Ministère d'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Faculté des Mathématiques et d'Informatique
Département des Mathématiques

Dérivation Fractionnaire au sens D'Hadamard et Applications aux Équations Différentielles.

Présenté par:
Aissi Hafidha
Gourari Samira
Attabi Lamia

Dérigé par
Mr.B.HDIA

Plan

Plan

1. Introduction
2. Préliminaires
   - Espaces Fonctionneles
   - Théorèmes de point fixe

Plan

Plan

Plan

Plan

Introduction

La naissance de la théorie des équations différentielles fractionnaires était crée comme un sujet intérissant à développer quand l'Hospital réecrit à Leibnitz afin de lui intéroger au sujet d'une notation particulière qu'il avait employée dans ses publication pour la $n^{\text{ème}}$ dérivée d'une fonction $f(x)$, il pose alors la question à lui sur le résultat de cette dérivée pour l'ordre $\frac{1}{2}$.
Plusieurs activités scientifiques temoignent de la vitalité actuelle de la recherche sur la dérivation d'ordre non entier .
La premiere approche revient à Riemann Liouville en (1847), qui a composé entre $(d)^m.{}^{RL}(I)_\alpha^{m-\alpha}$
Mais la grande surprise et qui à conduit plusieurs écoles à remettre en cour cette théorie c'est l'anomalie qu'elle prends ${}^{RL}D^\alpha C \neq 0$.

Plutard en 1969 un grand mathématcien nomé Caputo qui a pu contourner cette obstruction

$$^{RL}D^{\alpha}C \neq 0$$

en échangeant seulement la composante :

$$^{c}D^{\alpha}x(t) = (^{c}I^{m-\alpha})[(\frac{d}{dx})^{m}f(x)].$$

dans notre travail on présente une dérivation fractionnaire au sens d'Hadamard, et on essait dans ce manuscrit à éclaire cette dérivation en donnant des exemples d'applications.

Chapitre 1

Dans ce chapitre, on va présenter principalement des définitions de base, des espaces et des théorèmes qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

Outline

Espace L^P

Soient $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Définition

soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$. On note par $L^p([a, b])$ l'espace des classes équivalence de fonctionf de puissance p intégrables sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$L^p([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, f \, est \;\; mesurable \; et \; \|f\|_p < \infty\}.$$

Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty([a, b])$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout (p,p) sur $[a, b]$.

Espaces Fonctionneles

Théorème

(1) *Pour* $1 \leq p < \infty$, *l'espace* $L^p([a,b])$ *est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{P}}.$$

(2) *L'espace* $L^\infty([a,b])$ *est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \quad p.p \quad sur \quad [a,b]\}.$$

Définition

On note l'espace des fonctions continues $C([1,T],\mathbb{R})$ *munie de la norme :*

$$\|x\|_C = \sup_{t\in[1,T]} |x(t)|.$$

Définition

soit $0<\gamma<1$ *et* $C_{\gamma,\log}[1,T]$ *telleque :*

$$C_{\gamma,\log}[1,T] = \left\{ g(t) : (\log(t))^\gamma g(t) \in C([1,T],\mathbb{R}) \|y\|_{C_{\gamma,\log}} = \|(\log t)^\gamma g(t)\|_C \right\}.$$

Outline

L'approche du point fixe est utilisée pour démontrer l'éxistence de solution d'une classe d'équations differentielles ordinaires. Ces théoremes ont évolué par le temps selon la présentation de la non linéarité f. On cite parmis les points fixes fractionnaires Brower, Shaefer, Alternatif non linéaire de Leray Schauder et la contraction de Banach.

Définition

Soit $T : E \to E$*. On dit que* $x \in E$ *est un point fixe de l'application* T *si* $T(x) = x$.

Définition

Soit T *une application d'un espace de Banach de* E *dans lui même. On dit que* T *est lipschitzienne s'il existe un nombre* $k > 0$ *telle que :*

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in E.$$

Si $0 \leq k < 1$*, on dit alors que* T *est une contraction.*

Définition

On dit que T est une application continue en un point a si et seulement si :

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \longrightarrow a, alors\ T(x_n) \longrightarrow T(a).$$

Définition

soit E, F deux espaces de Banach, soit $T : E \longrightarrow F$, on dit que :
T est une application complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de E en un relativement compact de F.

