REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET
Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse Fonctionnelle Et Équations différentiel

Mémoire de Fin d'Etudes

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

Équation d'évolution non homogène

Présenté par

***MENAD FARIHA**
***MOSTEFAOUI HAKIMA**
***TEKLAL FARYAL**

soutenue devant le Jury composé de

***ZENTAR OUALID**	MAB	**Président**
***MOHAMED ZIANE**	MCA	**Encadreur**
***SOUID MOHAMMED SAID**	MCA	**Examinateur**

Promotion : **2018 \ 2019**

Table des matières

Chapitre 1

Semi-groupes à un paramètre d'opérateurs linéaires bornés

1.1 Semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés uniformément continus

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$ et notons par $\mathcal{L}_B(X)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés de X dans X de norme d'opérateurs qu'on notera $\|\cdot\|$

Définition 1.1. *Une famille $(T(t))_{t\geq 0}$ à un paramètre d'opérateurs linéaires bornés de X dans X est dite semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X si :*
(1) $T(0) = I$, (où I est l'opérateur identité de X)
(2) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$
un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X est dit uniformément continue sur X , si :
$\lim_{t\to 0^+} ||T(t) - I|| = 0$ *(1)*

l'opérateur linéaire A défini par :

$$D(A) = \left\{ x \in X, \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} existe \right\} \tag{1.1}$$

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{\mathrm{d}T(t)x}{\mathrm{d}t_{t=0}}, \forall x \in D(A) \tag{1.2}$$

est appelée le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ et $D(A)$ est appelé le domaine de$A$

Dans ce paragraphe , nous allons étudier quelque propriétés de semi- groupes d'opérateurs linéaires bornés uniformément continus

Remarques 1.1. *Il est facile de voir que si*$(T(t))_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe uniformément continue sur* X *, alors :* $\lim_{s\to t} ||T(s) - T(t)|| = 0$
en effet :

$$\begin{array}{rcl} T(t) - T(s) & = & T(t-s+s) - T(s) \\ & = & T(t-s)T(s) - T(s) \\ & = & T(s)[T(t-s) - I] \end{array}$$

si $s \to t$ *alors* $t - s \to 0$
donc $[T(t-s) - I] \to 0$ *par suite* $T(s) - T(t) \to 0$

Tout d'abord,commençons par démontrer le lemme suivante :

Lemme 1.1. *soit* $f : [a, b] \to X$ *est une fonction continue,alors :*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)\, \mathrm{d}s = f(a)$$

preuve pour tout $t \neq 0$

$$\begin{array}{rcl} \|\frac{1}{t}\int_a^{a+t} f(s)\mathrm{d}s - f(a)\| & = & \|\frac{1}{t}\int_a^{a+t}(f(s) - f(a))\mathrm{d}s\| \\ & \leq & \frac{1}{t} \times \|f(s) - f(a)\| \times t \\ & = & \sup\|f(s) - f(a)\| \end{array}$$

la continuité de f nous permet de conclure

Théorème 1.1. *un opérateur linéaire* A *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continue sur* X *ssi :*A *est un opérateur linéaire borné sur* X

preuve soit A un opérateur linéaire borné sur X posons :

$$T(t) = \exp^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \frac{A^n}{n!} \qquad (4)$$

la série ainsi définit dans la forme (4) converge en norme pour tout $t \geq 0$ et définit, pour tout $t \geq 0$ un opérateur linéaire borné $(T(t))_{t\geq 0}$

Il est claire que $T(0) = I$

par un simple calcul,on a $t, s \geqslant 0$:$T(t+s) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t+s)^n}{n!} A^n$

$$\begin{aligned}
T(t+s) &= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n!} C_n^k t^{n-k} s^k A^n \\
&= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!(n-k)!} t^{n-k} s^k A^n \\
&= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{t^{n-k} A^{n-k}}{(n-k)!} \dfrac{s^k A^K}{K!} \\
&= (\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^n A^n}{n!})(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{s^n A^n}{n!}) \\
&= T(t)T(s)
\end{aligned}$$

par ailleurs,pour tout $t \geq 0$,on a :

$$\begin{aligned}
\|T(t) - I\| &= \|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I\| \\
&= \|\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n A^n}{n!}\| \\
&\leq \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} t^n \dfrac{\|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|} - 1 \to_{t\to 0^+} 0
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0$

D'autre part,pour tout $t > 0$,on a :

$$\begin{aligned}
\|\frac{T(t)-I}{t}-A\| &= \|\frac{e^{tA}-I}{t}-A\| \\
&= \|\frac{e^{tA}-I-tA}{t}\| \\
&= ||\frac{1}{t}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{t^nA^n}{n!}|| \\
&\leq \frac{1}{t}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{t^n||A||^n}{n!} \\
&\leq \frac{1}{t}(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n||A||^n}{n!}-1-t||A||) \\
&= \frac{1}{t}(e^{t||A||}-1-t||A||)
\end{aligned}$$

comme $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t}(e^{t\|A\|}-1-t\|A\|)=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{e^{t\|A\|}-1}{t\|A\|}\|A\|-\|A\|=0$
alors : $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{T(t)-I}{t}=A$

Ainsi $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateur linéaire borné uniformément continue sur X ,de générateur infinitésimal A

Réciproquement,soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs linéaires borné uniformément continus sur X et soit A son générateur infinitésimal L'application $T(\cdot)$: $\mathbb{R}^+\to l_B(X)$ est continue, donc $\int_0^t T(s)\mathrm{d}s\in L_B(X),\forall t\geqslant 0$
D'après le lemme 1 , on a : $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)\mathrm{d}s=T(0)=I$
Il existe alors $\rho>0$ tq : $\|\frac{1}{\rho}\int_0^\rho T(s)\mathrm{d}s-I\|<1$,ce qui implique que $\frac{1}{\rho}\int_0^\rho T(s)\mathrm{d}s$ est inversible ,et donc $\int_0^\rho T(t)\mathrm{d}s$ est aussi inversible. Pour tout $h>0$,on a :

$$\begin{aligned}
(\frac{T(h)-I}{h})(\int_0^\rho T(s)\mathrm{d}s) &= \frac{1}{h}\int_0^\rho(T(h+s)-T(s))\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{h}(\int_h^{\rho+h}T(s)\mathrm{d}s-\int_0^\rho T(s)\mathrm{d}s) \\
&= \frac{1}{h}(\int_\rho^{\rho+h}T(s)\mathrm{d}s-\int_0^h T(s)\mathrm{d}s)
\end{aligned}$$

Donc $(\dfrac{T(h)-I}{h}) = (\dfrac{1}{h}\int_0^{\rho+h} T(s)\mathrm{d}s - \dfrac{1}{h}\int_0^h T(s)\mathrm{d}s)(\int_0^\rho T(s)\mathrm{d}s)^{-1}$

compte tenu du lemme (1), on obtient $\lim\limits_{h\to 0^+}(T(h)-I)/h = (T(\rho)-I)(\int_0^\rho)^{-1}$ ainsi, le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ (uniformément continue) est l'opérateur linéaire borné :$A = (T(\rho)-I)(\int_0^\rho)^{-1}$

Remarques 1.2. *De la définition (1), on voit bien qu'un semi-groupe $(T(t)_{t\geq 0}$ admet un unique générateur. si $(T(t))_{t\geq 0}$ et uniformément continue, alors son générateur infinitésimal et un opérateur linéaire bornée. D'autre part, tout opérateur linéaire bornée est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continue. ce semi-groupe est t-il unique ? La réponse affirmative à cette question est donnée par le théorème suivant :*

Théorème 1.2. *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ deux semi-groupes uniformément continue : si $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{T(t)-I}{t} = A = \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{S(t)-I}{t}$ (5).*
Alors : $T(t) = S(t)$, $\forall t \geq 0$

preuve Montrons que pour tout $a > 0$, $T(t) = S(t)$, $\forall t \in [0, a]$
Soit $a > 0$ fixé. comme $(T(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ soit deux semi-groupe uniformément continue , alors les applications $t \mapsto \|T(t)\|$ et $t \mapsto \|S(t)\|$ sont continus . Il existe alors une constant c_a tq : $\|T(t)\|\|S(s)\| \leq c_a$, $\forall t, s \in [0, a]$.

pour tout $h > 0$, on a : $\|\frac{T(h)-S(h)}{h}\| = \|\frac{T(h-I)}{h} - A - (\frac{S(h)-I}{h} - A)\|$
Soit $\epsilon > 0$ L'égalité (5) implique qu'il existe un $\delta > 0$ tq pour $0 < h \leq \delta$, on ait :
$||\frac{T(h)-I}{h} - A|| \leq \frac{\epsilon}{2c_a}$ et $||\frac{S(h)-I}{h} - A|| \leq \frac{\epsilon}{2ac_a}$
ce que entraine alors que pour $0 < h \leqslant \delta$, $\|\frac{T(h)-S(h)}{h} \leq \|\frac{T(h)-I}{h} - A\| + \|\frac{S(h)-I}{h} - A\|$
$\leq \frac{\epsilon}{ac_0}$ (6)
Soit $t \in [0, a]$ et soit $n \geq 1$ tq $\frac{t}{n} \leq \delta$. De la définition (1) d'un semi-groupe et de (6)il vient que :

$$\begin{aligned}
||T(t)-S(t)|| &= ||\sum_{k=0}^{n-1} T((n-k)\frac{t}{n})S(\frac{kt}{n}) - T((n-k-1)\frac{t}{n})S((k+1)\frac{t}{n})|| \\
&\leq \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}\|T((n-k)\frac{t}{n})S(k\frac{t}{n}) - T((n-k-1)\frac{t}{n})S((k+1)\frac{t}{n})\| \\
&\leq \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}\|T((n-k-1)\frac{t}{n})T(\frac{t}{n})S(\frac{kt}{n}) - T((n-k-1)\frac{t}{n})S(\frac{kt}{n})S(\frac{t}{n})\| \\
&\leq \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} ||T((n-k-1)\frac{t}{n})||||S(\frac{kt}{n})||||T(\frac{t}{n}) - S(\frac{t}{n})|| \\
&\leq c_a\frac{t}{n}\frac{\epsilon}{ac_a}\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} 1 \\
&= \epsilon\frac{t}{a} \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

comme $\epsilon > 0$ est arbitraire,alors $T(t) = S(t)$, $\forall t \in [0, a]$. mais puisque $a > 0$ est aussi arbitraire, il s'ensuit que : $T(t) = S(t), \forall t \geq 0$

