République Algérienne Démocratique et Populaire Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique.

Université Ibn Khaldoun-Tiaret
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques.

Option : Mathématiques générales.
Spécialité :Analyse fonctionnelle et équation différentielle.

Intitulé :

Degré topologie.

Présenté par :

- Lakhdar Fatiha -Medjeded Aicha
-Nabi Khaldia -Souki Hanane

Soutenu le devant le jury composé de :

Mr. nom	grad	Président.
Mr. nom	grad	Examinateur.
Mr. Benia Kheiredinne	Rapporteur.	

Année universitaire :
2018-2019.

Remerciement

Avant tout nous remercions Allah tout puissant de nous avoir accordé la force, En premier lieu, je tient à témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant, de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail.
Je tient à exprimer mon profond respect, et de reconnaissance à mon encadreur de mémoire, Monsieur :Benia kheirddine, pour ces conseils, et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à ma chère mère, A mon cher père qui m'ont toujours soutenu, Qui m'ont aide à affronter les difficultés. A toute ma famille.
A tous les amis.
A tous les étudiants d'université de Ibn khaldoune Tiaret.
A tous.

Table des matières

Notations

- $\overline{\Omega}$: la fermeture de Ω
- $\partial\Omega$: la frontière de Ω.
- I : l'application identique.
- f^{-1} : l'application inverse (ou reciproque) de f.
- $det(.)$: déterminant.
- $J_{f(x_0)} = det(f'(x_0))$: le déterminant de la matrice Jacobienne en x_0 de l'application $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
- $\mathring{C}$: l'intérieur de C.
- $f|_A$: la restriction de f à l'ensemble A.
- $\otimes$: le produit tensoriel.
- $C^0(\Omega)$: est l'espace des fonction continues sur Ω.
- $C^k(\Omega)$: est l'espace des fonction k fois continues différentiables sur Ω ; $(k \in \mathbb{N})$
- $C_0^\infty(\Omega)$: est l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω.
- s.c.i : Semi continue inferierement.
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ } est \text{ } mesurable, \int_\Omega |u|^p dx < \infty\}$ pour $1 \leq p < \infty$.
- Supp(u) : est le support de la fonction u.

Introduction

La notion de degré a été introduite par Kronecker pour les applications C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ en 1869. Poincaré, Böhler et Hadamard l'ont ensuite développé au début des années 1990 puis étendu au cas des fonctions continues. L.E. Brouwer le généralisa pour les applications continues entre variétés compactes de même dimension finie et donna quelques applications topologiques. D'ailleurs, l'emploi dans les démonstrations d'arguments de type topologique revient à Poincaré (en 1883, 1884). Pour les applications différentiables, on a pu considérer des points critiques singuliers à partir de 1942 date à laquelle Sard étudia ces points. Les théories analytiques du degré de Brouwer pour les applications C^0 ont été développées par Nagumo et Heinz. Cependant, les théorèmes du point fixe restèrent longtemps plus célèbres que le degré lui-même si bien que l'on trouve de nos jours une démonstration directe pour ces théorèmes et une autre utilisant la théorie du degré.

Ce mémoire pour étudier le degré topologique, définie sur un espace localement convexe et séparé. En premier lieu, nous présentons quelques préliminaires d'analyse fonctionnelle. Nous aborderons ensuite les différentes définitions du degré topologique et ses propriétés en dimension finie, à savoir le degré de Brouwer(1912). d'autre part, nous donnons la définition du degré topologique de Leray-Schauder en dimension infinie. La dernière partie de notre travail est consacrée aux applications du degré à la théorie du point fixe appliquée à la résolution d'équations aux dérivées partielles.

Chapitre 1

Analyse fonctionnelle

On va procède à des définitions trés important pour le sujet au quel on travaille, On commence par définir les espaces utilisé :

1.1 Espace topologie

Espace vectoriel :

Définition 1.1. *Une structure de K-ev sur un ensemble E est déterminée par :*

- *Une loi de composition interne (donc une application $E * E \longrightarrow E$) notée $+$ telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif (dont l'élement neutre est le vecteur nul noté 0_E).*
- *Une loi de composition extèrne á domaine d'opérateurs égal à K, c'est-à-dire une application $K * E \longrightarrow E, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$, appelée multiplication extèrne, vérifiant les propriétés :*

$$\forall \alpha, \beta \in K,\ \forall x \in E, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$
$$\forall \alpha \in K,\ \forall x, y \in E, \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$$
$$\forall x \in E,\ 1x = x,$$
$$\forall \alpha, \beta \in K,\ \forall x \in E, \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x.$$

Espace topologique :

Définition 1.2. *Une topologie sur un ensemble E et une partie X de $P(E)$ qui vérifie les propriétés suivantes :*
- $\emptyset \in X, E \in X$,
- *L'intersection de deux éléments de X est un élément de X,*
- *La réunion (finie ou infinie) d'une famille d'éléments de X est un élément de X.*

On appelle le couple (E, X) espace topologie et les éléments de X sont appelés les ouverts, ou les parties ouvertes de E.
On présente des définitions concernant les partie d'un espace topologie :

Définition 1.3. *Un fermé (ou une partie fermée) de (E, X) est une partie de E dont le complémentaire dans E est un ouvert de (E, X).*

Définition 1.4. *On appelle voisinage de $x \in X$ l'ensemble V tel qu'il existe un ouvert U avec $x \in U \subset V$. On note par $V(x)$ l'ensemble des voisinages de x.*

Définition 1.5. *Si $A \subset X$, l'adhérence (dite aussi fermeture) de A est l'intersection de tous les fermés contenant A, c'est donc le plus petit fermé contenant A. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.*

Définition 1.6. *L'intérieure du sous-ensemble A de l'espace topologique X, noté $\mathring{A}$, est la réunion de tous les ouverts inclus dans A, c'est donc le plus grand ouvert contenu dans A.*

On définie quelque espaces topologique particulier :

Espace séparable :

Définition 1.7. *Soient A et B des parties de E. On dit que A est dense dans B lorsque $B \subset \overline{A}$, ou ce qui est équivalent, lorsque tout ouvert de E contenant un point de B rencontre A.*

Définition 1.8. *Un espace topologique (E, X) est séparable lorsqu'il existe une partie A de E qui est dénombrable et dense dans E.*

Homéomorphisme :

Définition 1.9. *Soient (E, X_1) et (F, X_2) deux espaces topologiques. Un homéomorphisme de E dans F est une application bijective, continue et dont la réciproque est continue. On dit que deux espaces sont homéomorphes s'il existe un homéomorphies entre eux.*

Espace métrique :

Définition 1.10. *On rappelle qu'un espace métrique est un couple (E, d) où E est un ensemble et d une distance sur E, c'est-à-dire une application de $E * E$ dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie pour tout $x, y, z \in E$ les propriétés :*

