REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE IBN KHALDOUN TIARET

Faculté des Mathématiques et d'Informatique

Département de Mathématiques

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse Fonctionnelle Et Application

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Sujet de mémoire

Étude de L'existence et l'unicité Des Solutions Pour Quelques Types D'équations Intégrales

Présenté par

***BECHEIKH Amina**
***KHELLAF Mira**
***LADGHEM Omar**

soutenue devant le Jury composé de

***Mr.SOFRANI MOHAMMED**	**MAA**	**Président**
***Mr.SOUID MOHAMMED SAID**	**MCA**	**Encadreur**
***Mr.BEN GUESSOUM AISSA**	**MCB**	**Examinateur**

Promotion : **2018 \ 2019**

Remerciement

★ Tout d'abord nous remercions ALLAH le tout miséricordieux qui nous a donné la force et Le courage pour réaliser ce travail.

★ Le grand merci à notre promoteur Mr.Souid Mohammed Said pour ses conseils et son aide et qui a mis à disposition tous les nécessaires pour réaliser ce mémoire.

★ Nous voudrons remercier en deuxième lieu les membres de jury Mr .Sofrani Mohammed pour le grand honneur qu'il nous fait en présidant le
jury de notre soutenance, Mr. Ben Guessoum Aissa pour l'honneur qu'il nous
fait d'avoir accepter l'examen de notre travail.

★ Nous remercions également toute l'équipe pédagogique de l'Université Ibn Khaldoun -Tiaret-spécialement département de mathématique pour leur encadrement durant notre cursus universitaires.

★ Enfin Nous tenons à remercier toutes les personnes qui nous ont conseillé lors de la rédaction de ce mémoire : Nos familles, nos amis, nos professeurs, et nos camarades de promotion.

★ ★ ★

*__________ *Je dédie ce travail à* __________*

✓ Moi même où je touche tout mes efforts mon travail ma volonté et mon amour au mathématique où je réalise l'un de mes grands buts, et j'en récolte le fruit de ma longue carrière scolaire.

✓ Mes parents qui m'ont ramené à cette vie d'abord et grâce à eux que j'ai vécu ce succès inoubliable.

✓ Mon enseignante au collège M.BOUBEGAR celle qui me donne l'énergie d'amour et de courage.

✓ Toute ma famille, mes frères, sœurs, neveux, nièces cousins et cousines,...

✓ Mes amis qui m'encouragent à touts moments.

✓ Et en fin à toute personne qui voulait voir mon succès.

Becheikh Amina

Je dédie ce travail à

✓ Je rend grâce à dieu de m'avoir donner le courage et la volonté ainsi que la conscience afin de terminer mes études.

✓ A mes très chers parents qui m'ont soutenus dans la réussite de mes études.

Ma chère mère et mon cher père.

✓ A mes frères :Samir et Abd Elhafidh, ma soeur et son enfant Mehdi.

✓ A tous mes amis sans exception et à toute la promotion de mathématique

✓ A tous mes enseignants surtout M.Ziane.

Ladghem Omar

Je dédie ce travail à

✓ A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur , ma vie et mon bonheur , maman que j'adore.

✓ Aux personne que j'ai aimé leur présence dans ce jour, â mes très cher oncles Aissa et M'henni, et bien sur à mes frères Fateh et Azedinne sans oublier mes sœurs, leurs maris et leurs enfants ,A toute ma famille, et mes amis

✓à tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin pour que ce projet soit possible , je vous dis merci.

Khellaf Mira

Notations et Conventions

On utilise les notation suivantes :

- E est un espace de Banach et Ω un sous ensemble borné de E On notera par :

✓ $\|.\|$: sa norme.

✓ $B(x_0, r)$: la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.

✓ $C(I, J)$: l'espace des fonctions continue sur I à valeurs dans J.

✓ $P.P$: presque par tout.

✓ $C[a, b]$: L'espase des fonctions continues sur $[a, b]$.

✓ λ : Paramètre réel.

Table des matières

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est de présenter, des résultats d'existence et d'unicité des solutions continues et intégrables pour des équations intégrales de type (Fredholm, Volterra et Hammerstein).
Tous les problèmes étudiés sont considérés dans un espace de Banach.
La technique utilisée c'est de ramener l'étude de notre problème à la recherche d'un point fixe d'un opérateur intégral convenablement construit. En appliquant des théorèmes de point fixe. (Le théorème du point fixe de Banach, Schauder, Leray-Schauder et de schaefer).

Le contenu de ce mémoire est basé sur les articles **[14, 15, 16]**.
les équations intégrales jouent un rôle très important dans l'analyse fonctionnlle, ainsi que dans la résolution des problèmes de la physique.
les principaux fondateurs de la théorie d'équation intégrales sont Vito Volterra (1860 -1940), et Ivar Fredholm (1866 - 1927), ainsi que David Hilbert (1862 - 1943) et Erhard Schmidt (b.1876). Volterra était le premier à avoir identifier l'importance de la théorie et pour la considérer systématiquement, mais la contribution de Fredholm

a permis le franchissement (environ 1900), (plutôt qu'évitant), de la difficulté liée à la disparition du déterminate des coefficients. néanmoins, la priorité de Volterra généralement aurait été reconnue si son premier papier sur le sujet (1896) avait été présenté différemment. Mais Volterra au lieu de déduire ses résultats par les mêmes méthodes qu'il a employées pour leur découverte (qui étaient identiques à ceux utilisées plus tard tellement avec succès par Fredholm) a simplement édité une vérification de sa solution **[22]**.

La théorie du point fixe est au coeur de l'analyse non linéaire appliquée aux équations intégrales puis qu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans beaucoup de problèmes non-linéaires différents. Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base en montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations.
Ce mémoire se compose en quatre chapitres .

Dans **le premier Chapitre** (intitulé **"Préliminaire"**), nous donnons notions, définitions, et dans la dernière section on donne une introduction à la théorie du point fixe et quelques théorèmes du point fixe (Le théorème du point fixe de Banach, Schauder, Leray-Schauder et de schaefer).

Le deuxième chapitre est une introduction à la terminologie et à la classification des équations intégrales, tel que on va présenter une classification pour les équations intégrales linéaires et non-linéaires, comme on a donné des exemples sur ces équations,

Dans **Le troisième chapitre** Nous présentons, des résultats d'existence et d'unicité des solutions continues pour l'équation intégrale de type Fredholm.

$$x(t) = f(t) + \int_a^b g(t,s,x(s))ds, \qquad -\infty < a \leq t \leq b < +\infty,$$

et de type Volterra suivante :

$$x(t) = f(t) + \int_a^t g(t, s, x(s))ds, \qquad -\infty < a \leq t \leq b < +\infty,$$

Le quatrième chapitre est consacré à l'existence des solutions intégrables dans l'espace $L_{p,\mu}$ de l'équation intégrale non-linéaire de type Hammerstein suivante :

$$x(t) = g(t) + \int_0^{+\infty} k(t, s) f(s, x(s))ds.$$

Mots clés : équation intégrale, équations intégrales linéaires et non-linéaires, équations intégrales de type Fredholm et Volterra, équations intégrales non-linéaires de type Hammerstein, espace de Banach, Le théorème du point point fixe, opérateur intégral.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre nous présentons des notations, définitions et des théorèmes utilisés dans ce mémoire.

1.1 Rappels Sur Les Espaces Fonctionnels

Commençant par rappeler la définition d'un espace vectoriel normé.

Définition 1.1. *(**Espace vectoriel normé**) Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle norme sur l'espace E toute application notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant pour tout x, y dans E et α dans $\mathbb{K}$.*

(i) $\|x\| = 0$ *si seulement si* $x = 0$.

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ *(homogènéité).*

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.2. *(**Espace métrique complet**) On dit que E est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E.*

Définition 1.3. *(**Espace de Banach**) Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.*

Définition 1.4. *(**Espace** $C[a,b]$) L'espace des fonctions continues sur $[a,b]$, muni de la norme :*

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

Définition 1.5. *Soit $\mu(.)$ une fonction mesurable positive arbitraire sur $\mathbb{R}_+$, on désigne par $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ l'espace pondéré de toutes les fonctions mesurables x satisfaisant les conditions suivantes :*

$$\int_{\mathbb{R}_+} |x(t)|^p \mu(t)dt < \infty.$$

l'espace pondéré $L_{p,\mu} = L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ muni de la norme definie par :

$$\| x \|_{p,\mu} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |x(t)|^p \mu(t)dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

de plus l'espace $L_{p,\mu}$ est un espace de Banach.