Corollaire 1.1. *soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés,uniformément continus.Alors :*

(1) Il existe deux constantes $w \geqslant 0$ telle que : $\|T(t)\| \leqslant Me^{wt}$,$\forall t \geqslant 0$

(2) Il existe un unique opérateur linéaire borné A tq : $T(t) = e^{tA}$,$\forall t \geqslant 0$

(3) L'opérateur A de l'assertion(2) est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$

(4) L'application: $t \mapsto T(t)$ est différentiel en norme et on a :
$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = AT(t) = T(t)A, \text{ (7)}$$

preuve Toutes les assertions du corollaire 1 découlent de l'assertion 2.pour montrer 2 notons que puisque $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu son générateur infinitésimal A est un opérateur linéaire borné est aussi le générateur infinitésimal du semi-groupe $(e^{tA})_{t\geq 0}$ définie par la formule(4) ,et par le théorème(2)(d'unicité),on obtient :$T(t) = e^{tA}, \forall t \geq 0$

1.2 Semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés fortement continus

Dans tout ce paragraphe, X dénote un espace de Banach de norme $|| \cdot ||$ et $L_B(X)$ dénote l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur X, munie de la norme des opérateurs qu'on notera aussi par $|| \cdot ||$

Définition 1.2. *Un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés fortement continus sur X ,si :* $\lim\limits_{t\to 0} T(t)x = x, \forall x \in X$ *(8)*

un semi-groupe fortement sur X est appelé aussi semi-groupe de classe C_0 sur X,ou tout simplement : un C_0-semi-groupe sue X on établit le théorème suivant :

Théorème 1.3. *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe ur X. alors il existe deux constants $w \geq 0$ et $M \geq 1$ tells que : $\|T(t)\| \geq M \exp^{wt} \forall t \geq 0$ (9)*

preuve Montrons d'abord qu'il existe $a > 0$ et $M \geq 1$ tels que :

$$\|T(t)\| \geq M, \forall t \in [0, b]$$

. supposons le contraire, c'est à dire, supposons que $\forall a > 0$, $\forall M \geq 1$, $\exists t \in [0, a]$ tq :

$$\|T(t)\|t > M$$

En particulier pour $a = \frac{1}{n}$ et $M = n \geq 1$ $(n \in \mathbb{N}))$, il existe $t_n \in [0, \dfrac{1}{n}]$ tq :$\|T(t_n)\| > n$. donc la suite $(\|T(t_n)\|)_n \in \mathbb{N}$ est non bornée . Il vient alors du théorème de Banach-Steinhaus, qu'il existe $x_0\ inX$ tq : $(\|T(t_n)x_0\|)_n \in \mathbb{N}$ soit non bornée, ce qui contredit le fait que $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x\ \forall x \in X$. Ainsi : $\|T(t)\| \leqslant M\ \forall t \geq 0,\ t \in [0, a]$ comme $\|T(0)\| = 1$, alors $M \geq 1$ posons $w = \frac{\log(M)}{a} \geq 0$ Soit $t \geq 0$et soient$n \in \mathbb{N}$ et Ω telle que : $t = na + \Omega$, avec $0 \geq \Omega < a$. par la propriété des semi-groupe, on a :

$$\begin{array}{rcl} \|T(t)\| & = & \|T(na + \Omega)\| \quad = \quad \|T(\Omega)T(na)\| \\ & = & \|T(\Omega)T(a)^n\| \\ & \leq & M^n + 1 \\ & \leq & MM^n \\ & \leq & MM^{\frac{t-\Omega}{a}} \\ & \leq & MM^{\frac{t}{a}-\frac{\Omega}{a}} \quad \leq \quad MM^{\frac{t}{a}} \\ & = & M\exp^w t \end{array}$$

ce qui achevé la démonstration du théorème

Corollaire 1.2. *Soit* $(T(t))_{t\geq 0}$ *on* C_0*-semi-groupe sur* X *.Alors : pour tout* $x \in X$*, la fonction* $t \longmapsto T(t)x$ *est continue de* $\mathbb{R}_+$ *,sur* X

preuve soit $x \in X$ et soient$t, h \geqslant 0$. La continuité de $t \longmapsto T(t)x$ découle dans inégalités :

$$\begin{array}{rcl} \|T(t+h)x - T(t)x\| & = & \|T(t)(T(h)x - x)\| \\ & \leq & \|T(t)\|\|T(h)x - x\| \\ & \leq & M\exp^w t\|T(h)x - x\| \end{array}$$

et pour tout $t \geq h \geq 0$:

$$\begin{array}{rcl} \|T(t-h)x - T(t)x\| & = & \|T(t-h)(x - T(h)x)\| \\ & \leq & \|T(t-h)\|\|x - T(h)x\| \\ & \leq & M\exp^w(t-h)\|x - T(h)x\| \\ & \leq & M\exp^w t\|x - T(h)x\| \end{array}$$

Théorème 1.4. *soit* $(T(t))_{t\geqslant 0}$ *un* C_0*-semi groupe sur* X *de générateur infinitésimal* A *alors :*

(1) $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s = T(t)x, \forall t \geqslant 0, \forall x \in X,$*(10)*

(2) Pour toute $x \in X$ *et tout* $t \geq 0, \int_0^t T(s)x\mathrm{d}s \in D(A)$ *et on a :*
$A(\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s) = T(t)x - x,$*(11)*

(3) Pour toute $t \geq 0$ *et toute* $x \in D(A)$*,* $T(t)x \in D(A)$ *et on a :*
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$ *,(12)*

(4) Pour toute $t \geq s \geq 0$ *et toute* $x \in D(A)$ *, on a :*
$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(u)x\mathrm{d}u = \int_s^t T(u)Ax\mathrm{d}u$ *,(13)*

preuve

(1) l'égalité énoncée découle de l'inégalité :

$$\begin{array}{rcl} \|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s - T(t)x\| & = & \|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(T(s)x - T(t)x)\mathrm{d}s\| \\ & \leq & \sup\|T(s)x - T(t)x\| \end{array}$$

et de la continuité de la fonction $t \mapsto T(t)x$ de $\mathbb{R}^+$ dans X ,pour toute $x \in X$

(2) pour $x \in X$ et tout $h > 0$

$$\begin{aligned}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s &= \tfrac{1}{h}(\int_0^t (T(s+h)x - T(s)x)\mathrm{d}s \\ &= \tfrac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s - \tfrac{1}{h}\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s \\ &= \tfrac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\mathrm{d}s - \tfrac{1}{h}\int_0^h T(s)x\mathrm{d}s\end{aligned}$$

en utilisant la résultat(1)$\longrightarrow T(t)x - x$, d'où le (2)

(3) Pour toute $x \in D(A)$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h}T(t)x &= \lim_{h\to 0^+}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} T(t)\tfrac{(T(h)-I)}{h}x \\ &= T(t)Ax \qquad ,(*)\end{aligned}$$

Ce qui montre alors que $T(t)x \in D(A)$ et que $AT(t)x = T(t)Ax$.
L'égalité (*) implique aussi que : $\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$. c'est à dire que la dérivé à droite de $T(t)x$ existe et vaut $T(t)Ax$.
Pour prouver(12) , il reste à montrer que pour toute $t \geq 0$,la dérivé à gauche de $T(t)x$ existe et vaut aussi $T(t)Ax$.
Pour toute $h \geq 0$,$\forall t \geq h$,et tout $x \in D(A)$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax &= \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} + T(t-h)Ax - T(t-h)Ax - T(t)Ax \\ &= T(t-h)[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax] + T(t-h)[Ax - T(h)Ax]\end{aligned}$$

comme $x \in D(A)$ et $\|T(t-h)\|$ est bornée pour $h \in [0,t]$ et que $(T(t))_{t\geq 0}$ est fortement continue, on obtient que :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax &= \lim_{h\to 0^+} T(t-h)[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax] + \lim_{h\to 0^+} T(t-h)[Ax - T \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

,d'où l'assertion(3)

(4) s'obtient par intégration entre s et t.

Remarques 1.3. *la formule (13)du théorème (2.2.2) s'écrit en particulier pour $t \geq 0$ et $s = 0$ et pour tout $x \in D(A)$ sous la forme simple :*

$$T(t)x - x = \int_0^t T(u)Ax\mathrm{d}u = \int_0^t AT(u)x\mathrm{d}u, \qquad \forall x \in D(A)$$

Corollaire 1.3. *si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$,alors :*

(1) Le domaine $D(A)$ de A est dense dans X , (ie :$\overline{D(A)} = X$)

(2) *A est un opérateur linéaire fermé .Autrement dit A est un opérateur linéaire dont le graphe $G(A)$ est un fermé de $X \times X$*

preuve

(1) Soit $x \in X$ et soit (t_n) une suite réelle telle que $t_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ (par exemple : $t_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$)
posons $x_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x\mathrm{d}s, \forall n \in \mathbb{N}$
D'après l'assertion(2)de théorème(2.2.2) on voit que $x_n \in D(A), \forall n \in \mathbb{N}$ et par l'assertion(1)du même théorème(2.2.2),on a :
$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x\mathrm{d}s = x$ Ainsi $\overline{D(A)} = X$,c'est à dire $D(A)$ est dense dans X

(2) La linéarité de A est évidente.Montrons que A est un opérateur fermé,i.e à montrer que le graphe :
$G(A) = \{(x, Ax)/x \in D(A)\}$ de A est un fermé de $X \times X$.
Pour cela,soit $(x_n) \subset D(A)$ tq $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ et $Ax_n \xrightarrow{n\to\infty} y$
Montrons alors que $x \in D(A)$ et que $Ax = y$
Puisque $x_n \in D(A), \forall n \in \mathbb{N}$,alors d'après la formule(13),on a :

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n\mathrm{d}s \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0 \qquad (14)$$

Soit $t > 0$,alors pour tout $s \in [0, t]$,on a :$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|T(s)Ax_n - T(s)y\| &= \|T(s)(Ax_n - y)\| \\ &\leq \|T(s)\|\|Ax_n - y\| \\ &\leq M\exp^{wt}\|Ax_n - y\|\end{aligned}$$

