = 0,$$

c'est-à-dire que la dérivée de Caputo d'une constante est nulle.

Exemple 2

On a pour la dérivée d'une puissance

$${}^C D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha}.$$

En effet

$$\begin{aligned}
{}^C D_a^\alpha (x-a)^\beta &= I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x-a)^\beta\right] \\
&= I_a^{m-\alpha}\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)}(x-a)^{\beta-m}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)} I_a^{m-\alpha}(x-a)^{\beta-m} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-m)}\frac{\Gamma(\beta-m+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Proposition 2.2

L'opérateur de dérivation de Caputo possède les propriétés suivantes :

1. ${}^C D_a^\alpha [I_a^\alpha f] = f$.

2. *Si* ${}^C D_a^\alpha f = 0$ *alors* $f(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} C_j (x-a)^j$.

3. $I_a^\alpha[{}^C D_a^\alpha f](x) = f(x) - \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)$.

Preuve 3

Pour la première propriété on a

$$\begin{aligned}
{}^C D_a^\alpha [I_a^\alpha f] &= \left[I_a^{m-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dx}\right)^m\right][I_a^\alpha f] \\
&= I_a^{m-\alpha}\left[\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^m \circ I_a^\alpha\right) f\right] \\
&= I_a^{m-\alpha}[I_a^{\alpha-m} f] \\
&= I_a^0 f \\
&= f.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième propriété on a

$$\begin{aligned}
({}^C D_a^\alpha f)(x) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \left(I_a^{m-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dx}\right)^m f\right)(x) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad I_a^{m-\alpha}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x)\right] = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j (x-a)^j.
\end{aligned}$$

Pour la dernière propriété on a

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha [{}^C D_a^\alpha f]\,(x) \quad &= \quad I_a^\alpha \left[\left[\left(I_a^{m-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dx}\right)^m\right) f\right](x)\right] \\
&= \quad \left[\left(I_a^\alpha \circ I_a^{m-\alpha}\right) \circ \left(\frac{d}{dx}\right)^m f\right](x) \\
&= \quad \left(I_a^m \circ f^{(m)}\right)(x)\,.
\end{aligned}$$

Si f est continue et de classe C^m on a

$$f(x) = (I_a^m \circ f^{(m)})(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a).$$

Alors

$$(I_a^m \circ f^{(m)})(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a),$$

donc

$$I_a^\alpha [{}^C D_a^\alpha f](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a).$$

Lemme 2.2 [4]

Soit f continue sur $[a,b]$ et $\alpha > 0$, alors

$$\lim_{x\to a^+} (I_a^\alpha f)(x) = 0.$$

Preuve 4 *On a*

$$\begin{aligned}
|(I_a^\alpha f)(x)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)|\, dt \\
&\leq \frac{\sup\limits_{[a,b]} |f(t)|}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\, dt \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\, dt \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^\alpha.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $x \to a^+$ on obtient

$$\lim_{x\to a^+} (I_a^\alpha f)(x) = 0.$$

Corollaire 2.1 [4]

Si $0 < \alpha < 1$ et f de classe C^1 alors

$$(I_a^\alpha \circ^{RL} D_a^\alpha) f = f,$$

et

$$({}^C D_a^\alpha \circ I_a^\alpha) f = f.$$

Preuve 5 *D'après la propriété 5 de la proposition (2.1) et le lemme (2.2) on a*

$$\begin{aligned}
[(I_a^\alpha \circ^{RL} D_a^\alpha) f](x) &= f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \lim_{\substack{x\to a \\ >}} [I_a^{1-\alpha} f](x) \right\} \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Donc

$$(I_a^\alpha \circ^{RL} D_a^\alpha)f = f,$$

et d'après la propriété 1 *de la proposition* (2.2) *on obtient*

$$({}^C D_a^\alpha \circ I_a^\alpha)f = f.$$

Remarque 4 *C'est-à-dire que les dérivations au sens de Riemann-Liouville et de Caputo respectivement constituent l'inverse à droite et à gauche de l'opérateur de Riemann-Liouville(au moins sur les fonctions de classe C^1).*

Corollaire 2.2 [4]
Si $0 \leq \alpha,\ \beta \leq 1$ avec $\alpha + \beta \leq 1$ et f de classe C^1 alors

$$({}^C D_a^\alpha \circ^C D_a^\beta)f =^C D_a^{\alpha+\beta} f = ({}^C D_a^\beta \circ^C D_a^\alpha)f.$$

Preuve 6

$$\begin{aligned}
({}^C D_a^\alpha \circ^C D_a^\beta)f &= \left(I_a^{1-\alpha} \circ \frac{d}{dx} \circ I_a^{1-\beta} \circ \frac{d}{dx} \right) f \\
&= \left(I_a^{1-\alpha-\beta} \circ \underbrace{I_a^\beta \circ \frac{d}{dx}} \circ I_a^{1-\beta} \circ \frac{d}{dx} \right) f \\
&= \left(I_a^{1-\alpha-\beta} \circ \underbrace{{}^C D_a^{1-\beta} \circ I_a^{1-\beta}} \circ \frac{d}{dx} \right) f \\
&= \left(I_a^{1-\alpha-\beta} \circ \frac{d}{dx} \right) f \\
&= {}^C D_a^{\alpha+\beta} f,
\end{aligned}$$

où

$$I_a^\beta \circ \frac{d}{dx} =^C D_a^{1-\beta},$$

et

$${}^C D_a^{1-\beta} \circ I_a^{1-\beta} = id.$$

La commutativité résulte de la commutativité de l'addition des réels.

Chapitre 3

Dérivation fractionnaire au sens de Hilfer

Dans ce chapitre, nous étudions la dérivation fractionnaire au sens de Hilfer de deux paramètres.

Définition 3.1 [2]
Soit $\alpha \in \,]m-1, m[$ et $0 \leq \beta \leq 1$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $f \in C^m([a,b])$, on appelle dérivée d'ordre α et de type β au sens de Hilfer de f au point "a" la fonction définie par :

$$(D_a^{\alpha,\beta} f)(x) = \left(I_a^{\beta(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^m (I_a^{(1-\beta)(m-\alpha)} f) \right)(x).$$

où $I_a^{(.)}$ est l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville.

