République **A**lgérienne **D**émocratique et **P**opulair
Ministère de l'**E**nseignement **S**upérieur et de
la **R**echerche **S**cientifique
Université Ibn Khaldoun – Tiaret –

Faculté des Mathématiques et Informatique

Département des MATHEMATIQUES

MEMOIRE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER

DOMAINE : Mathématiques et Informatique

FILIERE : Mathématiques

SPECIALITE: Analyse Fonctionnelle et Equation Différentielle

Présenté par

Belbal Yamina

SUJET DU MEMOIRE :

Application de la transformation de Laplace dans la résolution

Des équations différentielles fractionnaire

Soutenu le 10/07/2019 Devant Le Jury Composé de :

Mr : Arabie	MCA	Président
Mr : Halim	MCB	Examinateur
Mr : Benia	MAA	Encadreur

Année Universitaire : 2018/2019

Remerciement

je remercie ALLAH le tous puissant de m'avoir donné le courage, la volonté et la patience de travail.

je vif remerciement pour monsieur Arabi chef de département de mathématique et qui fait l'honneur de présider

je vif remerciement monsieur et le jury halim

je vif remerciement à notre encadreur monsieur Benia de je avoir proposé ce thème encadrer tout le long de notre travail.

je tenon à remercie les enseignants qui nous ont formé au cours du cursus universitaire et en particulier ceux de le Mathématique .

Que tous les collègues et amis qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de ce travail et à en faire de celui-ci un plaisir, retrouvent ici l'expression de ma parfaite considération et ma gratitude la plus sincère.

*__________ *Je dédie ce travail à* __________*

✓ Mes chers parents qui par leurs amours, leurs précieux conseils, leurs compréhensions, et leurs soutiens, m'ont guidé vers la voie de la réussite

✓ Mes frères $\{Ali, Yahia, Aziz, Mohamed\}$

Mes sœurs $\{Rim, Saadia, Fairouz, Tawois\}$

Ma belle-sœur $\{Hayat\}$

Et spécialement mes adorés $\{Hadil, Hani, Amir\}$

✓A tous mes amis. ✓A mes collègues et surtout ceux de la section

✓Mes enseignants de la faculté de Mathématique .

Belbal Yamina

Table des matières

INTRODUCTION

TRansformation de Laplace est une méthode utilisé pour résoudre des équations telle que les équations différentielle linaire et les équation de fractionnaire,cette méthode fut introduite par le mathématicien Pierre-Simon de Laplace en 1737, elle a pris son nom «Transformation de Laplace ».
D'autre part Dérivation fractionnaire est étudie la possibilité qu'un opérateur différentiel puisse être élevé à un ordre non entier Leur but est de prolonger la dérivation ou intégration d'ordre fractionnaire en utilisant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers. elle a été utilisé en mécanique et en électrochimique plus tard, plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudie les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire.
Dans ce Travaille on vas utiliser la méthode de Transformation de Laplace pour résoudre des équations différentielle et fractionnaire
Ce mémoire est diviser en quatre chapitre :
le premier chapitre par La Transformation de Laplace
est dans deuxième chapitre je vais présenter le Dérivation Fractionnaire
le Troisième chapitre Transformation de Laplace de la dérivation fractionnaire

Dans le quatrième chapitre on présente la Résolution des équation différentielle fractionnaire par La Transformation de Laplace .

Chapitre 1

Transformation de Laplace

Dans ce chapitre on va présenter la définition les propriétés et les applications de la Transformation de Laplace

1.1 les opérations sur les fonctions

Le but de cette section est de fixer les notations et de rappeler sans démonstrations les résultat qui seront utilisées dans ce chapitre.

a) Addition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K. Une application f : $E \longrightarrow F$ est dite additivité ou K-espaces vectoriels si elle vérifie à la fois
$\forall (x, y) \in E^2 : f(x + y) = f(x) + f(y)$

b) multiplication par constante

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K. Une application f : $E \longrightarrow F$
$\forall \lambda \in$ K et $\forall x \in E : f(\lambda x) = \lambda f(x)$

c) Application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps K. Une application f : $E \longrightarrow F$ comme les deux Conditions$\{additive, homogne\}$ devant les enquêteurs L'application f est linéaire si et seulement si :
$\forall(x, y) \in E^2\ \forall(\alpha, \beta) \in K^2 \Longrightarrow f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

d) Produit de convolution

soient f et$g$ deux fonctions mesurables $f.g$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le produit s de convolution est défini comme suit :

$$(f * g)(x) = \int_R f(x - y)g(y)dy$$

1.2 Transformation de Laplace

Définition 1.1. *Soit f une fonction réelle on pose $F(p)$ la variable réel p*

$$L(f(x)) = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)dx$$

lorsque elle existe on appelle la Transformation de Laplace de la fonction f

Remarque : Des multiple expression du Transformation de Laplace sont utilisé par exemple :

$F(p) = L(f(x))$ou £(f(x)) ou $f(x) \curvearrowleft F(p)$

Remarque : Certaines fonctions ne possèdent pas de Transformation de Laplace par exemple : $\dfrac{1}{x}, e^{x^2}, \cdots$