Donc $(T(s)Ax_n)_n$ converge uniformément vers $T(s)y$,quand $n \to +\infty$ sur $[0, t]$

Il vient de l'égalité (14)et du théorème d'inversion limite et intégrale que :

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y\mathrm{d}s$$

Donc $\quad \dfrac{T(t)x - x}{t} = \dfrac{1}{t}\int_0^t T(s)y\mathrm{d}s \qquad \forall t > 0$

comme $\quad \lim_{t\to 0} \dfrac{1}{t}\int_0^t T(s)y\mathrm{d}s = y$ alors $\lim_{t\to 0} \dfrac{T(t)x - x}{t}$ existe

D'où $x \in D(A)$ et $Ax = y$

Théorème 1.5. *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ deux C_0-semi-groupe sur X,de générateur infinitésimaux respectivement A et B . si $A = B$,alors $T(t) = S(t)$,$\forall t \geq 0$*

preuve Soit $t > 0$ et soit $x \in D(A) = D(B)$
Il vient facilement du théorème(2.2.2)-(2.2.1) que la fonction :$s \in [0, t] \mapsto u(s)x = T(t-s)S(s) \qquad x \in D(A)$
est dérivable et que :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u(s)x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(T(t-s))S(s)x + T(t-s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}S(s)x \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)AS(s)x \quad = \quad 0\end{aligned}$$

ce qui entraine alors que, pour tout $x \in D(A)$,la fonction $s \mapsto u(s)x = T(t-s)S(s)x$ est constante et en particulier ses valeurs aux points $s = 0$ et $s = t$ coïncident,c'est à dire $u(0)x = u(t)x \qquad \forall x \in D(A)$

D'où $T(t)x = S(t)x \qquad \forall t \geq 0, \forall x \in D(A)$

comme $\overline{D(A)} = X$ et $T(t)$ et $S(t)$ sont des opérateurs bornés sur X, pour tout $t \geq 0$.
Il en résulte que $T(t)x = S(t)x \qquad \forall t \geq 0, \forall x \in X$
D'où $T(t) = S(t) \qquad \forall t \geq 0$

Théorème 1.6. *Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X, de générateur infinitésimal A et soit V un opérateur linéaire borné sur X (i.e,$V \in L_B(X)$)*
Alors les propriétés suivants sont équivalents :

(1) $T(t)V = VT(t) \qquad ,\forall t \geq 0$

(2) $VD(A) \subseteq D(A)$ *et* $AVx = VAx \qquad ,\forall x \in D(A)$

preuve

$(1) \Rightarrow (2)$ soit $V \in L_B(X)$ telle que :$T(t)V = VT(t) \qquad ,\forall t \geq 0$
soit $x \in D(A)$, alors on a :

$$\begin{aligned}A(Vx) &= \lim_{t\to 0}\frac{T(t)Vx - V(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{VT(t)x - Vx}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}V(\frac{T(t)x - x}{t})\end{aligned}$$

qui existe et vaut VAx, donc $Vx \in D(A)$ et on a $AVx = V(Ax)$

$(2) \Rightarrow (1)$ soit $V \in L_B(X)$ telle que telle que $VD(A) \subseteq D(A) et AVx = VAx, \forall x \in D(A)$
Pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in D(A)$,définissons la fonction :$s \in [0, t] \mapsto W(s)x =$

$T(t-s)VT(s)x \in D(A)$
Alors :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}W(s)x &= (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}T(t-s))VT(s)x + T(t-s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}VT(s)x \\ &= -AT(t-s)VT(s)x + T(t-s)VAT(s)x \\ &= -T(t-s)AVT(s)x + T(t-s)VAT(s)x \\ &= 0\end{aligned}$$

Par conséquent : $W(0)x =$ $W(t)x \qquad \forall x \in D(A)$
D'où : $T(t)Vx = VT(t)x \qquad \forall t \geq 0, \forall x \in D(A)$
comme $\overline{D(A)} = X et T(t)V et VT(t)$ sont continues alors $T(t)V = VT(t) \qquad \forall t \geq 0$

Nous avons vu dans le corollaire (3) que si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe sur X,alors $\overline{D(A)} = X$ et A est un opérateur fermé.Maintenant,nous allons démontrer un résultat plus général,pour cela nous commençons tout d'abord par énoncer le lemme suivant :

Lemme 1.2. *Soit Eun espace vectoriel normé et soit F un sous espace vectoriel de E telle que :$\overline{F} \neq E$.Alors il existe $f \in E', f \neq 0$ telle que :$\langle x, f\rangle = 0, \forall x \in F$*

preuve c'est un corollaire du théorème de Hahn-Banach

Théorème 1.7. *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X,de générateur infinitésimal (sur X)A.Alors :*

(1) $\overline{D(A^n)} = X$,*pour toutes* $n \in \mathbb{N}^*$

(2) $\bigcap_{n\geq 0}^{+\infty} D(A^n) = X$

preuve

(1) si $n = 1$,compte tenir du corollaire(3),il résulte que $\overline{D(A)} = X$.
Posons $D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$:c'est à support compact dans $[0, +\infty[\}$
Pour tout $\varphi \in D$ et tout $x \in X$,on pose :$x_\varphi = \int_0^\infty \varphi(s)T(s)x\mathrm{d}s$
et on considère l'ensemble : $Y = \{x_\varphi : \varphi \in D$ et $x \in X\}$
Pour toutes $x \in X$,$\varphi \in D$ et $h > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}x_\varphi &= \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s)T(s+h)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s)T(s)x\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty \varphi(s-h)T(s)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^\infty \varphi(s)T(s)x\mathrm{d}s \\
&= \tfrac{1}{h}\int_h^\infty(\varphi(s-h)-\varphi(s))T(s)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_0^h \varphi(s)T(s)x\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty(\varphi(s-h)-\varphi(s))T(s)x\mathrm{d}s + \frac{1}{h}\int_0^h(\varphi(s-h)-\varphi(s))T(s)x\mathrm{d}s \\
&= \tfrac{1}{h}\int_0^\infty(\varphi(s-h)-\varphi(s))T(s)x\mathrm{d}s \qquad (15)
\end{aligned}$$

comme $\frac{1}{h}(\varphi(s-h)-\varphi(s))T(s)x$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$ vers $-\varphi'(s)T(s)x$ sur $[0,+\infty[$
quand $h\to 0^+$,alors en faisant tendre h vers 0^+ dans la formule (15).
Il vient que $x_\varphi \in D(A)$
et que :$Ax_\varphi = -\int_0^\infty \varphi'(s)T(s)x\mathrm{d}s$
Il en résulte alors que :$Y\subset D(A)$ et par récurrence on montre que :
$Y\subset D(A^n)$,pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et que :
$A^nx = (-1)^n\int_0^\infty \varphi^(n)(s)T(s)x\mathrm{d}s$ pour tout $x_\varphi\in Y$
Maintenant,montrons que Y est dense dans X.
Supposons que le contraire,c'est à dire : que $\overline{Y}\neq X$,alors d'après le lemme(2.2.1),corollaire du théorème de Hahn-Banach,il existe $f\in X'$, $f\neq 0$ et telle que :

$$\langle x_\varphi, f\rangle = 0, \forall x_\varphi\in Y$$

Donc,$\int_0^\infty \varphi(s)\langle T(s)x,f\rangle\mathrm{d}s = \langle\int_0^\infty \varphi(s)T(s)x\mathrm{d}s, f\rangle = 0 \qquad ,\forall\varphi\in D, \forall x\in X$
Par conséquent :pour tout $x\in X$, on a : $\langle T(s)x,f\rangle = 0$,$\forall s\in[0,+\infty[$.
Cas sinon,il existe $\varphi\in D$ telle que :$\int_0^\infty \varphi(s)\langle T(s)x,f\rangle\mathrm{d}s\neq 0$ ce qui est contradiction.
Il s'ensuit alors que pour tout $x\in X$:
$\langle T(s)x,f\rangle = 0, \forall s\in[0,+\infty[$
En particulier pour $s=0$ on obtient :$\langle T(0)x,f\rangle = \langle x,f\rangle = 0, \forall x\in X$
Ce qui est absurde car $f\neq 0$ sur X.
Comme $Y\subset D(A)$,pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,on obtient,$D(A^n)$ est dense dans X,i,e :$\overline{D(A^n)} = X$.
D'où (1).

(2) On a vu dans (1) que $Y\in D(A^n), \forall n\in\mathbb{N}^*$
donc $Y\subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} D(A^n)$, comme $\overline{Y}=X$,il vient alors que :

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} D(A^n)} = X$$

1.3 Théorème de Hille-Yosida

Dans se paragraphe,nous présentons l'un des résultats les plus importantes concernant les C_0-semi-groupes.Il s'agit du théorème de Hille-Yosida,qui permet de caractériser les opérateurs qui sont générateurs de C_0-semi-groupes.Nous allons commencer tout d'abord par introduite quelques notions et résultats intermédiaires. **Préliminaires :**

Définition 1.3. *Soit X un espace de Banach et soit $A : D(A) \in X \to X$ un opérateur linéaire quelconque.*

(1) on appelle ensemble résolvante de A, qu'on note : $\rho(A)$, l'ensemble :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A : D(A) \to X estbijectif\}$$

(2) on appelle spectre de A, l'ensemble noté $\sigma(A)$, défini par : $\sigma(A) = \mathbb{C}\backslash\rho(A)$

(3) pour $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur linéaire,$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^-1$ est appelé la résolvante de A au point λ.

