République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Ibn Khaldoun -Tiaret-

Faculté des Mathématiques et Informatiques

Département des Mathématiques

Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme de Master

Domaine : " Mathématiques et Informatique "

Filière: " Mathématiques "

Spécialité: " Analyse Fonctionnelle et Applications "

Thème

Notions sur l'interpolation des espaces fonctionnels

Composition du jury :

Président : Mr. BENDAOUD A.S

Examinateur : Mr SOFRANI Med

Encadreur : Mr. SENOUCI Aek

Présentés par :

AICHOUBA Tewfik

ANTAR Radhwane

NEBRI kheira

Année universitaire : 2017/2018

Remerciements

Avant tout, nous remercions le bon Dieu tout puissant qui nous a aidé à accomplir ce travail.

*Nous tenous à adresser nos sincères remerciements à notre encadreur Mr **SENOUCI Aek** qui par ses conseils, ses recommandations, sa patience nous permis de réaliser ce mémoire avec un très grand plaisir.*

Merci même pour la confiance que vous avez accordée et la liberté que vous donnée.

Nos sincères remerciements à :

*Mr **BENDAOUD A.S** pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de notre mémoire.*

*Mr **SOFRANI Med** pour s'être intéressé à ce travail et d'avoir bien voulu l'honorer de sa présence le jury.*

Nous tiens aussi à remercier tout enseignant respectable qui nous aidé de près ou de loin.

Nous considérons ce mémoire le fruit de cinq ans de travail et d'effort, nous espérons que c'est une une petite récompense.

Merci pour tout ce que vous nous avez donné : le respect, la joie,...

Dédicace

Je remercie le bon Dieu le tout miséricordieux pour la faveur de l'islam, de
m'avoir donné la santé, la volonté, la force sans lesquels ce travail n'aurait pas
été réalisé et pour tout ce qu'il m'a offert dans cette vie.

J'offre ce modeste travail :

***A** ceux qui m'ont mis au monde, que je respect et qui m'honorent, ma mère et mon père*

A** mes chers frères, **Houari et Adda

A** tout mes amis, surtout **Ahmed, Badro** et **Radhwane

***A** tous ceux qui m'ont encouragé tout au long de mes études.*

Tewfik

Dédicace

Je dédie ce travail

A mes chers parents qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. « Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts.

A mes amis ***Tewfik, Abdelhamid et Hicham***

A tous ceux qui me sont chers.

A ceux qui m'ont toute donne sans rien en retour.

Radhwane

Dédicace

J'ai l''honneur de dédier ce modeste travail réaliser grâce à l'aide de dieu tout puissant

A ….

Celle qui matant bercé, tant donné et tant enseigné, toi qui m'a guidé Dans le droit chemin, toi qui m'a appris que rien est impossible…

toi

Ma chère maman.

Celui qui m'a toujours encouragé et soutenu durant toutes mes années d'études

toi

Très cher papa.

Mes chères sœurs

Mes chers frères

Mes tantes et, Mes oncles

Mes chères amies sur tout ***Amel***

Kheira

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La théorie de l'interpolation des espaces vectoriels a débuté par une observation faite par Jözef Marcinkiewicz et qui fut généralisée et connue sous le nom de théorème de Riesz-Thorin.

En termes simples, si la fonction est linéaire et continue sur un espace L_p et aussi sur un autre espace L_q, alors elle est aussi continue sur l'espace L_r, pour tout r compris entre p et q. En d'autres mots L_r est espace intermédiaire entre L_p et L_q.

En analyse un espace d'interpolation ou espace interpolé est un espace qui se trouve entre deux espaces. Les applications les plus importantes de cette notion ont lieu pour les espaces de Nikolsky-Besov dont les fonctions qui sont dérivables un nombre non-entier de fois. Les espaces sont crées par interpolation à partir des espaces de Sobolev (fonctions dérivables au sens faible un nombre entier de fois).

En d'autres termes $B^l_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ est un espace interpolé de L_p et W^m_p ou $0 < l < m$, $m \in \mathbb{N}$, on écrit

$$B^l_{p,\theta} = (L_p, W^m_p).$$

De nombreuse méthodes ont été mises au point pour construire de tels espaces de fonctions : Transformation de Fourier, interpolation complexe, interpolation réelle, dérivées fractionnaire, théorème de Chaatit, etc...
Dans ce travail on s'intéresse aux théorèmes de Riesz-Thorin et Marcinkiewicz avec quelques applications.