Définition 1.6. *[5]**Espace** $L^p(\Omega)$*

Soit n un entier tel que $n \geq 1$ on désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue on définit, pour tout $p \in [1, +\infty[$,l'espace

$$L^p(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \ \textit{mesurable},\ \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \Big\},$$

que l'on munit de la norme $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$

Pour $y \in L^p[0,T]$, la norme et donnée par

$$\|y\|_p = \begin{cases} \left(\int_0^T |y|^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}} & pour \quad 1 \leq p < \infty \\ ess \sup_{t\in[0,T]} |y(t)| & pour \qquad p = \infty \end{cases}$$

1.2 Quelques Définitions et Théorèmes

Définition 1.7. ***(Ensemble convexe)*** *une partie C d'un espace vectoriel réel E est dite convexe si et seulement si :*

$$\forall x, y \in C, \qquad \forall \alpha \in [0,1] : \qquad \alpha x + (1-\alpha)y \in C.$$

Définition 1.8. *Soit $C(J,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J dans $\mathbb{R}$ de l'espace de Banach X, M un sous ensemble de $C(J,\mathbb{R})$.*

1. *M est dit **équicontinu** si est seulement si :*
   $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t_1, t_2 \in J$:
   $\|t_1 - t_2\| \leq \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon,\ \forall f \in M.$
2. *M est dit **uniformément borné** si et seulement si :*
   $\exists c > 0 : \|f(t)\| \leq c, \qquad \forall t \in J \qquad$ *et* $\qquad \forall f \in M.$

Théorème 1.1. ***[18] (Ascoli Arzela)***
Soit $C(J,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J dans $\mathbb{R}$ de l'espace de Banach X, M un sous ensemble de $C(J,\mathbb{R})$.
Un sous ensemble M de $(J,\mathbb{R})$ est relativement compact si :

- *M est uniformement borné.*
- *M est équicontinu.*

La caractérisation de Kolmogorov des ensembles relativement compact dans l'espace $L_{p,\mu}$ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.2. ***[10](critère de compacité de Kolmogorov dans** $L_{p,\mu}$**)*** *X un sous ensemble borné dans $L_{p,\mu}$,$1 < p < \infty$ est relativement compact si et seulement si :*
(i) $\lim_{h \to 0} \| x(t+h) - x(t) \|_{p,\mu} = 0$, *uniformément sur X.*
(ii) $\lim_{A \to \infty} \int_A^{+\infty} |x(t)|^p \mu(t) dt = 0$, *uniformément sur X.*

Lemme 1.1. ***[23](Lemme de Gronwall)*** *Soit $u : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$ une application continue, positive.On suppose qu'il existe λ et μ deux fonctions continues $(\lambda \geq 0)$ satisfaisant*

$$u(t) \leq \mu(t) + \int_{t_0}^{t} \lambda(s)u(s)ds, \qquad \forall t \in [t_0, b]. \tag{1.1}$$

Alors, u satisfait l'estimation suivante

$$u(t) \leq \mu(t) + \int_{t_0}^{t} \lambda(s)u(s) \exp\left(\int_{s}^{t} \lambda(y)dy\right) ds.$$

Dans le cas particulier $\mu(t) \equiv C$, on obtient la majoration suivante :

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right).$$

Définition 1.9. ***[7]*** *Une fonction $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite* ***Carathéodory*** *si :*

(i) *La fonction $t \to f(t, x, y)$ est mesurable pour chaque $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

(ii) *La fonction $(x, y) \to f(t, x, y)$ est continue presque par tout $t \in J$.*

Définition 1.10. ***[5](Théorème de convergence dominée de Lebesgue)***
Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1.On suppose que

i) $f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω.

ii) il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque $n, |f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω.

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \ \ et \ \ \|f_n - f\|_{l^1} \to 0.$$

Inégalité de Hölder [5]

Soient p et q deux exposants conjugués (i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et $f \in L^p, g \in L^q$
alors,

$$f.g \in L^1 \qquad et \qquad \int |fg| \leq \|f\|_p.\|g\|_q.$$

Un cas particulier de l'inégalité de Hölder pour $p = q = 2$, on a

$$\int |f.g| \leq \left(\int |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

cette inégalité est appelée inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 1.11. ***[5](Fubini)*** *On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, Alors, pour presque tout $x \in \Omega_1$,*

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \qquad et \qquad \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \qquad et \qquad \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

1.3 Notions Sur Les Opérateurs

.

Définition 1.12. ***(Opérateur Linéaire)*** *Soit T un opérateur d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que T est linéaire s'il vérifie les conditions suivantes : pour tout $\varphi_1,\ \varphi_2$ dans E et λ dans $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.*

i) $\forall \varphi_1,\ \varphi_2 \in E$ on a, $T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2)$.

ii) $\forall \varphi \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a, $T(\lambda\varphi) = \lambda T(\varphi)$.

Définition 1.13. ***(Opérateur borné)*** *Soit T un opérateur Linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que T est borné s'il existe une constante* *positive C, telle que :*

$$\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_F \ ,\forall x \in E.$$

Définition 1.14. *Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ un opérateur.*

1. *T est dit **continu** si pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ dans E tel que $(x_n)_{n\in N}$ converge vers x dans E, la suite $(Tx_n)_{n\in N}$ converge vers Tx.*
2. *T est dit **compact**, si pour tout borné B de E, $T(B)$ est relativement compact.*
3. *T est dit **complètement continu** si T est continue et si l'image de tout borné B de E est relativement compact.*
4. *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

1.3.1 L'opérateur de Nemytskii

.

Définition 1.15. *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory, l'opérateur $u \mapsto Fu$ défini par $(Fu)(x) = f(x, u(x))$ est appelé opérateur de Nemytskii.*

L_p-continuité de l'opérateur de Nemytskii sera utile pour prouver la continuité des opérateurs intégrales non linéaires.

Théorème 1.3. ***[16](La continuité de l'opérateur de Nemytskii)*** *Soit G un sous ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ et soit $f : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait les conditions de Caratéodory.*
(i) $f(\cdot, x) : G \to \mathbb{R}$ est mesurable pour chaque $x \in \mathbb{R}$.
(ii) $f(t, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue pour p.p $t \in G$.
soit $1 \leq p, q < \infty,\ k \in L^q(G),$ et supposant que

$$|f(t, x)| \leq c|x|^{\frac{p}{q}} + k(t) \qquad t \in G, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Puis l'opérateur définit par

$$F(x)(t) = f(t, x(t)), \qquad pour \quad p.p \quad t \in G, \qquad x \in L^p(G).$$

est borné et continu.

1.4 Quelques théorèmes de Point Fixe

Introduction

La théorie du point fixe est au cœur de l'analyse non linéaire appliquée aux équations intégrales puis qu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans beaucoup de problèmes non-linéaires différents. Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base en montrant l'existence des solutions dans divers genres d'équations.

Les théorèmes de point fixe sont un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles et intégrales. **Dans ce mémoire**, on va étudier des différents théorèmes du point fixe tels que le théorème de Banach, Schauder, Schaefer et de Leray-Schauder. Étant donnés un ensemble M et une application $T : M \to M$, ces théorèmes donnent certaines conditions sous lesquelles T admet un point fixe dans M. Ces théorèmes sont importants dans les mathématiques car ils ont plusieurs applications, par exemple trouver les racines d'un polynôme, ou montrer l'existence des solutions numériques des équations intégrales.

Un de ces théorème est le théorème de l'application contractante prouvé par Banach en (1922) dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. Ce théorème donne un comportement régulier du point fixe par rapport aux paramètres. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée. Mais d'une part, montrer que la fonction est contractante peut entraîner de laborieux calculs. D'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Il n'est pas donc nécessaire d'établir des estimées sur la fonction, mais simplement sa continuité. Ceci nous donne la possibilité de traiter plus de cas qu'avec le Théorème de Banach (par exemple, l'identité).
Le théorème de Leray-Schauder, est aussi appelé théorème de continuité, représentent un outils puissant d'existence en étudiant les équations d'opérateur. Par des moyens de théorème de continuité nous pouvons obtenir une solution d'équation donnée si nous commençons par une des solutions de l'équation simple.

Définition 1.16. *Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach E dans lui-même, alors pour tout $x \in E$, tel que $x = T(x)$, s'appelle un point fixe de l'opérateur T.*

Définition 1.17. *Soit (X, d)un espace métrique. une application $T : X \to X$ est dite Lipschitzienne s'il existe une constante k (appelée constante de Lipschitz) telle que :*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \qquad \textit{pour tout } x, y \in X.$$

une application Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz $0 < k < 1$ est appelée contraction.