Théorème 1.8. *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X, le générateur infinitésimal A et soient $w \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que :$||T(t)|| \geq M \exp^{wt}$, $\forall t \geq 0$.*
si $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $Re\lambda > w$, alors :

1) L'application $R_\lambda : X \to X$ défini par :

$$R_\lambda x = \int_0^\infty \exp^- \lambda s T(t) x \mathrm{d}s$$

définie un opérateur linéaire borné sur X

2) $\lambda \in \rho(A)$ et $R(\lambda, A)x = R_\lambda x$, $\forall x \in X$

preuve

1) soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $Re\lambda > w$
il est facile de voir que R_λ est un opérateur linéaire de plus, pour tout $s \geq 0$

et $x \in X$ on a :

$$\begin{array}{rcl} || \exp^{-\lambda s} T(t)x|| & \leq & \exp^{-Re\lambda s} ||T(t)|| ||x|| \\ & \leq & \exp^{-Re\lambda s} M \exp^{ws} ||x|| \\ & = & M \exp^{-} (Re\lambda - w)s||x|| \end{array}$$

ce qui entraine alors que :

$$\begin{array}{rcl} ||R_\lambda x|| & \leq & \int_0^\infty || \exp^{-\lambda s} T(s)x||\mathrm{d}s \\ & \leq & M||x|| \int_0^\infty \exp^{-(Re\lambda - w)s} \mathrm{d}s \\ & = & \frac{M}{Re\lambda - w} \cdot ||x|| \qquad \forall x \in X \end{array}$$

Il s'ensuit alors que R_λ est un opérateur linéaire borné sur X et que :

$$||R_\lambda|| \leq \frac{M}{Re\lambda - w}$$

2) pour $\forall x \in X$ et $h > 0$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \frac{T(h)R_\lambda x - R_\lambda x}{h} & = & \frac{1}{h} \int_0^\infty \exp^{-\lambda s} T(t+s)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h} \int_h^\infty \exp^{-\lambda s} T(s)x\mathrm{d}s \\ & = & \frac{\exp^{\lambda h}}{h} \int_h^\infty \exp^{-\lambda s} T(s)x\mathrm{d}s - \frac{1}{h} \int_0^\infty \exp^{-\lambda s} T(s)x\mathrm{d}s \\ & = & \frac{\exp^{\lambda h}}{h} (\int_0^\infty \exp^{-\lambda s} T(s)x\mathrm{d}s - \int_0^h \exp^{-\lambda s} T(s)x\mathrm{d}s) - \frac{1}{h} \int_0^\infty \exp^{-\lambda s} T(t)x\mathrm{d}s \\ & = & (\frac{\exp^{\lambda h} - 1}{h}) \int_0^\infty \exp^{-\lambda h} T(s)x\mathrm{d}s - \frac{\exp^{\lambda h}}{h} \int_0^h \exp^{-\lambda h} T(t)x\mathrm{d}s \end{array}$$

par passage à la limite quand $h \to 0^+$, on obtient que : $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{T(h)R_\lambda x - R_\lambda x}{h} = \lambda R_\lambda x - x$
donc, $R_\lambda x \in D(A)$ et que :$AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x$,$\forall x \in X$
càd : $(\lambda I - A)R_\lambda x = x$, $\forall x \in X$
soit $x \in D(A)$, alors d'après le th (4) -assertion (3), on a : (on peut utiliser th (6))

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{ds}(\exp^{-} \lambda s) & = & -\lambda \exp^{-} \lambda s T(s)x + \exp^{-} \lambda s \frac{d}{ds} T(s)x \\ & = & -\lambda \exp^{-} \lambda s T(s)x + \exp^{-} \lambda s T(s)Ax \end{array}$$

Il vient alors que :

$$\begin{array}{rcl} R_\lambda Ax & = & \int_0^\infty \exp^{-} \lambda s T(s)Ax\mathrm{d}s \\ & = & \int_0^\infty \frac{d}{ds}(\exp^{-} \lambda s T(s)x)\mathrm{d}s + \lambda \int_0^\infty \exp^{-} \lambda s T(s)x\mathrm{d}s \\ & = & [\exp^{-} \lambda T(s)x]_0^\infty + \lambda R_\lambda x \\ & = & -x + \lambda R_\lambda x \end{array}$$

ce qui entraine alors que :

$$\lambda R_\lambda x - R_\lambda Ax = x$$

, càd :
$R_\lambda(\lambda I - A)x = x \qquad \forall x \in D(A)$
donc

$$(\lambda I - A)R_\lambda = I_X et R_\lambda(\lambda I - A) = I_{D(A)}$$

Proposition 1.1. *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A et soient $w \geq 0$ et $M \geq 1$ tels que : $||T(t)|| \geq M \exp wt$, $\forall t \geq 0$*
Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\lambda) > w$ et pour tout $x \in D(A)$ on a :

$$AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax$$

preuve Pour tout $t > 0$ et tout $x \in D(A)$, on a : (on peut utiliser th (6) et $R_\lambda = R(\lambda, A)$)

$$\int_0^t \exp^- \lambda s T(s)x\mathrm{d}s \to \int_0^\infty \exp^- \lambda s T(s)x\mathrm{d}s$$

et

$$A(\int_0^t \exp^- \lambda s T(s)x\mathrm{d}s) = \int_0^t \exp^- \lambda s T(s)Ax\mathrm{d}s \to \int_0^\infty \exp^- \lambda s T(s)Ax\mathrm{d}s$$

comme A est un opérateur fermé , alors :

$$AR(\lambda, A)x = A(\int_0^\infty \exp^- \lambda s T(s)x\mathrm{d}s) = \int_0^\infty \exp^- \lambda s T(s)Ax\mathrm{d}s = R(\lambda, A)x$$

D'où le résultat.
Théorème de Hille-Yosida pour les C_0-semi groupes de contractions :

Définition 1.4. *Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X*

(1) $(T(t))_{t\geq 0}$ *est dit uniformément borné . s'il existe* $M \geq 1$ *tq :* $||T(t)|| \leq M$ *,* $\forall t \geq 0$

(2) $(T(t))_{t\geq 0}$ *est dit un* C_0*-semi-groupe de contractions si :* $||T(t)|| \leq 1$ *,* $\forall t \geq 0$

Théorème 1.9. *(Hille-Yosida)*
un opérateur linéaire A *est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe de contractions* $(T(t))_{t\geq 0}$ *sur* X *, ssi :*

1) $\overline{D(A)} = X$ *et* A *est un opérateur fermé*
2) $]0,+\infty[\subset \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda > 0$ *on a :* $||R(\lambda,A)|| \leq \frac{1}{h}$

preuve(condition nécessaire) Soit A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe "de contraction" alors d'après le corollaire (3) , on a : $\overline{D(A)} = X$ et A est un opérateur fermé
D'autre part , il vient dy théorème (8) que pour $\lambda > w = 0$, on a : $\lambda \in \rho(A)$ et pour tout $x \in X$: $R(\lambda,A)x = R_\lambda x = \int_0^\infty \exp^- \lambda s T(s)x \mathrm{d}s$
ce qui entraine alors que :

$$\begin{array}{rcc} ||R(\lambda,A)x|| & = & ||\int_0^\infty exp^-\lambda sT(s)x\mathrm{d}s||` \\ & \leq & \int_0^\infty \exp^- \lambda s||T(s)x||\mathrm{d}s \\ & \leq & \int_0^\infty \exp^- lambdas||x||\mathrm{d}s \qquad (car||T(s)|| \leq 1\forall s \geq 0) \\ & \leq & \frac{1}{h}||x|| \qquad \forall x \in X \end{array}$$

Donc $||R(\lambda,A)|| \leq \frac{1}{\lambda}$ d'où le résultat.
pour montrer les condition 1) et 2) du théorème 9 sont suffisantes pour que A soit le générateur infinitésimale d'un C_0-semi-groupe de contraction $(T(t))_t \geq 0$ on aura besoin de démontrer les lemmes suivants :

Lemme 1.3. *Soit* A *un opérateur linéaire sur* X *vérifiant les condition du théorème 9 .*
Alors : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda R(\lambda,A)x = x, \forall x \in X$

Soit $x \in D(A)$ *. Alors :* $\begin{array}{rcl} ||\lambda R(\lambda,A)x - x|| & = & ||AR(\lambda,A)x|| \\ & = & ||R(\lambda,A)Ax|| \\ d'aprslaproposition1 & \leq & ||R(\lambda,A)||||Ax|| \\ & \leq & \frac{||Ax||}{\lambda} \to 0 \end{array}$ *Il s'ensuit*

alors que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda R(\lambda,A)x = x$ *,*$\forall x \in D(A)$

comme $\overline{D(A)} = X$ *et* $||\lambda R(\lambda, A)|| \leq 1$ *, (*$\lambda R(\lambda, A)$ *est un opérateur uniformément borné) alors : il en résulte que* $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x \ \forall x \in X$

Définition 1.5. *pour* $\lambda > 0$ *, on appelle approximation de Yosida de l'opérateur linéaire A ,l'opérateur :* $A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$ *, (16)*

Remarques 1.4. *on a :*

$$\begin{array}{ccc} (\lambda I - A)R(\lambda, A) & = & Icequientraineque \\ \lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A) & = & I, donc \\ AR(\lambda, A) & = & \lambda R(\lambda, A) - I \\ D'o\lambda AR(\lambda, A) & = & \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I \end{array}$$

Lemme 1.4. *Soit A un opérateur linéaire satisfaisant les condition 1) et 2) du théorème 9 :*
Si A_λ *est l'approximation de Yosida de A , alors :*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax, \forall x \in D(A)$$

preuve Soit $x \in D(A)$ D'après le lemme 3 , on a :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax$$

Il s'ensuit alors que :

$$\begin{array}{ccc} \lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x & = & \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax(d'aprslaprop1) \\ & = & Ax \end{array}$$

Lemme 1.5. *Soit A un opérateur linéaire sur X satisfaisant les condition 1) et 2) du th 9 et soit* A_λ *l'approximation de Yosida de A. Alors* A_λ *est le générateur infinitésimale de semi-groupe uniformément continue de contraction* $(\exp^{tA_lambda})_t \geq 0$*. De plus , pour tous* $x \in X$ *et* $\lambda, \mu > 0$ *, on a :*

$$|| \exp^{tA_lambda} x - \exp^{tA_\mu} x|| \leq t||A_lambdax - A_\mu x||$$

preuve De la formule (16) de la déf de A_λ , il est clair que A_λ est un opérateur linéaire borné sur X , donc d'après le th 1 , A_λ est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu . $(\exp^{tA_\lambda})_t \geq 0$. De plus pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \|\exp^{tA_\lambda}\| & = & \|\exp^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}\exp^{-}t\lambda I\| \\ & \leq & \exp^{-}t\lambda\|\exp^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}\| \quad \exp^{-t\lambda I}=\exp^{-t\lambda I} \\ & \leq & \exp^{-t\lambda}\exp^{t\lambda^2\|R(\lambda,A)\|} \\ & \leq & \exp -t\lambda\exp^{t\lambda}=1 \quad car\|R(\lambda,A)\|\leq\frac{1}{\lambda} \end{array}$$