Particulièrement si $0 < \alpha < 1$ alors

$$\begin{aligned} (D_a^{\alpha,\beta} f)(x) &= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left(I_a^{(1-\beta)(1-\alpha)} f \right) \right)(x) \\ &= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (I_a^{(1-\gamma)} f) \right)(x) \\ &= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} D_a^{\gamma} f \right)(x), \end{aligned}$$

où $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$ et D_a^{γ} est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.
On introduit les espaces suivants :

$$C_{1-\gamma}^{\alpha,\beta}[a,b] = \left\{ f \in C_{1-\gamma}[a,b], D_a^{\alpha,\beta} f \in C_{1-\gamma}[a,b] \right\}.$$

$$C_{1-\gamma}^{\gamma}[a,b] = \{ f \in C_{1-\gamma}[a,b], D_a^{\gamma} f \in C_{1-\gamma}[a,b] \}.$$

D'après le lemme 1.1 on a

$$C^{\gamma}_{1-\gamma}[a,b] \subset C^{\alpha,\beta}_{1-\gamma}[a,b].$$

Lemme 3.1 [3]

Soit $f \in L^1(a,b)$ ($L^1(a,b)$ est l'espace de Lebesgue des fonctions intégrables sur (a,b)), si $D_a^{\beta(1-\alpha)}f$ existe et dans $L^1(a,b)$
alors

$$D_a^{\alpha,\beta} I_a^{\alpha} f = I_a^{\beta(1-\alpha)} D_a^{\beta(1-\alpha)} f.$$

Preuve 7

Soient $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$ *et* $f \in L^1(a,b)$

$$\begin{aligned}
(D_a^{\alpha,\beta} I_a^{\alpha} f)(x) &= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (I_a^{(1-\beta)(1-\alpha)} \circ I_a^{\alpha} f) \right)(x) \\
&= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (I_a^{(1-\beta)(1-\alpha)+\alpha} f) \right)(x) \\
&= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (I_a^{1-\beta+\alpha\beta} f) \right)(x) \\
&= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (I_a^{1-\beta(1-\alpha)} f) \right)(x) \\
&= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} D_a^{\beta(1-\alpha)} f \right)(x).
\end{aligned}$$

Lemme 3.2 [3]

Soient $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$ *et* $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$. *Si* $f \in C^{\gamma}_{1-\gamma}[a,b]$ *alors*

$$I_a^{\alpha} D_a^{\alpha,\beta} f = I_a^{\gamma} D_a^{\gamma} f,$$

et

$$D_a^{\gamma} I_a^{\alpha} f = D_a^{\beta(1-\alpha)} f.$$

Preuve 8

a) Soient $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$ *et* $f \in C^{\gamma}_{1-\gamma}[a,b]$

$$\begin{aligned}
(I_a^{\alpha} D_a^{\alpha,\beta} f)(x) &= I_a^{\alpha}[(I_a^{\beta(1-\alpha)} D_a^{\gamma} f)(x)] \\
&= (I_a^{\alpha} \circ I_a^{\beta(1-\alpha)}) D_a^{\gamma} f(x) \\
&= (I_a^{\alpha+\beta-\alpha\beta} D_a^{\gamma} f)(x) \\
&= (I_a^{\gamma} D_a^{\gamma} f)(x).
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
D_a^{\gamma} I_a^{\alpha} f &= \left(D_a^{\alpha+\beta-\alpha\beta} \circ I_a^{\alpha}\right) f \\
&= \left(\frac{d}{dx} I_a^{1-\alpha-\beta+\alpha\beta} \circ I_a^{\alpha}\right) f \\
&= \left(\frac{d}{dx} I_a^{1-\beta+\alpha\beta}\right) f \\
&= \left(\frac{d}{dx} I_a^{1-\beta(1-\alpha)}\right) f \\
&= D_a^{\beta(1-\alpha)} f.
\end{aligned}$$

Lemme 3.3 [3]

Soit $f \in L^1(a,b)$*. Si* $D_a^{\beta(1-\alpha)} f$ *existe et dans* $L^1(a,b)$
alors

$$D_a^{\alpha,\beta} I_a^{\alpha} f = I_a^{\beta(1-\alpha)} D_a^{\beta(1-\alpha)} f.$$

Preuve 9

Soient $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$ *et* $f \in L^1(a,b)$

$$\begin{aligned}
(D_a^{\alpha,\beta} I_a^{\alpha} f)(x) &= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (I_a^{(1-\beta)(1-\alpha)} \circ I_a^{\alpha} f) \right)(x) \\
&= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (I_a^{(1-\beta)(1-\alpha)+\alpha} f) \right)(x) \\
&= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (I_a^{1-\beta+\alpha\beta} f) \right)(x) \\
&= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dx} (I_a^{1-\beta(1-\alpha)} f) \right)(x) \\
&= \left(I_a^{\beta(1-\alpha)} D_a^{\beta(1-\alpha)} f \right)(x).
\end{aligned}$$

Lemme 3.4 [3]

Soient $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$ *et* $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$.

Si $f \in C_{1-\gamma}[a,b]$ *et* $I_a^{1-\beta(1-\alpha)} f \in C_{1-\gamma}^1[a,b]$ *alors* $D_a^{\alpha,\beta} I_a^{\alpha} f$ *existe dans* $(a,b]$,

et

$$D_a^{\alpha,\beta} I_a^{\alpha} f(x) = f(x) \qquad x \in (a,b].$$

Preuve 10
D'après le lemme (3.1) *on a*

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha,\beta} I_a^{\alpha} f(x) &= I_a^{\beta(1-\alpha)} D_a^{\beta(1-\alpha)} f(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Proposition 3.1
Soient $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$, *et* $f \in C_{1-\gamma}^{\gamma}[a,b]$ *alors*

$$D_a^{\alpha,0} f = ^{RL} D_a^{\alpha} f,$$

et

$$D_a^{\alpha,1} f = ^{C} D_a^{\alpha} f.$$

Preuve 11
a)Si $\beta = 0$

$$\begin{aligned} (D_a^{\alpha,0} f)(x) &= \left(I_a^0 \circ \frac{d}{dx} \circ I_a^{1-\alpha} f \right)(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx} (I_a^{1-\alpha} f) \right)(x) \\ &= (^{RL} D_a^{\alpha} f)(x). \end{aligned}$$

b)Si $\beta = 1$

$$\begin{aligned} (D_a^{\alpha,1} f)(x) &= \left(I_a^{1-\alpha} \circ \frac{d}{dx} \circ I_a^0 f \right)(x) \\ &= \left(I_a^{1-\alpha} \circ \frac{d}{dx} f \right)(x) \\ &= (^{C} D_a^{\alpha} f)(x). \end{aligned}$$