Théorème 1.4. ***[8] (Théorème du point fixe de Banach).***
Soit (X, d)un espace métrique complet. une application $T : X \to X$ est une contraction avec la constante de Lipschitz k. Alors T a un point fixe unique $x \in X$.

Le théorème du point fixe de Schauder suivant est le plus utilisé dans les applications :

Théorème 1.5. ***[8](Théorème de point fixe de Schauder)**.*
Soit X un espace de Banach, $K \subset X$ un ensemble convexe, fermé, borné et non vide. Et soit $T : K \to K$ un opérateur complètement continue. Alors T admet au moins un point fixe.

Théorème 1.6. ***[8] (Théorème de point fixe de Leray-Schauder)**.*
Soit $(X, |\cdot|)$ un espace de Banach et supposons que $T \in C(X, X)$ et compact. Supposons que pour toute solution x,
telle que $x = \lambda Tx,\ 0 \leq \lambda \leq 1$ vérifier l'estimation à priori $|x| \leq M$ pour une constante $M > 0$, alors T a un point fixe.

Théorème 1.7. ***[8] Théorème du point fixe de Schaefer**.*
Soit X un espace de Banach et $T : X \to X$ est un opérateur complètement continu on a alors l'alternative suivante :

i) Ou bien, l'équation opérateur $x = \lambda Tx$ admet une solution pour $\lambda = 1$.
ii) Ou bien, l'ensemble $\varepsilon = \{x \in X,\ x = \lambda Tx,\ \lambda \in [0, 1]\}$ est non borné.

*Pour les arguments des théorèmes du points fixe, le lecteur peut voir [**1**, **3**, **4**, **7**, **9**, **12**, **20**, **21**]*

Chapitre 2

Introduction À La Théorie Des Équations Intégrales

Dans ce chapitre, on donne les définitions et les types des équations intégrales et leurs classifications, avec une introduction à la théorie de ces équations.

2.1 Introduction

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement est une fonction d'une ou plusieurs variables, se produit sous signe intégral.

$$\int_E K(x, y, \varphi(y))dy = \lambda\varphi(x) + f(x)$$

Cette définition plutôt générale tient compte de beaucoup de différentes formes spécifiques et dans la pratique beaucoup de types distincts surgissent. Dans la théorie classique d'équations intégrales on distingue les équations de Fredholm (Ivare Fredholm (1866-1927), mathématicien Suédois).

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y) = f(x).$$

et les équations de Volterra (Vito Volterra (1860 – 1940), mathématicien Italien).

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y) = f(x).$$

Dans une équation de Fredholm les régions d'intégrations sont fixées, tandis que dans une équation de Volterra une région est variable. Quelques équations intégrales s'appellent singulières, quelques auteurs appellent une équation singulière si l'intégral ne peut pas être interprétée comme d'habitude (c'est-à-dire : dans le sens de Riemann ou de Lebesgue), mais doit être considéré en tant que intégral de valeur principale.

Définition 2.1. *On appelle équation intégrale toute équation de la forme*

$$\int_E K(x,y,\varphi(y))dy = \lambda\varphi(x) + f(x). \tag{2.1}$$

où E est un espace mesuré, $f(x)$ une fonction mesurable donnée sur E, λ un scalaire donné qui peut être réel ou complexe et $K(x,y,\varphi(y))$ une fonction mesurable sur E^3 appelée noyau de l'équation intégrale.
Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction φ qui satisfait l'équation (2.1).

Définition 2.2. *On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les limites d'intégration sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des limites de l'intégration.*

Définition 2.3. *un opérateur intégral linéaire A est un opérateur linéaire qui admet une formulation de la forme suivante :*

$$A\varphi(x) = \int_\Omega K(x,y)\varphi(y)dy.$$

et la fonction K étant appelée noyau de l'opérateur intégral A.

2.2 Classification Des Équation Intégrales

Les équations intégrales sont classées par leurs caractéristiques selon trois caractéristiques de base décrient leur structure globale, il est utile de les citer avant d'entrer dans les détails.

1. **limites d'intégration**

   Toute équation intégrale à limites constantes est appelée équation de Fredholm

   $$\lambda\varphi(x) - \int_a^b K(x, y, \varphi(y)) = f(x) \qquad a \leq x \leq b.$$

   Si l'un des deux limites d'intégration est variable, l'équation devient une équation de Volterra.

2. **L'opérateur intégral T**,

   L'équation définit par

   $$T\varphi = f.$$

   est dite une équation de premier espèce.

   Si l'équation est définit par

   $$\varphi - T\varphi = f.$$

   Cette équation est dite une équation de deuxième espèce.

   C'est-à-dire

   Le type (espèce) d'une équation se rapporte à la localisation de la fonction inconnue. Pour les équations de première espèce, la fonction inconnue apparaît uniquement à l'intérieur du signe intégral. Cependant pour les équations de seconde espèce, la fonction inconnue apparaît également à l'extérieur du signe intégral.

3. **Le second membre de l'équation**,
   Si $f = 0$ l'équation est une équation homogène. Sinon cette équation est dite équation non-homogène.

2.2.1 Équations intégrales de Volterra

Définition 2.4. *On appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce une équation de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt.$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

1. *Une équation de la forme*

$$\int_a^x K(x, t, \varphi(t))dt = f(x).$$

   où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue est appelée équation intégrale de Volterra non linéaire de première espèce .

2. *On appelle une équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt.$$

   où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

3. *Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt.$$

elle est appelée équation intégrale linéaire homogène de Volterra de seconde espèce.

4. *Une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme*

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x).$$

est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce.

Exemples des Équations intégrales de Volterra

Équations intégrales linéaires non homogènes de Volterra de la seconde et premier espèce

$$u(x) = x^2 + \sin x + 1 + \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt \qquad ; \qquad 0 = x^2 + 1 + \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt.$$

Équation intégrales linéaire homogènes de Volterra de la seconde et première espèce

$$u(x) = \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt \qquad ; \qquad 0 = \lambda \int_0^x (x^2 - t)u(t)dt.$$

2.2.2 Équations intégrales de Fredholm

Définition 2.5. *On appelle une équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce une équation de la forme*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(t))dt = f(x).$$

Où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue et $K(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t,\varphi(x))dt.$$

Elle est dite équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce homogène, si dans le cas contraire.

Si $f(x) \neq 0$ *elle est dite équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce non homogène.*

1. *On appelle une équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x).$$

Où $\varphi(x)$ *est une fonction inconnue et* $K(x,t)$ *et* $f(x)$ *sont des fonctions connue et* λ *un paramètre réel.*
Si $f(x) = 0$ *et* $\widetilde{K}(x,t) = \lambda K(x,t)$ *l'équation s'écrit*

$$\varphi(x) = \int_a^b \widetilde{K}(x,t)\varphi(t)dt.$$

Elle est dite équation intégrale de Fredholm de seconde espèce homogène si dans le cas contraire $f(x) \neq 0$ *Elle est dite équation intégrale de Fredholm linéaire de seconde espèce non homogène.*

2. *Une équation de la forme*

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x).$$

Est appelée équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

2.3 Exemples des Équation intégrales de Fredholm

Équation intégrales linéaire non homogènes de Fredholm de la seconde et premier espèce

$$u(x) = x^2+\sin x+1+\lambda \int_{-1}^{1} (x^2-t)u(t)dt \qquad ; \qquad 0 = x^2+\sin x+1+\lambda \int_{-1}^{1} (x^2-t)u(t)dt.$$

Équations intégrales linéaires homogène de Fredholm de la seconde et premier espèce

$$u(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 - t)u(t)dt \qquad ; \qquad 0 = \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 - t)u(t)dt.$$

2.3.1 Équation intégrale de Hammerstein :

On appelle équation intégrale de Hammerstein, une équation de la forme :

$$u(x) = v(x) + \lambda \int_{\Omega} k(x,y)f(y,u(y))dy, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

avec des fonction données $v : \Omega \to \mathbb{R},\ k : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ o\, u : \Omega \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue.

Pour plus de détails le lecteur peut consulter les ouvrages
voir [**2**, **6**, **11**, **13**, **17**, **19**]

Chapitre 3

Existence De Solutions Continues Pour l'équation Intégrale Non Linéaire De Fredholm Et Volterra

Introduction

Le but de ce chapitre consacré sur l'application de certaines théorèmes de point fixe (Le théorème du point fixe de Banach, Schauder, Leray-Schauder et de schaefer) sur les équations intégrales (celles de Volterra, et celles de Fredholm) à fin de prouver l'existence et l'unicité des solutions continues de ces équations.