1.3 Propriétés fondamentales

On cite les propriétés sous forme de propositions

Proposition 1.1. *Additivité*
soient f,g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est bien définie Alors

$$L(f+g) = L(f) + L(g)$$

Démonstration. soient f et g deux fonction défini dans $\mathbb{R}$ Alors

$$\begin{aligned} L(f+g) &= \int_0^{+\infty} e^{-px} \left(f(x) + g(x)\right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(e^{-px} f(x) + e^{-px} g(x)\right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx + \int_0^{+\infty} e^{-px} g(x) dx \\ &= L(f) + L(g) \end{aligned}$$

□

Proposition 1.2. *Multiplication par une constante*
Transformation de Laplace de n'importe quelle fonction $f(x)$ multiplié a un nombre constante $c \in \mathbb{R}$ est défini comme suit :

$$L(cf) = c.L(f)$$

Démonstration. soit $f$une fonction défini par f :$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\forall c \in \mathbb{R}$ Alors

$$\begin{aligned} L(cf) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \left(cf(t)\right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} cf(t)dt \\ &= c\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt \\ &= cL(f) \end{aligned}$$

□

Proposition 1.3. *Linéarité*
la transformation de Laplace est une opération linéaire sur les fonction

$$L\left(\sum_{k=1}^{n}(C_k f_k(t)\right) = \sum_{k=1}^{n} C_k(L(f_k(t))$$

Proposition 1.4. *Transformation de Laplace du Dérivée d'une fonction :*
soit f une fonction continue dans $\mathbb{R}$ est dérivable d'ordre n tel que n différent le o alors la Transformation de Laplace d'une dérivée d'ordre n et écrit par cette expression :

$$L(f^n; p) = p^n L(f; p)$$

ou : n est un nombre entier.
cas particulier

$n = 1$ *:*

$$L(f^{'}(t)) = pF(p) - f(0)$$

$n = 2$ *:*

$$L(f^{''}(t)) = p^2F(p) - pf(0) - f^{'}(0)$$

Démonstration. on démontré par la premier dérivée pour : $n = 1$

$$L(f^{'}) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f^{'} dt$$

En utilisant une intégration par partie ou Trouve

$$\begin{aligned}
L(f^{'}(t)) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f^{'} dt \\
&= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left[e^{-pt} f(t)\right]_0^t - \int_0^{+\infty} (-pe^{-pt}) f(t) dt \\
&= \lim_{t \to +\infty} \left[e^{-pt} f(t) - f(0)\right] + p \int_0^{+ßnfty} e^{-pt} f(t) dt \\
&= p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt - f(0) \\
&= pL(f) - f(0) \\
&= pF(pt) - f(0)
\end{aligned}$$

pour n=2

$$L(f^{''}(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f\text{"}(t) dt$$

en utilisant une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
L(f^{''}(t)) &= \left[e^{-pt}f^{'}(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(-pe^{-pt})f^{'}(t)dt \\
&= f^{'}(0) + p\int_0^{+\infty} e^{-pt}f^{'}(t)dt \\
&= f^{'}(0) + pL(f^{'}) \\
&= -f^{'}(0) + p\left(pF(p) - f(0)\right) \\
&= p^2F(p) - pf(0) - f(0)
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.5. *Produit de convolution*
Si $L(f(x)) = F(p)$ et $L(g(x)) = G(p)$ alors la Transformation de Laplace d'un produit de convolution défini par suit

$$L(f * g) = F(p)G(p)$$

Démonstration. Soient f et g deux fonctions mesurables $f.g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
L\left[(f * g)(x)\right] &= \int_0^{+\infty}\left[\int_R f(t)g(x-t)dt\right]e^{-px}dx \\
&= \int_0^{+\infty}\left[\int_0^{x} f(t)g(x-t)dt\right]e^{-px}dx
\end{aligned}$$

pour pouvoir utiliser le théorème de Fubini il faut s'assurer que l'intégrale double :

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)g(x-t)e^{-px}dtdx$$

converge en effet en posant T=x-t et en tenant compte du fait que le jacobien est

égal à 1 cette intégrale se ramené à
$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \int_0^{+\infty} g(T)e^{-pT}dt$
cette dernière existe car par hypothèse $L(f(x))$ et $L(g(x))$ existent . des lors

$$L\left[(f*g)(x)\right] = L\left(f(x)\right)L\left(g(x)\right)$$

□

Proposition 1.6. *Translation en t*
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction admettant un transformation de Laplace F(p). On note $L(f;p)$ Donc

$$L(f(t-T)) = e^{-pT}F(p)$$

et e^{-pT} est appelé facteur de retard

Démonstration.

$$\begin{aligned}
L(f(t-T)) &= \int_0^{+\infty} e^{-p(t-T)}f(t-T)dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-pt+pT}f(t-T)dt \\
&= e^{pT}\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t-T)dt \\
&= e^{pT}\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt \\
&= e^{pT}F(p
\end{aligned}$$

□

1.4 Transformation de Laplace du quelques fonctions usuelles

$f(t) inverse de la transformation de Laplace$	$F(p) = L(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$
$u(t)$ imputation $t = 0$	1
1	$\frac{1}{p}$
e^{ax}	$\frac{1}{p-a}$
x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$cos(ax)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$sin(ax)$	$\frac{1}{p^2+a^2}$
$e^{bx} sin(ax)$	$\frac{p-b}{(p-a)^2+a^2}$
$e^{bx} cos(ax)$	$\frac{p-b}{(p-a)^2+a^2}$
$e^{bx} cosh(ax)$	$\frac{p-b}{(p-b)^2-a^2}$
$e^{bx} sinch(ax)$	$\frac{p-b}{a)^2-a^2}$
$xsin(x)$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$
$xcos(x)$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)}$
$x^n e^{-ax}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$ln(x)$	$-\frac{C+ln(p)}{p}$

Dans ce tableau a et b ,sont des constantes réelles distinctes $\{(a, b) \in R^2\}$.