Exemple 3

Prenons la fonction $f(x) = (x-a)^{\delta}$

$$\begin{aligned}
D_a^{\alpha,\beta}(x-a)^{\delta} &= I_a^{\beta(m-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(I_a^{(1-\beta)(m-\alpha)}(x-a)^{\delta}\right) \\
&= I_a^{\beta(m-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m \left(\frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma((1-\beta)(m-\alpha)+\delta+1)}(x-a)^{(1-\beta)(m-\alpha)+\delta}\right) \\
&= I_a^{\beta(m-\alpha)}\left(\frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(1-\alpha-\beta m+\alpha\beta+\delta)}(x-a)^{\alpha\beta+\delta-\alpha-\beta m}\right) \\
&= \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(1+\delta-\alpha)}(x-a)^{\delta-\alpha} \\
&= {}^{RL}D_a^{\alpha}(x-a)^{\delta}.
\end{aligned}$$

Chapitre 4

Application de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et Caputo aux équations différentielles

4.1 Application de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville aux équations différentielles

Nous allons construire un théorème d'existence et d'unicité des solutions de problème fractionnaire pas à pas puis on lance le théorème. Nous allons travailler avec la propriété 5 de la proposition (2.1) avec $a = 0$
et $0 < \alpha < 1$ pour plus de commodité. On note I^α et D^α au lieu de I_a^α et ${}^{RL}D_a^\alpha$.

$$[(I^\alpha \circ D^\alpha)f](x) = f(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lim_{x\to 0^+} (I^{1-\alpha}f)(x). \tag{4.1}$$

Nous avons vu précédemment que si f est continue sur $[0, b]$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} (I^{1-\alpha}f)(x) = 0$ et donc $I^\alpha \circ D^\alpha f(x) = f(x)$, de là l'espace des fonctions dans lequel nous allons considérer les équations différentielles sera un espace où cette limite est finie sans être forcément nulle.

Lemme 4.1 [4]
Si $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1-\alpha} f(x) = c$ *et* f *continue sur* $]0, b]$,
alors

$$\lim_{x\to 0^+} (I^{1-\alpha}f)(x) = c\ \Gamma(\alpha).$$

Preuve :

$$\begin{aligned}(I^{1-\alpha}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t)\ dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\ t^{\alpha-1}\ t^{1-\alpha} f(t)\ dt.\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1-\alpha}f(x)$ existe, alors la fonction $x^{1-\alpha}f(x)$ est prolongeable par continuité à $[0,b]$.

D'où

$$(I^{1-\alpha}f)(x) - c\ \Gamma(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\ t^{\alpha-1}\ [t^{1-\alpha}f(t) - c]\ dt.$$

pour que cette égalité est vraie la fonction Γ doit vérifier :

$$c\ \Gamma(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\ t^{\alpha-1} c\ dt.$$

En effet

$$\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\ t^{\alpha-1}\ dt = \int_0^x x^{-\alpha}\ \left(1-\frac{t}{x}\right)^{-\alpha}\ t^{\alpha-1}\ dt.$$

On pose

$$\frac{t}{x} = u,$$

alors

$$dt = x\ du.$$

On a

$$t : 0 \longmapsto x \Rightarrow u : 0 \longmapsto 1,$$

donc

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\ t^{\alpha-1}\ dt &= \int_0^1 x^{-\alpha}\ (1-u)^{-\alpha}\ (xu)^{\alpha-1} x\ du \\ &= \int_0^1 (1-u)^{-\alpha}\ u^{\alpha-1}\ du \\ &= \beta(1-\alpha,\alpha).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\, t^{\alpha-1}c\, dt &= \frac{c\,\beta(1-\alpha,\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \\
&= \frac{c\,\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1)} \\
&= c\,\Gamma(\alpha) \quad (\Gamma(1)=1).
\end{aligned}$$

Donc reprenons la preuve :

$$(I^{1-\alpha}f)(x) - c\,\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\, t^{\alpha-1}\, [t^{1-\alpha}f(t)-c]\, dt.$$

Comme la fonction $t \longmapsto t^{1-\alpha}f(t)-c$ est continue sur $[0,b]$ qui est compact alors $\sup\limits_{[0,b]} |t^{1-\alpha}f(t)-c|$ existe

$$\begin{aligned}
|(I^{1-\alpha}f)(x) - c\,\Gamma(\alpha)| &\leq \frac{\sup\limits_{[0,b]} |t^{1-\alpha}f(t)-c|}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\, t^{\alpha-1} dt \\
&\leq \frac{\beta(1-\alpha,\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\sup_{[0,b]} |t^{1-\alpha}f(t)-c|.
\end{aligned}$$

Donc

$$|(I^{1-\alpha}f)(x) - c\,\Gamma(\alpha)| \leq \Gamma(\alpha)\sup_{[0,b]} |x^{1-\alpha}f(x)-c|$$

Par passage à la limite quand $x \to o^+$ on obtient

$$\lim_{x\to 0^+} I^{1-\alpha}f(x) = c\,\Gamma(\alpha).$$

Introduisons l'espace suivant :

$$C_\alpha([0,b]) = \left\{ f :]0,b] \to \mathbb{R}, \textit{continue et } \lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha}f(x) \textit{ existe} \right\},$$

et posons

$$\|f\|_\alpha = \sup_{[0,b]} |x^{1-\alpha}f(x)|.$$

On a $\|.\|_\alpha$ est une norme et que $(C_\alpha([0,b]), \|.\|_\alpha)$ est un espace de Banach.