Dans le premier chapitre sont considérés les espaces de Lebesgue qui jouent un rôle assez important dans les chapitres qui suivent. On cite quelques inégalités intégrales relatives à ces espaces et qui sont aussi nécéssaires pour la suite.

Le deuxième chapitre aborde le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin. Ce dernièr est énoncé, prouvé et accompagné de quelques applications.

L'étude du troisième chapitre concerne le théorème d'interplation de Marcinkiewicz qui est prouvé, de plus la fin du chapitre comprend quelques applications.
A la fin du manuscrit on trouve une conclusion et une bibliographie.

CHAPITRE 1

RAPPELS

1.1 Tribus et mesures

Définition 1.1.1 *Soient U un ensemble, $\mathcal{T}$ une partie de U (i.e $\mathcal{T} \subset \rho(U)$). On dit que une famille de partie de $\mathcal{T}$ est une tribu (σ algèbre) sur U si $\mathcal{T}$ vérifie :*

1. *$\phi \in \mathcal{T}$.*
2. *$\mathcal{T}$ est stable par l'union dénombrable c-á-d :*

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}.$$

3. *$\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire c-á-d :*

$$\forall A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}.$$

Définition 1.1.2 *On appelle espace mesurable le couple $(U, \mathcal{T})$ où U est un ensemble et $\mathcal{T}$ est une tribu, les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés des ensembles mesurables de U.*

Définition 1.1.3 *Soit $(U,\mathcal{T})$ un espace mesurable, on appelle mesure, une application $\mu : \mathcal{T} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$* [1] *vèrifiant :*

1. $\mu(\phi) = 0$
2. *μ est σ -additive, c-á-d que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'èlèment de $\mathcal{T}$ disjoints deux à deux telle que $A_n \cap A_m = \emptyset$ et $n \neq m$ on a :*

$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Définition 1.1.4 *Soient $(U,\mathcal{T})$ un espace mesurable, μ une mesure de U. Le triple $(U,\mathcal{T},\mu)$ est appelé espace mesuré.*

1.1.1 Les fonctions mesurables

Définition 1.1.5 *Soient $(U,\mathcal{T}_U)$ et $(V,\mathcal{T}_V)$ deux espaces mesurables où $\mathcal{T}_U$ (respectivement $\mathcal{T}_V$) une tribu définie sur U (respectivement V). Une fonction*
$f : U \longrightarrow V$ est dite mesurable si

$$\forall A \in \mathcal{T}_V,\ f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_U. \qquad \square$$

1.2 Espaces de Lebesgue

Définition 1.2.1 *Soit $1 \leq p < \infty$. On désigne par $L_p(U,\mathcal{T},\mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) telles que :*

$$\|f\|_{L_p(U)} = \left(\int_U |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

1. $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Le cas $p = \infty, L_\infty(U, \mathcal{T}, \mu)$ *consistent en toutes les fonctions mesurables et les fonctions bornées presque-partout, alors on écrit*

$$\|f\|_{L_\infty(U)} = ess \sup_{x \in U} |f(x)| = \inf_{e \in U} \sup_{x \in U/e} |f(x)| = \inf \{C \geq 0,\ \mu\{x \in U :\ |f(x)| > C\} = 0\}.$$

Notation. - Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par p' l'exposant conjugué de p i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Proposition 1.2.1 ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient* $f \in L_p(U)$, $g \in L_{p'}(U)$ *et* $1 \leq p \leq \infty$ *avec* p' *l'exposant conjugué de* p*. Alors* $fg \in L_1(U)$ *et*

$$\int_U |f(t)g(t)|\, dt \leq \|f\|_{L_p(U)} \|g\|_{L_{p'}(U)}.$$

Preuve. Voir [3].

Proposition 1.2.2 ***(Inégalité de Minkowsky)*** *Soit* $1 \leq p \leq \infty$*, pour tout* $f, g \in L_p(U)$*. Alors* $f + g \in L_p(U)$ *et*

$$\|f + g\|_{L_p(U)} \leq \|f\|_{L_p(U)} + \|g\|_{L_p(U)}.$$

Preuve. Voir [3].