1. $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrique),*
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*

Théorème 1.1. *Toute espace métrique est un espace topologique .*

Les boules ouverts, fermées et la sphère :

cosidérons un espace métrique (X, d), Soient $a \in X$ et $r \in \mathbb{R}^+$

• La boule ouverte : de centre a et de rayon r est l'ensemble

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}.$$

• La boule fermée : de centre a et de rayon r est l'ensemble

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}.$$

• La sphère : de centre a et de rayon r est l'ensemble

$$S(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) = r\}.$$

Définition 1.11. *Une suite (x_n) de l'espace métrique (E, d) est dite convergente vers $l \in E$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, l) < \varepsilon.$$

Définition 1.12. *Soient (X, d) et (E, δ) deux espaces métrique. Une application $f : X \longrightarrow E$ est dite continue en $x \in X$ si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers x,la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de E converge vers l'image de x par f Soit :*

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = f(\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n).$$

Espace complet :

Définition 1.13. *(suite de cauchy)*

Soit (E, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E est dite de Cauchy lorsque, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, il existe un entier m tel que, pour tous entiers p et q vérifiant

$p \geq m$ et $q \geq m, d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Définition 1.14. *Un espace métrique (E, d) est complet lorsque toute suite de Cauchy de E est convergente.*

Espace de Banach :

Définition 1.15. *On appelle espaces de Banach les espaces vectoriels normes complets.*

Espace compacte :

Définition 1.16. *Soient (E, X) un espace topologique et A une partie de E. On appelle recouvrement de A une famille $(O_i)_{i \in I}$ de parties de E telles que $A \subset U_{i \in I}(O_i)$. Le recouvrement est dit ouvert si tous les (O_i) sont ouverts.*
On appelle sous-recouvrement de $(O_i)_{i \in I}$ toute sous-famille $(O_j)_{j \in I}$ avec $J \subset I$, qui est encore un recouvrement de E.

Définition 1.17. *(Compacité) :*

1. *Un espace topologique (E, X) est compact s'il est séparé et si, pour tout recouvrement ouvert $(O_i)_{i \in I}$ de E, il existe un sous-recouvrement ouvert fini $(O_j)_{j \in J}$, où J est une partie finie de I.*
2. *Une partie A d'un espace séparé (E, X) est compacte lorsque A muni de la topologie induite est compact.*

espace précompact :

Définition 1.18. *Un espace métrique est précompact si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E au moyen de boules ouvertes de rayon ε. Une partie d'un espace métrique est précompacte si l'espace métrique induit associe est précompact.*

Espace localement compact :

1. Un espace topologique (E, X) est localement compact s'il est séparé et si tout point de E possède un système fondamental de voisinages compacts.
2. Une partie A d'un espace topologique Séparé (E, X) est dite localement compacte si A muni de la topologie induite par X est localement compact.

Espace connexe :

Définition 1.19. *On dit qu'un espace topologique (E, X) est connexe si les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées sont E et $\emptyset$. Il revient au même de dire que E n'admet pas de partition non triviale d'ouverts (ou de fermés)*

Définition 1.20. *On dit qu'une partie A de E est connexe si (A, X_A) est connexe (X_A topologie induite).*

Espace mesurable :

Définition 1.21. *Soit E un ensemble. Une tribu sur E est un sous-ensemble X de $P(E)$ qui vérifiée les conditions suivantes*

1. *$E \in X$,*
2. *si $A \in X$, son complémentaire A^c est dans X,*
3. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'élément de X, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in X$.*

Les éléments de X sont appelés ensembles mesurables. Un espace mesurable est un couple (E, X) où E est un ensemble et X une tribu sur E.
Au lieu d'utiliser le non "tribu", on peut aussi parler de σ-algèbre pour désigner un sous ensemble de $P(E)$ stable par complémentaire, par union dénombrable et contenant E.

Définition 1.22. *Soient (E_1, X_1) et (E_2, X_2) deux espaces mesurables. Une application f de E_1 dans E_2 est dite mesurable lorsque, pour tout ensemble mesurable $X \in X_2$, son image réciproque $f^{-1}(X)$ est mesurable, c'est-à-dire que $f^{-1}(X) \subset X_1$.*

Espace mesuré :

Définition 1.23. *Soit (E, X) un espace mesurable. Une mesure sur (E, X) est une application μ de X dans $[0, +\infty]$, telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties mesurables deux à deux disjointes,*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n), (\sigma - additivit).$$

Si μ est une mesure sur (E, X), le triplet (E, X, μ) est appelé un espace mesuré.

Espace de Sobolev :

Définition 1.24. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N, N \geq 1$ l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est défini pour $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}$ par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\alpha \in \mathbb{N}; |\alpha| \leq m\}.$$

on pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

1.2 Quelque fonctions

Application propre

Soit X et Y deux espaces vectoriels topologiques localement compactes et $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue.

Définition 1.25. *f est dite application propre si l'image réciproque de tout compact est un compact.*

Lemme 1.1. *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ et $\psi : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on suppose que $0 \notin f(\partial\Omega)$ et que $supp(\psi) \subset]0, \varepsilon[$ pour un $0 < \varepsilon < d(0, f(\partial\Omega))$ et*

$$\int_0^\infty r^{N-1}\psi(r)dr = 0.$$

Alors on a

$$\int_\Omega \psi(|f(x)|)J_f(x)dx = 0.$$

Définition 1.26. *Pour une fonction f définie sur un ensemble E, on appelle restriction de f à A la fonction qui à tout x de A fait correspondre $f(x)$.*

1.3 Mesure de non compacité

Notion général de la mesure de non-compacité :

Soit E un espace de Banach et A la famille de tous les sous ensembles bornés de E. Une fonction ϕ définie de A dans $[0, +\infty[$ est appelée mesure de non-compacité (MNC) sur E si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\phi(A) = 0 \Longleftrightarrow A$ est relativement compacte.
2. $\phi(A) = \phi(\bar{A})$, $\forall A_1, A_2 \in A$
3. $\phi(A_1 \bigcup A_2) = \max\{\phi(A_1), \phi(A_2)\}$, $\forall A_1, A_2 \in A$

La mesure de non compacité de Kuratowski et Hausdorff :

La mesure de non-compacité Kuratowski :

Soient E un espace de Banach, A la famille de tous les sous-ensembles bornés de E. La mesure de non compacité au sens de Kuratowski est l'application $\alpha : A \longrightarrow R_+$ définie par :

$\alpha(A)$=inf{d>0 tel que A admet un recouvrement finie d'ensemble de diamètre inférieure ou égale à d} c'est à dire

$$\alpha(A) = \inf\{d > 0 \; tel \; que \; \exists A_1, A_2, \ldots, A_n \subset E; A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i, diam(A_i) \leq d;$$

$$\forall i = 1, \ldots, n\}$$

où $diam(A_i) = \sup \parallel x - y \parallel, \forall x, y \in A_i$ et $diam(\emptyset) = 0$.