3.1 Résultats D'éxistence Pour L'équation Intégrale Non-Linéaire De Fredholm

Notre premier résultat d'existence consacré à l'existence de solutions continues pour l'équation intégrale non-Linéaire de Fredholm est donne par les théorèmes suivants :

Théorème 3.1. *On considère l'équation intégrale non linéaire de Fredholm*

$$x(t) = f(t) + \int_a^b g(t, s, x(s))ds, \qquad -\infty < a \leq t \leq b < +\infty. \tag{3.1}$$

Où $f(\cdot) \in \boldsymbol{C}([a, b])$, supposons que la fonction $g(t, s, x)$ satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{sup}\left(|g(t,s,x)|, \left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,s,x)\right|\right) \leq V_1(t)V_2(s)\phi(|x|)), \\ \\ \left|\frac{\partial g}{\partial x}(t,s,x)\right| \leq V_1(t)V_2(s)\psi(|x|). \end{cases} \tag{3.2}$$

Où $V_1(\cdot) \in \boldsymbol{C}([a, b])$, $V_2(\cdot) \in \boldsymbol{L}^1([a, b])$, $\phi(\cdot)$ est une fonction positive et bornée sur $[0, +\infty[$ et $\psi(\cdot)$ est une fonction positive et bornée sur $[0, +\infty[$,
sous les conditions ci-dessus, équation (3.1) *a une solution dans $\boldsymbol{C}([a, b])$.*

Preuve
Soit l'opérateur T défini dans $\mathbf{C}([a, b])$ par :

$$Tx(t) = f(t) + \int_a^b g(t, s, x(s))ds.$$

La preuve du Théorème est donnée en deux étapes.
Première étape :
Nous prouvons que $T : \mathbf{C}([a, b]) \to \mathbf{C}([a, b])$ est continu.
Nous montrons d'abord que $Tx(\cdot) \in \mathbf{C}([a, b])$ chaque fois que $x(\cdot) \in \mathbf{C}([a, b])$ la suite $(t_n)_n$ convergeant ver t,
puisque

$$|Tx(t_n) - Tx(t)| \leq |f(t_n - f(t)| + \int_a^b |g(t_n, s, x(s)) - g(t, s, x(s))|ds. \tag{3.3}$$

et

$$\begin{aligned}|g(t_n,s,x(s))-g(t,s,x(s))| &\leq |g(t_n,s,x(s))|+|g(t,s,x(s))|\\ &\leq [V_1(t_n)+V_1(t)]v_2(s)\phi(|x(s)|)\\ &\leq 2\|V_1\|_\infty V_2(s)\sup_{u\geq 0}|\phi(\mu)| = 2\|V_1\|_\infty V_2(s)M_\phi \in \mathbf{L}^1([a,b]).\end{aligned}$$

Puis en utilisant la continuité de $g(t,s,x)$ et en appliquant le théorème de la convergence dominé à (3.3) , on conclut que :

$$\lim_{n\to+\infty}|Tx(t_n)-Tx(t)|\leq \lim_{n\to+\infty}|f(t_n)-f(t)|+\int_a^b \lim_{n\to+\infty}|g(t_n,s,x(s))-g(t,s,x(s))) = 0.$$

Donc $Tx(\cdot)\in\mathbf{C}([a,b])$.après nous prouvons que l'opérateur T est continu sur $\mathbf{C}([a,b])$. $(x_n)_n\in\mathbf{C}([a,b])$ une suite convergente uniformément vers $x(\cdot)$ puisque $\mathbf{C}([a,b])$ est complet, alors $x(\cdot)\in\mathbf{C}([a,b])$. ensuite, $\forall t\in[a,b]$ nous avons :

$$\begin{aligned}|Tx_n(t)-Tx(t)| &\leq \int_a^b |g(t,s,x_n(s))-g(t,s,x(s)|ds\\ &\leq \int_a^b |x_n(s)-x(s)|\left|\frac{\partial g}{\partial x}(t,s,\theta_s x_n(s)+(1-\theta_s)x(s)\right|ds, \quad 0<\theta_s<1\\ &\leq \|x_n-x\|_\infty \|V_{1\|_\infty}\int_a^b V_2(s)\psi(|\theta_s x_n(s)+(1-\theta_s)x(s)|).\end{aligned}$$

Puisque $x_n(\cdot)$ converge uniformément vers $x(\cdot)\in\mathbf{C}([a,b])$.alors $\forall s\in[a,b]$,
$|\theta_s x_n(s)+(1-\theta_s)x(s)|$ est continu dans un ensemble compact K de $[0,+\infty[$.
De plus, puisque $\psi(.)$ est continu sur $[0,+\infty[$. alors il existe une constante M_ψ telle que $\forall_n\in\mathbb{N}$ et $\forall s\in[0,1]$ sont combineés pour combine les deux inégalités précédentes, en conclut que .

$$\|Tx_n-Tx\|_\infty \leq \|x_n-x\|_\infty\|V_1\|_\infty\|V_2\|_1 M_\psi.$$

Deuxième étape :

Nous prouvons que T a un point fixe dans $C([a,b])$ en appliquant le théorème de point fixe de Schaefer, nous prouvons d'abord que T est totalement bornée par le théorème d'Ascoli Arzela, il suffit de prouver que $F = \{Tx_n; n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinu et borné chaque suite uniformément bornée $(x_n)_n$ de $C([a,b])$.

$$
\begin{aligned}
|Tx_n(t) - Tx_n(\tau)| &= \left| f(t) - f(\tau) + \int_a^b g(t,s,x_n(s)) - g(\tau,s,x_n(s)) \right| ds \\
&\leq |f(t) - f(\tau)| + \int_a^b |(t-\tau)| \left| \frac{\partial g}{\partial t}(t + \theta_t(\tau - t), s, x_n(s)) \right| ds \qquad 0 < \theta_t < 1 \\
&\leq |f(t) - f(\tau)| + |t-\tau| \|V_1\|_\infty \|V_2\|_1 M'_\psi,
\end{aligned}
$$

Alors F est équicontinu, de plus il est clair que F est borné si $(x_n)_n$ est bornée, donc F est totalement borné et par conséquent, T est totalement borné sur $C([a,b])$. comme on a déjà montrer que T est continue, on conclut que T est complètement continue sur $C([a,b])$. enfin, définissant l'ensemble ε par

$$
\varepsilon = \{x \in C([a,b]),\ \exists \lambda \in]0,1[;\ x = \lambda Tx\},
$$

on prouve que ε est bornée, soit $u(\cdot) \in \varepsilon$ alors $\forall t \in [a,b]$, on a

$$
\begin{aligned}
|u(t)| = |\lambda Tu(t)| &\leq \|f\|_\infty + \int_a^b |g(t,s,u(s))| ds \leq \|f\|_\infty + \|V_1\|_\infty \|V_2\|_1 sup|\phi(y)| \\
&\leq \|f\|_\infty + \|V_1\|_\infty \|V_2\|_1 M'_\phi.
\end{aligned}
$$

Donc, l'ensemble ε est borné, enfin, en appliquant le théorème de point fixe de Schaefer, on conclut que T a un point fixe dans $C([a,b])$, Par conséquent (3.1) a une solution continue sur $[a,b]$.

En utilisant une nouvelle norme $\|X\|_\mu$ et le théorème du point fixe de Schauder, Nous obtenons un résultat plus générale du **Théorème 3.1** à l'équation intégrale non linéaire de Fredholm avec des conditions plus faibles. C'est le sujet du prochain théorème.

Théorème 3.2. *On considère l'équation intégrale non linéaire de Fredholm :*

$$x(t) = f(t) + \int_a^b g(t,s,x(s))ds, \qquad -\infty < a \leq t \leq b < +\infty. \tag{3.4}$$

Supposant que $f(\cdot)$ *est une fonction borné et* $g(t,s,x)$ *satisfait les conditions suivantes :*

$$|g(t,s,x)| \leq V_1(t)V_2(s)\phi(|x|)), \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(t,s,x)\right| \leq V_1(t)V_2(s)\psi(|x|). \tag{3.5}$$

Où $V_1(\cdot)$ *est une fonction positive, bornée et mesurable,* $\phi(.)$ *est une fonction positive et mesurable qui vérifier la condition :*

$$\sup_{x \geq 0} \frac{\phi(x)}{x} = L < +\infty, \tag{3.6}$$

et $\psi(\cdot)$ *est une fonction continue et positive sur* $[0, +\infty[$*.De plus, on suppose qu'il existe une fonction strictement positive et continue* $\mu(\cdot)$ *qui vérifie la condition suivante :*

$$\|V_1.\mu\|_\infty \left\|\frac{V_2}{\mu}\right\|_1 < \frac{1}{L}, \tag{3.7}$$

sous ces conditions, l'équation intégrale non linéaire (3.4) *admet une solution dans* $\boldsymbol{C}([a,b])$.