1.5 Exemples d'applications de la Transformation de Laplace

Si la fonction$f$ est une fonction réel avec l'expression suivant :

$$f(x) = x^2 + \int_0^x sin(x-t)f(t)dt$$

donc son Transformation peut être calculer comme suit :

$$\begin{aligned}
L(f(x)) &= L(x^2 + \int_0^x sin(x-t)f(t)dt) \\
F(p) &= L(x^2) + L(\int_0^x sin(x-t)f(t)dt) \\
&= \frac{2!}{p^3} + L(sin(x-t))L(f(t)) \\
&= \frac{2!}{p^3} + \frac{F(p)}{p^2+1} \\
F(p)(1 - \frac{1}{p^2+1}) &= \frac{2!}{p^3} \\
F(p) &= \frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^5}.
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Dérivation fractionnaire

Dans ce chapitre on va présenter les définition et les propriétés de la Dérivation fractionnaire de Riemann Liouville et de Caputo

2.1 Fonctions spéciales

pour définir les dérivées fractionnaire on doit commence par les fonction spéciale

Foncions d'Euler Gamma

la fonction gamma est un prolongement de la fonction factorielle aux nombre réel est notée par Γ :

Définition 2.1. *On appelle fonction Gamma la fonction définie par*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad , x > 0.$$

Remarque

$$\{n! = \Gamma(n+1), \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)\}$$

Fonction Bêta

la fonction bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tous nombres x ,y de parties réelles strictement positive par :

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

$x,y>0$ la fonction Bêta étudie par Euler et doit son nom a Jacques Biner elle est en relation avec la fonction gamma d'Euler

Propriétés 2.1. *pour* $x,y>0$;

1- $B(x,y)=B(y,x)$,
2- $B(x,x)=2^{1-2x}B(\frac{1}{2},x)$,
3- $B(x,y+1)=\frac{y}{y+x}B(x,y)$,

Proposition 2.1. *pour* $x,y>0$ *on a ;*

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

2.2 Intégration fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.2. *On appelle l'intégrale fractionnaire de la fonction* f *d'ordre* α, *noté par* I^α *fonction définie par*

$$(I^\alpha_{a^+},f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt.$$

Intégrales fractionnaires de quelques fonctions :
Si la fonction f est définie dans l'intervalle R avec l'expression suivante :

$$f(x)=(x-a)^\beta \quad ,\beta>-1.$$

$$I^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x}(x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta}dt.$$

On utilise le changement de variable

$$t=a+(x-a)\tau$$

Alors

$(x-t)^{\alpha-1}=(x-a)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}$, $(t-a)^{\beta}=(x-a)^{\beta}\tau^{\beta}$

$t=x\Longrightarrow\tau=1$, $t=a\Longrightarrow\tau=0$ $dt=(x-a)d\tau$ donc

$$\begin{aligned}I^{\alpha}(x-a)^{\beta}&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(x-a)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}(x-a)^{\beta}\tau^{\beta}(x-a)d\tau\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(x-a)^{\alpha+\beta}\tau^{\beta}d\tau\\&=\frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau.\end{aligned}$$

on sait que

$$B(x,y)=\int_{0}^{1}t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

Alors

$$B(\alpha,\beta+1)=\int_{0}^{1}(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau.$$

Alors

$$\begin{aligned}I^{\alpha}(x-a)^{\beta}&=\frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta+1)\\&=\frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\\&=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

Proposition 2.2. *soit* $f \in C^0([a,b])$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(I^\alpha o I^\beta)(f) = I^{\alpha+\beta} f.$$

Démonstration. la démonstration s'obtient par calcul direct en utilisant la fonction gamma d'Euler.EN effet.

$$\begin{aligned}
(I^\alpha o I^\beta)(f)(x) &= [I^\alpha (I^\beta f)(x)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (I^\beta f)(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^s (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} f(t) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) [\int_t^x (x-s)^{\alpha-1} (s-t)^{\beta-1} ds] dt
\end{aligned}$$

on pose $s = t + (x-t)\tau$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_t^x (s-t)^{\beta-1} ds &= (x-s)^{\alpha+\beta+1} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau \\
&= (x-t)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}(I^{\alpha}oI^{\beta})(f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}dt\\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t)dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1}f(t)dt\\ &= (I^{\alpha+\beta}f)(x).\end{aligned}$$

2.3 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.3. *soit $\alpha \in]m-1, m[$ tel que m est un nombre entier naturel alors On appelle la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre α défini par :*

$$^{RL}D^{\alpha}_{a+}f(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \left[(I^{m-\alpha}f)(t)\right].$$

