RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université IBN KHALDOUN Tiaret
Faculté de Mathématiques et Informatique
Département des Mathématiques
Spécialité : Mathématiques Appliquée
Option : Analyse fonctionnelle et applications

Présenté en vue d'obtenir le diplôme de MASTER

Présenté par :

HAMIDI MOHAMMED

T H È M E

Quelques notions sur l'inégalité de Hardy et son développement

Soutenue le : juil 01, 2018

Devant de jury :

Président :	**SENOUCI Abdelkader**	**Pr.Université IBN KHALDOUN**
Examinateur :	**BENDAOUD Abed S.Ahmed**	**MAA.Université IBN KHALDOU**
Encadreur :	**SOFRANI Mohammed**	**MAA.Université IBN KHALDOUN**

Année Universitaire : 2017/2018

Remerciement :

Avant tout, nous remercions le bon dieu le tout puissant qui nous a aidé à accomplir ce modeste travail, nous tenons également à adresser nos sincères remercients à notre respectueux encadreur MAA :SOFRANI Mohamed qui par ses conseils nous a orienté vers le bon chemin sans oublier notament M : le Pr : SENOUCI Abadelkader pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de notre mémoire. Et MAA :BENDAOUD Sid ahmed pour s'être intéresse à ce travail et d'avoir bien vouloir nous honoré de sa présence parmi les membres du jury. Nous tenons aussi à remercier tout enseignant respectable qui nous a soutenu de prés ou de loin,nous considérons ce mémoire comme le fruit de cinq ans de labeur et d'efforts, tout en espérant qu'il vous présente une petite récompense . Merci encore une fois pour tout ce que vous avez fait pour notre intérêt et notre réussite

Dédicace :

Je dédie ce travail à : mes chers parents que dieu les protègent et à mes chers frères également à tout les membres de ma grande famille à ma promotion du 2 année Master math $2^{\text{ème}}$ *Année Master Math.*

HAMIDI MOHAMMED

Table des matières

Introduction

L'objectif de travail est de donner quelques résultats concernant l'inégalité intégrale de Hardy.

-Ce travail est divisé en trois chapitres .

dans le première chapitre , on donne des définitions , des théorèmes , des exemples et des inégalités intégrales (Hölder , Minkowski) dans l'espace de Lebesgue classique L^p . Dans le deuxième chapitre , on considéré les inégalités classiques de Hardy , et dans le troisième chapitre on se propose d'étendre les inégalité intégrale que sont définis dans $(0.\infty)$ à $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ et généralisé avec quelques inégalités intégrales .

Mots clés : Inégalités de Hölder, Inégalité de Minkowski, Inégalités de Hardy.

Chapitre 1

Définitions et inégalités intégrales

1.1 définition

Notions :

1. On note par e le sous ensemble de Ω de mesure nulle.

   1)' On note par p.p pour dire presque partout .

2. On définit le support d'un fonction continue f par :

3. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ est noté par $C(\mathbb{R}^n)$.

1.1.1 Lemme de Fatou

Lemme 1.1.1 *(lemme de Fatou)*

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurable non négatives et convergente , Alors $f(x) = \lim_{n \mapsto \infty} f_n(x)$ est mesurable et de plus :

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \lim_{n \mapsto \infty} \inf \int_\Omega f_n(x)dx \qquad (1.1)$$

. ***Démonstration:*** *: voir [2][4]* $\square$

Théorème 1.1.1 *(convergence monotone) :*

Soit $(f_n)_n$ une suite décroissante de fonctions mesurables qui converges vers

$f(x)$ alors f et mesurable et

$$\lim_{n\mapsto\infty}\int_{\Omega} f_n(x)dx = \int_{\Omega} f(x)dx \qquad (1.2)$$

. ***Démonstration:*** *: voir* ***[2][4]*** $\square$

Théorème 1.1.2 *(convergence dominée) :*

Soit$(f_n)_n$ une suit des fonctions mesurables qui converge presque partout vers $f(x)$ .S'il existe une fonction $G(x)$ intégrale et non négative tel que $|f(x)| \leq G(x)$ pur tout n,alors

$$|f_n(x)| \leq G(x)$$

et

$$\lim_{n\mapsto\infty}\int_{\Omega} f_n(x)dx = \int_{\Omega} f(x)dx \qquad (1.3).$$

Démonstration: *: voir* ***[2][4]*** $\square$

1.1.2 Théorème de Fubini

Théorème 1.1.3 *(théorème de Fubini)*

soit E un ensemble mesurable de $R^n(E \subset R^n)$ et $F \subset R^m$ (un ensemble mesurable) et la fonction $f(x,y)$ sur $E\times F$.Alors pour presque tout les $y \in F$ $f(x,y)$ est intégrable sur E et :

$$\int_{E\times F} f(x,y)dxdy = \int_E(\int_F f(x,y)dy)dx = \int_F(\int_E f(x,y)dx)dy \qquad (1.4)$$

. ***Démonstration:****voir* ***[2][4]*** $\square$

Conséquence 1.1.1 *:*

Si $f(x,y)$est mesurable sur $E\times F$et est finie l'une des intégrales :

$$\int_E(\int_F |f(x,y)|dy)dx, \int_F(\int_E |f(x,y)|dx)dy.$$

alors toutes les intégrales de(1.4) existent et de plus (1.4)est vérifiée.

Remarque 1.1.1 *:*

Si f n'est pas intégrable sue $E \times F$,alors les intégrales itérées peuvent ne pas exister ou exister et être différentes.

Exemple 1.1.1 *:n=m=1*

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dy)dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx)dy = -\frac{\pi}{4}$$

Définition 1.1.1 *:*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable avec $0 < p < \infty$ et soit :

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. on dit que $f \in L_P(\Omega)$ si :

1. *f est mesurable sur Ω .*
2. $\|f\|_{L_P(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$

Remarque 1.1.2 *:*

$L_P(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions et $\|f\|_{L_P(\Omega)}$ sont des semi-normes

Exemple 1.1.2 *:Soit*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & six \in E_1 \\ -1 & six \in E/E_1 \end{cases}$$

avec $E_1 \subset E$,E_1 non mesurable,alors

(1) *n'est pas vérifiée.*

(2) $\|f\|_{L_{p(E)}} = \left(\int dx \right)^{1/p} = |E|^{1/p} < \infty$,*donc* $f \notin L^p(E)$.

***Définition 1.1.2** :*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*un ensemble mesurable,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$

$$\sup_{x\in\Omega} vrai f(x) = \inf_{e\in\Omega} \sup_{x\in\Omega/e} f(x); \qquad (1.5)$$

$$\inf_{x\in\Omega} vrai f(x) = \sup_{e\in\Omega} \inf_{x\in\Omega/e} f(x); \qquad (1.6).$$

***Définition 1.1.3** :*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *mesurable et soit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$*, si*$|\Omega| > 0$.

On dit que $f \in L_\infty$ *si* f *et mesurable et*

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} vrai|f(x)| < \infty. \qquad (1.7).$$

***Remarque 1.1.3** :*

On pose $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = 0 \quad$ *, pour*$|\Omega| = 0$.