La mesure de non compacité de Hausdorff :

Définition 1.27. *La mesure de non compacité de Hausdorff de l'ensemble A notée $\chi(A)$ est l'inf de nombre ε telle que A est un ε-résau finie dans X.*

Chapitre 2

Degré topologique de Brouwer : la dimension finie

Dans ce chapitre on définie le degré topologique et ses propriétés en dimension finie.

2.1 Construction du degré topologique de Brouwer

Cas particulier : la dimension 1

En dimension $N = 1$, les choses sont toujours plus simples. Considérons la situation suivante : soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue qui ne s'annule ni en 0 ni en 1, et notons $deg(f) = \frac{1}{2}(sgn(f(1)) - sgn(f(0)))$. Si $deg(f) \neq 0$, alors $f(1)$ et $f(0)$ ont des signes différents donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [0, 1]$ tel que

$$f(x) = 0. \tag{2.1}$$

Où Si $x \in \mathbb{R}$

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Le cas régulier

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application dans $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Pour $x_0 \in \Omega$, on désignera par $Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(x_0)(1 \leq i, j \leq n)$ la matrice jacobienne de f en x_0 et par $J_f(x_0) = detDf(x_0)$ le déterminant de la matrice jacobien de f en x_0.On considère le problème :

$$\text{Trouver } x \in \Omega, f(x) = y_0 \qquad \text{(P)}$$

Définition 2.1. *(Point régulier) :*
$x_0 \in \Omega$ est dit point régulier de f si $J_f(x_0) \neq 0$.

Définition 2.2. *(Valeur régulier) :*
$y_0 \in f(\overline{\Omega})$ est dite valeur régulière si $f^{-1}(y_0) \cap S_f(\Omega) = \emptyset$.
Dans le cas contraire, y_0 est dite valeur singulière ou critique.
Où $S_f(\Omega) = \{x_0 \in \Omega; J_f(x_0) = 0\}$ l'ensemble des points singuliers de f sur l'ouvert Ω.

Définition 2.3. *(Degré topologie de Brouwer) :*
si $y_0 \notin [f(\partial\Omega) \cup f(S_f(\Omega))]$,on définit le degré topologique de Brouwer de f en y_0 relativement à l'ouvert par :

$$deg(f, \Omega, y_0) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \Omega \cap f^{-1}(y_0)} sgnJ_f(x), & si\ \Omega \cap f^{-1}(y_0) \neq \emptyset. \\ 0, & si\ \Omega \cap f^{-1}(y_0) = \emptyset. \end{cases}$$

Le cas général

Soit $f \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ une valeur singulière, dans ce qui suit.

Définition 2.4. *(Point critique) :*
x_0 *est dit point singulier de* f *(ou point critique) s'il n'est pas régulier.*

Définition 2.5. *Soient* $N \geq 1$ *un entier,* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$*, une fonction* $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *et* $b \notin f(\partial\Omega)$*. On considère* $0 < \varepsilon < d(b, f(\partial\Omega))$ *et une fonction* $\varphi \in C(]0, \infty[, \mathbb{R})$ *à support compact contenu dans* $]0, \varepsilon[$*, et telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(|x|)dx = 1.$$

On appelle le degré topologique de Brouwer de f *dans* Ω *par rapport au point cible* b *le nombre*

$$deg(f, \Omega, b) = \int_{\Omega} \varphi(|f(x) - b|)J_f(x)dx.$$

Remarques 2.1. *Le degré topologique de Brouwer est indépendant du choix de la fonction* φ *et du choix de* ε*.*

Démonstration. Soit $\varepsilon_0 = d(b, f(\partial\Omega))$ et $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon_0$, si φ_1 et φ_2 ont un support dans $]0, \varepsilon_1[$ et $]0, \varepsilon_2[$ successivement et vérifient

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_1(|x|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_2(|x|)dx = 1,$$

alors en posant $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$ on a $\int_0^\infty r^{N-1}\psi(r)dr = 0$, et en appliquant le lemme 1.1 à ψ on obtient que

$$\int_{\Omega} \psi(|f(x) - b|)J_f(x)dx = 0.$$

$\square$

2.2 Propriétés du degré de Brouwer

On suppose que Ω *est un ouvert borné de l'espace* $\mathbb{R}^n$*. Dans ce qui suit,* I *désigne l'application identité sur* $\mathbb{R}^n$*. Les démonstration sourant fait pour le cas régulier .*

Proposition 2.1. *(Degré de l'identité)*

(a) $deg(I,\Omega,y_0)=\begin{cases}1, & si\ y_0\in\Omega,\\ 0, & si\ y_0\notin\overline{\Omega}.\end{cases}$

(b) $deg(-I,\Omega,y_0)=\begin{cases}(-1)^n, & si\ y_0\in\Omega,\\ 0, & si\ y_0\notin\overline{\Omega}.\end{cases}$

Démonstration. Pour **(a)** ; soit $y_0\in\Omega$

$I^{-1}(y_0)=\{y_0\}$ et y_0 est une valeur régulière car $J_I(x)=+1$,$\forall x\in\mathbb{R}^n$.

Si $y_0\notin f(\overline{\Omega})$, l'ensemble $I^{-1}(y_0)\cap\overline{\Omega}$ est vide ;

d'où le résultat en utilisant la définition 2.3 avec y_0 valeur régulière.

Pour **(b)** ; soit $y_0\in\Omega$

$-I^{-1}(y_0)=\{y_0\}$ et y_0 est une valeur régulière car $J_{-I}(x)=(-1)^n$,$\forall x\in\mathbb{R}^n$.

Si $y_0\notin f(\overline{\Omega})$, l'ensemble $-I^{-1}(y_0)\cap\overline{\Omega}$ est vide. □

Proposition 2.2. *(Additivité)*

Soit $y_0\in\mathbb{R}^n$ et $(\Omega_i)_{i\in I}\subset\Omega$ une famille d'ouverts deux à deux disjoints vérifiant l'une des assertions suivantes :

(a) $\Omega=\bigcup_{i\in I}\Omega_i$ *et* $y_0\notin f(\partial\Omega)$ *;*

(b) $\bigcup_{i\in I}\Omega_i\subset\Omega$ *et* $y_0\notin f(\overline{\Omega}\backslash\bigcup_i\Omega_i)$.

Alors

$$deg(f,\Omega,y_0)=\sum_{i=1}^{N}deg(f,\Omega_i,y_0),$$

où seul un nombre fini de termes dans la somme est non nul.