Il en résulte alors que $(\exp^{tA_\lambda})_t \geq 0$ est un semi-groupe "uniformément continue " de contraction sur X .
Il est facile de voir à partir de la définition que pour tout $\lambda, \mu > 0$, A_λ et A_μ et $\exp^{tA_\lambda}$ et $\exp^{tA_\mu}$ commutent entre eux , Il en résulte alors que pour tout $x \in X$:

$$\begin{array}{rcl} \|\exp^{tA_\lambda}-\exp^{tA_\mu}\| & = & \|\int_0^1(\exp^{tsA_\lambda}\exp^{t(1-s)A_\mu})x\mathrm{d}s\| \\ & \leq & \int_0^1\|\frac{d}{ds}(\exp^{tsA_\lambda}\exp^{t(1-s)A_\mu}x)\|\mathrm{d}s \\ & \leq & \int_0^1 t\|\exp^{tsA_\lambda}\exp^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x-A_\mu x)\|\mathrm{d}s \\ & \leq & t\|A_\lambda x-A_\mu x\|car\|\exp^{tsA_\lambda}\|\leq 1et\|\exp^{t(1-s)A_\mu}\|\leq 1 \end{array}$$

preuvedu th 9 : (condition suffisantes) Soit $x \in D(A)$. Alors pour tous $\lambda, \mu > 0$ on a :

$$\begin{array}{rcl} \|\exp^{tA_\lambda}x-\exp^{tA_\mu}x\| & \leq & t\|A_\lambda x-A_\mu x\| \\ & \leq & t\|A_\lambda x-Ax\|+t\|A_\mu x-Ax\| \end{array} \qquad (17)$$

Il vient de l'inégalité (17) et du lemme 4 que pour tout $x \in D(A)$, $\exp^{tA_\lambda x}$ converge quand λ tend vers $+\infty$ et la convergence est uniforme sur les intervalles bornés .
Posons : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\exp^{tA_\lambda}x = T(t)x$, $\forall x \in D(A)$. ([critère de Cauchy uniforme dans $L_b(x)$]) comme $D(A)$ est dense dans X et $\|\exp^{tA_\lambda}\| \leq 1$, $\forall t \geq 0$ ($\exp^{tA_\lambda}$ est uniformément borné) alors :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\exp^{tA_\lambda}x = T(t)x, \forall x \in X \qquad (18)$$

La limite dans la formule (18) est uniforme sur les intervalles bornés .
De la formule (18) , on voit que : $T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$ et $\|T(t)\| \leq 1$, $\forall t \geq 0$. De plus $t \mapsto T(t)x$ est continue pour $t \geq 0$ car :
limite uniforme de fonction continue $t \mapsto \exp^{tA_\lambda}x$, ainsi $(T(t))_t \geq$ est un C_0-semi-groupe de contraction sur X . pour conclure , il nous reste à montrer que A est le générateur infinitésimale de $(T(t))_t \geq 0$.
pour cela , soit $x \in D(A)$, En utilisant la formule (18) et le théorème 4 et compte tenu de la convergence uniforme de $\exp^{tA_\lambda}A_\lambda x$, vers $T(t)Ax$ sur les intervalles bornés , on obtient :

$$
\begin{aligned}
T(t)x - x &= \lim_{\lambda\to\infty} (\exp^{tA_\lambda} x - x) \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \int_0 t \exp^{sA_\lambda} A_\lambda x \mathrm{d}s \\
&= \int_0 t \lim_{\lambda\to\infty} \exp^{sA_\lambda} A_\lambda x \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \lim_{\lambda\to\infty} \exp^{sA_\lambda} A_{lambda} x \mathrm{d}s \\
&= \int_0^t T(s)Ax\mathrm{d}s \qquad (19)
\end{aligned}
$$

Soit B le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$ et soit $x \in D(A)$. En divisant la formule par $t > 0$ et en faisant $t \to 0$,on voit que $x \in D(B)$ et on a :

$$
\begin{aligned}
Bx &= \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x-x}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax\mathrm{d}s \\
&= Ax
\end{aligned}
$$

ce qui entraine alors que $D(A) \subseteq D(B)$ et $Ax = Bx, \forall x \in A$
comme B est le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$ qui est de contraction, alors d'après la condition nécessaire (2),on a $1 \in \rho(B)$.D'autre part,puisque A vérifie (2)du théorème(9) alors $1 \in \rho(A)$.Mais puisque $D(A) \subset D(B)$ et $Ax = Bx, \forall x \in D(A)$ on a :
$(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = X$ (car $I - A$ est surjectif)
ce qui entraine alors que $D(B) = (I - B)^(- 1)X = D(A)$
D'où $A = B$ comme conséquence du théorème(9)de Hille Yosida,on obtient :

Corollaire 1.4. *Soit A le générateur infinitésimale d'un C_0-semi-groupe de contractions $(T(t))_t \geq 0$ et soit A_λ l'approximation de Yosida de A . Alors :*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to+\infty} \exp^{tA_\lambda} x, \forall x \in X$$

preuve Il vient de la démonstration du th 9 , que $(\lim_{\lambda\to+\infty} \exp^{tA_\lambda})_t \geq 0$ définit un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_t \geq 0$ dont le générateur infinitésimale est A . Le th 5 "d'unicité de l'engendrement nous permet donc de conclure que :

$$T(t) = S(t), \forall t \geq 0$$

Corollaire 1.5. *Soit $w \geq 0$. Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimale d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_t \geq 0$ vérifiant $||t(t)|| \leq \exp^{wt}$, $\forall t \geq 0$*
ssi :

1) $\overline{D(A)} = X$ *et A est fermé .*
2) $]w, +\infty[\subset \rho(A)$ *et pour tout $\lambda > w$ on a : $||R(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\lambda - w}$*

preuve Découle du th 9 de Hille-Yosida appliquée au semi-groupe de contraction : $S(t) = \exp^{-wt} T(t)\ \forall t \geq 0$ et de générateur infinitésimale :
$B = A - xI$ et pour tout $\lambda - w > 0$.

Lemme 1.6. *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire "fermé" , Alors :*

1) *L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$, de plus pour tout $\mu \in \rho(A)$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tq $|\mu - \lambda| < \frac{1}{||R(\mu,A)}$, on ait : $\lambda \in \rho(A)$*

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}, (20)$$

2) *L'application $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ est localement analytique et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)n! R(\lambda, A)^{n+1}, (21)$$

preuve

1) Soit $\mu \in \rho(A)$ et soit $\lambda \in \cap$ tq , $|\mu - \lambda| < \frac{1}{||R(\mu,A)||}$. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda I - A &= \mu I - A + \lambda I - \mu I \\ &= \mu I - A + (\lambda - \mu)I \qquad \text{comme } |\lambda - \mu| < \tfrac{1}{||R(\mu,A)||} \text{ , alors} \\ &= [I - (\mu - \lambda)R(\mu, A)](\mu I - A)s \end{aligned}$$

l'opérateur $[I - (\lambda - \mu)R(\mu, A)]$ est inversible d'inverse :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^n = [I - (\mu - \lambda)R(\mu; A)]^- 1$$

Il en résulte alors que $\lambda I - A$ est bijectif .

$$Donc \qquad B(\mu, \frac{1}{||R(\mu, A)}) \subseteq \rho(A), d'o\rho(A) estunouvertde \mathbb{C}.$$

De plus , pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\mu - \lambda| < \frac{1}{||R(\mu,A)||}$ on a :

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) &= (\lambda I - A)^- 1 \\ &= (\mu I - A)^- 1 [I - (\mu - \lambda)R(\mu, A)]^- 1 \\ &= R(\mu, A) \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - A)^n R(\mu, A)^n \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^n + 1 \end{aligned}$$

2) Découle immédiatement de la représentation de la résolvante dans la série de la formule (20). si $f(Z) = \sum_{n \geq 0} a_n (Z_0 - Z)^n$ alors $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} f^n(Z)$

Théorème 1.10. *Si A est le générateur infinitésimale d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_t \geq 0$ vérifiant :*

$$||T(t)|| \leq M \exp^{wt} \forall t \geq 0 avec w \geq 0 et M \geq 1. Alors :$$

1) $\overline{D(A)} = X$ *et A est fermé .*

2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Re\lambda > w$ on a : $\lambda \in \rho(A)$ et :

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(Re\lambda - w)^n}, \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

preuve

2) D'après le th 8 , comme $Re\lambda > w$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et pour tout $x \in X$, on a :

$$R(\lambda, A)x = R_\lambda x = \int_0^\infty \exp^{-\lambda s} T(s)x\mathrm{d}s.$$

$$et||R(\lambda, A)|| \leq \frac{M}{Re\lambda - w}$$

Il est facile de voir que

$$\frac{d}{d\lambda^n} R(\lambda, A)x = -\int_0^\infty s \exp^{-\lambda s} T(s)x\mathrm{d}s$$

$\forall x \in X$

et par récurrence on obtient pour tout $\forall x \in X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, que :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A)x = (-1)^n \int_0^\infty s^n \exp^{-\lambda s} T(s)x\mathrm{d}s.$$

par ailleurs , par le lemme 6 , on a :

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^n + 1$$

Il en résulte alors que :

$$R(\lambda, A)^n + 1x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty s^n \exp^{-\lambda s} T(s)x\mathrm{d}s \qquad \forall x \in X$$

D'où

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty s^n - 1 \exp^{-\lambda s} T(s)x\mathrm{d}s \qquad \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}*$$

Il vient alors pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}*$, on a :

$$\begin{array}{rcl} ||R(\lambda, A)^n x|| & = & \frac{1}{(n-1)!}|| \int_0^\infty s^n - 1 \exp^{-\lambda s} T(s)x\mathrm{d}s|| \\ & \leq & \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty s^n - 1|| \exp^{-\lambda s} T(s)x||\mathrm{d}s \\ & \leq & \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty s^n - 1 \exp^{-Re(\lambda)s} M \exp^{ws} ||x||\mathrm{d}s \\ & \leq & \frac{M}{(Re\lambda - w)^n}||x|| \end{array}$$ D'où

$$||R(\lambda, A)^n|| \leq \frac{M}{(Re\lambda - w)^n}; \forall \lambda \in \mathbb{C}tq : Re\lambda > wet \forall n \in \mathbb{N}$$

.