***Théorème 1.1.4** :(Théorème de Riesz)*

Soit Ω *un ensemble mesurable et* f *une fonction mesurable sur* Ω *,alors :*

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_{L_\infty(\Omega)}. \qquad (1.8).$$

Démonstration: :

1. *Si* $|\Omega| = 0$, *alors* $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = 0$ *voir remarque* (1.1.3),*on a :*

   $\forall p > 0$, $\|f\|_{L_p(\Omega)} = 0$ *(propriété de l'intégrale de Lebesgue).*

2. *Si* $0 < |\Omega| < \infty$, *on pose* $M = \|f\|_{L_\infty(\Omega)}$, *on distingue trois cas :*

a) $M = 0$

donc $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = 0$ *ce qui donne* $f = 0$ *presque partout , et donc* $\|f\|_{L_p(\Omega)} = 0$

b) $0 < M < \infty$

donc on a $\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_\infty(\Omega)}(|\Omega|)^{\frac{1}{p}}$

d'où

$$\overline{\lim_{p\longrightarrow\infty}}\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq \overline{\lim_{p\longrightarrow\infty}}(|\Omega|)^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L_\infty(\Omega)},$$

$$\overline{\lim_{p\longrightarrow\infty}}\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq M. \qquad (1.9)$$

Considérons maintenant les ensemble $\Omega_\epsilon = \{x/|f(x)| \geq M - \epsilon\}\ \forall \epsilon > 0$, *on a* $|\Omega_\epsilon| > 0$

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{\Omega_\epsilon} |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq (M-\epsilon)(|\Omega_\epsilon|)^{\frac{1}{p}} \quad ,$$

on obtient $\|f\|_{L^p(\Omega)} \geq (M-\epsilon)(|\Omega_\epsilon|)^{\frac{1}{p}}$, *en faisant tendre* $\epsilon \longrightarrow 0$, *on obtient* $\|f\|_{L_p(\Omega)} \geq M(|\Omega_\epsilon|)^{\frac{1}{p}}$, *et par suite on a :*

$$\lim_{p\longrightarrow\infty}\|f\|_{L_p(\Omega)} \geq M \qquad (1.10)$$

de (1.9) *et* (1.10) *, on a :*

$$\overline{\lim_{p\longrightarrow\infty}}\|f\|_{L_p(\Omega)} = \lim_{p\longrightarrow\infty}\|f\|_{L_p(\Omega)} = \underline{\lim}_{p\longrightarrow\infty}\|f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Et par conséquent

$$\lim_{p\longrightarrow\infty}\|f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

c) $M = \infty$, *on pose* $\Omega_N = \{x/|f(x)| \geq N\}$, $\forall N > 0$, *et donc* $|\Omega_N| > 0$, *d'où*

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{\Omega_N} |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq N(|\Omega_N|)^{\frac{1}{p}} \quad ,$$

et

$$\underline{\lim}_{p \longrightarrow \infty} \|f\|_{L^p(\Omega)} \geq N \ , \ \forall N > 0,$$

et donc $\underline{\lim}_{p \longrightarrow \infty} \|f\|_{L_p(\Omega)} = \infty = M$

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} \|f\|_{L_p(\Omega)} = M.$$

3. *Si* $|\Omega| = \infty$, *alors l'égalité* (1.9) *n'est pas vérifie , en effet si* $f = 1$ *; on a :*

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} vrai|f(x)| = 1 \quad ,$$

et par suite :

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega dx\right)^{\frac{1}{p}} = \infty. \qquad \square$$

1.2 Inégalités de Hölder :

1.2.1 Inégalités de Young

1^{er} ***cas :***

Soit $P \geq 1$, *alors*

$$\forall a, b \geq 0 \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad (1.11)$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

Démonstration: *:*

On prend la fonction

$$\varphi(t) = \frac{t}{p} + \frac{t^{-\frac{1}{p-1}}}{q} \ , \ \forall t > 0,$$

et on doit montrer que $\varphi(t) \geq \varphi(1) = 1$ *pour* $t > 1$ *et* $\varphi(t) \leq \varphi(1) = 1$ *pour* $0 < t < 1$ *on a :*

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1}\frac{1}{q}t^{-\frac{1}{p-1}-1} \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{q}t^{-\frac{1}{p-1}-1} \\ &= \frac{1}{p}(1 - t^{-q}) \end{aligned}$$

$\varphi^{'}(t) = 0$ *nous donnes* $t = 1$, *donc* $t = 1$ *est un extrémum ;mais comme la fonction* φ *est croissante sur l'intervalle* $[1;\infty)$ *(en effet si* $\varphi^{'} > 0$ *nous donnes* > 0 *d'où* $t^{-q} < 1$ *et comme* $q > 1$ *alors* $t > 1$ *) ;* φ *et aussi décroissante sur* $(0;1]$ *. Alors t=1 est un minimum sur* $[1;\infty)$ *d'où :*

$$\varphi(t) \geq \varphi(1) \ , \ \textit{pour} \ \ t > 1.$$

Maintenant , posons $t = \dfrac{a^{p-1}}{b}$ *, donc :*

$$\frac{t^{-\frac{1}{p-1}}}{q} = \frac{1}{qt^{\frac{1}{p-1}}} = \frac{1}{q(\frac{a^{p-1}}{b})^{\frac{1}{p-1}}} = \frac{b^{\frac{1}{p-1}}}{qa} = \frac{1}{q}\frac{b^{q-1}}{a}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{t}{p} + \frac{t^{-\frac{1}{p-1}}}{q} \\ &= \frac{a^{p-1}}{bp} + \frac{b^{q-1}}{qa} \\ &= \frac{1}{p}\frac{a^p}{ab} + \frac{1}{q}\frac{b^q}{ab} \\ &= \frac{1}{ab}\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \\ &\geq \varphi(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Finalement on trouve

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2^{me} ***Cas :***

Pour 0<p<1 , on a :

$$\forall a, b \geq 0, \quad ab \geq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \qquad (1.12). \qquad \square$$

Corollaire 1.2.1 *:*

Soit $p, q, r > 1$ *tel que* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ *, alors :*

$$\forall A, B \geq 0, (AB)^r \leq \frac{r}{p}A^p + \frac{r}{q}B^q. \qquad (1.13)$$

Démonstration: *:*

Comme $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ *, alors* $1 = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r}$ *, et on applique l'inégalité* (1.11) *avec* $a = A^r$ *et* $b = B^r$ *on trouve :*

$$(AB)^r = ab \leq \frac{a^{p/r}}{p/r} + \frac{b^{q/r}}{q/r} = \frac{r}{p}A^p + \frac{r}{q}B^q. \qquad \square$$

Lemme 1.2.1 *:*

Soit Ω *un ensemble mesurable , si les fonction* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont mesurable sur* Ω*, et* g *est non négative , alors :*

$$\inf_{x\in\Omega} vraif(x) \int_\Omega g(x)dx \leq \int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \sup_{x\in\Omega} vraif(x) \int_\Omega g(x)dx. \quad (1.14)$$

Démonstration: *:*

Soit $e \subset \Omega$ *tel que* $|e| = 0$ *, alors*

$$\int_\Omega fgdx = \int_{\Omega/e} fgdx \leq \sup_{\Omega/e} f(x) \int_\Omega gdx,$$

alors

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \sup_{\Omega/e} f(x) \int_\Omega g(x)dx,$$

d'où

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx \leq \inf_{x\in\Omega} \sup_{x\in\Omega/e} f(x) \int_\Omega g(x)dx = \sup_{x\in\Omega} vraif(x) \int_\Omega g(x)dx$$