Preuve

Nous vérifions tout d'abord que la fonction $\|\cdot\|_\mu$ *définie sur* $X = C([a,b])$ *par* $\|X\|_\mu = sup_{t\in[a,b]}|\mu(t)x(t)|$ *est une norme sur* X. *Ensuite* $r \geq 0$ *soit un nombre réel positif qui sera fixé ultérieurement et définissant le sous-ensemble* B_r *de* X *par*

$$B_r = \{x \in C([a,b]);\ \| x \|_\mu \leq r\},$$

il est clair que B_r est un sous-ensemble fermé et convexe de X. Soit T l'opérateur défini sur B_r par

$$Tx(t) = f(t) + \int_a^b g(t,s,x(t))ds,$$

*il est facile de vérifier que T transforme des ensembles bornés de B_r à des ensembles relativement compacts. par le Théorème du point fixe de **Schauder**, pour prouver l'existence d'une solution de (3.4), il suffit de vérifier que $T \in C(B_r, B_r)$. nous prouvons d'abord que $Tx(\cdot) \in C([a,b])$ chaque fois que $x(\cdot) \in C([a,b])$. Soit $(t_n)_n$ une suite dans $[a,b]$ convergeant vers t.Comme $f(\cdot) \in C([a,b])$ et puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$|g(t_n, s, x(s))| \leq V_1(t_n)V_2(s)M_{\phi,|x|} \leq \|V_1\|_\infty M_{\phi,|x|} V_2(s) \in L^1([a,b]), \tag{3.8}$$

*où $M_{\phi,|x|}$ est une constante ne dépend pas de $\phi(\cdot)$ et $|x(\cdot)|$, puis en appliquant le théorème de **convergence dominé**, on conclut que*

$$\lim_{n\to+\infty} Tx(t_n) = \lim_{n\to+\infty} f(t_n) + \int_a^b \lim_{n\to+\infty} g(t_n, s, x(s))ds = f(t) + \int_a^b g(t,s,x(s))ds. \tag{3.9}$$

Par conséquent, $Tx(\cdot) \in C([a,b])$. Suivant, nous prouvons que T est continu sur B_r p.p. Soit $(x_n)_n$ une suite de B_r converge vers x avec la norme $\|\cdot\|_\mu$. puisque $(B_r, \|\cdot\|_\mu)$

est complet alors $x \in B_r$. de plus, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\|Tx_n - Tx\|_\mu \\
&= \sup_{t\in[a,b]} \left|\mu(t)\int_a^b (g(t,s,x_n(s)) - g(t,s,x(s))ds\right| \\
&\leq \|\mu\|_\infty \int_a^b |x_n(s) - x(s)| \left|\frac{\partial g}{\partial x}(t,s,\theta_s x_n(s) + (1-\theta_s)x(s)ds\right|, \qquad \theta_s \in]0,1[\\
&\leq \|\mu\|_\infty \int_a^b V_1(t)\mu(s)|x_n(s) - x(s)|\frac{V_2(s)}{\mu(s)}\psi(|\theta_s x_n(s) + (1-\theta_s)x(s)|)ds, \qquad \theta_s \in]0,1[\\
&\leq \|\mu\|_\infty sup_{s\in[0,1]}\psi(|\theta_s x_n(s) + (1-\theta_s)x(s)|)\|x_n - x\|_\mu \left\|\frac{V_2}{\mu}\right\|_1. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Étant donné que $\mu(\cdot)$ est continue et bornée par zéro, il est clair que la convergence de $(X_n)_n$ vers x dans la norme $\|\cdot\|_\mu$ implique également la convergence uniforme sur $[a,b]$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}, \forall s \in [0,1]$, en conclut que $|\theta_s x_n(s) + (1-\theta_s)x(s)|$ est contenu dans un ensemble compact de $[0.\infty[$. De plus, puisque $\psi(\cdot)$ est continue sur $[0,\infty]$, en conclut qu'il existe une constante positive M_ψ telle que

$$\psi(|\theta_s x_n(s) + (1-\theta_s)x(s)|) \leq M_\psi, \forall s \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, l'inégalité précédente devient

$$\|Tx_n - Tx\|_\mu \leq \|\mu\|_\infty M_\psi \|V_2/\mu\|_1 \|x_n - x\|_\mu.$$

Par conséquent, T est continu sur B_r. Il reste à choisir le nombre réel positif r de *telle manière que $T(B_r) \subset B_r$. Soit $x \in B_r$, alors nous avons*

$$\begin{aligned} \|Tx\|_\mu &\leq \|\mu(t)f(t)\|_\infty + \left\| \mu(t)V_1(t) \int_a^b V_2(s)\phi(|x(s)|)ds \right\|_\infty, \\ &\leq \|f\|_\mu + \|V_1\|_\mu \left| \int_a^b \frac{V_2(s)}{\mu(s)} \mu(s)|x(s)| \frac{\phi(|x(s)|)}{|x(s)|} ds \right|, \\ &\leq \|f\|_\mu + \|V_1\|_\mu r L \left\| \frac{V_2}{\mu} \right\|_1 \leq \|f\|_\mu + r\left(L\|V_1\|_\mu \left\| \frac{V_2}{\mu} \right\|_1 \right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Par conséquent, la condition $T(B_r) \subset B_r$ est satisfaite pour tout nombre réel positif r satisfaisant

$$r \geq \frac{\|f\|_\mu}{1 - L\|V_1\|_\mu \|V_2/\mu\|_1} = r_0. \tag{3.12}$$

*Par le théorème du point fixe de **Schauder**, on conclut que T a un point fixe dans B_r pour tout $r \geq r_0$.*

Exemple 3.1.1. *: **Considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm suivante :***

$$x(t) = f(t) + \int_0^1 ((t+\alpha)(s+\beta)ln(1 + x^2(s))ds, \qquad 0 \leq t \leq 1. \tag{3.13}$$

*Où $f \in \boldsymbol{C}([0,1])$, α et β sont deux paramètres satisfaisant $0 \leq \alpha \leq 1$ et $\beta \geq 0$. En utilisant la notation du **Théorème 3.2**, on obtient*
$V_1(t) = t + \alpha$, $V_2(s) = s + \beta$, $\phi(x) = ln(1 + x^2)$ et $\psi(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ il est clair que $\phi(\cdot)$ satisfait la condition (3.6) avec $L = 1$ et que $\psi(\cdot)$ est une fonction continue et positive sur $[0, +\infty]$.
ensuite, considérons la fonction $\mu(t) = e^{-t}$, $t \in [0,1]$. Dans ce cas, il est facile de vérifier que

$$\|V_1\|_\mu \left\| \frac{V_2}{\mu} \right\|_1 = e^{\alpha - 1}[B(e-1) + 1].$$

Ainsi, par le théoreme précédent, on conclut que (3.13) a une solution continue chaque *fois que les paramètres α, β satisfont la condition*

$$e^{\alpha-1}[B(e-1)+1] < \frac{1}{L} = 1.$$

3.2 Résultats D'existence Et D'unicité Pour L'équation Intégrale Non Linéaire De Volterra

Si dans l'équation intégrale de **Fredholm** (3.1), nous remplaçons l'intégration liée à b par la variable t, nous obtenons une équation non linéaire de **Volterra**.