Démonstration. Supposons l'assertion **(a)** ; le cas où **(b)** est vérifiée se traite de la même manière.

• Vérifions d'abord que $\partial\Omega_i\subset\partial\Omega,\forall i\in I$.

on va raisonner par l'absurde, on suppose que $\partial\Omega_i \not\subset \partial\Omega$,
il existe un élément $x \in \partial\Omega_i \cap \Omega$ tel que $x \notin \partial\Omega$,
$x \notin \Omega_i$ donc $\exists j,\ j \neq i$ tel que $x \in \Omega_j$ or Ω_j un ouvert donc $\exists r > 0$ tel que,
$x \in B(x,r) \subset \Omega_j$ or (Ω_i) sont deux à deux disjont, donc $B(x,r) \cap \Omega_i = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{\Omega_i}$,
ce qui contredit $x \in \partial\Omega_i$
donc $f(\partial\Omega_i) \subset f(\partial\Omega)$, et donc $y_0 \notin f(\partial\Omega_i)$.
Alors

$$\begin{aligned} deg(f,\Omega,y_0) &= \sum_{x\in\Omega\cap f^{-1}(y_0)} sgnJ_f(x) \\ &= \sum_{x\in f^{-1}(y_0)\cap(\cup_{i\in I}\Omega_i)} sgnJ_f(x) \end{aligned}$$

car $\Omega = \cup_{i\in I}\Omega_i$
$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ si $i \neq j$

$$\begin{aligned} deg(f,\Omega,y_0) &= \sum_{x\in\cup_{i\in I}(f^{-1}(y_0)\cap\Omega_i)} sgnJ_f(x) \\ &= \sum_{x\in\cup_{i\in I}(f^{-1}(y_0)\cap\Omega_i)} sgnJ_f(x) \\ &= \sum_{i\in I} \sum_{x\in(f^{-1}(y_0)\cap(\Omega_i))} sgnJ_f(x) \end{aligned}$$

car $f^{-1}(\{y_0\} \cap \Omega_i) \cap_{i\neq j} f^{-1}(\{y_0\} \cap \Omega_j) = \emptyset$
En effet il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f^{-1}(y_0) \subset \cup_{i=1}^{i=N}\Omega_i$ et donc pour tout
$i \geq N+1, deg(f,\Omega_i,y_0) = 0$.
Finalement :

$$deg(f,\Omega,y_0) = \sum_{i=1}^{N} deg(f,\Omega_i,y_0).$$

$\square$

Proposition 2.3. *(Invariance par homotopie)*
Soit $\{f_t\}_{0\leq t\leq 1}$ une famille d'applications appartenant à $C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$, reliées homotopiquement dépendant continûment de t et $\{y_0(t)\}_{0\leq t\leq 1}$ une famille de points indexés continûment par t et telles que
$y_0 \notin f_t(\partial\Omega), \forall t \in [0,1]$.
Alors le degré $deg(f_t,\Omega,y_0(t))$ ne dépend pas de t.

Remarques 2.2. *Les fonctions (f_t) sont dites reliées homotopiquement ; plus généralement,on dit que deux fonctions f et g sont homotopes s'il existe une fonction continue*
$H : [0,1]\times\overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $H(0,x) = f(x)$ et $H(1,x) = g(x), \forall x \in \overline{\Omega}$.

Démonstration. Soit l'ensemble

$$Y = \bigcup_{0\leq t\leq 1} f_t(\partial\Omega) = \{f_t(x); 0 \leq t \leq 1, x \in \partial\Omega\}$$
$$= f([0,1]\times\partial\Omega) \text{ où } f(t,x) = f_t(x).$$

Y est un ensemble fermé (car l'image d'un compacte par une application continue est un compacte). On choisit alors une n-forme différentielle μ à support compact dans $\mathbb{R}^n\backslash Y$ et contenant y_0 ; puis on introduit l'application

$$d : [0,1] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$t \longmapsto deg(g,\Omega,y_0(t)) = \int_\Omega \mu\circ f_t$$

Cette application est continue, l'image réceproque d'un ouvert est un ouvert.
Soit $t \in [0,1]$ alors $d(t) = a \in \mathbb{Z}$
donc $d^{-1}(\{a\}) \subset [0,1]$, et ona $\{a\}$ est un fermé et un ouvert, d'où $d^{-1}(\{a\})$ est un fermé et un ouvert, alors les sous ensembles fermé ouvert on même temps sont :$\{\emptyset,[0,1]\}$
d'où $d^{-1}(\{a\}) = [0,1]$.
donc $d([0,1]) = a$.
donc d constante. □

Proposition 2.4. *(Résolution des équations algébriques)*
Si $y_0 \notin f(\overline{\Omega})$*, le degré* $deg(f, \Omega, y_0)$ *est nul ; ou encore, de manière équivalente* $[deg(f, \Omega, y_0) \neq 0] \Rightarrow$*[le problème (P) admet au moins une solution].*

Démonstration. Par la contraposé si un tel x n'existe pas, alors $y \notin f(\Omega)$ et comme on a déjà par hypothèse $y \notin f(\partial\Omega)$, cela signfie $y \notin f(\overline{\Omega})$.
Considérons alors les ouverts $\Omega_1 = \Omega_2 = \emptyset$, disjoints et inclus dans Ω.
On a $y \notin f(\overline{\Omega}) = f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ donc, par la propriété d'additivité du degré topologique,

$$deg(f, \Omega, y) = deg(f, \Omega_1, y) + deg(f, \Omega_2, y).$$

Mais, comme on a clairement
$y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, cette même propriété d'additivité donne aussi $deg(f, \Omega, y) = deg(f, \Omega_1, y) + deg(f, \Omega_2, y)$ et donc $deg(f, \emptyset, y) = 0$; on en déduit alors que $deg(f, \Omega, y) = 0$. □

Proposition 2.5. *(Continuité par rapport à* y_0*)*
Si y_1 *est voisin de* $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ *(dans un sens à préciser), alors*

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega, y_1)$$

En particulier, $deg(f, \Omega, y_0) \in \mathbb{Z}$*.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe une boule B contenant à la fois y_0 et y_1 et tel que
$B \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$; alors $y_1 \notin f(\partial\Omega)$ et l'on peut alors choisir μ une n-forme différentielle à support compact dans la boule B ; et ce dans les deux définitions correspondantes du degré. □

Proposition 2.6. *(Invariance sur le bord)*
Si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ *et* $f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$*, alors*

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(g, \Omega, y_0)$$

Démonstration. Pour $t \in [0,1]$, on introduit la déformation convexe $f_t = tf+(1-t)g$. Alors,
$\forall x \in \partial\Omega, f_t(x) = g(x) = f(x) \neq y_0$. Le degré $\deg(f_t, \Omega, y_0)$ est donc bien défini et constant, d'après la propriété 1.2.4 ; d'où

$$\deg(f, \Omega, y_0){=}\deg(g, \Omega, y_0)$$

Cette propriété montre que, pour le degré, tout se passe sur le bord. □

Proposition 2.7. *(Continuité par rapport à la fonction)*
Soit $r = d(y_0, f(\partial\Omega)) > 0$ et soit $g \in C^1(\overline{\Omega})$ une fonction telle que $\sup\limits_{x\in\partial\Omega} \| g(x) - f(x) \| < r$; alors

$$deg(f, \Omega, y_0){=}deg(g, \Omega, y_0).$$

On peut retenir cette propriété en se souvenant que deux fonctions voisines ont même degré.