D'une manière analogue on montre l'autre inégalité de (1.14). $\square$

***Corollaire 1.2.2** :*

Soit Ω un ensemble mesurable , si les fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ sont mesurable sur Ω, et $f \in L_\infty(\Omega), g \in L_1(\Omega)$, alors :

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)dx\right| \leq \|f\|_{L_\infty(\Omega)}\|g\|_{L_1(\Omega)}. \tag{1.15}$$

***Démonstration:** :*

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega fgdx\right| &\leq \int_\Omega |fg|(x)dx \\ &\leq \sup_{x\in\Omega} vrai|f(x)| \int_\Omega |g|dx \\ &\leq \|f\|_{L_\infty(\Omega)}\|g\|_{L_1(\Omega)} \qquad \square\end{aligned}$$

***Théorème 1.2.1** : (Inégalité de Hölder)*

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable , et $0 < p \leq \infty$, $f \in L_p(\Omega)$ et $g \in L_q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :

(i) Si $1 \leq p \leq \infty$

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L_p(\Omega)}\|g\|_{L_q(\Omega)}. \tag{1.16}$$

(ii) Si $0 < p < 1$ et avec $|\Omega| > 0$, et $\forall x \in \Omega, g(x) \neq 0$

$$\int_\Omega |fg|dx \geq \|f\|_{L_p(\Omega)}\|g\|_{L_q(\Omega)}. \tag{1.17}$$

***Démonstration:** :*

(i)

(1) $1 \leq p < \infty$, on applique le lemme (1.2.1) avec $a = \dfrac{|f(x)|}{\|f\|_{L_p(\Omega)}}$, et $b = \dfrac{|g(x)|}{\|g\|_{L_q(\Omega)}}$,

on a

$$\begin{aligned} ab &= \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L_p(\Omega)}\|g\|_{L_q(\Omega)}} \\ &\leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L_p(\Omega)}} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q_{L^q(\Omega)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L_p(\Omega)}\|g\|_{L_q(\Omega)}} &\leq \frac{1}{p}\int \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^p_{L_p(\Omega)}}dx + \frac{1}{q}\int \frac{|g(x)|^q}{\|g\|^q_{L_q(\Omega)}}dx \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (1.16) .

(i) $p = \infty$ *; voir corolaire 1.2.2*

(ii) $0 < p < 1$ *, un raisonnement analogue au précédent avec une application de (1.12) nous donne l'inégalité(1.17)* $\Box$.

Corollaire 1.2.3 *:*

Soit $p > 0$ *,* $p_1 \leq \infty$ *,* $-\infty \leq p_2 \leq \infty$ *et* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$ *, alors*

(i) Si $p \leq p_1$

$$\|fg\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_{p1}(\Omega)}\|g\|_{L_{p2}(\Omega)} \qquad (1.18)$$

(ii) Si $p > p_1$ *et avec*$|\Omega| > 0$, *et*$\forall x \in \Omega, g(x) \neq 0$.

$$\|fg\|_{L_p(\Omega)} \geq \|f\|_{L_{p1}(\Omega)}\|g\|_{L_{p2}(\Omega)} \qquad (1.19)$$

Démonstration:

(i) Si $p \leq p_1$*,on désigne par*

$$A = \left(\int_\Omega |F(x)G(x)|dx\right)^{1/p}$$

avec $F(x) = |f(x)|^p$ *et* $G(x) = |g(x)|^p$, *et on applique l'inégalité* (1.16) *avec*

$$\frac{1}{\frac{p_1}{p}} + \frac{1}{\frac{p_2}{p}} = 1$$

donc

$$\begin{aligned} A &\leq \left(\int_\Omega |F(x)|^{\frac{p_1}{p}}dx\right)^{\frac{p}{p_1}.\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |G(x)|^{\frac{p_2}{p}}dx\right)^{\frac{p}{p_2}.\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_\Omega |f(x)|^{p_1}dx\right)^{\frac{1}{p1}}\left(\int_\Omega |g(x)|^{p_2}dx\right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &= \|f\|_{L_{p_1}(\Omega)}\|g\|_{L_{p_2}(\Omega)} \end{aligned}$$

(ii) Si $p > p_1$ *et avec* $|\Omega| > 0$,*et* $\forall x \in \Omega, g(x) \neq 0$,*de manière analogue on montre* (1.19) *on utilisant l'inégalité* (1.17). □

Proposition 1.2.1 *:*

Soit $p_i \in]1,\infty[, i = 1,2,....,k$,*et* $1 < r < \infty$ *tel que* $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+....\frac{1}{p_k}=\frac{1}{r}$ *(les* p_i *sont dits r conjugués)* , $f_i \in L_{p_i}(\Omega)$,*alors*

$$f=\prod_{i=1}^{k} f_i \in L_r(\Omega) \text{ et } \|f\|_{L_r(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^{k}\|f_i\|_{L_{p_i}(\Omega)} \qquad (1.20).$$

Corollaire 1.2.4 *:*

Soit $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$,*alors*

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L_{p_1}(\Omega)}\|f\|^{1-\alpha}_{L_{p_2}(\Omega)} \qquad (1.21)$$

où $\alpha \in (0,1)$,*et tel que* $\frac{1}{p}=\frac{\alpha}{p_1}+\frac{1-\alpha}{p_2}$

Démonstration:

1) Soit $p_2 < \infty$,*on prend* $\frac{p}{p}=\frac{\alpha p}{p_1}+\frac{p(1-\alpha)}{p_2}$,*et on applique l'inégalité de Hölder (avec* $F(x)=|f(x)|^{p\alpha}$*et* $G(x)=|g(x)|^{p(1-\alpha)}$*),on trouve*

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f|^p &= \int_\Omega |f|^{p\alpha}|f|^{p(1-\alpha)}dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |F(x)|^{\frac{p_1}{p\alpha}}dx\right)^{\frac{\alpha p}{p_1}}\left(\int_\Omega |G(x)|^{\frac{p_2}{p(1-\alpha)}}dx\right)^{\frac{p(1-\alpha)}{p_2}} \\ &\leq \left(\int_\Omega |f|^{\alpha p\frac{p_1}{\alpha p}}dx\right)^{\frac{\alpha p}{p_1}}\left(\int_\Omega |g|^{(1-\alpha)p\frac{p_2}{(1-\alpha)p}}dx\right)^{\frac{(1-\alpha)p}{p_2}} \end{aligned}$$

on élève à la puissance $\frac{1}{p}$*les deux membres de la dernière inégalité, on trouve :*

$$\left(\int_{\Omega}|f(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega}|f(x)|^{p_1}dx\right)^{\dfrac{\alpha}{p_1}} \left(\int_{\Omega}|f(x)|^{p_2}dx\right)^{\dfrac{1-\alpha}{p_2}}$$

d'où

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L_{p_1}(\Omega)}\|f\|^{1-\alpha}_{L_{p_2}(\Omega)}$$