Théorème 3.3. *Considérons l'équation intégrale non linéaire de Volterra*

$$x(t) = f(t) + \int_a^t g(t,s,x(s))ds, \qquad -\infty < a \leq t \leq b < +\infty, \tag{3.14}$$

où f est continue sur $[a,b]$. supposons que $g(t,s,x)$ vérifier les conditions suivantes :

$$|g(t,s,x)| \leq V_1(t)V_2(s)\phi(|x|), \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(t,s,x)\right| \leq V_1(t)V_2(s)\psi(|x|), \tag{3.15}$$

où $V_1 \in C([a,b])$ et positif, $V_2(\cdot) \in L^1([a,b])$ et positif et où $\psi(\cdot)$ est une fonction positive et continue sur $[0,+\infty[$. finalement, nous supposons que la fonction $\phi(\cdot)$ est positive, continue et satisfait la condition

$$\lim_{y\to+\infty} (\phi(y) / y) = L < +\infty,$$

dans les conditions ci-dessus, (3.14) *a une solution continue sur $[a,b]$.*

Preuve

Soit $X = (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ indique l'espace de Banach des fonctions continues sur $[a,b]$ et définit l'opérateur T sur X par

$$Tx(t) = f(t) + \int_a^t g(t,s,x(s))ds,$$

en utilisant les conditions du théorème, il est facile de vérifier que $TX \subset X$ et T est compact. De principe de Leray-Schauder, pour prouver le résultat du théorème, il suffit de prouver que T est continu sur X et toute solution de $x = \lambda Tx,\ 0 \leq \lambda \leq 1$ est limitée par la même constante $M > 0$. Pour prouver la continuité de T sur $C([a,b])$, il suffit de remplacer $\mu(t)$ par 1 dans la preuve de la continuité de l'opérateur T du théorème précédent et de suivre les différentes étapes de cette preuve. Ensuite, nous notons que la condition

$$\lim_{y \to +\infty} (\phi(y)/y) = L < +\infty,$$

implique l'existence d'un nombre réel positif $A > 0$ tel que $|\phi(u)| \leq (3/2)L = L'$, pour tous $u \geq A$ soit $x \in C([a,b])$ une solution de $x = \lambda Tx$, pour certains $0 \leq \lambda \leq 1$, alors nous avons

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |\lambda||f(t)| + |\lambda| \int_a^t |g(t,s,x(s))ds| \leq \|f\|_\infty + \int_a^t V_1(t)V_2(s)\phi(|x(s))|)ds \\ &\leq \|f\|_\infty + \|V_1\|_\infty \int_a^b V_2(s) sup_{u\in[0,A]}\phi(u)ds + \|V_1\|_\infty \int_a^b V_2(s)L'|x(s)|ds \\ &\leq \left[\|f\|_\infty + \|V_1\|_\infty + sup_{u\in[0.A]}\phi(u)\|V_2\|_1\right] + \int_a^b (L'\|V_1\|_\infty V_2(s))|x(s)|ds \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\leq M_1 + \int_a^b M_2 V_2(s)|x(s)|ds.$$

En utilisant la version générale de l'inégalité de ***Gronwall*** *avec l'inégalité précédente, on conclut que*

$$|x(t)| \leq M_1 \exp(M_2 \parallel V_2 \parallel_1) = M.$$

puisque M_1 et M_2 ne dépendent pas de la solution x, on en conclut que les solutions de $x = \lambda Tx,\ 0 \leq \lambda \leq 1$ sont uniformément limitées par la même constante M.

Enfin, en utilisant la principe de Leray-Schauder, on conclut que T a un point fixe dans $X = C([a,b])$ ou de manière équivalente, l'équation non linéaire de Volterra (3.14) *a une solution continue sur $[a,b]$.*

Le théorème suivant donne un résultat d'existence et d'unicité de solutions continues consacré à l'équation intégrale non-linéaire de Volterra, la preuve est basé sur le théorème de point fixe de Banach.

Théorème 3.4. *Soit $K : [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est une fonction continue satisfait la condition de Lipschitz suivantE :*

$$|K(x,t,u) - K(x,t,v)| \leq L|u-v|,$$

pour tout : $(x,t) \in [0,T] \times [0,T]$, et $u, v \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $f \in C[0,T]$ l'équation intégrale non-linéaire de Volterra suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t,\varphi(t))dt \qquad 0 \leq x \leq T, \tag{3.17}$$

admet une solution unique $\varphi \in C[0,T]$.

Preuve :

Soit E l'espace de Banach de $C[0,T]$ muni de la norme

$$|g| = \max_{0 \leq x \leq T} |g(x)| exp(-Lx),$$

cette norme est équivalente à la norme sup $\|y\|$. En effet

$$exp(-Lx)\|y\| \leq |y| \leq \|y\|,$$

de plus, l'espace $(E, |\cdot|)$ est aussi complet.

On définit $F : E \to E$ *par*

$$F(\varphi)(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t,\varphi(t))dt.$$

A fin de prouver que l'équation (3.17) *admet une solution, il faut montrer que* $F : E \to E$ *admet un point fixe.*

On montre que F *est contractante.*

$$\begin{aligned}
|F(\varphi_1) - F(\varphi_2)| &\leq \max_{0\leq x\leq T} exp(-Lx) \int_0^x |K(x,t,\varphi_1(t)) - K(x,t,\varphi_2(t))| \, dt \\
&\leq L \max_{0\leq x\leq T} exp(-Lx) \int_0^x |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \, dt \\
&\leq L \max_{0\leq x\leq T} exp(-Lx) \int_0^x exp(Lt)exp(-Lt) \, |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \, dt \\
&\leq L \, |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \max_{0\leq x\leq T} exp(-Lx) \int_0^x exp(Lt)dt \\
&= L \, |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \max_{0\leq x\leq T} exp(-Lx) \frac{exp(Lx) - 1}{L} \\
&\leq (1 - exp(-Lx)) \, |\varphi_1 - \varphi_2| \, .
\end{aligned}$$

Puisque $(1 - exp(-Lx)) \leq 1$, *alors* F *est contractante, d'après le principe de Banach* F *admet un point fixe unique* φ.

Chapitre 4

$L_{p,\mu}$-Solutions De l'équation Intégrale Non linéaire De Hammerstein Sur Un Intervalle Non Borné

Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence des solutions de l'équation intégrale non linéaire de Hammerstein sur un domaine non borné $\mathbb{R}_+$ dans l'espace pondéré $L_{p,\mu}$ sous des différentes conditions. l'outil de base dans la preuve d'existence est le théorème de point fixe de Schauder.

Soit $\mu(\cdot)$ une fonction mesurable positive arbitraire sur $\mathbb{R}_+$, considérons l'espace pondéré $L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ espace de toutes les fonctions mesurables x satisfaisant les conditions suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}_+} |x(t)|^p \mu(t)dt < \infty.$$

Il est bien connu que la fonctionnelle $\|\cdot\|_{p,\mu}$ définie sur $L_{p,\mu} = L^p(\mathbb{R}_+, d\mu)$ par

$$\| x \|_{p,\mu} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} |x(t)|^p \mu(t) dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

est une norme, de plus l'espace $L_{p,\mu}$ est un espace de Banach.

4.1 Résultats D'existence Des Solutions De L'équation Intégrale Non Linéaire De Hammerstein

Le but de cette section est donner résultat d'existence de l'équation intégrale non linéaire de Hammerstein sur un domaine non borné $\mathbb{R}_+$ défini par :

$$x(t) = g(t) + \int_0^{+\infty} k(t,s) f(s, x(s)) ds. \tag{4.1}$$

On considère la fonction $\mu(\cdot)$ à valeurs positive continue sur $\mathbb{R}_+$ et il exixte $a \geq 0$ elle satisfait la condition suivante :

$$\delta \to \sup_{t \geq a} \frac{\mu(t)}{\mu(t+\delta)}, \quad \delta \geq 0, \qquad \textit{est borne au voisinage de } 0. \tag{4.2}$$

Notre résultat d'existence pour l'équation intégrale de Hammerstein (4.2) est donnée par les théorèmes suivants :

Théorème 4.1. *Soit $p \geq 1$, $q \geq 1$ deux nombres réels positifs satisfaisant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ supposons les hypothèses suivantes, soit $A \geq a$ et définissons la fonction $\varphi_A(\cdot)$ par*

$$\varphi_A(s) = \int_A^{+\infty} |k(t,s)| \mu(t) dt. \tag{4.3}$$

Supposons que $g(\cdot) \in L_{p,\mu}$, $k(t,s)\mu(t)$ *est bornée et continue sur* $\mathbb{R}_+^2$*, de plus, supposons que*

(i) La fonction $(t,x) \to f(t,x)$ *est de type Caratheodory.*

(ii) Il exit $c > 0$ *et* $h \in L_{p,\mu}$ *tel que* $|f(s,x)| \leq h(s) + c|x|$ *p.p* $s \geq 0$.

(iii) $\lim\limits_{A \to +\infty} \| \varphi_A \|_\infty = 0$.

(iv) $\int_{\mathbb{R}_+} |k(t,s)|\mu(t)dt = \varphi_0(s) \leq \alpha_1$ *, pour p.p* $s \geq 0$ *et* $\sup\limits_{s \geq A} \varphi_0(s) \to 0$.