Dérivation fractionnaires au sens de Riemann-Liouville de quelques fonctions usuelles :
soit la fonction f définit par le expression suivant

$$f(x) = (x-a)^{\beta}$$

Nous avons $(I^{\alpha}(x-a)^{\beta}) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}$ donc $(I^{m-\alpha}(x-a)^{\beta}) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)}(x-a)^{m-\alpha+\beta}$

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D^{\alpha}_{a+}((x-a)^{\beta}) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m}\left[(I^{m-\alpha}f)(t)\right] \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m}\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)}(x-a)^{m-\alpha+\beta}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)}\left(\frac{\partial(x-a)^{m-\alpha+\beta}}{\partial t}\right)^{m} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)}\left[\frac{\Gamma(m-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque :

a) ${}^{RL}D^{\alpha}_{a+}(1) \neq 0$

b) $({}^{RL}D^{\alpha}_{a+} o {}^{RL}D^{\beta}_{a+}) \neq ({}^{RL}D^{\beta}_{a+} o {}^{RL}D^{\alpha}_{a+}) \neq ({}^{RL}D^{\alpha+\beta}_{a+})$

Propriétés 2.2. *L'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville ${}^{RL}D^{\alpha}_{a+}$ possédé les propriétés suivant*

1) l'opérateur est linéaire .

2) ${}^{RL}D^{\alpha}_{a+} o I^{\alpha} = id$

3) $(I^{\alpha} o {}^{RL}D^{\alpha}_{a+}(f)(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \dfrac{(x-a)^{j-m+\alpha}}{\Gamma(j-m+\alpha+1)}$

Lemme 2.1. *soit $\alpha \in]m-1, m[$ et f une fonction vérifiant :*

${}^{RL}D_a^{\alpha} f = 0$. *alors*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} (x-a)^{j+\alpha-m}$$

Démonstration. partons de ${}^{RL}D_a^{\alpha} f = (\dfrac{\partial}{\partial x})^m [I_a^{m-\alpha} f](x) = 0$ $f^{'}(x) = 0 \Rightarrow f = c_0(x-a)^0$
$f^{''}(x) = 0 \Rightarrow f = c_0(x-a)^0 + c_1(x-a)^1$
$f^n(x) = 0 \Longrightarrow f = c_0(x-a)^0 + c_1(x-a)^1 \cdots\cdots c_n(x-a)^{n-1}$ c'est ta dire
$[I_a^{m-1} f](x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (x-a)^j$ et par application de
$[I_\alpha^m f] = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{j+1+\alpha} (x-a)^{j+\alpha}$
ensuite par la dérivation classique le résulta

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} (x-a)^{j+\alpha-m}.$$

□

2.4 La Dérivation fractionner au sens de Caputo

Définition 2.4. *Soient* $0 < m-1 < \alpha < m$ *et* f *une fonction de classe d'ordre* m *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction* $f(t)$ *et défini par :*

$${}^{c}D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t) dt$$

peut été écrit Dérivation fractionner aux sens de Caputo par la intégration fractionnaire

$$\begin{aligned}{}^{c}D^{\alpha}_{a+}y(t) &= I^{m-\alpha}(\frac{\partial y}{dt})^{m}\\ &= I^{m-\alpha}y^{m}\end{aligned}$$

Remarque :
la dérivation au sens de Caputo est une permutation d'opérateur du dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Propriété 2.1.

1) ${}^{c}D^{\alpha}_{a+}oI^{\alpha}_{a+}f(t) = f(t)$

2) ${}^{c}D^{\alpha}_{a+}o^{c}D^{\beta}_{a+}f(t) =^{c} D^{\alpha+\beta}_{a+}f(t)$

3) $I^{\alpha}_{a+}o^{c}D^{\alpha}_{a+}f(t) = f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} c_j(x-a)^j$

4) ${}^{c}D^{\alpha}_{a+}y(t) = 0$ *Alors* $y(t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j(x-a)^j$

5) $({}^{c}D^{\alpha}_{a+})(1) = 0$

Exemple 2.4.1. *Si la fonction f est définie dans l'intervalle R avec l'expression suivant :*

$$f(x) = (x-a)^{\beta}$$

c'est-à-dire Dérivation fractionnaire aux sens de Caputo de f en écrit sur la forme *suivante*

$$\begin{aligned}
{}^{c}D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta} &= (I^{m-\alpha}(\frac{\partial(t-a)^{\beta}}{dt})^{m}) \\
&= I^{m-\alpha}o((t-a)^{\beta})^{m} \\
&= I^{m-\alpha}[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)}(x-a)^{\beta-m}] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)}I^{m-\alpha}(x-a)^{\beta-m} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-m+1)}\frac{\Gamma(\beta-m+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-m} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Transformation de Laplace de dérivation fractionner

Dans ce chapitre on va utiliser la Transformation de Laplace sur les Dérivée fractionnaire

3.1 Transformation de Laplace du dérivations fractionnaire

Pour faire Transformation de Laplace du dérivation fractionnaire on utilise la composition des fonction.