2) Si $P_2 = \infty$ *et donc* $\frac{\alpha p}{p_1} = 1$ *, alors on a*

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\Omega}|f(x)|^{p}dx & = & \displaystyle\int_{\Omega}|f(x)|^{\alpha p}dx|f(x)|^{(1-\alpha)p}dx \\ & \leq & \||f|^{\alpha p}\|_{L_1(\Omega)}\,\||f|^{(1-\alpha)p}\|_{L_\infty(\Omega)} \\ & = & \displaystyle\int_{\Omega}|f(x)|^{\alpha p}dx\|f\|^{(1-\alpha)p}_{L_{\infty(\Omega)}} \\ & = & \displaystyle\int_{\Omega}|f(x)|^{p_1}dx\|f\|^{(1-\alpha)p}_{L_{\infty(\Omega)}} \\ & = & \|f\|^{p_1}_{L_{p_1}(\Omega)}\|f\|^{(1-\alpha)p}_{L_\infty(\Omega)} \\ & = & \|f\|^{\alpha p}_{L_{p_1}(\Omega)}\|f\|^{(1-\alpha)p}_{L_\infty(\Omega)}. \end{array} \qquad \square$$

Corollaire 1.2.5 *:*

soit $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$*,alors* $\forall\varepsilon > 0$ *on a*

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq \alpha^{\alpha}\left(1-\alpha\right)^{1-\alpha} = \left(\varepsilon^{1-\alpha}\|f\|_{L_{p_1}(\Omega)} + \varepsilon^{-\alpha}\|f\|_{L_{p_2}(\Omega)}\right) \qquad (1.22)$$

où $\alpha \in (0,1)$*et tel* $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$.

Démonstration: *:*

l'inégalité (1.22) *d'écoule de l'inégalité* (1.21) *si on prend en considération*

$$\|f\|^{\alpha}_{L_{p_1}(\Omega)}\|f\|^{1-\alpha}_{L_{p_2}(\Omega)} = \left(\varepsilon^{1-\alpha}\|f\|_{L_{p_1}(\Omega)}\right)^{\alpha}\left(\varepsilon^{-\alpha}\|f\|_{L_{p_2}(\Omega)}\right)^{1-\alpha} \qquad \square$$

et on utilisant aussi l'inégalité (1.11)

1.3 Inégalité de Minkowski

Théorème 1.3.1 *:(Inégalité de Minkowski)*

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$,*un ensemble mesurable,*$1 \leq p \leq \infty, f \in L_p(\Omega)$,*alors :*

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} \tag{1.23}$$

Démonstration: *:*

1) Si $p = 1$

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} = \int_\Omega |f+g|dx \leq \int_\Omega |f|dx + \int_\Omega |g|dx = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}.$$

2) Si $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f+g|^p dx &= \int_\Omega |f+g||f+g|^{p-1}dx. \\ &\leq \int_\Omega |f||f+g|^{p-1}dx + \int_\Omega |g||g+f|^{p-1}dx.\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Hölder :

$$\int |f+g|^p dx \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \||f+g|^{p-1}\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} \||f+g|^{p-1}\|_{L_p(\Omega)}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,*et donc* $q = \frac{p}{p-1}$,*alors :*

$$\begin{aligned}\||f+g|^{p-1}\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |f+g|^{p-1\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p}{p-1}}. \\ &= \left(\left(\int_\Omega |f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dx\right)^{p-1} \\ &= \|f+g\|_{L_p(\Omega)}^{p-1}\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\Omega} |f+g|^p dx \leq \|f+g\|_{L_p(\Omega)}^{p-1} \left(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} \right).$$

on déduit que :

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)}^{p} \leq \|f+g\|_{L_p(\Omega)}^{p-1} \left(\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)} \right).$$

Et par conséquent

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}.$$

3) Si $p=\infty$ Soit $f,g \in L_\infty(\Omega)$,alors on a l'inégalité suivante :

$$\|f+g\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L_\infty(\Omega)} + \|g\|_{L_\infty(\Omega)}. \qquad \square$$

Corollaire 1.3.1 *:*

Soient $m \in \mathbb{N}$, et $f_k \in L_p(\Omega)$ pour tout $k \in \{1,2,...,m\}$,

$1 \leq p \leq \infty$

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} f_k \right\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_{L_p(\Omega)} \tag{1.24}$$

Démonstration: *:*

Par récurrence.

1) pour $k=1$ vérifie

2) Soit $m \in \mathbb{N}$ supposent que

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} f_k \right\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_{L_p(\Omega)}$$

et montrer que l'inégalité pour $m+1$ on a

$$\left\| \sum_{k=1}^{m+1} f_k \right\|_{L_p(\Omega)} = \sum_{k=1}^{m} \|f_k + f_{k+1}\|_{L_p(\Omega)}$$

et d'après l'inégalité

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}.$$

donc :

$$\left\|\sum_{k=1}^{m+1} f_k\right\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{m}\left(\|f_k\|_{L_p(\Omega)} + \|f_{k+1}\|_{L_p(\Omega)}\right)$$
$$\leq \sum_{k=1}^{m+1} \|f_k\|_{L_p(\Omega)} . \qquad \square$$

Corollaire 1.3.2** : **(Inégalité de Minkowski pour les sommes infinies)

Soit $f_k \in L_p(\Omega)$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_{L_p(\Omega)} < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, *alors*

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)} \qquad (1.25)$$

***Démonstration:** :*

On suppose que $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_{L_p(\Omega)} < \infty$.

A l'aide du critère de Cauchy pour les séries numérique on montre que la somme $S_m = \sum\limits_{k=1}^{m}\|f_k\|_{L_p(\Omega)}$ *est une suite de Cauchy et puisque* L_p *et complet on déduit*

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_{L_p(\Omega)}$$

on passe a la limite quand $m \to \infty$*et en vertu de la continuité des semi normes* $\sum_{k=1}^{m} f_k \to\to \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *, lorsque* $m \to \infty$*, implique*

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right\|_{L_p(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{L_p(\Omega)} . \qquad \square$$

***Théorème 1.3.2** :*

Soit $0 < p < 1$*,et* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble mesurable,et* $f, g \in L_p(\Omega)$*,* *alors :*

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|g\|_{L_p(\Omega)}\right). \tag{1.26}$$

Démonstration: *:*

on utilise triviale $\forall a, b > 0.$

$$(a+b)^p \leq c\left(a^p+b^p\right). \tag{1.27}$$

avec $c = max(1, 2^{p-1})$ *et donc pour* $0 < p < 1, c = 1.$*On applique cette inégalité avec* $a = |f|$ *et* $b = |g|$,*on obtient :*

$$\|f+g\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p dx + |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

on applique l'inégalité(1.28) *avec* $c = max(1, 2^{p-1}) = 2^{p-1}$ *et donc :*

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L_p(\Omega)} &\leq 2^{p-1}\left(\left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega (|g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)\\ &\leq 2^{p-1}\left(\|f\|_{L_p(\Omega)}+\|g\|_{L_p(\Omega)}\right) \qquad \square\end{aligned}$$

Lemme 1.3.1 *:*

Soit $a_i > 0, i = 1, ..., m$ *,alors on a l'inégalité suivante :*

$$\left(\sum_{k=1}^m a_i\right)^p \leq c\left(\sum_{k=1}^m a_i^p\right) \tag{1.28}$$

avec $c = max(1, m^{p-1})$

Démonstration: *: voir **[6]*** $\square$

Corollaire 1.3.3 *:*

Soit $0 < p < 1$,*alors*

$$\|\sum_{k=1}^m f_k\|_{L_p(\Omega)} \leq m^{\frac{1}{p}-1}\sum_{k=1}^m \|f_k\|_{L_p(\Omega)} \tag{1.29}$$