(v) $\int_{\mathbb{R}_+} k(t,s)[\mu(s)]^{-\frac{q}{p}} ds \leq \alpha_2$ *, pour* $t \geq 0$ *p.p.*

(vi) $c\alpha_1^{\frac{1}{p}} \alpha_2^{\frac{1}{q}} < 1$.

Sous les hypothèses ci-dessus, l'équation (4.2) *admet au moins une solution* $x \in L_{p,\mu}$.

Preuve :

Soit T un opérateur définit sur $L_{p,\mu}$ par

$$Tx(t) = g(t) + \int_{\mathbb{R}_+} k(t,s)f(s,x(s))ds.$$

La preuve de ce théorème est faite comme suit :

On prouve d'abord qu'il existe une boule fermé B_R dans $L_{p,\mu}$ tel que

$T(B_R) \subset B_R$, avec $\|x\| \leq R$ on vérifie d'abord que $T(L_{p,\mu}) \subset L_{p,\mu}$ en utilisant (ii) , on obtient

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_{p,\mu} &\leq \|g\|_{p,\mu} + \left[\int_{\mathbb{R}_+}\left[\int_{\mathbb{R}_+}|K(t,s)||c|x(s)| + h(s)|ds\right]^p \mu(t)dt\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|g\|_{p,\mu} + \left[\int_{\mathbb{R}_+}\left[\int_{\mathbb{R}_+}|k(t,s)|^{\frac{1}{q}}[\mu(s)]^{-\frac{1}{p}}[|k(t,s)|\mu(s)]^{\frac{1}{p}}|c|x(s)| + h(s)|ds\right]^p \mu(t)dt\right]^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

comme $k(\cdot,\cdot)$ est bornée, alors la fonction $[|k(t,s)|\mu(s)]^{\frac{1}{p}}|c|x(s)+h(s)|$ appartient à L_p alors par l'inégalité de **Hölder** et le théorème de **Fubini** on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_{p,\mu} &\leq \|g\|_{p,\mu} + \alpha_2^{\frac{1}{q}}\left[\int_{\mathbb{R}_+}\left[(c|x(s)| + h(s))^p\left(\int_{\mathbb{R}_+}|k(t,s)|\mu(t)dt\right)\right]\mu(s)ds\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|g\|_{p,\mu} + \alpha_2^{\frac{1}{q}}\alpha_1^{\frac{1}{p}}\left[c\|x\|_{p,\mu} + \|h\|_{p,\mu}\right].
\end{aligned}$$

Donc, l'opérateur T transforme $L_{p,\mu}$ dans lui même, de plus il est clair que si

$$R \geq R_0 = \frac{\|g\|_{p,\mu} + \alpha_2^{\frac{1}{q}}\alpha_1^{\frac{1}{p}}\|h\|_{p,\mu}}{1 - c\alpha_1^{\frac{1}{p}}\alpha_2^{\frac{1}{q}}},$$

alors $T(B_R) \subset B_R$, où B_R une boule fermé de $L_{p,\mu}$ de centre 0 et rayon R, pour prouver que T a un point fixe dans $L_{p,\mu}$, on utilise le théorème de point fixe de Schauder. Donc on a besoin de prouver que T est continu et compact, pour prouver que T est compact, on considère d'abord l'ensemble X uniformément borné de $L_{p,\mu}$ (i,e il existe $M > 0$ tel que $\|x\|_{p,\mu} \leq M$, $\forall x \in M$).

Soit $A > a$ alors par un calcul simple nous montrons que :

$$\begin{aligned}\left[\int_A^{+\infty} |Tx(t)|^p \mu(t)dt\right]^{\frac{1}{p}} &\leq \left[\int_A^{+\infty} |g(t)|^p \mu(t)dt\right]^{\frac{1}{p}} \\ &+ \alpha_2^{\frac{1}{q}} \left[\int_0^{+\infty} \mu(s)(c|x(s)| + h(s))^p . \left(\int_A^{+\infty} \mu(t)|k(t,s)|dt\right) ds\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \alpha_2^{\frac{1}{q}} \|\varphi_A\|_\infty^{\frac{1}{p}} \left[c\|x\|_p, \mu + \|h\|_{p,\mu}\right] + \left[\int_A^{+\infty} |g(t)|^p \mu(t)dt\right]^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{A\to+\infty} \|\varphi_A\|_\infty = 0 \; et \; t \mapsto |g(t)|^p \mu(t) \in L^1([0,\infty[).$$

Alors

$$\lim_{A\to+\infty} \int_A^{+\infty} |Tx(t)|^p \mu(t)dt = 0. \tag{4.4}$$

Maintenant, soit $\delta > 0$ et soit

$$T_k x(t) = \int_0^{+\infty} f(s, x(s))ds,$$

alors

$$\begin{aligned}\left[\int_0^{+\infty} |Tx(t+\delta) - Tx(t)|^p \mu(t)dt\right]^{\frac{1}{p}} &= \left[\int_0^{+\infty} |g(t,s) - g(t) + T_k x(t+\delta) - T_k x(t)|^p \mu(t)dt\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|g(t+\delta) + g(t)\|_{p,\mu} + \|T_k x(t+\delta) - T_k x(t)\|_{p,\mu},\end{aligned}$$

comme $g(\cdot) \in L_{p,\mu}$, alors

$$\lim_{\delta\to 0} \|g(t+\delta) - g(t)\|_{p,\mu}^p = 0. \tag{4.5}$$

Ensuite, il est facile de voir que, $\forall A \geq \delta$, où δ est donnée par (4.2), on a

$$\begin{aligned}
&\|T_kx(t+\delta)-T_kx(t)\|^p_{p,\mu}\\
&\leq \int_0^{+\infty}\left|\int_0^{+\infty}(k(t+\delta,s)-k(t,s))f(s,x(s))ds\right|^p\mu(t)dt\\
&\leq 2\alpha_2^{\frac{p}{q}}\int_0^{+\infty}(h(s)+c|x(s)|)^p\mu(s)\left(\int_0^{+\infty}|k(t+\delta,s)|-k(t,s)|\mu(t)dt\right)ds\\
&\leq 2\alpha_2^{\frac{p}{q}}\int_{0\leq\delta\leq A}(h(s)+c|x(s)|)^p\mu(s)\left(\int_{t\geq A}|k(t+\delta,s)|-k(t,s)|\mu(t)dt\right)ds\\
&+2\alpha_2^{\frac{p}{q}}\int_{\delta\geq A}(h(s)+c|x(s)|)^p\mu(s)\left(\int_{t\geq 0}|k(t+\delta,s)|-k(t,s)|\mu(t)dt\right)ds\\
&+2\alpha_2^{\frac{p}{q}}\int_{0\leq\delta\leq A}(h(s)+c|x(s)|)^p\mu(s)\left(\int_{0\leq t\leq A}|k(t+\delta,s)|-k(t,s)|\mu(t)dt\right)ds.
\end{aligned}$$

Comme
$\int_{t\geq A}|k(t+\delta,s)-k(t,s)|\mu(t)dt \leq \int_{t\geq A}|k(t+\delta,s)|\mu(t)dt$
$+\int_{t\geq A}|k(t,s)|\mu(t)dt \leq c_{A,\delta}\|\varphi_{A,\delta}\|_\infty+\|\varphi_A\|_\infty, C_{A,\delta}=\sup\limits_{t\geq A}\left(\dfrac{\mu(t)}{\mu(t+\delta)}\right).$

Alors

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{t\geq A}|k(t+\delta,s)-k(t,s)|\mu(t)dt=0. \tag{4.6}$$

Aussi, comme X est un ensemble uniformément borné de $L_{p,\mu}$, alors en utilisant la technique précédente, on peut facilement vérifier que

$$\lim_{A\to+\infty}2\alpha_2^{p/q}\int_{0\leq s\leq A}(h(s)+c|x(s)|)^p\mu(s)\times\left(\int_{t\geq A}|k(t+\delta,s)-k(t,s|\mu(t)dt\right)ds=0. \tag{4.7}$$

De même en utilisant **(iv)**on a :
$\displaystyle\int_{s\geq A}(h(s)+c|x(s)|)^p\mu(s)\left(\int_{t\geq 0}|k(t+\delta,s)-k(t,s)|\mu(t)dt\right)ds \leq (1+C_{0,\delta})\sup_{s\geq A}\varphi_0 s\left(\|h\|_{p,\mu}+cM\right)^p.$
où $C_{0,\delta}=\sup\limits_{t\geq 0}\left(\dfrac{\mu(t)}{\mu(t+\delta)}\right)$, par conséquent on obtient :

$$\lim_{A\to+\infty} 2\alpha_2^{p/q}\int_{s\geq A}(h(s)+c|x(s)|)^p\mu(s)\times\left(\int_{t\geq 0}|k(t+\delta,s)-k(t,s|\mu(t)dt\right)ds=0. \tag{4.8}$$

Finalement, la continuité de $(t,s)\mapsto\mu(t)k(t,s)$ sur $[0,A]^2$ est donne .