Proposition 1.2. *(Équation de la résolvante) Si $A : D(A) \subset X \to X$ est un opérateur linéaire , alors pour tous $\lambda, \mu \in \rho(A)$, on a :*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

preuve De la définition de la résolvante , on a :

$$[\lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A)]R(\mu, A) = R(\mu, A)$$

$$et[\mu R(\mu, A) - AR(\mu, A)]R(\lambda, A) = R(\lambda, A)$$

En faisant la différence des deux égalités et compte tenu que $R(\lambda, A)$ et $R(\mu, A)$ commutent ; on obtient :

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

Théorème de Hille-Yosida dans le cas général : Dans ce paragraphe , on va démontrer le théorème de Hille-Yosida dans le cas générale d'un C_0-semi-groupe sur X. Tout d'abord on va commencer par démontrer le lemme suivant :

Lemme 1.7. *Soit A un opérateur linéaire sur X tq : $]0, +\infty[$.*
Si de plus : $\quad ||\lambda^n R(\lambda, A)^n|| \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda > 0$
Alors il existe un norme $||\cdot||_1$ sur X équivalent à la norme d'origine $||\cdot||$ vérifiant :

1) $||x|| \leq ||x||_1 \leq M||x||, \forall x \in X.$

2) $||\lambda R(\lambda, A)x||_1 \leq ||x||_1, \forall x \in X$

preuve Soit $\mu > 0$.
Posons :$||x||_\mu = sup_{n\geq 0}\|\mu^n R(\mu, A)^n\|$,$\forall x \in X$ (22) Il facile de voir que $\|\cdot\|_\mu$ définit une norme sur X vérifiant :
$\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|$,$\forall x \in X$ (23)
et $\|\mu R(\mu, A)\|_\mu \leq 1$, (24)
Montrons alors que :

$$\|\lambda R(\lambda, A)\|_\mu \leq 1$$

,pour $0 < \lambda \leq \mu$ (25) soit $x \in X$ .posons $y = R(\lambda, A)X$
Il vient alors de l'équation de la résolvante que :

$$y = R(\lambda, A)x = R(\mu, A)(x + (\mu - \lambda)y)$$

et par l'inégalité triangulaire et l'inégalité (24)on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \|y\|_\mu & = & |R(\mu, A)x + (\mu - \lambda)R(\mu, A)y\|_\mu \\ & \leq & \|R(\mu, A)x\|_\mu + (\mu - \lambda)\|R(\mu, A)y\|_\mu \\ & \leq & \frac{1}{\mu}\|x\| + \frac{\mu-\lambda}{\mu}\|y\|_\mu \\ \|y\|_\mu(1 - \frac{\mu-\lambda}{\mu}) & \leq & \frac{\|x\|_\mu}{\mu} \end{array} \quad \text{donc } \lambda\|y\|_\mu \leq \|x\|_\mu$$

Donc $\|\lambda R(\lambda, A)x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$,$\forall x \in X$
D'où $\|\lambda R(\lambda, A)x\|_\mu \leq 1$ pour $0 < \lambda \leq \mu$
Des inégalités(23)et (25),on voit facilement que :
$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\| \leq \|\lambda^n R(\lambda, A)^n\|_\mu \leq \|x\|_\mu$ pour $0 < \lambda \leq \mu$ (26) D'où $\|x\|_\lambda = sup\|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\| \leq \|x\|_\mu$ pour $0 < \lambda \leq \mu$
D'où $\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu$ pour $0 < \lambda \leq \mu$
Posons $\|x\|_1 = \lim\limits_{\mu\to\infty} \|x\|_\mu$,$\forall x \in X$
En faisant tendre $\mu \to \infty$ dans la formule (23)on obtient :

$$\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|, \forall x \in X$$

d'où(1) En prenant $n = 1$ dans la formule (26),il vient que :

$$\|\lambda R(\lambda, A)x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$$

$\forall x \in X$ En faisant tende $\mu \to \infty$ on obtient :

$$\|\lambda R(\lambda, A)x\|_1 \leq \|x\|_1 \qquad \forall x \in X$$

D'où

$$\|\lambda R(\lambda, A)\|_1 \leq 1$$

Théorème 1.11. *(Hille-Yosida) Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un c_0-semi groupe$(T(t))_{t\geq 0}$ sur X,vérifiant :$\|T(t)\| \leq M \exp^{wt}$,$\forall t \geq 0$,avec $w \geq 0, M \geq 1$ si et seulement si :*

(1) $\overline{D(A)} = X$ *et A est un opérateur fermé.*

(2) $\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda > w \subset \rho(A)$ *et pour tout* $\lambda \in \mathbb{C} telleque Re\lambda > w$ *,on ait :*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - w)^n}$$

$,\forall n \in \mathbb{N}$

preuve

($\Rightarrow$) si A est le générateur infinitésimal d'un c_0-semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ tq $\|T(t)\| \leq M \exp^{wt}$ alors les assertions (1) et (2) découlent du théorème(10)

($\Leftarrow$) réciproquement, supposons que A vérifie les assertions (1) et(2) du théorème(11). Alors sans perte de généralité et quitte à considérer le semi groupe $S(t) = \exp^{-wt} T(t)$,$\forall t \geq 0$,on peut supposer que $w = 0$ l'assertion (2)implique dans ce cas que :

$$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n\| \leq M$$

$,\forall \lambda > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
Soit $\|\cdot\|_1$ la norme équivalente à $\|\cdot\|$,définie dans le lemme (7) et vérifiant :$\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|, \forall x \in X$ (27)

$$et \|\lambda R(\lambda, A)\|_1 \leq 1, \forall \lambda > 0$$

(28)
A étant un opérateur fermé à domaine dense ,de plus $]0, \infty[\subset \rho(A)$ et $\|\lambda R(\lambda, A)\|_1 \leq 1, \forall \lambda > 0$
Il vient alors du théorème(9) de Hille-Yosida concernant les c_0-semi groupes de contractions que :
A est le générateur infinitésimal d'un c_0 semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ de $\|\cdot\|_1$ contractions sur X, et en utilisant l'inégalité(27), on obtient pour tout $t \geq 0$ et toute $x \in X$,

$$\begin{array}{rcl} \|T(t)x\| & \leq & \|T(t)\|_1 \|x\|_1 \\ & \leq & \|x\|_1 \quad car \|T(t)\|_1 \leq 1 \\ & \leq & M\|x\| \quad \forall x \in X \end{array}$$

D'où $\|T(t)\| \leq M, \forall t \geq 0$
Maintenant,nous donnons une extension de la formule de présentation du corollaire (4)au cas général des c_0-semi groupe sur X

Théorème 1.12. *soit A le générateur infinitésimal d'un c_0-semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X vérifiant :$\|T(t)\| \leq M \exp^{wt}, \forall t \geq 0 avecw \geq 0 etM \geq 1$.*
si A_λ est l'approximation de Yosida de A,(ie :$A = \lambda AR(\lambda, A)$)alors :

$$T(t)x = \lim_{\lambda\infty} \exp^{tA_\lambda} x, \forall x \in X, \forall t \geq 0$$

preuve : Commençons tout d'abord par le cas ou $\|T(t)\| \leq M, \forall t \geq 0$,(i,e :$w = 0$) . D'après le lemme (7), il existe une norme $\|\cdot\|_1$ sur X,équivalente à $\|\cdot\|$ tq $(T(t))_{t\geq 0}$ soit un c_0-semi-groupe de $\|\cdot\|_1$-contraction sur X.Il vient alors du corollaire (4)que :$\|\exp^{tA_\lambda} x - T(t)x\|_1 \to 0 quand \lambda\infty$. comme $\|\cdot\|_1 et \|\cdot\|$ sont équivalentes, on déduit alors que : $\lim_{\lambda\to\infty} \exp^{tA_\lambda} x = T(t)x, \forall x \in X, \forall t \geq 0$ Supposons maintenant que :$\|T(t)\| \leq M \exp^{wt}, \forall t \geq 0, avecw > 0$ .Alors pour $\lambda > 2w$, la fonction $\lambda \|\exp^{tA_\lambda}\|$ est bornée.En effet :pour $\lambda > 2w$,on a :
$\|R(\lambda, A)^k\| \leq \frac{M}{(\lambda-w)^k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$ donc :

$$\begin{array}{rcl}
\|\exp^{tA_\lambda}\| & \leq & \exp^{-\lambda t}\|\exp^{\lambda^2 tR(\lambda,A)}\| \\
& \leq & \exp^{-\lambda t}\|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}t^k}{k!} R(\lambda, A)^k\| \\
& \leq & \exp^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}t^k}{k!} \|R(\lambda, A)^k\| \\
& \leq & \exp^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}t^k}{k!} \frac{M}{(\lambda-w)^k} \\
& \leq & M \exp^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{\lambda^2 t}{\lambda-w})^k \frac{1}{k!} \\
& \leq & M \exp^{-\lambda t} \exp^{\frac{\lambda^2 t}{\lambda-w}} \qquad = \quad M \exp^{\frac{\lambda w t}{\lambda-w}} \\
& \leq & M \exp^{2wt} \qquad (29)
\end{array}$$

Chapitre 2

Applications aux équations d'évolution

Dans ce paragraphe ,nous donnons quelques applications de la théorie des semi groupes à la résolution des équations différentielles.Plus précisément on étudie le problème linéaire abstrait de la forme :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) \qquad ,\forall t \geq 0 \\ \qquad\qquad\qquad u(0) = x \end{cases}$$

ou t est la variable de temps
$u(\cdot)$ est une fonction à valeur dans l'espace de Banach X.
$A : D(A) \subseteq X \to X$ est un opérateur linéaire et $x \in X$ est la valeur initiale

Définition 2.1. *(1) Le problème à valeur initiale : (PAC)=*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) \qquad \forall t \geq 0 \\ \qquad\qquad\qquad u(0) = x \end{cases}$$

est dit problème abstrait de Cauchy associé à $(A, D(A))$ et de valeur initiale $X \in X$.