Chapitre 2

Inégalité classique de Hardy

2.1 Inégalité classique de Hardy

Théorème 2.1.1 *Soient* $p > 1, f(x) \geq 0, f \in L_{p(0,\infty)}(x > 0)$ *et* $f^p \in L_{1(0,\infty)}.F(x)$ *une fonction définie par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, x > o :$$

alors

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty (f(x))^p \, dx \tag{2.1}$$

avec $f \neq 0$.*La constante* $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ *est optimale. Pour le preuve du théorème on utilise le lemme suivant :*

Lemme 2.1.1 *Si* $p > 1, f \in L_{p(0,a)}, \forall a \geq x et$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt;$$

alors

$$F(x) = O(x^{\frac{1}{p'}})$$

pour x *suffisamment petit.*

preuve du lemme :

d'après l'inégalité de Hölder

$$(F(x))^p \leq \int_0^x (f(t))^p\, dt \left(\int_0^x dt\right)^{p-1} = x^{p-1}\int_0^x (f(t))^p\, dt$$

d'où

$$F(x) = O\left(x^{\frac{1}{p'}}\right)$$

preuve du théorème :

Si $0 < \xi < \eta$,*on a*

$$\begin{aligned}(F(x))^p &= -\frac{1}{p-1}\int_\xi^\eta (F(x))^p\left(\frac{d}{dx}x^{1-p}\right)dx \\ &= \frac{\xi^{1-p}F^p(\xi)}{p-1} - \frac{\eta^{1-p}F^p(\eta)}{p-1} + \frac{p}{p-1}\int_\xi^\eta x^{1-p}(F(x))^{p-1} f(x)dx\end{aligned}$$

d'après le lemme (2.1.1)

$\xi^{1-p}F(\xi) \longrightarrow 0$*quand* f^p *est intégrable et* $\xi \longrightarrow o$*, d'où*

$$\begin{aligned}\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx &\leq \frac{p}{p-1}\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1} f(x)dx \\ &\leq \frac{p}{p-1}\left\{\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^\eta (f(x))^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

donc :

$$\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \frac{p}{p-1}\left\{\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^\eta (f(x))^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2,2)$$

Si $f(x)$ *est non nulle sur* $(0, \eta)$ *, le nombre gauche de (2,2) est strictement positif , d'où de (2,2) on déduit*

$$\int_0^\eta \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\eta (f(x))^p\, dx \qquad (2,3)$$

quand $\eta \longrightarrow \infty$ *on obtient (2,1) , sauf que* $<$ *est remplacé par* $\leq$ *.*

En particulier , l'intégrale du membre gauche de (2,1) est fini .

Par conséquent , toutes les intégrales dans (2,2) sont finies lorsque η tend vers ∞ et

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \frac{p}{p-1}\left\{\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right\}^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^\infty (f(x))^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2,4)$$

dans $(2,4)$ le signe $\leq$ peut être remplacé par $<$, à moins que $x^{-p}(F(x))^p$ et $(f(x))^p$ soient effectivement proportionnelles .

Ceci transformerait $f(x)$ en une puissance de x , alors si f est non nulle , on déduit de (2,4)

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty (f(x))^p\, dx$$

Pour démontrer que la constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est optimale , on considère la fonction $f_\epsilon(x)$,$0<\epsilon<(p-1)/p$ définie par :

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 0, & si \quad x \in (0;1) \\ x^{-\epsilon-\frac{1}{p}}, & si \quad x \in [1;\infty) \end{cases}$$

on trouve que

$$\int_0^\infty \left(x^{-1}\int_0^x f_\epsilon(x)dt\right)^p dx = \frac{1}{\varepsilon p\left(-\varepsilon-\frac{1}{p}+1\right)^p}$$

$$\int_0^\infty (f_\epsilon(t))^p\, dt = \frac{1}{\varepsilon p}$$

Si la constante $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ dans(2.1)n'est optimale ,alors ,il existe une constante K avec $K<\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ te que (2.1)reste valable si l'on remplace $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ par K.

En particulier ,on a

$$\int_0^\infty \left(x^{-1}\int_0^x f_\epsilon(x)dt\right)^p dx \leq K\int_0^\infty (f_\epsilon(t))^p\, dt$$

et puis

$$\frac{1}{\varepsilon p\left(-\varepsilon-\frac{1}{p}+1\right)^p} < K\frac{1}{\varepsilon p}$$

il s'ensuit que $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p \leq K$*,quand* $\varepsilon \longrightarrow 0$*,de Cette contradiction on dé-duit que* $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ *est la constante optimale dans* (2.1)*. Le théorème* (2.1) *et prouvé* $\square$

Théorème 2.1.2 *Soient* $p > 1$*,*$f(x) \geq 0$*,et* $f^p \in L_{1(0,\infty)}(x > 0)$ *et* $f \in L_{p(0,\infty)}$*.*$F(x)$ *une fonction définie par :*

$$F(x) = \int_x^\infty f(t)dt, x > o:$$

alors

$$\int_0^\infty (F(x))^p \, dx < p^p \int_0^\infty (xf(x))^p \, dx \qquad (2.5)$$

avec $f \neq 0$*.La constante* p^p *est optimale. la preuve est analogue à* (2.1)*.*

Théorème 2.1.3 *Soient* $p > 1$*,*$\alpha \neq 1$ *,* $0 < \int_0^\infty t^{-\alpha} (tf(t))^p \, dt < \infty$*et* $F(x)$*une fonction définir par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, (\alpha > 1)\,; F(x) = \int_x^\infty f(t)dt, (\alpha < 1)\,;$$

alors

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} F^p(x)dx \leq \left(\frac{p}{|\alpha - 1|}\right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha} (tf(t))^p \, dt \qquad (2.6).$$

Preuve:*voir [5]* $\square$

Théorème 2.1.4 *:*

soient $0 < p < 1$*,* $\alpha \neq 1$*,*$0 < \int_0^\infty t^{-\alpha}(tf(t))^p dt < \infty$ *et* $F(x)$ *une fonction définie par :*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, (\alpha > 1)\,; F(x) = \int_x^\infty f(t)dt, (\alpha < 1)\,;$$

alors

$$\int_0^\infty x^{-\alpha} F^p(x)dx > \left(\frac{p}{|\alpha - 1|}\right)^p \int_0^\infty t^{-\alpha} (tf(t))^p \, dt. \qquad (2.7)$$

Preuve:*On obtient le même résultat en changeant le signe (voir [5])on considéré la fonction elle même.Dans ce qui suit on se propose de donner d'autre démonstrations des inégalités classiques de Hardy.*

Définition 2.1.1 *:*

Soit $1 \leq p \leq \infty$, $n = 1$, $x \in (0, \infty)$, *on définit :*

les deux opérations H_1 *et* H_2 *définis de la maniéré suivante :*

$$(H_1 f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(y)dy, \forall x > 0. \tag{2.8}$$