Soit A un sous ensemble de $C(E,F)$.

Définition

On dit que A est uniformement bornée, s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\|f\|_\infty \leq \alpha, \forall f \in A.$$

Définition

On dit A est équicontinue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u, v \in k : \|u - v\|_E < \delta \Rightarrow \|f(u) - f(v)\|_F < \varepsilon, \forall f \in A.$$

Dans le cas où $E = [a, b]$ et $F = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, une partie A de $C(E, F)$ est dit équicontinue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in A, \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Théorème d'Ascoli-Arzéla

Théorème

soient E un espace de Banach compact et F un espace quelquonque, une partie M de $C(E,F)$ est relativement compact si et seulement si :

1. *M est uniformement bornée,*
2. *M est équicontinue,*
3. *Pour tout $x \in E$, l'espace $M(x)$ défini par :*

$$M = \{f(x), \forall x \in E\}$$

est relativement compact dans F.

Principe de la contraction de Banach

Théorème

Soit T une application d'un espace de Banach E dans lui même si T est une contraction alors T admet un point fixe unique dans E, (i.e) il existe unique $u \in E$ telle que : $Tu = u$.

Alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème

Soit E un espace de Banach, U un ouvert convexe borné, avec $0 \in U$ de E et soit $T : \overline{U} \to E$ est complètement continue, alors :
(i) T admet un point fixe dans $\overline{U}$, ou bien
(ii) Il existe $y \in \partial U$ et $y = \lambda T(y)$ pour $\lambda \in]0, 1[$.

Algèbre de Banach

Définition

On appelle algèbre de Banach un espace de Banach A (espace vectoriel normé complet) sur le corps des nombres complexe muni d'une multiplication bilinéaire et associative $(\cdot)$ vérifiant :

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

pour tout x, y de A.

Théorème de Dhage

Théorème

soit S un sous ensemble convexe borné et fermé non vide de l'algèbre de Banach X . Considérons :

$$\begin{aligned} A &: X \to X \\ B &: S \to X \end{aligned}$$

deux opérateurs telle que :

1. *A est lipschitzien avec k constante de lipschitz,*
2. *B est complétement continue,*
3. *$x = Ax.By \Rightarrow x \in S$ pour tout $y \in S$,*
4. *$Mk < 1$ ou $M = \|B(S)\| = sup\|B(x)\|$avec $x \in S$, alors : l'équation de l'opérateur $x = (A.B)(x)$ admet une solution.*

Théorème

Soit X un éspace de Banach, soit S un sous ensemble non vide,convexe, fermé et borné de X.
Considérons A et B deux opérateurs,

$$A : X \longrightarrow X$$

$$B : S \longrightarrow X$$

telle que :

1. *A est une contraction.*
2. *B est complètement continue.*
3. $(A(x) + B(y)) \in S, \forall x, y \in S.$

Alors : l'équation de l'operateur $x = (A + B)(x)$ admet une solution.

Chapitre 2

Dans ce chapitre, on va présenter les fonctions spéciales (La fonction Gamma et Bêta), l'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. On s'intéresse principalement sur les définitions et les propriétés liées à l'intégrale et la dérivée fractionnaires au sens d'Hadamard.

Fonctions spéciales

Définition

La fonction Gamma d'Euler est généralement définie par l'intégrale suivant :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{dt}.$$

Avec $\Re(t) > 0$, *on désigne par* $\Re(t)$ *la partie réelle de* $t \in \mathbb{C}$.

Définition

La fonction bêta (la fonction de Bessel de seconde espèc)est définie par l'intégrale suivant : pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ *avec* $\Re(z) > 0$, *on a*

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$$

Outline

Définition

L'intégrale fractionnaire d'ordre α $(\alpha > 0)$ au sens de Riemann Liouville d'une fonction $f \in C[a,b]$ est donnée par :

$$({}^{RL}I_a^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds. \tag{1}$$

Définition

Soit $\alpha \in]m-1, m[, m \in \mathbb{N} - \{0\}$ On appelle dérivée fractionnair au sens de Riemann Liouville de f la fonction définie par :

$$({}^{RL}D_a^{\alpha} f)(t) = (\frac{d}{dt})^m [(I^{m-\alpha} f)(t)]. \tag{2}$$

Soit $f(x)$ une fonction continue définie sur $[a, b]$ ou $0 < a \leq b < \infty$.