En effet

Pour la norme on a

Soit $f \in C_\alpha([0,b])$

$$\begin{aligned}
\|f\|_\alpha = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sup_{[0,b]} |x^{1-\alpha} f(x)| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad |x^{1-\alpha} f(x)| = 0 \qquad \forall x \in [0,b] \\
&\Leftrightarrow \quad x^{1-\alpha} f(x) = 0 \qquad \forall x \in [0,b] \\
&\Leftrightarrow \quad x^{1-\alpha} f(x) = 0 \qquad \forall x \in]0,b] \\
&\Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \qquad \forall x \in]0,b] \\
&\Leftrightarrow \quad f = 0.
\end{aligned}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_\alpha &= \sup_{[0,b]} |x^{1-\alpha} \ (\lambda f)(x)| \\
&= \sup_{[0,b]} |x^{1-\alpha} \ \lambda f(x)| \\
&= \sup_{[0,b]} |\lambda| \ |x^{1-\alpha} f(x)| \\
&= |\lambda| \sup_{[0,b]} |x^{1-\alpha} f(x)| \\
&= |\lambda| \ \|f\|_\alpha .
\end{aligned}$$

Soient $f, \, g \in C_\alpha([0,b])$

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_\alpha &= \sup_{[0,b]} |x^{1-\alpha} (f+g)(x)| \\
&= \sup_{[0,b]} |x^{1-\alpha} (f(x)+g(x))|.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
|x^{1-\alpha}(f(x)+g(x))| &= |x^{1-\alpha}f(x)+x^{1-\alpha}g(x)| \\
&\leq |x^{1-\alpha}f(x)|+|x^{1-\alpha}g(x)| \\
&\leq \sup_{[0,b]}|x^{1-\alpha}f(x)|+\sup_{[0,b]}|x^{1-\alpha}g(x)| \\
\sup_{[0,b]}|x^{1-\alpha}(f(x)+g(x))| &\leq \sup_{[0,b]}|x^{1-\alpha}f(x)|+\sup_{[0,b]}|x^{1-\alpha}g(x)| \\
\|f+g\|_\alpha &\leq \|f\|_\alpha+\|g\|_\alpha .
\end{aligned}$$

Pour montrer que $(C_\alpha([0,b]),\|.\|_\alpha)$ est un espace de Banach il suffit de montrer qu'il est complet.

En effet

Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans $C_\alpha([0,b])$ c'est à dire :

$$\begin{aligned}
\forall\epsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall p,n\geq n_0 &\Rightarrow \|u_n-u_p\|_\alpha<\epsilon \\
&\Rightarrow \sup_{[0,b]}|x^{1-\alpha}[(u_n-u_p)(x)]|<\epsilon \\
&\Rightarrow |x^{1-\alpha}[u_n(x)-u_p(x)]|<\epsilon \quad \forall x\in[0,b] \\
&\Rightarrow |u_n(x)-u_p(x)|<\frac{\epsilon}{x^{1-\alpha}} \quad \forall x\in]0,b] \\
&\Rightarrow |u_n(x)-u_p(x)|<\epsilon.
\end{aligned}$$

Donc

La suite $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et comme $\mathbb{R}$ est complet alors La suite $\{u_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$ vers la limite $u(x)$.

Puisque la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans l'espace $C_\alpha([0,b])$, on a

$$\forall\epsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall p,n\geq n_0 \Rightarrow \sup_{[0,b]}|x^{1-\alpha}[u_n(x)-u_p(x)]|<\epsilon.$$

Par passage à la limite quand $p\to+\infty$ on obtient

$$\forall\epsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0 \Rightarrow \sup_{[0,b]}|x^{1-\alpha}[u_n(x)-u(x)]|<\epsilon.$$

Donc

$$\forall\epsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0 \Rightarrow \|u_n-u\|_\alpha<\epsilon.$$

D'où

La suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u.

On a $u = u_n - (u_n - u)$ et $u_n - u \in C_\alpha([0, b])$ donc $u \in C_\alpha([0, b])$ comme la somme de deux fonctions dans $C_\alpha([0, b])$.

Par suite

L'espace $(C_\alpha([0, b]), \|.\|_\alpha)$ est un espace de Banach.

On définit le problème de Cauchy fractionnaire par :

$$(p) \begin{cases} (D^\alpha u)(x) = f(x, u(x)) \quad dans\ ]0, b] \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^{1-\alpha}\ u(x) = c \end{cases} \tag{4.2}$$

D'après le lemme précédent l'équation (4.1) devient

$$[(I^\alpha \circ D^\alpha)f](x) = f(x) - c\ x^{\alpha-1}.$$

On transforme le problème (4.2) en une équation intégrale équivalente :

Par application de I^α à l'équation de problème (4.2) on obtient

$$[I^\alpha(D^\alpha u)](x) = I^\alpha f(x, u(x))$$

$$u(x) - c\ x^{\alpha-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t))\ dt.$$

D'où

$$u(x) = c\ x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t))\ dt. \tag{4.3}$$

L'objectif est d'écrire le second membre de (4.3) comme un opérateur Tu et montrer que sous certaines hypothèses il est contractant dans $C_\alpha([0, b])$ pour pouvoir appliquer le théorème 1.1. Posons pour $u \in C_\alpha([0, b])$

$$(Tu)(x) = c\ x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, u(t))\ dt. \tag{4.4}$$

Il faut montrer que l'opérateur T envoie bien les éléments de $C_\alpha([0, b])$ sur des éléments du même espace (T est bien définie), ensuite qu'il est contractant (sous des hypothèses).

Nous supposerons que

H1 -$f(x,y)$ est définie dans $]0,b]\times]u_0-\delta, u_0+\delta[(\delta>0)$

H2 -$\forall y$ l'application $f(.,y)\in C_\alpha([0,b])$

H3 -f est uniformément lipschitzienne par rapport à y i.e, $\exists w>0$ telle que

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq w|y_1-y_2|.$$

On montre que si $u\in C_\alpha([0,b])$ alors $Tu\in C_\alpha([0,b])$.