(C'est la valeur moyenne de f *sur l'intervalle* $(0, x)$*)*

et

$$(H_2 f)(x) = \frac{1}{x} \int_x^\infty f(y)dy, \forall x > 0. \tag{2.9}$$

Théorème 2.1.5 *:*

Soient $1 < p < \infty$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$, $f(x) \geq 0$, $x^\alpha f(xz)$ *mesurable sur* $(0, \infty)\times(0, 1)$ *et* $x^\alpha f(xz) \in L_{p(0,\infty)}$ *pour presque tous les* $z \in (0, 1)$,*alors*

$$\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L_{p(0,\infty)}} \leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha\right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L_{p(0,\infty)}}; \quad si \quad \alpha < \frac{1}{p'}. \tag{2.10}$$

et

$$\|x^\alpha (H_2 f)(x)\|_{L_{p(0,\infty)}} \leq \left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \|x^\alpha f(x)\|_{L_{p(0,\infty)}}; \quad si \quad \alpha > \frac{1}{p'}. \tag{2.11}$$

1) : Si $\alpha < \frac{1}{p'}$ *on pose*

$$\begin{aligned} I &= \|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L_{p(0,\infty)}} \\ &= \left\| \int_0^x x^{\alpha-1} f(y)dy \right\|_{L_{p(0,\infty)}} \end{aligned}$$

posons $z = \frac{y}{x}$ *alors* $dy = xdz$

$$\begin{aligned} I &= \left\| \int_0^1 x^\alpha f(xz) dz \right\|_{L_{p(0,\infty)}} \\ &\leq \int_0^1 \| x^\alpha f(xz) \|_{L_{p,x(0,\infty)}} dz \end{aligned}$$

On pose $t = xz$ *alors* $dt = zdx$ *et donc* $dx = \frac{dt}{z}$

$$\begin{aligned} \| x^\alpha f(xz) \|_{L_{p,x(0,\infty)}} &= \left(\int_0^\infty x^{p\alpha} |f(xz)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= z^{-\alpha-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty t^{p\alpha} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= z^{-\alpha-\frac{1}{p}} \| t^\alpha f(t) \|_{L_{p(0,\infty)}} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I &\leq \int_0^1 z^{-\alpha-\frac{1}{p}} \| t^\alpha f(t) \|_{L_{p(0,\infty)}} dz \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{p} - \alpha \right)^{-1} \| t^\alpha f(t) \|_{L_{p(0,\infty)}} \\ &\leq \left(\frac{1}{p'} - \alpha \right)^{-1} \| t^\alpha f(t) \|_{L_{p(0,\infty)}} \end{aligned}$$

2) : Si $\alpha > \frac{1}{p'}$ *de maniéré analogue on démontre l'inégalité* (2.11). □

Chapitre 3

Éxtension et généralisation de certaines inégalités intégrale

3.1 Éxtension de certaines inégalités de Hardy

I . Éxtension à $\mathbb{R}$ *:*

On pose

$$(\widetilde{H_1}f)(x) := \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(y)dy$$

et

$$(\widetilde{H_2}f)(x) := \frac{1}{2x}\int_{|y|\geq x} f(y)dy$$

Soient $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$, $x^{\alpha}f(xz)$ *mesurable sur* $\mathbb{R}\times(-1;1)$ *et* $x^{\alpha}f(xz) \in L_{p(\mathbb{R})}$ *pour presque tous les* $z \in (-1;1)$ *, alors*

i *: Si* $\alpha < \frac{1}{p'}$ *, on a :*

$$\||x|^{\alpha}(\widetilde{H_1}f)(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \leq \left(\frac{1}{p'}-\alpha\right)^{-1} \||x|^{\alpha}(f)(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \qquad (3.1)$$

ii *: Si* $\alpha > \frac{1}{p'}$ *, on a :*

$$\||x|^{\alpha}(\widetilde{H_2}f)(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \leq \left(\alpha-\frac{1}{p'}\right)^{-1} \||x|^{\alpha}(f)(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \qquad (3.2).$$

Dune manière générale la preuve s'effectue le la même manière que celle du (théorème 2.1.5) .

Par exemple démontrons (3.1) .

On a $\forall x \neq 0$ *;*

$$(\widetilde{H_1}f)(x) := \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(y)dy = \frac{1}{2|x|}\int_{-|x|}^{|x|} f(y)$$

et

$$\||x|^{\alpha}(\widetilde{H_1}f)(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}} = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}}\left||x|^{\alpha-1}\int_{-|x|}^{|x|} f(y)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour appliquer l'inégalité intégrale de Minkowsky , on fait un changement de variable $z = \frac{y}{x}$ *, donc :*

$$\begin{aligned}\||x|^{\alpha}(\widetilde{H_1}f)(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}} &= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}}\left||x|^{\alpha}\int_{-1}^{1} f(xz)dz\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\int_{\mathbb{R}}||x|^{\alpha}f(xz)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} dz.\end{aligned}$$

Avec le changement de variable $t = xz$ *en prenant en compte que* $dx = \frac{dt}{z}$ *,si* $z > 0$ *et* $dx = -\frac{dt}{z}$ *si* $z < 0$ *et en changeant l'ordre d'intégration , on obtient*

$$\||x|^{\alpha}(\widetilde{H_1}f)(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \leq \||t|^{\alpha}f(t)\|_{L_{p(\mathbb{R})}}\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|z|^{-\alpha-\frac{1}{p}}dz. \tag{3.3}$$

mais on a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|z|^{-\alpha-\frac{1}{p}}dz &= \int_{-1}^{0}(-z)^{-\alpha-\frac{1}{p}}dz + \int_{0}^{1} z^{-\alpha-\frac{1}{p}}dz \\ &= -\left[\frac{(-z)^{-\alpha+\frac{1}{p'}}}{-\alpha+\frac{1}{p'}}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{z^{-\alpha+\frac{1}{p'}}}{-\alpha+\frac{1}{p'}}\right]_{0}^{1} \\ &= 2\left(-\alpha+\frac{1}{p'}\right)^{-1}\end{aligned}$$

donc (3.3) devient

$$\||x|^{\alpha}(\widetilde{H_1}f)(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \leq \||t|^{\alpha}f(t)\|_{L_{p(\mathbb{R})}}\left(-\alpha+\frac{1}{p'}\right)^{-1}.$$

C'est à dire :

$$\||x|^{\alpha}(\widetilde{H_1}f)(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \leq \||x|^{\alpha}f(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \left(-\alpha + \frac{1}{p'}\right)^{-1}. \qquad \square$$

II . Éxtension à $\mathbb{R}^n$ *:*

Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $r = |x| > 0$, $B_r = \{y \in \mathbb{R}^n \ ; \ |y| < r\}$, $1 \leq p \leq \infty$, $f(x)$ *une fonction mesurable sur* B_r *. Considérons les deux opérateurs suivante :*

$$(\widetilde{H_1}f)(x) := \frac{1}{mesB_r}\int_{B_r} f(y)dy$$

et

$$(\widetilde{H_2}f)(x) := \frac{1}{mesB_r}\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r} f(y)dy$$

Théorème 3.1.1 *:*

Soient $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *et* $f(r,\xi) \in L_{p(S_{n-1})}$ *(où* S_{n-1} *désigne la sphère unité dans* $\mathbb{R}^n$ *), alors*

i *: Si ,* $\alpha < \frac{n}{p'}$

$$\||x|^{\alpha}(\widetilde{H_1}f)(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \leq \left(\frac{-\alpha}{n} + \frac{1}{p'}\right)^{-1} \||x|^{\alpha}f(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \qquad (3.4)$$

ii *: Si* $\alpha > \frac{n}{p'}$

$$\||x|^{\alpha}(\widetilde{H_2}f)(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \leq \left(\frac{\alpha}{n} - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \||x|^{\alpha}f(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}}. \qquad (3.5)$$

Preuve:

On démontre l'inégalité (3.4) .