Définition 3.1. *soit $f \in \mathbb{R}$ est f une fonction admet une dérivée d'un nombre non entier sur $\mathbb{R}$ noté par f^k*
on sais que la transformation de Laplace est défini par :

$$L(f) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t),$$

Alors On Définit la Transformation de Laplace du dérivée fractionnaire de f^k tel que

$k \in \mathbb{R}$ ou C comme suit

$$\begin{aligned} L(f^k) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f^k(t)dt \\ &= p^n L(f(t)) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f^{'}(0) \cdots\cdots - f^{n-1}(0). \end{aligned}$$

Exemple 3.1.1. *Si la fonction f est définie dans l'intervalle R avec l'expression suivant : $f = x^n$ et $f^k = \frac{\partial^k f}{\partial x}$ il ya deux méthode de calcul Transformation de Laplace de f^k*

1- méthode calcule direct :

$$\begin{aligned} f^k &= \frac{\partial^k f}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^k x^n}{\partial x} \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)} x^{n-k}. \end{aligned}$$

donc Transformation de Laplace def^k comme suit

$$\begin{aligned} L(f^k(x)) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f^k(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)} t^{n-k} dt \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f^k(t)dt \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)} \frac{\Gamma(n-k+1)}{p^{n-k+1}} \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n-k+1}}. \end{aligned}$$

2- Méthode de Transformation de Laplace dérivée :

$$\begin{aligned} L(f^k) &= p^k L(f) - f(0) - pf^{'}(0) - p^2 f^{''}(0) ... f^{k-1}(0) \\ &= p^k \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n-k+1}}, \end{aligned}$$

3.2 Transformation de Laplace de dérivée fractionnaire

Le tableau suivant donne un résumé de quelques transformée de Laplace de dérivée fractionnaire.

$F(p) = L(f(x))$	$f(x)$=inverse de la transformation de $F(p)$
$\frac{1}{p^\alpha}$	$\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
$\frac{1}{(p+a)^\alpha}$	$\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-ax}$
$\frac{1}{p^\alpha - a}$	$x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(x^\alpha)$
$\frac{a}{p(p^\alpha + a)}$	$1 - E^\alpha(-a)$
$\frac{p^\alpha}{p(p^{\alpha+a})}$	$E^\alpha(-ax^\alpha)$
$\frac{1}{p^\alpha(p-a)}$	$x^\alpha E$
$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{ax} - e^{bx})$

Dans ce tableau a et b ,sont des constantes réelle distincte .

Remarque

$E_\alpha(z)$ est une Fonction de Mittag-Leffler et expression suivante

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}.$$

3.3 Transformation de Laplace du intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Dans le corollaire suivant, nous présentons la Transformation de Laplace d'intégrale fractionnaire

Corollaire 3.1. *soit $\alpha > 0$ et f une fonction continue par morceaux sur chaque intervalle$[0, t]$:*

$$L(I^\alpha f) = p^{-\alpha} F(p)$$

Démonstration. Nous savons l'intégration fractionnaire défini par suit :

$$(I^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - a)^{\alpha - 1} f(t) dt$$

on sait que la Transformation de Laplace d'une fonction f définit par suit :

$$L(f)(t) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

donc il ya deux méthode pour la démonstration

A- Méthode direct

$$
\begin{aligned}
L(I^{\alpha}f) &= \int_0^{+\infty} e^{-px}[I^{\alpha}f](x)dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\int_0^{x} e^{-px}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dtdx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\left[\int_t^{+\infty} e^{-px}(x-t)^{\alpha-1}dx)\right]f(t)dt
\end{aligned}
$$

En posant x=t+y on obtient

$$
\begin{aligned}
L(I^{\alpha}f) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(\int_0^{+\infty} e^{-py}(\frac{p}{p}y)^{\alpha-1}dy\right)f(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(\int_0^{+\infty} e^{-py}(\frac{1}{p})^{\alpha-1}(py)^{\alpha-1}dy\right)f(t)dt \\
&= \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\left(\int_0^{+\infty} e^{-py}(py)^{\alpha-1}dy\right)f(t)dt \\
&= \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} e^{-pt}\Gamma(p\alpha)f(t)dt \\
&= \frac{p^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} p^{-1}\Gamma(\alpha)e^{-pt}f(t)dt \\
&= p^{-\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt \\
&= p^{-\alpha}F(p).
\end{aligned}
$$

B -Méthode du produit de convolution

non sait que sur le produit convolution de $f * g$ définit par suit

$$
(f * g)(x) = \int_R f(x-y)g(y)dy
$$

Donc

$$\begin{aligned} L(I^\alpha f) &= L\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L\left(\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\right) \end{aligned}$$

posant $g(x) = (x-t)^{\alpha-1}$

$$\begin{aligned} L(I^\alpha f) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L(f * g) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L(g)L(f) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha} F(p) \\ &= p^{-\alpha} F(p). \end{aligned}$$

□

3.4 Transformation de Laplace d'une dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville

Nous pouvons maintenant présenter la Transformation de Laplace d'une dérivé fractionnaire généralisé au sens de Riemann-Liouville

Corollaire 3.2. *soit $\alpha > 0$ et f une fonction continue par morceaux sur chaque intervalle $[0, t]$ ensuite*

$$L({}^{RL}D^\alpha_{a+} f) = p^\alpha F(p) - \sum_{j=0}^{m-1} p^{m-j-1} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j I^{m-\alpha} f(0)\right].$$