On a Tu est continue sur $]0,b]$ comme la somme de deux applications continues sur $]0,b]$.

Pour la condition de limite en 0^+ on a

$$\begin{aligned}
|x^{1-\alpha}(Tu)(x)-c| &\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ |f(t,u(t))|\ dt\\
&\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ [\ |f(t,u(t))-f(t,c)|+|f(t,c)|\ ]\ dt\\
&\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ [\ w\ |u(t)-c|+|f(t,c)|\ ]\ dt\\
&\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ [\ w\ |u(t)|+w\ |c|+|f(t,c)|\ ]\ dt\\
&\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}w\ |c|\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ dt+\\
&\frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ t^{\alpha-1}\ [\ w\ t^{1-\alpha}|u(t)|+t^{1-\alpha}|f(t,c)|\ ]\ dt.
\end{aligned}$$

D'après le fait que $u\in C_\alpha([0,b])$ et la deuxième hypothèse sur f on peut dire que

$$\sup_{[0,b]}\ [w\ t^{1-\alpha}|u(t)|+t^{1-\alpha}|f(t,c)|\ ]=A,$$

existe, d'où

$$|x^{1-\alpha}(Tu)(x)-c|\leq \frac{x}{\Gamma(\alpha+1)}w\ |c|+\frac{A\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}x^\alpha. \tag{4.5}$$

Où

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ t^{\alpha-1}\ dt=\frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)}x^{2\alpha-1}.$$

En effet

$$\begin{aligned}
\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, t^{\alpha-1}\, dt &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, t^{\alpha-1}\, dt \\
&= \Gamma(\alpha)\ I_0^\alpha x^{\alpha-1} \\
&= \Gamma(\alpha) \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} x^{2\alpha-1} \\
&= \frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)} x^{2\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite dans l'expression (4.5) quand $x \to 0^+$ on obtient

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha}\ (Tu)(x) = c,$$

et donc $Tu \in C_\alpha([0,b])$.

Par suite T est bien définie.

Pour la contraction on a

$$x^{1-\alpha}\ [(Tu)(x) - (Tv)(x)] = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ [f(t,u(t)) - f(t,v(t))]\ dt,$$

et donc

$$\begin{aligned}
|x^{1-\alpha}\ [(Tu)(x) - (Tv)(x)]| &\leq \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ |f(t,u(t)) - f(t,v(t))|\ dt \\
&\leq \frac{w}{\Gamma(\alpha)}\ x^{1-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ |u(t) - v(t)|\ dt \\
&\leq \frac{w}{\Gamma(\alpha)}\ x^{1-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ t^{\alpha-1}\ |t^{1-\alpha}(u(t) - v(t))|\ dt \\
&\leq \sup_{x\in[o,b]} |x^{1-\alpha}[u(x) - v(x)]| \frac{w}{\Gamma(\alpha)}\ x^{1-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ t^{\alpha-1}\ dt \\
&\leq \|u-v\|_\alpha \frac{w}{\Gamma(\alpha)}\ x^{1-\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ t^{\alpha-1}\ dt \\
&\leq \|u-v\|_\alpha \frac{w\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\ x^\alpha.
\end{aligned}$$

Nous allons faire les estimations dans l'espace $C_\alpha([0,b_1])$ avec $0 < b_1 \leq b$ et choisir b_1 de façon à ce que la constante de contraction soit < 1. Les calculs précédents donnent

$$\|Tu - Tv\|_{\alpha,b_1} \leq \frac{w\ \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\ b_1^\alpha\ \|u - v\|_{\alpha,b_1}.$$

Il suffit de choisir b_1 afin que la constante $K = \frac{w\ \Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\ b_1^\alpha$ soit < 1 i.e,

$$b_1 < \min\left(b, \left(\frac{\Gamma(2\alpha)}{w\ \Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Donc d'après le Théorème 1.1 il existe une solution unique d'équation intégrale (4.3) dans l'espace $C_\alpha([0,b_1])$.

Théorème[4]

Sous les hypothèses sur f données plus haut, il existe une solution unique au problème de Cauchy (4.2) dans l'espace $C_\alpha([0,b_1])$ avec $b_1 < \min\left(b, \left(\frac{\Gamma(2\alpha)}{w\ \Gamma(\alpha)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$.

4.2 Application de la dérivation fractionnaire au sens de Caputo aux équations différentielles

On définit le problème de Cauchy par la manière suivante :

$$(H)\begin{cases} ({}^C D_0^\alpha u)(x) = f(x, u(x)) \\ u(0) = u_0 \qquad 0 < \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{4.6}$$

Et on définit le problème de Cauchy linéaire par :

$$\begin{cases} ({}^C D_0^\alpha u)(x) = h(x) \\ u(0) = u_0 \qquad 0 < \alpha \leq 1 \end{cases} \tag{4.7}$$

Lemme 4.2

$u : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est solution de problème* (4.7) *si et seulement si*

$$u(x) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ h(t)\ dt$$

Preuve :

On montre la condition nécessaire :

Soit $u : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de problème (4.7)

On a

$$({}^{C}D_0^{\alpha}u)(x) = h(x).$$

Par composition de l'application I_0^{α} on obtient

$$I_0^{\alpha} \circ^{C} D_0^{\alpha}u(x) = I_0^{\alpha}h(x),$$

mais on a d'après la propriété 3 de la proposition 2.2

$$I_0^{\alpha} \circ^{C} D_0^{\alpha}u(x) = u(x) + c_0,$$

donc

$$u(x) + c_0 = I_0^{\alpha}h(x) \Longrightarrow u(x) = c + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}h(t)\ dt.$$

Comme $u(0) = u_0$ alors $c = u_0$.