Démonstration. Pour $t \in [0,1]$, posons $f_t = tg + (1-t)f$ et vérifions que $y_0 \notin f_t(\partial\Omega), \forall t \in [0,1]$. Pour $x \in \partial\Omega$, on a successivement

$$\begin{aligned}
\|f_t(x) - y_0\| &= \|(tg + (1-t)f)(x) - y_0\| \\
&= \|t(g-f)(x) - (y_0 - f(x))\| \\
&\geq |\|y_0 - f(x)\| - \|t(g-f)(x)\|| \\
\textit{par} \text{ définition de } r & \\
\|f_t(x) - y_0\| &= \|y_0 - f(x)\| - \|t(g-f)(x)\| \\
\text{car } |t| \leq 1 & \\
\|f_t(x) - y_0\| &\geq \|y_0 - f(x)\| - \|(g-f)(x)\| \\
\textit{par} \text{ définition de } r & \\
\|f_t(x) - y_0\| &> \|y_0 - f(x)\| - r \geq 0 \\
\text{et enfin on a} & \\
& \|f_t(x) - y_0\| > 0 \\
y_0 \notin f_t(\partial\Omega) &
\end{aligned}$$

Par conséquent, $f_t(x) \neq y_0$ pour tout $x \in \partial\Omega$ Le résultat demandé se déduit alors de la propriété d'invariance par homotopie du degré. Cette propriété sera utile pour l'approximation d'une fonction continue par une fonction plus régulière. □

Proposition 2.8. *(Propriété multiplicative du degré)*
Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deux fonctions de classe C^1, où U est V sont deux ouverts bornés respectivement de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$ et soit $y_0 \notin f(\partial U)$ et $z_0 \notin f(\partial V)$. Alors, la formule suivante a lieu
$deg(f \times g, U \times V, (y_0, z_0)) = deg(f, U, y_0).\, deg(g, V, z_0)$
où $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y)), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$

Démonstration. Soit $\mu(x) = \phi(x)dx$ et $\nu(y) = \psi(y)dy$ deux formes différentielles intervenant dans les définitions respectives de μ et de ν. On définit le produit des formes μ et ν par $(\mu \cdot \nu)(x, y) = \mu(x) \oplus \nu(y)$; (μ, ν) est alors une $(m+n)$-forme adaptée à la fonction $(f \times g)$. Notons $X = (x, y)$ et $(\mu \cdot \nu)(X) = \eta(X)dX$ puis écrivons

$$\begin{aligned}
deg(f \times g, U \times V, (y_0, z_0)) &= \int_{U \times V} (\mu \cdot \nu)(f \times g) \\
&= \int_{U \times V} \eta(f \times g) J_{f \times g} dX \\
&= \int_{U \times V} \eta(f \times g)(X) J_f \cdot J_g dX \\
&= \int_{U \times V} \eta(f(x), g(y))(X) J_f \cdot J_g dX \\
&= \int_{U \times V} \phi(f)(x)\psi(g)(y) J_f \cdot J_g dxdy
\end{aligned}$$

On utilise le théorème *de Fubini.*

$$= (\int_U \phi(f)(x) J_f dx)(\int_V \nu(g)(y) J_g dy)$$

mais

$$
\begin{aligned}
&(\int_U \phi(f)(x)J_f dx) = \int_u (\mu \circ f)(df)(x) \\
&(\int_V \sigma(g)(y)J_g dy) = \int_v (\nu \circ g)(dg)(y) \\
deg(f \times g, U \times V, (y_0, z_0)) &= (\int_U \mu \circ f df)(\int_V \nu \circ g dg)(\int_U \mu)(\int_V \nu) \\
&= deg(f, U, y_0) \cdot deg(g, V, z_0).
\end{aligned}
$$

On a utilisé les définitions des formes μ et ν □

2.3 Théorème du point fixe de Brouwer,1912

Théorème 2.1. *Soit C un compact, convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \longrightarrow C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C.*

Démonstration. Faisons-la dans le cas où $C = \overline{B}_R(0) = \overline{B}(0, R)$. Si $\exists x_0 \in \partial C$ telle que $f(x_0) = x_0$, le théorème est démontré ; sinon $f(x) \neq x, \forall x \in \partial C$. Considérons alors la déformation continue $f_t(x) = x - tf(x)$. Pour $t \in [0, 1[$ et $x \in \partial C$, on a les estimations suivantes :

$$\|f_t(x)\| \geq |\|x\| - t\|f(x)\|| = |R - t\|f(x)\|| \geq R - t\|f(x)\| \geq (1 - t)R > 0.$$

En effet, comme $f(C) \subset C$, on a que $t\|f(x)\| < \|f(x)\| \leq R, \forall t \in [0, 1[$. Le degré $deg(Id - tf, x \in \mathring{C}, 0)$ est donc bien défini et vaut,
d'après la proposition 2.1 on a $deg(Id, x \in \mathring{C}, 0) = 1$,
$deg(Id, x \in \mathring{C}, 0) = 1 = deg(Id - f, x \in \mathring{C}, 0) \neq 0$ grâce à la proposition 2.5,
et par la proposition 2.3 il existe $x \in \mathring{C}$ tel que $(Id - f)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$. □

2.4 Formes équivalentes du théorème de Brouwer

Théorème de Perron-Frobenius

Soit $A \in M(n \times n)$ une matrice carrée dont tous les termes sont positifs. Alors elle admet au moins une valeur propre positive associée à un vecteur propre positif (i.e dont toutes les composantes sont positives au sens large).