Démonstration. on a la dérivation fractionnaire de Riemann Liouville et définit comme suite

$$^{RL}D^{\alpha}_{a+}f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m [(I^{m-\alpha}f)(x)].$$

Alors on commence par la démonstration de corollaire en utilisant deux propriété du Transformation de Laplace d'une dériver

$$L(f^n(t)) = p^n L(f(t)) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f^{'}(0)....pf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$$

et Transformation de Laplace de équation intégral

$$L(I^{m-\alpha}f) = p^{-m+\alpha}F(p)$$

$$\begin{aligned}
L(^{RL}D^{\alpha}_{a+}f) &= L\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m [(I^{m-\alpha}f)(x)]\right)dt \\
&= p^m L(I^{m-\alpha}f)(p) - \sum_{j=0}^{m-1} p^{m-j-1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x})^j\right) I^{m-\alpha}f(0)\right] \\
&= p^m \left[p^{-m+\alpha}F(p)\right] - \sum_{j=0}^{m-1} p^{m-j-1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j I^{m-\alpha}f(0)\right] \\
&= p^{\alpha}F(p) - \sum_{j=0}^{m-1} p^{m-j-1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j I^{m-\alpha}f(0)\right].
\end{aligned}$$

3.5 Transformation de Laplace de la drivée fractionnaire au sens de Caputo

Dans le corollaire suivant, nous présentons une formule pour la transformation de Laplace de la courbe dérivé fractionnaire sens de Caputo

Corollaire 3.3. *Soit $\alpha > 0$ et f une fonction continue par morceaux sur chaque intervalle [0..t] ALORS*

$$L(^cD^\alpha f) = p^\alpha F(p) - \sum_{j=0}^{m-1} p^{\alpha-1-j} f^j(0)$$

preuve :

On sait que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est définie comme suit

$$^cD^\alpha f(x) = (I^{m-\alpha} f^m)(x)$$

$$\begin{aligned} L(^cD^\alpha f) &= L((I^{m-\alpha} f^m)(x)) \\ &= p^{\alpha-m} L(f^m(x)) \\ &= p^{\alpha-m} \left[p^m F(p) - \sum_{j=0}^{m-1} p^{m-1-j} f^j(0) \right] \\ &= p^\alpha F(p) - \sum_{j=0}^{m-1} p^{\alpha-1-j} f^j(0). \end{aligned}$$

□

Exemple 3.5.1. *Si la fonction f est définie dans l'intervalle $\mathbb{R}$ avec l'expression suivant :*

$$f(x) = (x-a)^\beta$$

on calcule la transformation de Laplace du fonction f suivant

$$\begin{aligned} L(I^{\alpha} f) &= L(I^{\alpha}(x-a)^{\beta}) \\ &= p^{-\alpha} L((x-a)^{\beta}) \\ &= p^{-\alpha} \frac{\Gamma(\beta+1)}{p^{\beta+1}} \\ &= \Gamma(\beta+1) p^{-\alpha-\beta-1} \end{aligned}$$

Chapitre 4

Résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire par la Transformation de Laplace

Dans ce chapitre on applique la méthode de la Transformation de Laplace pour résoudre certaines équations différentielles linaire et équation d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et Caputo .

4.1 Équations différentielles linéaire

1- Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition 4.1. *Soit I un intervalle dans $\mathbb{R}$. et soient a,b :$I \to \mathbb{R}$des applications continues $J \in I$un intervalle de R et $y : J \to \mathbb{R}$ y est une solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1*

$$y^{'} + ay = b$$

Définition 4.2. *On appelle équation sans second membre (ou équation homogène)* *l'équation différentielle*

$$y^{'} + ay = 0$$

2-Équation différentielles linaire du ordre n

Définition 4.3. *on appelle équation sans n ordre membre maintenant une classification par linéarité on défini par la relation suivant*

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y + y = r(t).$$

Définition 4.4. *on appelle équation sans n ordre membre homo-gène on défini par la relation suivant*

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y + y = 0$$

4.2 Résolution une équations différentielles linéaire par La Transformation de Laplace

Il y a plus d'une façon de solution cette équation et nous allons utiliser les transformées de Laplace.

Corollaire 4.1. *on considère l'équation différentielle linéaire par expression suit :*

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y + y = r(t).$$

alors :
Pour résolution une équation différentielle linéaire en utilisant des transformations de Laplace, il existe seulement 3 étapes de base :
1 :On prend les transformations de Laplace des deux membre de l'équation.
2 :Simplifier algébriquement le résultat à résoudre pour $L(y) = Y(p)$ en termes de p
3 : Trouver la transformation inverse de $Y(p)$. Ou plutôt trouver une fonction $y(t)$

Preuve :

Soit équation différentielle linéaire défini par expression suit :

$$a_0y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}y + y = r(t).$$

avec les condition initiales

$y(0) = y_0\ y^{'}(0) = y_0\ , \cdots , y^{n-1}(0) = y_{n-1}(0)$

pour déterminer la solution : on pose $Y(p) = L(y(t))$, $X(p) = L(r(t))$

Alors

$a_0(p^nY(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}y^{'}(0) \cdots - y^{n-1}(0)) + a_1(p^{n-1}Y(p) - p^{n-2}y(0) - \cdots - y^{n-2}(0) + \cdots + a_{n-1}(pY(p) - y(0)) + a_nY(p) = X(p)$