Outline

Intégrale fractionnaire de type Hadamard

Définition

Soit f une fonction continue sur$[a, b]$ à valeurs dans R avec
$0 < a \leq b \leq \infty$ *et* $\alpha > 0$.
L'intégrale fractionnaire d'ordre α au sens d'Hadamard de la fonction f est définie par :

$$({}_H I^{\alpha}_{a+} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\log \frac{x}{t})^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t}\, dt. \tag{3}$$

Propriétés de l'integrale fractionnaire au sens d'Hadamard

Propriété

Soit f *et* g *deux fonctions continues sur*$[a,b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *.*
$\forall \lambda_1, \lambda_2, \forall \alpha > 0$ *on a :*

$$_HI^{\alpha}_{a^+}(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 (_HI^{\alpha}_{a^+} f)(x) + \lambda_2 (_HI^{\alpha}_{a^+} g)(x).$$

pour la preuve on utulisant la linéarité de l'intégrale classique.

Propriété

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue,* $f \in L^p([a,b])$.
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*_+$, *on a :*

$$\begin{aligned} _HI^{\alpha}_{a^+} . _HI^{\beta}_{a^+} f(x) &= {}_HI^{\alpha+\beta}_{a^+} f(x) \\ &= {}_HI^{\beta}_{a^+} . _HI^{\alpha}_{a^+} f(x). \end{aligned}$$

Propriété

$Si\ \alpha > 0, \beta > 0$

$$\left({}_{H}I^{\alpha}_{a+}(\log \frac{t}{a})^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(\log \frac{x}{a})^{\beta+\alpha-1}, \beta > \alpha. \tag{4}$$

Dérivée fractionnaire au sens d'Hadamard

Definition

Soient $f \in AC^n_\delta[a,b]$ *et* $\alpha > 0, \delta = x\frac{d}{dx}$.
La dérivée fractionnaire au sens d'Hadamard de la fonction f est définie par :

$$\begin{aligned} ({}_H D^{\alpha}_{a^+} f)(x) &= \delta^n ({}_H I^{n-\alpha}_{a^+} f(x)) \\ &= (x\frac{d}{dx})^n \quad {}_H I^{n-\alpha}_{a^+} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (x\frac{d}{dx})^n \int_1^x (\log\frac{x}{t})^{n-\alpha-1} f(t)\frac{dt}{t} \end{aligned}$$

où $n-1 < \alpha < n, n = [\alpha]+1$.

Propriétés de la dérivation et l'intégration aux sans Hadamard

Une des propriétés importantes qui lie la dérivée fractionnaire au sens de Hadamard avec l'intégrale fractionnaire de Hadamrd est la suivante :

Propriété

Si $\Re(\alpha) > 0$ *et* $0 \leqq a < b \leqq \infty$*, alors, pour la fonction* $f(x)$*, on a :*

$$({}_H D^{\alpha}_{a+} \cdot {}_H I^{\alpha}_{a+} f)(x) = f(x).$$

Lemme

(I) *Pour l'intégrale fractionnaire au sens de Hadamard (3), si* $\alpha \longrightarrow 1$ *alors*

$$ {}_H I^{\alpha}_{a^+} f(x) = \int_a^x (\frac{t}{x}) \frac{f(t)}{t} dt, $$

et si $\alpha \longrightarrow 0^+$ *on a :*

$$ {}_H I^{\alpha}_{a^+} f(x) = f(x). $$

(II) *Pour la dérivée fractionnaire au sens Hadamard (5)*
Si $\alpha \longrightarrow 0^+$ *alors*

$$ {}_H D^{\alpha}_{a^+} f(x) = f(x). $$

Théorème

Soient $(n-1) < \alpha < \beta \leq n \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq p \leq \infty,\ 0 \leq a < b \leq \infty$ *pour* $f \in X_c^p([a,b])$ *et* ${}_H I_{a+}^{\alpha} f \in AC^n([a,b])$ *on a :*

$$ {}_H D_{a+}^{\beta} \cdot {}_H I_{a+}^{\alpha} f(x) = {}_H D_{a+}^{\beta-\alpha} f(x), \tag{5} $$