On introduit les coordonnées sphériques (coordonnées polaire dans $\mathbb{R}^n$*)* (ρ,ξ) *où* $\rho = |y|$, $\xi = \frac{y}{|y|} \in S_{n-1}$ *et on pose*

$$\overline{f}(\rho) = \int_{S_{n-1}} f(\rho,\xi)d\xi$$

alors

$$\begin{aligned}(\widetilde{H_1}f)(x) &= \frac{1}{v_n r^n}\int_0^r \rho^{n-1}d\rho\int_{S_{n-1}} f(\rho,\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{v_n r^n}\int_0^r \rho^{n-1}\overline{f}(\rho)d\rho,\end{aligned}$$

où $v_n = \pi^{\frac{n}{2}}(\Gamma(\frac{n}{2}+1))^{-1}$ *est le volume de la boule unité et la fonction* Γ *est définie par*

$$\Gamma(\delta) = \int_0^\infty t^{\delta-1}e^{-t}dt.$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned}\||x|^\alpha(\widetilde{H_1}f)(x)\|_{L_p(\mathbb{R})} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{r^{\alpha-n}}{v_n}\int_0^r \rho^{n-1}\overline{f}(\rho)d\rho\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(nv_n\int_0^\infty r^{n-1}\left|\frac{r^{\alpha-n}}{v_n}\int_0^r \rho^{n-1}\overline{f}(\rho)d\rho\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(nv_n\int_0^\infty r^{n-1+p(\alpha-n+1)}v_n^{-p}\left|\frac{1}{r}\int_0^r \rho^{n-1}\overline{f}(\rho)d\rho\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= n^{\frac{1}{p}}v_n^{\frac{1}{p}-1}\left(\int_0^\infty \left|r^{\alpha-n+1+\frac{n-1}{p}}(H_1(\rho^{n-1}\overline{f}))(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\||x|^\alpha(\widetilde{H_1}f)(x)\|_{L_p(\mathbb{R})} &= n^{\frac{1}{p}}v_n^{\frac{1}{p}-1}\left(\int_0^\infty \left|r^{\alpha-n+1+\frac{n-1}{p}}(H_1(\rho^{n-1}\overline{f}))(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= n^{\frac{1}{p}}v_n^{-\frac{1}{p'}}\left(\int_0^\infty \left|r^{\alpha-\frac{n-1}{p'}}(H_1(\rho^{n-1}\overline{f}))(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= n^{\frac{1}{p}}v_n^{-\frac{1}{p'}}\left(\int_0^\infty \left|r^{\alpha_1}(H_1(\rho^{n-1}\overline{f}))(r)\right|^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= n^{\frac{1}{p}}v_n^{-\frac{1}{p'}}\|r^{\alpha_1}(H_1(\rho^{n-1}\overline{f}))(r)\|_{L_p(0.\infty)},\end{aligned}$$

où $\alpha_1 = \alpha - \frac{n-1}{p'}$ *. D'après* (2.10) *du théorème* (2.1.5) *, on obtient*

$$\|r^{\alpha_1}(H_1(\rho^{n-1}\overline{f}))(r)\|_{L_p(0.\infty)} \leq \|r^{\alpha_1}\rho^{n-1}\overline{f}(r)\|_{L_p(0.\infty)}\left(-\alpha_1+\frac{1}{p'}\right)^{-1}$$

pour $\alpha_1 = \alpha - \frac{n-1}{p'} < \frac{1}{p'}$ *. Donc*

$$\begin{aligned}
\||x|^\alpha(\widetilde{H_1}f)(x)\|_{L_p(\mathbb{R})} &\leq \|r^{\alpha_1}\rho^{n-1}\overline{f}(r)\|_{L_p(0.\infty)}\left(-\alpha_1+\frac{1}{p'}\right)^{-1} n^{\frac{1}{p}}v_n^{-\frac{1}{p'}} \\
&\leq \|r^{\alpha_1+n-1}\overline{f}(r)\|_{L_p(0.\infty)}\left(-\alpha_1+\frac{1}{p'}\right)^{-1} n^{\frac{1}{p}}v_n^{-\frac{1}{p'}} \\
&= \left(\int_0^\infty r^{\alpha p+n-1}|\overline{f}(r)|^p dr\right)^{\frac{1}{p}}\left(-\alpha_1+\frac{1}{p'}\right)^{-1} n^{\frac{1}{p}}v_n^{-\frac{1}{p'}}
\end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité de Hardy , on a :

$$\begin{aligned}
|\overline{f}(r)| &= \left|\int_{S_{n-1}} f(r,\xi)d\xi\right| \\
&\leq \int_{S_{n-1}} |f(r,\xi)|\, d\xi \\
&\leq \left(\int_{S_{n-1}} |f(r,\xi)|^p\, d\xi\right)^{\frac{1}{p}} (mesS_{n-1})^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left(\int_{S_{n-1}} |f(r,\xi)|^p\, d\xi\right)^{\frac{1}{p}} (nv_n)^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

On utilise cette estimation et on revient aux coordonnées cartésiennes.

Alors

$$\begin{aligned}
\||x|^\alpha(\widetilde{H_1}f)(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} &\leq \left(-\alpha+\frac{n}{p'}\right)^{-1} n^{\frac{1}{p}}v_n^{-\frac{1}{p'}}\left(\int_0^\infty r^{\alpha p+n-1}\int_{S_{n-1}}|f(r,\xi)|^p\, d\xi dr\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= n\left(-\alpha+\frac{n}{p'}\right)^{-1}\left(\int_0^\infty\int_{S_{n-1}} r^{n-1}(r^\alpha\,|f(r,\xi)|)^p d\xi dr\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{-\alpha}{n}+\frac{1}{p'}\right)^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|r^\alpha f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{-\alpha}{n}+\frac{1}{p'}\right)^{-1}\||x|^\alpha f(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\||x|^\alpha(\widetilde{H_1}f)(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\frac{-\alpha}{n}+\frac{1}{p'}\right)^{-1}\||x|^\alpha f(x)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Avec les mêmes arguments que (3.4) *on démontre* (3.5). $\square$

Remarque 3.1.1 *:*

En utilisant ce raisonnement , on peut obtenir (3.1) *et* (3.2) *.*

Soit $n = 1$ *, alors on a*

$$I = \{y \in \mathbb{R}\ ;\ |y| < r\} = [-|x|; |x|]$$

et $mesI = 2|x|$ *on pose*

$$\begin{aligned}(\widetilde{H_1}f)(x) &:= \frac{1}{2|x|}\int_{[-|x|;|x|]} f(y)dy \\ &= \frac{1}{2|x|}\int_{-|x|}^{|x|} f(y)dy\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\widetilde{H_2}f)(x) &:= \frac{1}{2|x|}\int_{\mathbb{R}\setminus[-|x|;|x|]} f(y)dy \\ &= \frac{1}{2|x|}\int_{y>|x|} f(y)dy\end{aligned}$$

d'où

si $\alpha < \frac{1}{p'}$ *;*

$$\||x|^{\alpha}(\widetilde{H_1}f)(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \leq \left(-\alpha + \frac{1}{p'}\right)^{-1} \||x|^{\alpha}f(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}}.$$

et

si $\alpha > \frac{1}{p'}$ *;*

$$\||x|^{\alpha}(\widetilde{H_1}f)(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}} \leq \left(\alpha - \frac{1}{p'}\right)^{-1} \||x|^{\alpha}f(x)\|_{L_{p(\mathbb{R})}}. \qquad \square$$