Donc

$$u(x) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}h(t)\ dt.$$

On montre la condition suffisante :

On suppose que

$$u(x) = u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\ h(t)\ dt. \tag{4.8}$$

Par application de ${}^{C}D_0^{\alpha}$ aux deux membres de (4.8) et d'après la propriété 1 de la proposition 2.2 on obtient

$$\begin{aligned} {}^{C}D_0^{\alpha}u(x) &= {}^{C}D_0^{\alpha}\left[u_0 + I_0^{\alpha}h(x)\right] \\ &= {}^{C}D_0^{\alpha}u_0 +^{C} D_0^{\alpha}I_0^{\alpha}h(x) \\ &= h(x), \end{aligned}$$

où ${}^{C}D_0^{\alpha}u_0 = 0$ (d'après la remarque 3).

On a $u(0) = u_0$. Donc u est solution de problème (4.7).

Chapitre 5

Application de la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer aux équations différentielles

On considère un problème à valeur initiale, et on montre l'existence et l'unicité des solutions de ce problème dans l'espace des fonctions continues.
On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} (D_a^{\alpha,\beta} y)(x) = f(x,y) & x > a,\ 0 < \alpha < 1,\ 0 \leq \beta \leq 1 \\ I_{a^+}^{1-\gamma} y(a^+) = y_a & \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta \end{cases} \tag{5.1}$$

Où $D_a^{\alpha,\beta}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer.

5.1 L'existence des solutions

Théorème 5.1 [3]
Soit $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$ avec $0 < \alpha < 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$. Soit $f : (a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que
$f(.,y(.)) \in C_{1-\gamma}([a,b])$ pour tout $y \in C_{1-\gamma}([a,b])$. Si $y \in C_{1-\gamma}^{\gamma}([a,b])$, alors y vérifie (5.1) *si et seulement si y vérifie l'équation intégrale*

$$y(x) = \frac{y_a}{\Gamma(\gamma)}(x-a)^{\gamma-1} + I_{a^+}^{\alpha} f(x, y(x)). \tag{5.2}$$

Preuve 12 *Montrons la condition nécessaire*
Soit $y \in C_{1-\gamma}^{\gamma}([a,b])$ une solution du problème (5.1), *montrons que y vérifie* (5.2)

D'après la définition de $C^{\gamma}_{1-\gamma}([a,b])$ *et le lemme* 1.4 *on a*

$I^{1-\gamma}_{a^+}y \in C([a,b])$ *et* $D^{\gamma}_{a^+}y = \frac{d}{dx}(I^{1-\gamma}_{a^+}y) \in C_{1-\gamma}([a,b])$ *ainsi on a* $I^{1-\gamma}_{a^+}y \in C^{1}_{1-\gamma}([a,b])$, *donc d'après le lemme* 1.5 *on a*

$$I^{\gamma}_{a^+}D^{\gamma}_{a^+}y(x) = y(x) - \frac{y_a}{\Gamma(\gamma)}(x-a)^{\gamma-1} \quad x \in \,]a,b]. \tag{5.3}$$

On a $D^{\gamma}_{a^+}y \in C_{1-\gamma}([a,b])$, *le lemme* 3.2 *donne*

$$I^{\gamma}_{a^+}D^{\gamma}_{a^+}y = I^{\alpha}_{a^+}D^{\alpha,\beta}_{a^+}y = I^{\alpha}_{a^+}f(.,y(.)) \quad dans \ ]a,b], \tag{5.4}$$

d'après (5.3), (5.4) *on a*

$$y(x) = \frac{y_a}{\Gamma(\gamma)}(x-a)^{\gamma-1} + I^{\alpha}_{a^+}f(x,y(x)) \quad x \in \,]a,b]. \tag{5.5}$$

Montrons la condition suffisante

Soit $y \in C^{\gamma}_{1-\gamma}([a,b])$ *vérifie* (5.2) *ie,*

$$y(x) = \frac{y_a}{\Gamma(\gamma)}(x-a)^{\gamma-1} + I^{\alpha}_{a^+}f(x,y(x)) \quad x \in \,]a,b]. \tag{5.6}$$

Par application de $D^{\gamma}_{a^+}$ *aux deux membres de* (5.6) *on obtient*

$$\begin{aligned} D^{\gamma}_{a^+}y(x) &= D^{\gamma}_{a^+}\left[\frac{y_a}{\Gamma(\gamma)}(x-a)^{\gamma-1} + I^{\alpha}_{a^+}f(x,y(x))\right] \\ &= D^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}f(.,y(.))(x), \end{aligned}$$

où

$$D^{\gamma}_{a^+}(x-a)^{\gamma-1} = \frac{d}{dx}I^{1-\gamma}_{a^+}(x-a)^{\gamma-1} = 0.$$

On a

$$D^{\gamma}_{a^+}y = D^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}f(.,y(.)). \tag{5.7}$$

D'après l'hypothèse $D^{\gamma}_{a^+}y \in C_{1-\gamma}([a,b])$ *on a*

$$\frac{d}{dx}D^{1-\beta(1-\alpha)}_{a^+}f(.,y(.)) = D^{\beta(1-\alpha)}_{a^+}f(.,y(.)) \in C_{1-\gamma}([a,b]), \tag{5.8}$$

et puisque $f(.,y(.)) \in C_{1-\gamma}([a,b])$, *alors par le lemme* 1.1 *on a*

$$I_{a^+}^{1-\beta(1-\alpha)} f(.,y(.)) \in C_{1-\gamma}([a,b]). \tag{5.9}$$

De (5.8) *et* (5.9) *et la définition de l'espace* $C_\gamma^n[a,b]$ *on a*

$$I_{a^+}^{1-\beta(1-\alpha)} f(.y(.)) \in C_{1-\gamma}^1([a,b]).$$

Par application de $I_{a^+}^{\beta(1-\alpha)}$ *au* (5.7) *et par le lemme* 1.5 *on a*

$$D_{a^+}^{\alpha,\beta} y(x) = f(x,y(x)) - \frac{\left[I_{a^+}^{1-\beta(1-\alpha)} f(.,y(.))\right](a)}{\Gamma(\beta(1-\alpha))}(x-a)^{\beta(1-\alpha)-1}. \tag{5.10}$$