(2) Une fonction $u : \mathbb{R}^+ \to X$ est dite solution (classique) du problème (PAC), si u est continue ment dérivable , $u(t) \in D(A), \forall t \geq 0$,et u vérifie (PAC)

Théorème 2.1. *Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un c_0-semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X .Alors pour toute $x \in D(A)$, la fonction :*

$$u : t \mapsto u(t) := T(t)x$$

est l'unique solution du problème (PAC) de valeur initiale x .

preuve Soit $X \in D(A)$, alors il vient de l'assertion (3) du théorème (4) que :$u(t) = T(t)x$ est une solution classique du problème (PAC).
Soit V une autre solution de (PAC) c'est à dire :

$$\begin{cases} \dot{V}(t) = AV(t) & ,\forall t \geq 0 \\ & V(0) = x \end{cases}$$

Soit $t > 0$ .Alors pour toute $s \in [0,t]$ on a :

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(T(t-s)V(s)) & = & -T(t-s)AV(s) + T(t-s)\dot{V}(s) \\ & = & -T(t-s)AV(s) + T(t-s)AV(s) = 0 \end{array}$$

En intégrant entre 0 et t on obtient :

$$[T(t-s)V(s)]_0^t = 0$$

ce qui entraine que $T(0)V(t) - T(t)V(0) = 0$
Soit alors $V(t) = T(t)V(0) = T(t)x$
Ce qui termine la démonstration du théorème.

Définition 2.2. *Une fonction continue $u : \mathbb{R}^+ \to X$ est dite solution douce(ou mild solution) du problème (PAC) de valeur initiale x , si pour toute $t \geq 0$:*
$\int_0^t u(s)\mathrm{d}s \in D(A) et u(t) = x + A\int_0^t u(s)\mathrm{d}s$

Théorème 2.2. *Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ sur X .Alors pour tout $x \in X$,l'application : $u : t \mapsto u(t) := T(t)x$ .est l'inique solution douce (mild solution) du problème (PAC)de valeur initiale x.*

preuve Copte tenu de l'assertion (2) du théorème (4),pour tout $x \in X$, on a : $T(t)x = x + A\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s$, ce qui entraine que :$u(t) = T(t)x$ est une solution douce du problème (PAC) de valeur initiale x .
Pour l'unicité, supposons que V est une autre solution douce du problème (PAC) de valeur initiale x .Alors : $u(t) = x + A\int_0^t u(\Omega)\omega$ et $V(t) = x + A\int_0^t V(\omega)\omega$.
Soit $t \geq 0$, alors pour tout $s \in [0,t]$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(T(t-s)\int_0^s(u(r) - V(r))\mathrm{d}r) & = & -T(t-s)A\int_0^s(u(\omega) - V(\omega))\mathrm{d}\omega + T(t-s)(u(s) - V(s)) \\ & = & -T(t-s)(u(s) - V(s)) + T(t-s)(u(s) - V(s)) \\ & = & 0 \end{array}$$

En intégrant entre 0 et t on obtient :

$$[T(t-s)\int_0^s(u(r) - V(r))\mathrm{d}r]_0^t = 0$$

ce qui entraine alors que :

$$T(0)\int_0^t (u(r)-V(r))\mathrm{d}r = 0$$

ce qui implique :$\int_0^t u(r)\mathrm{d}r = \int_0^t V(\omega)\mathrm{d}\omega$
D'où $u(t) = x + A\int_0^t u(r)\mathrm{d}r = x + A\int_0^t V(\omega)\mathrm{d}\omega = V(t)$,$\forall t \geq 0$.

2.1 problème de Cauchy abstrait non homogène

linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to X$ est continue on suppose que A le générateur infinitésimale de C_0-semi groupe $(T(t))_t \geq 0$. de sorte que l'équation elle est homogène c-à-dire : $f \equiv 0$ admet une unique solution à valeur initiale , $\forall x_0 \in D(A)$

Définition 2.3. *la fonction $x : [0,a[\to X$ est une solution classique de (1) sur $[0,a[$ ssi :*

1) x continue sur $[0,a[$

2) $x(t)$ continument différentiable sur $]0,a[$

3) $x(t) \in D(A)$, pour $t \geq 0$ et (1) satisfit

Soit $(T(t))_t \geq 0$ C_0-semi-groupe de générateur infinitésimale A , est soit x une solution de (1) alors : les valeurs de g sont dans X et $g(s) = T(t-s)x(s)$ différentiable avec $0 < s < t$, et

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds}(s) &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)\dot{x}(s) \\ &= T(t-s)(Ax(s)+f(s)) - AT(t-s)x(s) \\ &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)Ax(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s) \qquad (2) \end{aligned}$$

$f \in L^1([0,a],X)$ alors :
$T(t-s)f(s)$ intégrable est on intègre (2) de 0 à t on a :

$$g(t) = g(0) + \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s$$

par suite :

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s \qquad (3)$$

on particulier : si $A \in B(X,X)$ *alors* $\forall x_0 \in X$ *donc (1) admet une unique solution de* $\mathbb{R}^+$ *définit comme :* $x(t) = \exp^{tA} x_0 + \int_0^t \exp^{(t-s)A} f(s)\mathrm{d}s$

Corollaire 2.1. *si* $f \in L^1([0,a],X)$ *alors :* $\forall x \in X$ *la valeur initiale de (1) admet au plus une solution si* x *est une solution écrit comme suit :* $x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s$
pour chaque $f \in L^1([0,a],X)$ *le coté droit de (3) est continue sur* $[0,a]$ *il est naturel de le considérer comme une solution généralisé de (1) même s'il n'est pas différentiable et ne satisfait nous définissons donc ;*

Définition 2.4. *Soit* A *un générateur infinitésimale d'un* C_0*-semi-groupe . Soit* $x \in X$ *et* $f \in L^1([0,a],X)$ *la fonction* $x \in C([0,a],X)$ *donner par :* $x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s$, $0 \leq t \leq a$ *c'est une solution faible de problème de valeur initiale (1) sur* $[0,a]$

Remarques 2.1. *En générale la continuité de* f *n'est pas suffisante pour assuré existence de solution (1)* $x_0 \in D(A)$

Exemple 2.1.1. *contenu...*

Théorème 2.3. *Soit* A *le générateur infinitésimale de* C_0*-semi-groupe , Soit* $x_0 \in D(A)$ *et* $f : \mathbb{R}^+ \to X$ *de* C^1 *alors :*
la solution faible devient une solution classique de (1)

preuve

Lemme 2.1. *Soit* $u : [a,b] \to X$ *supposons que :* $D^+(u(t))$ *existe sur* $[a,b]$ *et* $t \to D^+(u(t))$ *continue sur* $[a,b]$ *alors :* u *de classe* C^1 *sur* $[a,b]$
D'après le lemme alors : $v \in c^1$ *et*

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = Av(t) + f(t), t \geq 0 \\ \hfill v(0) = 0 \end{cases}$$

la solution faible de (1) et $x(t) = v(t) + T(t)x_0$ *, on a* x *de* C^1
Soit $x_0 \in D(A)$ *alors :* $DT(t)x_0 = AT(t)x_0$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \dot{v}(t) + AT(t)x_0 \\ &= Av(t) + f(t) + AT(t)x_0 \\ &= A[v(t) + T(t)x_0] + f(t) \\ &= Ax(t) + f(t), t \geq 0 \qquad (4)\end{aligned}$$

Autre coté (4) continue car x f continue pour ca : $x \in C^1$

Non linéaire

$$\left\{ \dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x(t)) \qquad (5) x(0) = x_0 \right.$$

Lorsque A le générateur infinitésimale d'un C_0-semi-groupe $(T(t))_t \geq 0$ sur X un espace de Banach et $f : R^+ \to X$ est continue .

Définition 2.5. *On dit que x est une solution (classique de (5)) ssi :*

1) $x \in D(A), x \in C(\mathbb{R}^+, X), t \geq 0$

2) x satisfait (5)

Théorème 2.4. *Si x est une solution de (5) alors : $T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s))\mathrm{d}s, t \geq 0 \qquad (6)$*

preuve

Remarques 2.2. *Si x satisfait (6) alors : x n'est pas nécessaire solution de (5)*

Exemple 2.1.2.

Théorème 2.5. *Supposons que $f : \mathbb{R}^+ . X \to X$ est lipschitzienne par rapport à deuxième variable alors $\forall x_0 \in X$ admet une unique solution faible sur $\mathbb{R}^+$*

preuve

2.2 le dépendance continue des valeurs initiale

$$P_n = \left\{ \dot{x}(t) = Ax_0(t) + f(t, x_n(t)), t \geq 0 x(0) = x_0, n \right.$$

$$\left\{ \dot{d}(t) = f(t, x(t)) x(0) = x_0 \right.$$

Si $x_0, n \to x_0$ donc $x_n \to x$ uniformément sur un compact de $\mathbb{R}^+$

Théorème 2.6. *Soit* $x(t, x_0)$ *on note la solution faible de (5) au début de* x_0 , $\forall a > 0$, $\exists \alpha(a) > 0$ *et* $\beta(a) > 0$, $|x(t, x_0) - x(t, y_0)| \leq \alpha(a) \exp \beta(a) t |x_0 - y_0|$,$\forall t \in [0, a]$

preuve

Lemme 2.2. *Soit* x *solution faible de (5) sur* $[0, a]$ *, si on pose :*

1) $x_0 \in D(A)$

2) $t \to f(t, x(t))$ *fonction de* C^1

alors : x *solution classique de (5)*

preuve

Théorème 2.7. *Soit* $f : \mathbb{R}^+.X \to X$ *continue et lipschitzienne par rapport à 2éme variable et de plus si* f *de* $C^1(\mathbb{R}^+.X, X)$ *est dérivée partielle* $D_t f(t, x)$ *et* $D_x f(t, x)$ *sont lipschitzienne par rapport à 2éme variable .*
Soit $x_0 \in D(A)$ *alors : l'équation (5) admet une solution classique sur* $\mathbb{R}^+$

preuve

Lemme 2.3. *A générateur infinitésimal de* C_0*-semi-groupe sur* $C_0([0, 1], \mathbb{R}^+)$ *. on suppose que* u *solution de (H , E) équation de la chaleur*
Soit $v : \mathbb{R}^+ \to C_0([0, 1], \mathbb{R})$ *tq :* $v(t)x = u(t, x), t \geq 0$ *et* $x \in [0, 1]$
Soit $f : C_0([0, 1], \mathbb{R}) \to C_0([0, 1], \mathbb{R})$ *tq :* $u \to f(u)$ *et* $f(u)x = g(u(x))$
alors :

$$\left\{ \dot{v}(t) = Av(t) + f(v(t)), t \geq 0 \qquad (7) v(0) = u_0 \right.$$

Théorème 2.8. *Soit* $u_0 \in D(\triangle)$ *si* g *est lipschitzienne ,* $g \in C^1$ *et* $\dot{g}$ *est lipschitzienne alors : (5) admet solution classique* v *et la fonction* $u : \mathbb{R}^+.[0, 1] \to \mathbb{R}$ *définit par :* $u(t, x) = v(t)x, t \geq 0, x \in [0, 1]$ *est une solution de (H , E)*

2.3 Stabilité et comportement asymptotique de solution

2.3.1 Équation linéaire

Nous considérons l'équation linéaire suivante :

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t}(t) = Au(t), t \leq 0 u(0) = x_0 \right.$$

Nous supposons que A et le générateur infinitésimale C_0-semi-groupe sur un espace de Banach X .
$u(t, x_0) = T(t)x_0$ est une solution faible puisque $x_0 \in X$.
Nous souhaitons études : $\lim_{t \to +\infty} T(t)x_0$.
Nous avons qu'il existe : $M \leq 1, w \in \mathbb{R}$ tq : $\|T(t)\| \geq M \exp^{wt}, t \leq 0$.