Démonstration. L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de la norme $\|x\|_n = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i|$ considérons le compact,convexe

$$C = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\} \text{ et } \sum_{i=1}^{i=n} x_i = 1\}.$$

S'il existe $x_0 \in C$ tel que $Ax_0 = 0$, le problème est résolu avec $\lambda = 0$. Sinon, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in C, \sum_{i=1}^{i=n} (Ax)_i \geq \alpha > 0$. L'application f définie par $f(x) = \dfrac{Ax}{\sum_{i=1}^{i=n} (Ax)_i}$ vérifie $\|f(x)\| \leq \frac{\|A\|\|x\|}{\alpha}$. Elle est donc définie et continue ; de plus, comme les termes (a_{ij}) sont positifs, elle envoie C dans C. Elle admet donc, d'après le théorème de point fixe de Brouwer, au moins un point fixe $x_0 \in C$ vérifiant $Ax_0 = \lambda x_0$ avec $\lambda = \sum_{i=1}^{i=n} (Ax_0)_i$. $\square$

On ajoute quelque théorème de point fixe sans démonstration pour plus détails veillez voir :

1- Théorème de Hartmann-Stampacchia

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un compact, convexe et $f : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors, il existe $u \in C$ tel que :

$$\langle fu, v - u \rangle > 0, \forall v \in C.$$

2- Théorème de Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz [?]

Soit $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}^n$ *et* $F_1, \ldots, F_p$ *des fermés de* $\mathbb{R}^n$ *tel que pour tout multi-indice* $\{i_1, \ldots, i_p\} \in \mathbb{N}^p$, *on a* $conv\{x_1, \ldots, x_p\} \subset \bigcup_{j=1}^{i=p} Fj$. *Alors* $\bigcap_{i=1}^{i=p} Fi \neq \emptyset$.

3- Théorème du mini-max de Ky-Fan [4]

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ *un compact, convexe et* $f : C^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une application telle que :*

(a) *l'application* $y \mapsto f(.\,, y)$ *est s.c.i (semi continue inférieur),*

(b) *l'application* $x \mapsto f(x, .\,)$ *est continue et quasi concave (i.e* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *l'ensemble* $\varphi^{-1}(]\lambda, +\infty[)$ *est convexe)*

Alors $\min_{y \in C} \max_{x \in C} f(x, y) \leq \max_{x \in C} f(x, x)$.

Chapitre 3

Degré topologique de Leray-Schauder : la dimension infinie

Nous allons maintenant présenter le degré en dimension infinie ayant le même rôle que le degré de Brouwer, c'est à dire un outil qui permet d'assurer une solution pour l'équation de la forme $f(x) = y$, où f est continue d'un Banach E dans lui-même, ait au moins une solution x. On se rend cependant vite compte, sur un exemple, qu'il n'y a aucun espoir en dimension infinie de construire un degré topologique pour toute application continue (et même linéaire) en voici la preuve.

Une implication étant donnée par le théorème de Brouwer, la réciproque est fournie par le contre-exemple suivant dans l'espace des suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muni de la norme du sup $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$. Considérons l'ensemble $X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N},} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0\}$ et l'application $f : X \longrightarrow X$ définie par :

$$(f(x))_1 = \frac{1+\|x\|}{2} \quad et \quad (f(x))_n = x_{n-1}, n > 1.$$

Alors f n'admet pas un point fixe car sinon
$\forall n \geq 1, x_{n+1} = x_n = \ldots = x_1 = \dfrac{1+\|x\|}{2}$, *ce qui est absurde avec* $\dfrac{1+\|x\|}{2} \notin X$.

On va définie un degré topologique pour des applications qui sont des perturbations compactes de l'identité du type $I - T$ où T est compact et I désigne l'application identité de X.

3.1 Construction du degré

Pour accéder à la définition de degré de Leray-Schauder on a besoin des lemmes suivant :

Lemme 3.1. *Soit Ω un ouvert borné de X. Si $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est un opérateur compact et n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $u \in \partial\Omega$ on ait*

$$\|u - Tu\| \geq \varepsilon.$$

Démonstration. Si ce n'est pas le cas il existerait une suite $(u_n)_n$ de $\partial\Omega$ telle que

$$\|u_n - Tu_n\| \longrightarrow 0.$$

Or T étant compact et $\overline{\Omega}$ borné, on pourrait trouver une sous suite $(Tu_{n_i})_i$ et $y \in X$ telle que $Tu_{n_i} \longrightarrow y$ lorsque $i \longrightarrow \infty$. On en déduit que $u_{n_i} \longrightarrow y$ et par conséquent, T étant continu on a $y - Ty = 0$, ce qui dit que y est un point fixe de T. Comme $y \in \partial\Omega$, celà contredit notre hypothèse sur T. □

Lemme 3.2. *Soit Ω un ouvert borné de X. Si $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est un opérateur compact et n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$. Alors si $\varepsilon > 0$ est tel que $\|u - Tu\| \geq 4\varepsilon$ pour tout $u \in \partial\Omega$, il existe un sous espace vectoriel de dimension finie E_ε de X et un opérateur $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow E_\varepsilon$ tels que*

$$\forall u \in \overline{\Omega}, \|T_\varepsilon - Tu\| \leq \varepsilon$$
$$\forall u \in \partial\Omega, \|u - T_\varepsilon u\| \geq 3\varepsilon.$$

Démonstration. On sait d'aprés le lemme précédent que

$$\forall u \in \partial\Omega, \|u - Tu\| \geq 4\varepsilon.$$

Comme $T(\overline{\Omega})$ est relativement compact dans X, il existe des points $(x_i)_{i\leq n}$ dans $T(\overline{\Omega})$ tels que

$$T(\overline{\Omega}) \subset \bigcup_{1\leq i\leq n} B(x_i, \varepsilon).$$

Posons pour

$$x \in X, \lambda_i(x) = (\varepsilon - \|x - x_i\|),$$

puis pour $X \in T(\Omega)$

$$j_\varepsilon(x) = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)}$$

Enfin en introduisant l'espace vectoriel engendré par $(x_i)_{i\leq n}$ c'est à dire l'espace $E_\varepsilon = \mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_n\}$ et pour $u \in \overline{\Omega}$ l'application

$$T_\varepsilon(u) = j_\varepsilon(Tu),$$

où $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est continu et $T_\varepsilon(\overline{\Omega}) \subset E_\varepsilon$. Comme par ailleurs, pour tout $x \in T(\overline{\Omega})$, on a

$$\lambda_i(x)\|x - x_i\| \leq \lambda_i(x)\varepsilon$$

on en conclut sans difficulté que $\|x - j_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon$ pour de tels x. Cela implique que si $u \in \overline{\Omega}$, alors

$$\|T_\varepsilon(u) - T(u)\| \leq \varepsilon$$

D'autre part si $u \in \partial\Omega$ on a

$$\begin{aligned}
\|u - T_\varepsilon u\| &= \|u - Tu + Tu - T_\varepsilon u\| \\
&\geq \|u - Tu\| + \|Tu - T_\varepsilon u\| \\
&\geq 3\varepsilon > 0,
\end{aligned}$$