$Y(p) = \frac{X(p)}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+\cdots+a_{n-1}p+a_n} + \cdots + \frac{X(p)}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+\cdots+a_{n-1}p+a_n}$

$X(p) = a_0(p^{n-1}y(0) + p^{n-2}y^{'}(0) + \cdots + y^{n-1}(0)) + a_1(p^{n-2}y(0) + p^{n-3}y^{'}(0) + \cdots + y^{n-2}(0)) + \cdots + a_{n-1}y(0)$

la solution $y(t)$s'obtient par la transformée de Laplace inverse.

4.3 L'étude de l'existence et l'unicité du Exemple numérique d'illustration dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville par la transformation de Laplace

On Considérons le problème à valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} D_t^{\alpha}y(t) = f(t), \quad (0 < t < T < \infty) \\ [{}_0D^{\alpha-1}y(t)]_{t=0} = b \end{cases} \tag{4.1}$$

Théorème :

si $f(t) \in L_1(0,T)$ alors le problème (4.1) admet une unique solution $y(t) \in L_1(0,T)$

Démonstration. Pour prouver a théorème dans une formule, nous devons rechercher une solution qui prouve l'unicité de la solution. on applique la transformée de Laplace :

on sais que :

$$L({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}f) = p^{\alpha}F(p) - \sum_{j=0}^{m-1} p^{m-j-1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{j} I^{m-\alpha}f(0)\right]$$

donc $L\left({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}y(t)\right) = p^{\alpha}L(y(t)) - \sum_{j=0}^{m-1} p^{m-j-1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{j} I^{m-\alpha}y(0)\right]$

$$\begin{aligned} L({}^{RL}D^{\alpha}_{a+}y) &= p^{\alpha}L(y(t)) - [{}_0D^{\alpha-1}y(t)]_{t=0} \\ &= p^{\alpha}Y(p) - b \\ &= F(p). \end{aligned}$$

$Y(p)$ et $F(p)$ désignent les transformées de Laplace de $y(t)$ et $f(t)$. donc

$$Y(p) = p^{-\alpha}F(p) - p^{-\alpha}b$$

et la transformée de Laplace inverse donne

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt - \frac{b}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}$$

alors nous montrer l'unicité de solution posons $h(x) = y_1(x) - y_2(x)$ où y_1 et y_2 sont deux solutions dans $L_1(0;T)$ du problème (4.1)Et donc h(x) sera solution du problème suivant :

$$\begin{cases} D_t^{\alpha} h(t) = 0 \\ [{}_0D^{\alpha-1} h(t)]_{t=0} = 0 \end{cases}$$

on applique la transformée de Laplace dans les deux membres

$$\begin{aligned} L(D_t^{\alpha} h(t)) &= P^{\alpha} L(h(x)) \\ &= P^{\alpha} H(p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $Y(p) = 0$ la inverse de Transformation de Laplace $[h(x) = 0]$ donc le problème [4.1] admet unique solution pour presque tout $x \in (0;T)$ $\square$

4.4 Résolution problème fractionnaire au sens de Caputo par La Transformation de Laplace

Le but c'est une solutions problème fractionnel de Caputo on considérer le problème de Cauchy suivante :

$$\begin{cases} {}^cDy(t) = f(t, y(t)) \;\; \forall t \in [0,T] \;\; 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ou ${}^cDy(t)$ est la dérivée du ordre fractionnaire au sens de Caputo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on utilise méthode de Laplace

$$\begin{cases} {}^cDy(t) = h(t) \;\; \forall t \in [0,T], \;\; 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

et pour la solution de problème en utilise méthode de la transformation de Laplace

$$L(^cDy(t) = h(t))$$
$$L(^cDy(t)) = L(h)$$
$$p^\alpha Y(p) - \sum_{j=0}^{m-1} p^{\alpha-1-j} y^j(0) = H(p)$$
$$Y(p) = p^{-\alpha} H(p) + p^{-\alpha} \sum_{j=0}^{m-1} p^{\alpha-1-j} y^j(0).$$

l'inverse de transformation de Laplace de Y(p) et donne le résulta suivante

$$y(x) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} h(t)dt$$

alors la solution générale et comme suit :

$$y(x) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$$

4.5 Exemples d'équations différentielles linéaire et fractionnaires

Exemple :

Résoudre les équation différentielle :

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

c'est une équation différentielle linéaire a coefficient constante
notée $Y(p) = L(y)$

$$\begin{aligned}
L(y^{''} + 3y^{'} + 2y = t) \\
p^2Y(p) - y(0) - y^{'}(0) + 3(pY(p) - y(0)) + 2Y(p) &= \frac{1}{p^2} \\
(p^2 + 3p + 2)Y(p) &= \frac{1}{p^2} \\
Y(p) &= \frac{1}{p^2(p^2 + 3p + 2)} \\
&= \frac{1}{p^2(p+1)(p+2)} \\
&= \frac{1}{2p^2} - \frac{3}{4p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{4(p+2)}
\end{aligned}$$