Puisque $1-\gamma < 1-\beta(1-\alpha)$, *le lemme* 1.6 *donne*

$$\left[I_{a^+}^{1-\beta(1-\alpha)} f(.,y(.))\right](a) = 0,$$

donc (5.10) *devient*

$$D_{a^+}^{\alpha,\beta} y(x) = f(x,y(x)) \quad x \in]a,b].$$

Par application de $I_{a^+}^{1-\gamma}$ *sur les deux cotés de* (5.5)

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{1-\gamma} y(x) &= I_{a^+}^{1-\gamma}\left[\frac{y_a}{\Gamma(\gamma)}(x-a)^{\gamma-1} + [I_{a^+}^{\alpha} f(.,y(.))](x)\right] && (5.11)\\ &= y_a + \left[I_{a^+}^{1-\beta(1-\alpha)} f(.,y(.))\right](x). && (5.12)\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $x \to a^+$ *on obtient*

$$I_{a^+}^{1-\gamma} y(a^+) = y_a + \left[I_{a^+}^{1-\beta(1-\alpha)} f(.,y(.))\right](a) = y_a.$$

Dans ce section on prouve l'unicité des solutions du problème de Cauchy 5.1 dans l'espace $C_{1-\gamma}^{\alpha,\beta}[a,b]$.

5.2 L'unicité des solutions

Théorème 5.2 [3]

Soient $0 < \alpha < 1$, $0 \le \beta \le 1$ *et* $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$.

Soit $f : (a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

H1 - $f(.,y(.)) \in C_{1-\gamma}^{\beta(1-\alpha)}[a,b],\ y \in C_{1-\gamma}[a,b]$.

H2 - f *est lipschitzienne par rapport au deuxième argument*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k\ |y_1 - y_2| \quad k > 0,$$

alors il existe une seule solution du problème de Cauchy 5.1 *dans l'espace* $C_{1-\gamma}^{\gamma}[a,b]$.

Preuve 13
D'après le théorème 5.1*, il suffit de prouver le résultat pour l'équation intégrale équivalente* (5.2) *qui peut être écrit sous forme d'un opérateur tel que*

$$Ty(x) = y_0(x) + I_{a^+}^{\alpha} f(x, y(x)),$$

où

$$y_0(x) = \frac{y_a}{\Gamma(\gamma)}(x-a)^{\gamma-1}.$$

Premièrement on prouve l'unicité des solutions dans l'espace $C_{1-\gamma}[a,b]$*, notre preuve est basée sur la partition de l'intervalle* $]a,b]$ *en sous-intervalles dans le quelle l'opérateur* T *est contractant puis on utilise le théorème du point fixe de Banach .*
Notons que $C_{1-\gamma}[c_1,c_2],\ a \leq c_1 < c_2 \leq b$ *est un espace métrique complet par rapport à la distance définie par :*

$$d(y_1,y_2) = \|y_1 - y_2\|_{C_{1-\gamma}} = \sup_{x\in[c_1,c_2]} |(x-a)^{1-\gamma}[y_1(x) - y_2(x)]|.$$

Prenons $x_1 \in (a,b]$ *de sorte que* $\omega_1 = \frac{k\ \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)}(x_1 - a)^{\alpha} < 1$
On a $y_0 \in C_{1-\gamma}([a,x_1])$ *car*
i $y_0 :]a,x_1] \to \mathbb{R}$.
ii $g \cdot y_0$ *est continue sur* $[a,x_1]$ *tel que* $g(x) = (x-a)^{1-\gamma}$,
et aussi d'après le lemme 1.1 *on a* $I_{a^+}^{\alpha} : C_{1-\gamma}[a,x_1] \to C_{1-\gamma}[a,x_1]$ *alors*

$$Ty \in C_{1-\gamma}[a,x_1],$$

et de là

$$T : C_{1-\gamma}[a,x_1] \to C_{1-\gamma}[a,x_1].$$

Pour $y_1, y_2 \in C_{1-\gamma}[a, x_1]$ *on a*

$$\begin{aligned}
\|Ty_1 - Ty_2\|_{C_{1-\gamma}} &= \sup_{[a,x_1]} |(x-a)^{1-\gamma}\ [Ty_1 - Ty_2](x)| \\
&= \sup_{[a,x_1]} \left|(x-a)^{1-\gamma}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}[f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))]\ dt\right]\right| \\
&\leq \frac{(x-a)^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}|f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))|\ dt \\
&\leq \frac{(x-a)^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\ k\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}|y_1(t) - y_2(t)|\ dt \\
&\leq \frac{(x-a)^{1-\gamma}}{\Gamma(\alpha)}\ k\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\gamma-1}|(t-a)^{1-\gamma}[y_1(t) - y_2(t)]|\ dt \\
&\leq (x-a)^{1-\gamma}\ k\,\|y_1 - y_2\|_{C_{1-\gamma}}\ I_a^\alpha (x-a)^{\gamma-1} \\
&\leq (x-a)^{1-\gamma} k\,\|y_1 - y_2\|_{C_{1-\gamma}} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}(x-a)^{\gamma-1+\alpha} \\
&\leq (x_1-a)^{\alpha} k\,\|y_1 - y_2\|_{C_{1-\gamma}} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)} \\
&\leq \omega_1\,\|y_1 - y_2\|_{C_{1-\gamma}}.
\end{aligned}$$

Puisque $\omega_1 < 1$ *alors on peut appliquer le théorème* 1.1 *pour obtenir une seule solution* $y_0^* \in C_{1-\gamma}[a, x_1]$ *de l'équation* (5.2) *dans l'intervalle* $]a, x_1]$.