En particulier si $\beta = n$ *alors :*

$$ {}_H D_{a+}^{n} \cdot {}_H I_{a+}^{\alpha} f(x) = {}_H D_{a+}^{n-\alpha} f(x), \tag{6} $$

Théorème

Soit $\beta \geq \alpha > 0, (n-1) < \alpha \leq n, n \in \mathbb{Z}^+, n-1 < \beta \leq n \in \mathbb{Z}^+,$
$0 \leq a \leq b \leq \infty$,$1 \leq p \leq \infty$ *pour* $f \in AC^n([a,b])$ *et* ${}^H D_{a+}^{\alpha} f \in X_c^p([a,b])$ *on a :*

$$ {}_H I_{a+}^{\beta} \cdot {}_H D_{a+}^{\alpha} f(x) = I_{a+}^{\beta-\alpha} f(x), $$

En particulier si $\alpha = \beta$ *alors :*

$$ {}_H I_{a+}^{\beta} \cdot {}_H D_{a+}^{\alpha} f(x) = f(x). $$

Lemme

Si $\alpha > 0$, $f(\cdot) \in C([a,b])$, *alors l'équation différentielle :*

$$_{H}D^{\alpha}_{a+}f(t) = 0, \tag{7}$$

admet comme unique solution

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha - j}, \tag{8}$$

Et on a la formule suivante :

$$_{H}I^{\alpha}_{a+} \cdot {_{H}D^{\alpha}_{a+}} f(t) = f(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j (\log \frac{t}{a})^{\alpha - j}, \tag{9}$$

où $n = [\alpha] + 1$ *et* $c_j \in \mathbb{R}, \forall j = 1, \cdots, n$.

Propriété

Si $\Re(\alpha) > 0, \Re(\beta) > 0,$ *on a*

$$({}_H D^{\alpha}_{a+} (\log \frac{t}{a})^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (\log \frac{x}{a})^{\beta-\alpha-1}, \beta > \alpha.$$

En particulier, si $\beta = 1$ *et* $\Re(\alpha) \geq 0$*,alors les dérivées fractionnaires de Hadamard d'une constante, en général,ne sont pas égaux à zéro :*

$$({}_H D^{\alpha}_{a+} 1)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (\log \frac{x}{a})^{-\alpha}.$$

Quand $0 < \Re(\alpha) < 1$*.Par contre, pour* $j = [\Re(\alpha)] + 1$

$$({}_H D^{\alpha}_{a+} (\log \frac{t}{a})^{\alpha-j})(x) = 0.$$

Chapitre 3

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence d'une solution du probléme.

$$\begin{cases} {}_HD^{\alpha}(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}) = a(t)g(t,x(t)), t \in I = [1,T], 0 < \alpha < 1 \\ {}_HI^{1-\alpha}x(t) \mid_{t=1} = x_0 + h(x), \end{cases} \tag{10}$$

Où ${}_HD^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de type Hadamard,
$f(\cdot) \in C_{1-\alpha,\log}([1,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\})$, $g(\cdot) \in C_{1-\alpha,\log}([1,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et a est une fonction mésurable et bornée, ${}_HI$ l'intégrale fractionnaire de type Hadamard, $x_0 \in \mathbb{R}$,et $h(\cdot)$ est une fonction mesurable
Tout d'abord on commence par établir la représentation intégrale du systeme par l'utilisation des opérateurs de Hadamard.

Théorème

Pour $\rho(\cdot) \in C([1,T],\mathbb{R})$ donné, $y(\cdot)$ solution de l'équation intégrale,

$$y(t) = \frac{x_0 + h(x)}{\Gamma(\alpha)}(\log t)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{\rho(s,x(s))}{s} ds, \; t \in [1,T].$$

Si seulment si :
$y(\cdot)$est une solution du probléme aux condition initiale,

$$\begin{cases} {}_H D^\alpha y(t) = \rho(t), t \in I = [1,T], 0 < \alpha < 1 \\ {}_H I^{1-\alpha} y(t) \mid_{t=1} = x_0 + h(x). \end{cases} \tag{11}$$

Preuve : On appliquons ${}_HI^{\alpha}$ aux membres de l'equation (11), aprés les calcules on obtient :

$$y(t) = c(\log t)^{\alpha-1} +_H I^{\alpha}\rho(t) \tag{12}$$

D'aprés la condition initiale, appliquons ${}_HI^{1-\alpha}$ aux membres de l'équation (12) on trouve :

$$x_0 + h(x) = c\Gamma(\alpha) \tag{13}$$

En remplacant (13) dans (12) on obtiet :

$$y(t) = \frac{x_0 + h(x)}{\Gamma(\alpha)}(\log t)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{\rho(s)}{s}ds.$$

Par conséquent la solution du problème (11).