Alors

$$y(t) = \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t}$$

Exemple 4.5.1. *On considère équation différentielle fractionnaire*

$${}_0^RD_t^{2/3}y(t) = ay(t)$$

la valeur (a)constant réel comme ($\alpha = \frac{2}{3}$) *alors* $0 < \alpha < 1$ *donc la solution (4.13) qui sera suivant*

$$L({}^{RL}D_{a+}^{\alpha}f) = p^{\alpha}F(p) - \sum_{j=0}^{m-1} p^{m-j-1}[(\frac{\partial}{\partial x})^j I^{m-\alpha}f](0)$$

pour changer $\alpha = \frac{2}{3}$

$$L({}^{RL}D_{a+}^{2/3}y) = L(ay)$$
$$p^{\frac{2}{3}}Y(p) - {}_0^R D_t^{-(1-\frac{2}{3})}y(0) = aY(p)$$
$$Y(p) = \frac{1}{p^{\frac{2}{3}} - a_0} {}^R D_t^{-\frac{1}{3}}y(0)$$

supposons que ${}_0^R D_t^{-\frac{1}{3}}y(0) = C$ *Alors*

$$Y(p) = \frac{c}{p^{\frac{2}{3}} - a}$$

Finalement, on utilise le tableau (3.2) *pour trouver l'inverse de la transformation de Laplace de* $Y(p)$;

$$y(t) = ct^{-\frac{1}{3}}E_{\frac{2}{3},\frac{2}{3}}(at^{\frac{2}{3}})$$

Exemple 4.5.2.

$${}^R D_t^{1/2}y(t) = 0$$

puisque $(0 < \alpha < 1)$ *et Transformation de Laplace deux coté on donne*

$$L({}^R D_t^{1/2}y(t)) = L(0)$$
$$p^{\frac{1}{2}}Y(p) - C_1 = 0$$
$$Y(p) = \frac{C_1}{p^{\frac{1}{2}}}$$

finalement , on utilise le tableau (3.2)*pour trouver l'inverse de la transformation de Laplace de* $Y(p)$;

$$y(t) = c_1\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

Exemple 4.5.3. *soit le problème suivante*

$$\begin{cases} {}^cD^{2/3}y(x) = 2y(x) + 3 \\ Y(0) = b \end{cases}$$

on a Transformation de Laplace du dérivation fractionner aux sens de Caputo

$$L({}^cD^\alpha f) = p^\alpha F(p) - \sum_{j=0}^{m-1} p^{\alpha-1-j} f^j(0)$$

Alors

$$\begin{aligned} L({}^cD^{2/3}y(x)) &= L(2y(x) + 3) \\ p^{\frac{2}{3}}Y(p) - \sum_{j=0}^{m-1} p^{\alpha-1-j} y^j(0) &= 2Y(p) + \frac{3}{p} \\ p^{\frac{2}{3}}Y(p) - b &= 2Y(p) + \frac{3}{p} \\ Y(p) &= \frac{3}{p(p^{\frac{2}{3}} - 2)} + \frac{b}{p^{\frac{2}{3}-2}} \end{aligned}$$

finalement inverse de Laplace

$$Y(x) = 1 - E^{\frac{2}{3}}(-2) + bx^{\frac{1}{3}} E_{\frac{2}{3},\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}})$$

CONCLUSION

Dans ce travail nous avons utilisé la méthode de transformation de Laplace et on conclu que la Transformation de Laplace est une méthode trais puissante utilisé dans la résolution des équations différentielle et dans les équations intégrale, elle nous donne des résulta précis . Dans ce travail, nous avons discuté avec le dérivation fractionnaire de Riemannienne et de Caputo Le résultat était que Transformation de Laplace pouvait être utilisé dans divers domaines.

Bibliographie

[1] :Gabriel Cormier ,La Transformée de Laplace

[2] : Stigler, Stephen M. Laplace 1774 mémoire on inverse probabilité." Statisticienne Science 1, no. 3(1986) : 359 – 363.

[3] :Deakin, M. A. (1982). The development of the Laplace transformé, 1737˘1937 II. Poincaré to Doetsch, 1880˘1937. Archive for History of Exact Sciences, 26(4), 351-381

[4] H.Brezis Analyse Fonctionnelle. Théorie et application. Masson (1983). Traduction en anglais et ledit avec des exercices dans la collection Universitext de Springer en 2010.

[5] Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo Theory and applications of fractionnel différentiel Équations , North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

[6] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of non linaire fractionnaire différentiel équations, Electron, J. Diff. Equ. 2006, No. 36, pp, 1-12.

[7] :Hacen DIB EDA-EDO (4 ème École) - Tlemcen 23-27 mai 2009. Équations Différentielles Fractionnaires .

[8] :N.E. Amroun Transformation De Laplace.

[9] : Samko S.G., Klbas A.A. and Marichev O.I. (1993), Fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach, New York. Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires.

[10] : A.Popier O.Wintenberger ; équations différentielles, école polytechnique,

2006-2007 .

[11] : Précis de mathématiques, Analyse MP, page 319 ; Étude de la fonction Gamma.

[12] :Ahmed Lesfari ; Distributions analyse de fourrier et transformation de Laplace .