Définition 2.6. *Le type de* $(T(t))_{t \leq 0}$ *est définit par :* $W_0(T) = \inf w \in \mathbb{R} : \sup \exp^{-wt} \|T(t)\| < \infty$

Remarques 2.3. *Si* $w_0(T) < 0$ *alors :* $T(t) \to 0$ *comme* $t \to +\infty$ *exponentiellement* .

Proposition 2.1. *Le type* $W_0 = W_0(T)$ *du semi groupe* $T(t)$ *est calculé par la formule suivante :*
$w_0(T) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\log \|T(t)\|}{t} = \inf \frac{\log \|T(t)\|}{t}$

Corollaire 2.2. *Si* T *est un* C_0*-semi-groupe de type* W_0 *, alors pour tout* $w > W_0$ *il existe* $M_w > 1$ *tq :*

$$\|T(t)\| \leq M_w \exp wt, t \geq 0$$

preuve

Définition 2.7. *On dit que* $(T(t))_{t \geq 0}$ *est éventuellement compact . S'il existe* $t_0 > 0$ *telle que :*$T(t_0)$ *soit compact*

Définition 2.8. *On dit que* $(T(t))t \geq 0$ *est compact si* $T(t)$ *est compact pour toute* $t > 0$

Remarques 2.4. *La loi de semi-groupe implique que* $T(t)$ *soit compact pour* $t \geq t_0$ *si* $T(t)$ *soit compact pour* $t \geq t_0$

Définition 2.9. *La boule spectrale* $S(A)$ *définir par :* $S(A) = \sup Re\lambda, \lambda \in \sigma(A)$

Théorème 2.9. *Si* $(T(t))_{t \geq 0}$ *est éventuellement compact alors :* $W_0(T) = S(A)$

Remarques 2.5. *Si* $S(A) < 0$ *alors :* $\|T(t)\| \to 0$ *comme* $t \to +\infty$ *en générale* $S(A) \leq W_0(t)$

Théorème 2.10. *Si* $(T(t))_{t \geq 0}$ *est éventuellement compact alors :* $\sigma(A) = \sigma_p(A)$

exemple $D(\Delta) = f \in C^2([0,1]) \cap C_0([0,1]), \Delta f = f'', f', f'' \in C_0([0,1])$

Lemme 2.4. Δ *est le générateur infinitésimale d'un semi-groupe compact*

2.3.2 Cas non linéaire

Considérer l'équation d'évolution suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(x(t)), t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Nous supposons que : $f : X \to X$ est lipschitzienne alors l'équation 2.3.2 admet un unique solution $x(t, x_0)$ sur $\mathbb{R}^+$

Définition 2.10. *Soit $\overline{x} \in X$, $\overline{x}$ un équilibre (solution stationnaire) d'équation 2.3.2 ssi : $A\overline{x} + f(\overline{x}) = 0$ c'est $x(t) = \overline{x}$ est une solution constante (c-à-dire : $\overline{x} = x(t, \overline{x}), \forall t \geq 0$)*

Définition 2.11. *(Lyapunov) Soit $\overline{x}$ un équilibre d'équation 2.3.2 on dit que $\overline{x}$ est stable si : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq : $\|x_0 - \overline{x}\| < \delta$ alors : $\|x(t, x_0) - \overline{x}\| < \epsilon, \forall t \geq 0$*

Définition 2.12. *On dit que $\overline{x}$ est asymptotiquement stable si :*

1 $\overline{x}$ est stable

2 $\forall \delta_0 > 0$, $\forall x_0 \in B(\overline{x}, \delta_0)$: $x(t, x_0) \to \overline{x}$

Définition 2.13. *On dit que $\overline{x}$ est localement stable de manière exponentielle si :*

1 $\overline{x}$ est asymptotiquement stable

2 La vitesse de la convergence est exponentielle , i.e : $\exists \delta_0 > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ tq : pour toute $x_0 \in B(\overline{x}, \delta_0)$. Nous avons : $\|x(t, x_0) - x(t, \overline{x})\| \leq \beta \exp^{-\alpha t} \|x_0 - \overline{x}\|, \forall t \geq 0$

Définition 2.14. *On dit que : $\overline{x}$ est globalement asymptotiquement stable ssi :*

1 $\overline{x}$ est stable

2 $\forall x_0 \in X$: $x(t, x_0) \to \overline{x}$ comme $t \to +\infty$

2.3.3 Stabilité linéaire

Supposons que $\overline{x}$ soit un équilibre d'équation 2.3.2 et que f soit différentiable à $\overline{x}$.
Soit $B = f'(\overline{x}) \in B(X, X)$
Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + By(t), t \geq 0 \\ \hfill y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

L'équation 2.1 est bien posé , $\forall y \in X$, c'est la solution à l'équation existe , elle est unique et dépend continuellement des donnes initiales .
L'équation 2.1 a une solution unique $y(t, y_0)$ donnée par :

$$y(t, y_0) = T(t)y_0 + \int_0^t T(t-s)By(S, y_0)\mathrm{d}s$$

Lemme 2.5. *$A+B$ est le générateur infinitésimale d'un C_0-semi-groupe $S(t)$ définit par :*

$$S(t)y_0 = y(t, y_0)$$

preuve Évidement $S(t)$ était donner par la relation 2.5 est un C_0-semi-groupe .
Soit C son générateur infinitésimal .
On a : $C = A + B$
Soit : $y_0 \in D(C)$ alors : $\lim\limits_{t \to 0} \frac{S(t)y_0 - y_0}{t}$ existe
Où : $\frac{S(t)y_0 - y_0}{t} = \frac{T(t)y_0 - y_0}{t} + \frac{1}{t}\int_0^t T(t-s)By(S, y_0)\mathrm{d}s$
Comme : $t \to 0$ on a : $Cy_0 = Ay_0 + By_0$
Donc : $C = A + B$

Théorème 2.11. *Supposons que $(T(t))_{t \geq 0}$ est compact si $S(A+B) < 0$ alors : $\overline{x}$ est localement stable exponentiellement*

preuve Prendre : $S(A + B) = W_0(S)$
il suffit de prouver que : $S(t)$ est compact pour $t > 0$
Mais : $S(t)y_0 = T(t)y_0 + \int_0^t T(t-s)BS(s)y_0\mathrm{d}s$

Soit : $v(t)y_0 = \int_0^t T(t-s)BS(s)y_0 \mathrm{d}s$, nous devons montrer que $v(t)$ est compact

$$\begin{aligned} v(t) &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{t-\epsilon} T(t-s)BS(s)y_0 \mathrm{d}s \in B(X,x) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} K_\epsilon \end{aligned} \quad \text{où : } K_\epsilon = \int_0^{t-\epsilon} T(t-s)BS(s)\mathrm{d}s \ ,$$

nous devons montrer que K_ϵ est compact .

$$\begin{aligned} K_\epsilon &= \int_0^{t-\epsilon} T(t-s)BS(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{t-\epsilon} T(t-\epsilon+\epsilon-s)BS(s)\mathrm{d}s \\ &= T(\epsilon)\int_0^{t-\epsilon-s} T(t-\epsilon-s)BS(s)\mathrm{d}s \quad \mathit{estcompact} \end{aligned} \quad \text{Où } T(\epsilon) \text{ est compact et}$$

$\int_0^{t-\epsilon} T(t-s)BS(s)y_0 \mathrm{d}s \in B(X,X)$
puisque la composition de l'opérateur compact avec l'opérateur linéaire est compact alors : K_ϵ est compact donc $v(t)$ est compact

Théorème 2.12. *Le principe de stabilité linéaire Supposons que le type de S , $W_0(S) < 0$, alors $\overline{x}$ est localement stable de manière exponentiellement pour l'équation 2.3.2*

2.3.4 Cas spécial

Supposons : $f'(\overline{x}) = -\alpha I$, $\alpha > 0$

Proposition 2.2. *Il existe $W_0 > 0$, tq : $\alpha > W_0$ alors $\overline{x}$ est localement stable d'une manière exponentielle .*

preuve(principe de stabilité linéaire) $W_0(S) = A - \alpha I$ générateur infinitésimale de $\exp^{-\alpha t} T(t)$ il s'ensuit que : $S(t) = \exp^{-\alpha t} T(t)$.
$\|S(t)\| = \|\exp^{-\alpha t} T(t)\|$, mais il existe $M \geq 1$ tq : $\|T(t)\| \leq M \exp^{W_0 t}$, $W_0 > 0, \forall t \geq 0$
On a : $\|S(t)\| \leq M \exp^{(-\alpha + W_0)t}$
Si : $-\alpha + W_0 < 0 \iff W_0 < \alpha$, il est alors naturel d'écrire : $W_0(S) \leq -\alpha + w < 0$
Pour conséquent $\overline{x}$ est exponentielle localement stable pour notre système 2.3.2 .