ce qui implique que T_ε répond aux exigences du lemme. □

Lemme 3.3. *Soit* Ω *un ouvert borné de* X. *Si* $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ *est un opérateur compact et n'a pas de point fixe sur* $\partial\Omega$. *Alors si* $\varepsilon > 0$ *est telle que* $\|u - Tu\| \geq 4\varepsilon$ *pour tout* $u \in \partial\Omega$. *On suppose que* $T_{1\varepsilon}$ *et* $T_{2\varepsilon}$ *sont deux approximations de* T, *telles que pour* $i = 1, 2$ *on ait* $T_{i\varepsilon}(\Omega)$, *où* E_ε *est un sous espace de dimension finie de* X, *et de plus* $\|T_{i\varepsilon}u - T_u\| \leq \varepsilon$ *pour* $u \in \Omega$ *et* $\|u - T_{i\varepsilon}u\| \geq 3\varepsilon$ *pour* $u \in \partial\Omega$. *Alors si* F *est un sous espace vectoriel de dimension finie de* X *contenant* E_ε *tel que* $\Omega_F = \Omega \cap F \neq \emptyset$,
on a

$$deg(I - T_{1\varepsilon}, \Omega_F, 0) = deg(I - T_{2\varepsilon}, \Omega_F, 0)$$

Démonstration. Soient $\partial\Omega_F = \partial\Omega \cap F$ le bord de Ω_F Comme $T_{i\varepsilon}$ n'a pas de point fixe sur $\partial\Omega$ dit que le degré topologique est bien défini en 0 de l'opérateur $I - T_{i\varepsilon}$. Pour $t \in [0, 1]$ soit

$$H(u, t) = tT_{1\varepsilon}(u) + (1 - t)T_{2\varepsilon}(u).$$

On ajoute et on retranche la quantité $(1 - t)T(u)$ et on obtient que pour tous
$t \in [0, 1], u \in \overline{\Omega}$ et en particulier pour $u \in \Omega_F$ on a

$$\|H(u, t) - Tu\| \leq \varepsilon$$

d'autre part pour $u \in \partial\Omega$ en ajoutant et retranchant aussi la quantité $T(u)$ on a

$$\|u - H(u, t)\| \geq 3\varepsilon$$

Par conséquent $H \in C(\Omega_F \times [0, 1], F)$ est une homotopie admissible pour appliquer la propriété d'invariance par homotopie du degré topologique de Brouwer, ce qui donne

$$deg(I - H(\cdot, 0), \Omega_F, 0) = deg(I - H(\cdot, 1), \Omega_F, 0)$$

D'où

$$deg(I - T_{1\varepsilon}, \Omega_F, 0) = deg(I - T_{2\varepsilon}, \Omega_F, 0).$$

□

Dans ce lemme on va voir comment peut on lier deux degrés topologiques de dimensions différents contrairement aux précédent qui étaient de même dimensions.

3.2 Degré de Leray-Schauder

Définition 3.1. *Soient X un espace de Banach, Ω un ouvert borné de X et $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$. Alors pour $\varepsilon > 0$, et $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow E_\varepsilon$ étant donnés par le lemme on considère F un sous espace vectoriel de dimension finie contenant E_ε et tel que $\Omega_F = \Omega \cap F \neq \emptyset$. On définit le degré topologique de Leray-Schauder par*

$$deg(I - T, \Omega, 0) = deg_F(I_F - T_\varepsilon, \Omega_F, 0_F).$$

Cette définition ne dépend que de T et de Ω. Si $b \in X$ est tel que $b \notin (I - T)(\partial\Omega)$, le degré de $I - T$ dans Ω par rapport à la cible b est défini comme étant

$$deg(I - T, \Omega, b) = deg(I - T - b, \Omega, 0).$$

3.3 Propriétés du degré de Leray-Schauder

Le degré de Leray-Schauder hérite ces propriétés du degré de Brouwer

Proposition 3.1. *(additivité)*
Si Ω_1,Ω_2 sont deux ouverts bornés disjoints et $T : \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \longrightarrow X$ est un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, alors

$$deg(I - T, \Omega_1 \cup \Omega_2, 0) = deg(I - T, \Omega_1, 0) + deg(I - T, \Omega_2, 0).$$

Démonstration. On a obtient la démonstration de cette proposition grâce à la proposition 2.2 de Brouwer. □

Proposition 3.2. *Si $b \in X$ est tel que pour tout $u \in \overline{\Omega}$ on a*

$$u - Tu \neq b$$

alors

$$deg(I - T, \Omega, b) = 0$$

Proposition 3.3. *Si $b \in X$ est tel que pour tout $u \in \partial\Omega$ on a $u - Tu \neq b$ et*

$$deg(I - T, \Omega, b) \neq 0$$

alors il existe $u \in \Omega$ tel que

$$u - Tu = b.$$

Démonstration. On a obtient la démonstration de cette proposition grâce à la proposition 2.4 de Brouwer. □

Proposition 3.4. *Soient T_1, T_2 des applications compactes de $\overline{\Omega}$ dans X et $b \in X$ tel que*

$$4\varepsilon = d(b, T_1(\partial\Omega) \cup T_2(\partial\Omega)) > 0$$

alors si $\sup\limits_{u \in \overline{\Omega}} \|T_1u - T_2u\| \leq \varepsilon$, on a

$$deg(I - T_1, \Omega, b) = deg(I - T_2, \Omega, b).$$

3.4 Théorème du point fixe de Leray-Schauder

Théorème 3.1. *Soit $\overline{B}$ la boule unité fermée d'un Banach E et $f : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}$ compacte, alors f admet un point fixe.*

Démonstration. S'il existe un point fixe sur ∂B, alors il n'y a rien à prouver. On peut supposer que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \partial B$. puisque f n'a pas de point fixe sur le bord de B on a bien que le degré est bien défini nous allons montrer que $deg(I - f, B, 0) = 1$ ce qui prouvera que $I - f$ a au moins un zéro dans B et que f a donc au moins un point fixe dans cet ensemble.
Soit alors l'homotopie

$$H(t, x) = x - tf(x)$$

compacte et continue de $[0,1] \times \overline{B}$, si pour un $t \in [0,1]$ et un $x \in \partial B$, on a $x - tf(x) = 0$ alors $x = tf(x)$ comme $|x| = 1$ *et* $|f(x)| \leq 1$ ceci impose que $t = 1$ et $x = f(x)$ or qu'on a supposer que $f(x) \neq x$ sur le bord, on peut donc appliquer l'invariance de l'homotopie que

$$deg(H(\cdot, 1), B, 0) = deg(H(\cdot, 0), B, 0) = deg(I, B, 0) = 1$$

d'où que le degré est non nul et la présence d'un $x \in B$ tel que $f(x) = x$. $\square$

Forme équivalente du théorème de Leray-Schauder

Théorème 3.2. *Soit Ω un ouvert, borné d'un espace de Banach X et $f : \Omega \longrightarrow X$ une application compacte. Alors*
ou (i) f admet un point fixe dans Ω.
ou (ii) Il existe $x \in \partial\Omega,\ \exists t \in [0,1] : x = tf(x)$.