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{0\leq s\leq A}\int_{0\leq t\leq A}|k(t+\delta,s)-k(t,s)|\mu(t)dt=0 \tag{4.9}$$

Preuve :

Soit $(x_n)_n$ une suite dans $L_{p,\mu}$ converge vers x on peut supposer que

$$\|x_{n+1}-x_n\|_{p,\mu}\leq\frac{1}{2^n},\qquad\forall n\in\mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Autrement d'après L_p-continuité de l'opérateur de Nemytskii Th (1.2), on considère une sous-suite $(x_{nj})_j$ de $(x_n)_n$ qui satisfait l'inégalité (4.10), à l'autre coté un calcul simple montre que :

$$\left[\int_0^{+\infty}|k(t,s)f(s,x_n(s))|ds\right]^p\leq|\psi(t)|^r.\int_0^{+\infty}\mu(s)|h(s)+|x_n(s)|^{\frac{p}{r}}|^{p/r}ds. \tag{4.11}$$

avec $|\psi(t)|^r=\left(\int_0^{+\infty}|k(t,s)|^p|\mu(s)|^{-p/r}\right)^{1/r}.$
en utilisant (4.10) , on obtient

$$|x_n(s)|\leq|x_1(s)|+\sum_{j\geq 2}|x_j(s)-x_{j-1}(s)|=G(s)\in L_{p,\mu},\qquad\forall n\in\mathbb{N}. \tag{4.12}$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, on a

$$y_n(s)=|h(s)+|x_n(s)|^{\frac{p}{r}}|^r\leq|h(s)+G(s)^{\frac{p}{r}}|^r\in L_{1,\mu}. \tag{4.13}$$

De plus, comme $f(\cdot,\cdot)$ est une fonction de Caratheodory et en particulier la fonction $x\mapsto f(s,x)$ est continue, alors en utilisant (4.13) et le théorème de la convergence dominé, on conclut que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^{+\infty}|f(s,x_n(s))|ds\right]^p=\left[\int_0^{+\infty}|f(s,x(s))|ds\right]^p. \tag{4.14}$$

Dans l'autre coté, en utilisant (4.11)et (4.13)on conclut que $\forall t\geq 0$, on a

$$\left[\int_0^{+\infty}|f(s,x_n(s))|ds\right]^p\leq|\psi(t)|^r(\|h+G^{\frac{p}{r}}\|_{r,\mu})^r\in L_{1,\mu}. \tag{4.15}$$

En utilisant (4.14) et (4.15) et le théorème de la convergence dominé, on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mu(t)\left[\int_0^{+\infty}|f(s,x_n(s))|ds\right]^p dt=\int_0^{+\infty}\mu(t)\left[\int_0^{+\infty}|f(s,x_n(s))|ds\right]^p dt. \tag{4.16}$$

En utilisant l'inégalité précédente et le faite que $Tx_n(t)$ converge ponctuellement vers $Tx(t)$, on conclut que l'opérateur T_f est continue sur $L_{p,\mu}$, par conséquent T est continue.

Rassemblant tout ensemble, on conclut que $T:B_R\to B_R$ est compact et continu.

Finalement, en utilisant les résultats ci-dessus et le théorème de point fixe de Schauder, on conclut que l'opérateur intégrale T a un point fixe.

Exemple 4.1.1. *Soit $\mu(s)=e^{-s}$, $\quad p=q=2$ et on considère l'équation intégrale non linéaire de Hammerstein*

$$x(t)=g(t)+\lambda\int_0^{+\infty}\frac{te^{-s}}{1+(t+s)^2}\left(x(s)+\frac{1}{(1+s)(1+x(s)^2)}\right)ds. \tag{4.17}$$

dans ce cas on a

$$f(s,x)=x+\frac{1}{(1+s)(1+x^2)},\quad c=1,\quad h(s)=\frac{1}{1+s}\in L_{2,\mu}.$$

De plus en utilisant la notation de théorème précédent, il est facile de voir que :

$$\varphi_A(s) = e^{-s} \int_A^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1+(t+s)^2} dt \leq \frac{e-s}{1+A^2} \to 0,$$

uniformément dans s. dans l'autre mains, on a

$$\int_0^{+\infty} |k(t,s)|\mu(t)dt = e^{-s} \int_0^{+\infty} \frac{te^{t}}{1+(t+s)^2} dt \leq \alpha_1 \approx 0.3434, \quad \forall s \geq 0.$$

De plus, comme

$$\int_0^{+\infty} |k(t,s)|\mu(s)^{-\frac{p}{q}} ds = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(t+s)^2} ds \leq \alpha_2 = 1.$$

Alors le théorème précédent implique que (4.17) *a une solution de* L_p, μ, *pour* $|\lambda| \leq 2.9122$.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a présenté quelques résultats en théorie du point fixe dans des espaces de Banach, et on a appliqué quelques théorèmes du point fixe (principe de contraction de Banach qui garantit l'existence et l'unicité de solution, Schauder, Leray-Shauder et schaefer assurent l'existence de solution) sur quelques équations intégrales de type Fredholm, Volterra et de Hammerstein.

Un théorème d'existence ou d'unicité ou les deux à la fois est ont une utilité très importante puisqu'ils renseignent sur des informations qui aident à guider à la recherche des solutions par des méthodes numériques.

Bibliographie

[1] : R.Agarwal, A.Meeha,D.O'Regan, Fixed point Theory and Applications, Combrige University Press, 2004.

[2] :Ravi P.Agarwal and Donal O'Regan, Problems For Differential, Difference and Integral Equatios Kluwer Academic Publisher 2001.

[3] :H.Aman, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in order Banach spaces, SIAM Rev.18(1976)620-709.

[4] : T.A. Burton, G. Mackey, Continuity, compactness, fixed points and integral equations, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 14 (2002).

[5] : Brezis H.Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris, 1992.

[6] :C.Corduneanu, Integral Equations and Applications University Press, Cambridge 1991.

[7] :Curtain, R.F. and Pritchard, A.J.Functional Analyssi in Moderan Applied Mathematics Academic press. 1977.

[8] :S. Djebali, Degré topologique : théorie et application aux EDO-EDP, Cours policopié, Département de Mathématiquesn ENS-Kouba, Alger, (2006).

[9] :J.Dugundji and A.Granas, Fixed point Theory, VolI, Monografie Matematyzne, (PWN), Warsaw, 1982.

[10] : N.Dunford and J.Schwars, Linear Operators, Part I :General Theory, John Wiley & Sons, New York, 1958.

[11] :G.Emmanuele, Anexistence theorem for Hammerstein integral equations, Portu-galiae Mathematica, Vol.51 Fax.4, 1994.

[12] :A.Fryszkowski, Fixed Point Theory for Decomposoble Sets. Topological Fixed Point Theory and Its Application, 2. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.

[13] :R.P.Kanwal, linear Integral Equations : Theory and applications. Academic Press 1971.

[14] : A. Karaoui, On the existence of continuous solutions of nonlinear integral equations, Département de Mathématique, Faculté des Sciences de Bizerte, Jarzouna7021, Tunisia, 2005, pages[300-305].

[15] : A. Karaoui, Existence and approximate solutions of some nonlinear integral equations, Archive, Inequal, Appl. 2005, pages[569-581].

[16] : A.Karaoui,A.Jawahdou, H, Ben Aouicha, Weighted L^p-solutions on unbounded intervals of nonlinear integral equations of the Hamerstein and Urysohn types, 2010, pages[1-22].

[17] :M.krasnov, A.Kisselev, G.Makarenko, Equation intégrales Ed. mir, 1977.

[18] : D. O'Regan, Y.Je Cho, and Yu-Qing Chen, Topological Degree Theory and Applications, Volume 10, by Taylor et Francis Group,LLC, 2006.

[19] :R.Precup, Methods in Nonlinear Integral Equations, Springer, New York, 2002.

[20] : R.Precup, Methods in Nonlinear Integral Equations, Springer-Science +Business Media, 2002.

[21] : D.R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge University Press, New York, 1980.

[22] : F.G TRICOMI, Integral equations. University press, Combridge, 1957.

[23] :H.Ye, J. Gao,and Y.Ding, A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. 328(2007), 1075-1081.