Inversement : On a la solution du problème (11) s'écrit sous la forme :

$$Ny(t) = \frac{x_0 + h(x)}{\Gamma(\alpha)}(\log t)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{\rho(s)}{s}ds. \tag{14}$$

Appliquons ${}_HD^{\alpha}$ aux membres de l'équation (14), et aprés les calules on obtient :

$$({}_HD^{\alpha}Ny)(t) = \rho(t).$$

Il nous reste que la condition initiale.
Appliquons ${}_HI^{1-\alpha}$ quand le $t = 1$ aux membres de l'équation (14), on trouve :

$$({}_HI^{1-\alpha}Ny)(t)|_{t=1} = x_0 + h(x).$$

Alors : (Ny) représente la forme de la solution du problème (11).

Lemme

Soit $g(\cdot) \in C_{1-\alpha,\log}([1,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(\cdot) \in C_{1-\alpha,\log}([1,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\})$ *on a :*

$$\begin{cases} {}^{H}D^{\alpha}\left(\frac{x(t)}{f(t,x(t))}\right) = a(t)g(t,x(t)), t \in I = [1,T], 0 < \alpha < 1 \\ {}^{H}I^{1-\alpha}x(t) \mid_{t=1} = x_0 + h(h), \end{cases} \tag{15}$$

La solution de notre problème s'écrit sous la forme suivante :

$$(Nx)(t) = f(t,x(t))\left(\frac{x_0 + h(x)}{\Gamma(\alpha)}(\log t)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t a(s)(\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{g(s,x(s))}{s}ds\right), \forall t$$

Outline

Dans cette section, nous prouvons les résultats d'existence de problème (15) par un théorème dans une Algèbre de Banach due à Dhage.

Théorème

Nous considérons les hypothèses suivantes pour resoudre le probléme :

(H1) *la fonction* $f : [1,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *est une fonction continue bornée, il existe une fonction bornée positive* ϕ *telleque :*

$$|f(t,x(t)) - f(t,y(t))| \leq \phi(t)|x(t) - y(t)|,$$

pour $t \in [1,T]$ *et pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$.

(H2) *il existe une fonction* $p \in C([1,T], \mathbb{R}^+)$ *et une autre fonction continue décroissante :*

$$\psi : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$$

telque :

$$|g(t,x(t))| \leq p(t)\psi(|x|), (t,x) \in [1,T] \times \mathbb{R}.$$

(H3) *il existe un nombre* $r > 0$*telque :*

$$r \geq k[\frac{|x_0|}{\Gamma(\alpha)} + \log T \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|p\|\psi(r)], \tag{16}$$

Où $|f(t,x)| \leq k, \forall (t,x) \in [1,T] \times \mathbb{R}$.

preuve :
Soit $X = C_{1-\alpha,\log}([1,T],\mathbb{R})$, et on définit un sous ensemble S de X par :

$$S = \{x \in X : \|x\|_{1-\alpha,\log} \leq r\}.$$

Où r satisfie l'inégalité (16).
clairement S est fermé, convexe et borné. D'aprés le lemme (2.4).
Definissons deux opérateurs
$A : X \to X$ avec :

$$Ax(t) = f(t, x(t)), t \in [1, T]$$

et $B : S \to X$ avec :

$$Bx(t) = \frac{x_0 + h(x)}{\Gamma(\alpha)}(\log(t))^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t a(s)(\log\frac{t}{s})^{\alpha-1}\frac{g(s,x(s))}{s}ds, t \in [1, T].$$

alors : $x = AxBx$.

On va montrer que les opérateurs $A \; et \; B$ vérifient tous les conditions du théoréme (2.5).
Cette preuve se fait par les étapes suivantes :
Etape1 : L'opérateur A est lipschitzien.
Etape2 :L'opérateur$B$ est complètement continue.
Etape3 : $x = Ax \cdot By \Rightarrow x \in S$ pour tout $y \in S$.
Etape4 : $Mk < 1$.