Démonstration. Si la condition (ii) n'est pas satisfaite, l'assertion suivante a lieu :

$$x \in \partial\Omega, \forall t \in [0,1] : (I - tf)(x) \neq 0;$$

le degré $deg(I - tf, \Omega, 0)$ est donc bien défini, et vaut, par homotopie, $deg(I, \Omega, 0) = 1$. Pour $t = 1, f$ admet donc un point fixe dans Ω. $\square$

Chapitre 4

Application

4.1 Application sur le degré de Brouwer

Application 1

Comme une application intéréssante du degré de Brouwer, on peut répondre à la question suivante :
A chaque instant, existe t'il deux points sur la terre qui ont exactement la même température et la même pression ?
La réponse sera une conséquence du corollaire suivant

Corollaire 4.1. *Soit $N > p$ deux entiers et $f : S^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ continue alors il existe un $x \in S^{N-1}$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Démonstration. La preuve est basée sur le théorème de Borusk qui dit que pour tout Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ contenant 0 symmétrique par rapport à l'origine et $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ une fonction impaire telle que $0 \notin f(\partial\Omega)$ alors $deg(f, \Omega, 0)$ est impair et non nul.
on pose $y = f(x) - f(-x)$ alors
$g : \overline{B}(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^p$ on prolonge g sur $\mathbb{R}$ on ajoutant des zéro alors

en identifiant $\mathbb{R}^p$ à $\mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^N$ alors
g est un valeurs dans $\mathbb{R}^N$ supposant : $0 \notin g(S^{N-1})$

$$g(-x) = f(-x) - f(x) = -g(x).$$

Donc : g impair par le théorème de Borusk on degré est impaire.
on déduit que est non nul $deg(g, s^{N-1}, 0) \neq 0$
C-á-d : l'existence de y tel que : $g(y) = 0$.
C-á-d : tout voisáinage de 0 est dans l'image de g est une contradiction avec le fait que l'image de g est contenue dans $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ on donc :
$0 \in g(s^{N-1})$ qui dit il existe x tel que :

$$f(x) = f(-x)$$

Alors pour répondre à la question, il suffit de prendre $N = 3$, $p = 2$ et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définit par $f(x) = (T(x), P(x))$ où T est la température et P est la pression dans le point x. $\square$

Application 2

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ qui ne s'annule pas sur $\partial\Omega$. Alors $deg(f, \Omega, 0)$ est égal au nombre de zéros de f dans Ω, comptés avec leur multiplicité.

Démonstration.
1^{er}**cas :**
f est une constante
puis que $f(x) \neq 0$ dans $\partial\Omega$ alors elle n'a pas des zéros .
grâce a la proposition 2.4 $deg(f, \Omega, 0) = 0$
2^{eme}**cas :**
Supposons maintenant que f est une fonction non constante avec un nombre fini de zéros dans Ω.
Soit $\{z_1, \ldots, z_k\}$ les zéros de f et $(n_1, \ldots, n_k)$ leur multiplicités respectives.
Fixons $\varepsilon > 0$ tel que toutes les boules $(B(z_i, \varepsilon))_{i\in[1,k]}$ sont disjointes et incluses dans Ω, alors comme $f \neq 0$ en dehors de l'union de ses boules, d'après la propriétés d'additivité du degré topologique on obtient que

$$deg(f, \Omega, 0) = \sum_{i=1}^{k} deg(f, B(z_i, \varepsilon), 0).$$

Maintenant il reste à montrer que pour ε assez petit on a

$$deg(f, B(z_i, \varepsilon), 0) = n_i.$$

Par translation on peut se ramener à étudier le degré sur $B(0, \varepsilon)$ on peut supposer dès le début que $z_i = 0$ et notons $n = n_i$.
On peut écrire f sous la forme

$$f(z) = az^n(1 + w(z)) \; ou \; a \neq 0 \; et \; w(z) \longrightarrow 0 \; lorsque \; z \longrightarrow 0,$$

on peut supposer que $|w(z)| < 1$ pour $|z| = \varepsilon$.
Considérons l'homotopie suivante

$$H(t, z) = az^n(1 + tw(z))$$

qui n'a pas de zéro sur $[0, 1] \times \partial B(0, \varepsilon)$, l'invariance du degré donne que

$$deg(f, B(0, \varepsilon), 0) = deg(az^n, B(0, \varepsilon), 0)$$

maintenant, il reste à calculer le degré $deg(az^n, B(0, \varepsilon), 0)$, pour cela on réalise une homotopie entre az^n et z^n toujours par la propriété d'invariance on obtient que

$$deg(az^n, B(0, \varepsilon), 0) = deg(z^n, B(0, \varepsilon), 0)$$

et que

$$deg(z^n, B(0, \varepsilon), 0) = deg(z^n, B(0, 1), 0) = n$$

comme f est holomorphe, la différentielle de f a en tout point un déterminant positif (c'est une similitude qui conserve l'orientation du plan) ; on en déduit que$d^{\infty,\mathbb{R}}(f, B(0, 1), y) = n$ dés que y est non-nul et proche de 0, et donc que $d(f, B(0, 1), 0) = n$. d'où

$$deg(f, B(z_i, \varepsilon), 0) = n_i.$$

□

Conclusion :

Dans ce mémoire nous avons considéré le degré topologique pour résoudre les équation différentielle.
Nous avons étude deux cas pour définir le degré topologique et quelques propriétés, ce type de démonstration n'a été étudié dans le cas régulier.
Nous souhaitons dans le future, considérer le cas général.

Bibliographie

[1] : Cours de Mathématiques MP-MP Jean VOEDTS Agrégé de mathématiques Professeur en mathématiques spéciales au lycée Faidherbe, Lille.*

[2] : Cours Licence Topologie des espaces Métriques Dr HITTA Amara Maître de Conférences Habilité.

[3] : Degrés topologiques et applications Jérôme Droniou 20/06/2006.

[4] : Ky Fan (1952), Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 38, 121-126.

[5] : Le Degrés topologique théorie et applications : Smail Djebali Département de Mathématiques, E.N.S. B.P.92 Kouba, Alger, Algérie.

[6] : Les Mathématiques pour l'Agrégation C. Antonini J.-F. Quint P. Borgnat J. Bérard E. Lebeau E. Souche A. Chateau O. Teytaud 21 mai 2002.

[7] : Mathématiques L3 Analyse (ours complet avec 600 tests et exercices corriges) Sous la direction de Jean-Pierre Marco Hakim Boumaza, Benjamin Collas, Stephane Colli on, Marie Dellinger, Zoe Faget, Laurent Lazzarini, Florent Schaffhauser.