3.2 Une généralisation de l'inégalité intégrale similaire à l'inégalité de Hardy

En 1920 Hardy [2] pose l'inégalité suivant .

$$\int_0^\infty \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx$$

telle que $f \geq 0$, $p > 1$ *et* $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
EN 2012 Sulaiman [6] présente d'inégalités similaires suivantes .

$$p\int_a^b \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq (b-a)^p \int_a^b \left(\frac{f(x)}{x}\right)^p dx - \int_a^b \left(1-\frac{a}{x}\right)^p f^p(x)dx \qquad (1)$$

telle que $f > 0$ *en* $[a,b] \subseteq (0,\infty)$, $p \geq 1$ *et* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

$$p\int_a^b \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \geq \left(1-\frac{a}{b}\right)^p \int_a^b f^p dx - \frac{1}{b^p}\int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx \qquad (2)$$

telle que $f > 0$ *en* $[a,b] \subseteq (0,\infty)$, $0 < p < 1$, *et* $F(x) = \int_a^x f(t)dt.$
et en 2013 Banyat Sroysang à généralisé [1] .

Théorème 3.2.1 *: Suppose* $f > 0$ *sur* $[a,b] \subseteq (0,\infty)$, *et* $p \geq 1$, $q > 0$ *,définie par :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

alors

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{x^q}dx \leq (b-a)^p \int_a^b \frac{f^p(x)}{x^q}dx - \int_a^b \frac{(x-aq^p}{x^q} f^p(x)dx$$

Preuve:

Notez que $\frac{1}{p}+\frac{p-1}{p}=1$*.par l'hypothèse et l'inégalité de Hölder ,nous avons*

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{F(x)^p}{x^q}dx &= \int_a^b x^{-q}\left(f(t)dt\right)^p dx. \\
&\leq \int_a^b x^{-q}\left(\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right)^p dx. \\
&= \int_a^b x^{-q}\left(\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}(x-a)^{\frac{p-1}{p}}\right)^p dx. \\
&= \int_a^b x^{-q}\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)(x-a)^{p-1}dx. \\
&= \int_a^b\int_a^x x^{-q}(x-a)^{p-1}f^p(t)dtdx. \\
&= \int_a^b\int_t^b x^{-q}(x-a)^{p-1}f^p(t)dtdx.\text{(Fubini)}
\end{aligned}$$

et puis

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{F(x)^p}{x^q}dx &\leq \int_a^b\int_t^b t^{-q}(x-a)^{p-1}f^p(t)dxdt. \\
&= \int_a^b t^{-q}f^p(t)\left(\int_t^b (x-a)^{p-1}dx\right)dt. \\
&= \int_a^b t^{-q}f^p(t)\left(\frac{(b-a)^p-(t-a)^p}{p}\right)dt. \\
&= \frac{1}{p}\left((b-a)^p\int_a^b \frac{f^p(t)}{t^q}dt-\int_a^b \frac{(t-a)^p}{t^q}f^p(t)dt\right). \qquad \square
\end{aligned}$$

Théorème 3.2.2 *suppose* $f>0$ *sur* $[a,b]\subseteq(0,\infty)$*,et* $0<p<1, q>0$ *définie par :*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

alors

$$p\int_a^b \frac{F^p(x)}{x^q}dx \geq \frac{(b-a)^p}{b^q}\int_a^b f^p dx-\frac{1}{b^q}\int_a^b (x-a)^p f^p(x)dx$$

Preuve:

Notez que $\frac{1}{p}+\frac{p-1}{p}=1$*.par l'hypothèse et l'inégalité l'inverse de Hölder ,nous avons*

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{F(x)^p}{x^q}dx &= \int_a^b x^{-q}\left(f(t)dt\right)^p dx.\\
&\leq \int_a^b x^{-q}\left(\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right)^p dx.\\
&= \int_a^b x^{-q}\left(\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}(x-a)^{\frac{p-1}{p}}\right)^p dx.\\
&= \int_a^b x^{-q}\left(\int_a^x f^p(t)dt\right)(x-a)^{p-1}dx.\\
&= \int_a^b\int_a^x x^{-q}(x-a)^{p-1}f^p(t)dtdx.\\
&= \int_a^b\int_t^b x^{-q}(x-a)^{p-1}f^p(t)dtdx.(\text{ Fubini })
\end{aligned}$$

et puis

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{F(x)^p}{x^q}dx &\geq \int_a^b\int_t^b b^{-q}(x-a)^{p-1}f^p(t)dxdt.\\
&= b^{-q}\int_a^b f^p(t)\left(\int_t^b (x-a)^{p-1}dx\right)dt.\\
&= b^{-q}\int_a^b f^p(t)\left(\frac{(b-a)^p-(t-a)^p}{p}\right)dt.\\
&= \frac{b^{-q}}{p}\left((b-a)^p\int_a^b f^p(t)dt-\int_a^b (t-a)^p f^p(t)dt\right).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.2.1 *:*

Suppose $f>0$ *sur* $[a,b]\subseteq(0,\infty)$ *définie par :*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

(i) si $p \geq 1$ alors

$$p \int_a^b \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx \leq (b-a)^p \int_a^b \left(\frac{f(x)}{x} \right)^p dx - \int_a^b \left(1 - \frac{a}{x} \right)^p f^p(x) dx$$

(ii) si $0 < p < 1$ alors

$$p \int_a^b \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx \geq \left(1 - \frac{a}{b} \right)^p \int_a^b f^p dx - \frac{1}{b^p} \int_a^b (x-a)^p f^p(x) dx.$$

Conclusion

Le but de se travail est le présenté,quelques inégalités intégrales similaires de Hardy, comme de (1) *et* (2) *du chapitre 3. En suite elle put être généralisée si on remplace*

$$\int_a^b \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx,$$

par

$$\int_a^b \left(\frac{F(x)}{g(x)}\right)^p dx,$$

avec $g > 0$.

Bibliographie

[1] *Banyat.Sroysang* , Une généralisation de l'inégalité intégrale similaire à l'inégalité de Hardy . Math.Aeterna,3(2013) 593-596 .1.

[2] *E.Lieb,M.loss* , Analysis *. American Mathematical Society.volume 14. 2000, Primary 28-01 , 42-01 , 49-01 .*

[3] *G.H.Hardy* . Noteon a Theorem of Hilbert *, Math.Z. 1920,6,314-317.*

[4] *H.Brezis* , Analyse fonctionnelle Théorie et application *, MASSONN , paris 1983.*

[5] *Ouardani.Abderrahmane* , Les inégalités de Hardy et leurs variantes *. Tiaret-univ. mémoire Magister .2008.*

[6] *V.I.Burenkov* , Mans inequalities in L_p, *Moscow-university1989.*

[7] *W.T.Sulaiman* , Reverses of Minkowski's Hölder's , and Hardy's integral inequalities *, Int,J.Mod .Math.Sci.2012,1(1), 14-24.*