Chapitre 4

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence de la solution du problème :

$$\begin{cases} {}_H D^{\alpha}[x(t) - f(t, x(t))] = g(t, x(t)), t \in J = [1, T], 0 < \alpha < 1 \\ {}_H I^{1-\alpha} x(t) \mid_{t=1} = x_0, \end{cases} \tag{17}$$

où $f(\cdot) \in C([1, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g(\cdot) \in C([1, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Théorème

Soient f et g deux fonctions continues, la solution du problème aux valeurs initiales.

$$\begin{cases} {}_H D^{\alpha}[x(t) - f(t, x(t))] = g(t, x(t)), t \in J = [1, T], 0 < \alpha < 1 \\ {}_H I^{1-\alpha} x(t) \mid_{t=1} = x_0, \end{cases} \tag{18}$$

est donnée par :

$$x(t) = \frac{x_0}{\Gamma(\alpha)} (\log t)^{\alpha - 1} + f(t, x(t)) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha - 1} \frac{g(s, x(s))}{s} ds$$

.

Idée de preuve :le même travaille quand on a fait dans la troiséme chapitre pour trouver la solution de (18)

Théorème

Nous considérons les hypothéses suivantes dans se qui suit :

(H1) *La fonction* $f : [1, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue lipschitziene, il existe deux constantes* L *et* M *telle que :* $M \geq L > 0$ *sachant que :*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \frac{L}{M}|x - y|, \forall t \in J \text{ et } x, y \in \mathbb{R}.$$

(H2) *Il existe une fonction continue* $h \in C(J, \mathbb{R})$ *telle que :*

$$|g(t, x)| \leq h(t), t \in J, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Preuve : Montrons le théoréme basant sur les hypothéses.
Posons :

$$x(t) = Ax(t) + Bx(t)$$

Telle que A *et* B deux opérateurs définis par :
$A : X \to X$ avec :

$$Ax(t) = f(t, x(t)),$$

et $B : S \to X$ avec :

$$Bx(t) = I^{\alpha} g(t, x(t)) + \frac{x_0}{\Gamma(\alpha)} (\log t)^{\alpha - 1}.$$

On va montrer que les opérateurs A *et* B vérifient toutes les conditions du théoréme (2.6).

On va montrer que les opérateurs A *et* B vérifient tous les conditions du théoréme (2.6).
Cette preuve se fait par les étapes suivantes :
Etape1 : L'opérateur A est une contraction.
Etape2 :L'opérateur B est completement continue sur S.
Etape3 : $(A(x) + B(y)) \in S, \forall x, y \in S = B(0, R)$.

Conclusion L'objectif de notre travail est d'introduire la dérivation et l'intégration fractionnaires au sens d'Hadamard et de présenter quelques exemples d'applications à savoir des équations fractionnaires Hybrides .

Bibliography I

- A.A.Kilbas,H.M.Srivastava and J.J.Trujillo : *Theory and applications of fractional differential Equation, North-Holland Mathematics studies 204, Elesevier science, A mesterdam.2006.*
- A.A.Kilbas : *Hadamard Type Fractional Calculs.J.Korean Math ,Soc,PIER 38 ,pp 1191-1204 ,(2001).*
- Bashir Ahmed-Ahmed Alsaedi-Sotiris K.Ntouyas-Jessada Tariboon : *Hadamard-Type Fractional Differential Equation, Inclusion and Inequalities.springer*
- Bashir Ahmed-sotiris K.Ntouyas : *Initial-Value Proplemes For Hybrid Hadamard Fractional Differenial Equation*
- H.Brezis : *Analyse Fonctionnalle Théorie et Application,Masson,Paris.1983*
- S.Djebali, L.Górniewicz and A.Ouahab : *Solution Sets for differential Eqution and Inclusions, De Gayter.2013.*

Bibliography II

- F.Dugundji and A. Granas *Fixed Point Theory, Springer, New York, (2003).*
- A.Kolmogorov and S.Fomine : *Element de la Théorie des Fonctions de l'Analyse Fonctinnelle, Edition MIR, Moscou.1973*

Merci