1) *Si* $x_1 \neq b$, *considérerons* $y \in C[x_1, b]$ *les solutions de l'équation*

$$y(x) = Ty(x),$$

tel que

$$Ty(x) = y_{0_1}(x) + I_{x_1^+}^\alpha f(x, y(x)) \quad x \in\ [x_1, b],$$

où

$$y_{0_1}(x) = \frac{y_a}{\Gamma(\gamma)}(x-a)^{\gamma-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{x_1}(x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t))\ dt.$$

Prenons $x_2 \in (x_1, b]$ *de sorte que* $\omega_2 = \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)}\ (x_2 - x_1)^\alpha < 1$

Soient $y_1, y_2 \in C[x_1, x_2]$

$$\begin{aligned}
\|Ty_1 - Ty_2\|_C &= \sup_{[x_1,x_2]} |Ty_1(x) - Ty_2(x)| \\
&= \sup_{[x_1,x_2]} |I^{\alpha}_{x_1^+} f(x, y_1(x)) - I^{\alpha}_{x_1^+} f(x, y_2(x))| \\
&= \sup_{[x_1,x_2]} |I^{\alpha}_{x_1^+} [f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))]| \\
&= \sup_{[x_1,x_2]} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x} (x-t)^{\alpha-1} [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))] \, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x} (x-t)^{\alpha-1} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| \, dt \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_1}^{x} (x-t)^{\alpha-1} |y_1(t) - y_2(t)| \, dt \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \|y_1 - y_2\|_C \int_{x_1}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \, dt \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \|y_1 - y_2\|_C \, \frac{(x-x_1)^{\alpha}}{\alpha} \\
&\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)} \|y_1 - y_2\|_C \, (x_2 - x_1)^{\alpha} \\
&\leq \omega_2 \, \|y_1 - y_2\|_C.
\end{aligned}$$

Puisque $0 < \omega_2 < 1$, T *est un contraction, et puisque* $f(., y(.)) \in C[x_1, x_2]$ *pour quelque soit* $y \in C[x_1, x_2]$ *et* $I^{\alpha}_{x_1^+} f(., y(.)) \in C[x_1, x_2]$ *(d'après le lemme* 1.2 *) on a* $Ty \in C[x_1, x_2]$, *et par suite* $T : C[x_1, x_2] \to C[x_1, x_2]$ *alors d'après le théorème* 1.1 *il existe une seule solution* $y_1^* \in C[x_1, x_2]$ *de l'équation* 5.2 *dans l'intervalle* $[x_1, x_2]$, *de plus d'après le lemme* 1.3 *on a*

$$y_1^*(x_1) = y_0^*(x_1).$$

Par conséquent si :

$$y^*(x) = \begin{cases} y_0^*(x) & a < x \leq x_1 \\ y_1^*(x) & x_1 < x \leq x_2 \end{cases} \tag{5.13}$$

Alors d'après le lemme 1.7 *on a* $y_0^* \in C_{1-\gamma}[a, x_1]$, $y_1^* \in C[x_1, x_2]$ *et* $y_1^*(x_1) = y_0^*(x_1)$ *alors* $y^* \in C_{1-\gamma}[a, x_2]$, *donc* y^* *est la seule solution de* 5.2 *dans* $C_{1-\gamma}[a, x_2]$ *dans* *l'intervalle* $]a, x_2]$.

2) Si $x_2 \neq b$ *on répète la même raisonnement on obtient la solution unique* $y_n^* \in C[x_n, x_{n+1}],\ n = 2, 3..., M$ *où* $a = x_0 < x_1 < ... < x_M = b$ *tel que*

$$\omega_{n+1} = \frac{k}{\alpha\Gamma(\alpha)}(x_{n+1} - x_n)^{\alpha} < 1.$$

Il résulte que $y^*(x) = y_n^*(x), x \in (x_n, x_{n+1}],\ n = 2, 3..., M - 1$.

Il reste à montrer que la solution unique $y^* \in C_{1-\gamma}[a, b]$ *est dans* $C_{1-\gamma}^{\gamma}[a, b]$

On a

$$y^*(x) = \frac{y_a}{\Gamma(\gamma)}(x - a)^{\gamma-1} + I_{a^+}^{\alpha} f(x, y^*(x)), \tag{5.14}$$

appliquons D_a^{γ} *sur les deux cotés de* 5.14

$$\begin{aligned} D_a^{\gamma} y^*(x) &= D_a^{\gamma} I_a^{\alpha} f(x, y^*(x)) \\ &= D_a^{\gamma-\alpha} f(x, y^*(x)) \\ &= D_a^{\beta(1-\alpha)} f(x, y^*(x)). \end{aligned}$$

Puisque $\alpha \leq \gamma,\ D_a^{\beta(1-\alpha)} f(., y(.)) \in C_{1-\gamma}[a, b]$ *(d'après les hypothèses), alors*

$$D_a^{\gamma} y^* \in C_{1-\gamma}[a, b],$$

d'après le théorème 5.1 y^* *est la solution unique du problème* 5.1.

5.3 Remerciements

Je remercie Allah avant tout car à lui seul revient les louanges.

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur, le professeur HEDIA, je lui en suis très reconnaissant, Merci.

Je profite de cette occasion pour remercier tous nos enseignants.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement chacun des membres du jury qui me font le grand honneur d'y participer.

Je tiens également à remercier le Professeur LARABI pour avoir accepter de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens à saluer tous les membres de ma promotion.

A toute ma famille.

A tous mes amis.

Bibliographie

[1] *Abdul-Majid Wazwaz.Linear and nonlinear Intigral equation ,methods and applications,* .**35-42**

[2] *Y AHMAD. A. Salamooni et D. Pawar ,'Existance and uniqueness of boundery value probmems for hilfer-hadmard-type fractional differential equation,AMS Classification- 34A08, 35R11* **2018 2**

[3] *K-Furati, M-Kassim et N-Tatar , Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative,Dhahran 31261, Saudi Arabia,***2012, 1-4**

[4] *Hacen DIB , Equations Différentielles Fractionnaires EDA-EDO (4ẽme école) - Tlemcen,* **mai 2009, 23-27** .

[5] *D. Vivek, K. Kanagarajan and Seenith Sivasundaram , Dynamics and Stability Results for Hilfer Fractional Type Thermistor Problem,USA,* **9 September 2017,4**

[6] *MEDJEKAL Hamza, EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFERENTIELLE FRACTIONNAIRE IMPULSIVE DE TEMPS INFINI DANS UN ESPACE DE BANACH(THESE) - Annaba***2015** .