Proposition 1.2.3 ***(Inégalité de Minkowsky pour les intégrales)*** *Soient* $U \subset \mathbb{R}^n$ *et* $V \subset \mathbb{R}^m$ *deux ensembles mesurables,* $1 \leq p \leq \infty$ *et la fonction* F *est mesurable sur* $U \times V$*, alors*

$$\| \int_V F(x, y)\, dy \|_{L_p(U)} \leq \int_V \|F(x, y)\|_{L_p(U)}\, dy$$

Preuve. Voir [3].

Théorème 1.2.1 (Tonelli) *Soient* $U \subset \mathbb{R}^n$ *et* $V \subset \mathbb{R}^m$ *deux ensembles mesurables,* $F(x, y)$ *est une fonction intégrable sur* $U \times V$*. On suppose que*

$$\int_V F(x,y)\,dy \ < \infty \quad , \textit{pour presque tout } x \in U,$$

et que

$$\int_U dx \int_V |F(x,y)|\,dy \ < \infty.$$

Alors

$$\int_{U\times V} |F(x,y)|\,dx\,dy \ < \infty.$$

Théorème 1.2.2 (Fubini) *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ deux ensembles mesurables, $F(x,y)$ est une fonction intégrable sur $U \times V$. Alors pour presque tout $x \in U$,*

$$F(x,y) \in L_1(V)\ ,\ \int_V F(x,y)\,dy \in L_1(U),$$

de même, pour presque tout $x \in V$,

$$F(x,y) \in L_1(U)\ ,\ \int_U F(x,y)\,dx \in L_1(V),$$

de plus on a :

$$\int_{U\times V} F(x,y)\,dx\,dy = \int_U dx \int_V F(x,y)\,dy = \int_V dy \int_U F(x,y)\,dx.$$

$\square$

1.3 Fonctions de norme

Notations.

– Soit $\mathcal{M}^+$ L'ensemble des fonctions mesurables définies de U dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

– Soit E un sous ensemble de U, $\mathcal{X}_E$ la fonction indécatrice de E définit par :

$$\mathcal{X}_E(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in E \\ 0 & \text{si } t \notin E \end{cases}$$

Définition 1.3.1 *L'application* $\|.\| : \mathcal{M}^+ \longrightarrow [0, \infty]$ *est appelée fonction de norme si quelque soient* f, g *et* f_n *dans* $\mathcal{M}^+$ *telle que* $(n = 1, 2, \ldots)$, $\forall a \in \mathbb{C}(ou\, \mathbb{R})$ *et pour tout sous-ensemble* E *de* U, *vérifie les propriétés suivantes :*

(P_1) - $\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \quad p.p\,; \quad \|af\| = |a|\|f\|; \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

(P_2) - $0 \leq g \leq f \quad p.p \Longrightarrow \|g\| \leq \|f\|$

(P_3) - $0 \leq f_n \quad et \quad f_n \to f \quad p.p \Longrightarrow \|f_n\| \to \|f\|$

(P_4) - $\mu(E) < \infty \Longrightarrow \|\mathcal{X}_E\| < \infty$

(P_5) - $\mu(E) < \infty \Longrightarrow \int_E f d\mu \leq C_E \|f\|$, *où* C_E *est une constante positive.*

L'espace de Lebesgue L_p avec $1 \leq p \leq \infty$ est le simple exemple sur la fonction de norme, tels que :

$$\|f\|_{L_p(U)} = \begin{cases} \left(\int_U f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ ess \sup_U f & \text{si } p = \infty \end{cases} \qquad f \in \mathcal{M}^+$$

Proposition 1.3.1 *L'espace de Lebesgue* L_p *est un espace normé (semi-normé).*

Preuve. 1.1) *Pour* $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_{L_p(U)} = \left(\int_U f^p(u) du\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \quad p.p\,.$$

1.2) *Pour* $p = \infty$

$$\|f\|_{L_\infty(U)} = ess \sup_U \; f = 0 \Longleftrightarrow f = 0.$$

2) *Soit* $a \geq 0$

$$\|af\|_{L_p(U)} = a\|f\|_{L_p(U)}.$$

3) *Soit* $f, g \in \mathcal{M}^+$, *on applique l'inégalité de Minkowsky*

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq 2^{p-1} \left(|f|^p + |g|^p\right).$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\textstyle\int_U |f+g|^p du &\leq 2^{p-1} \textstyle\int_U \left(|f|^p + |g|^p\right) du \\ &\leq 2^{p-1} \left[\textstyle\int_U |f|^p du + \int_U |g|^p du\right],\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\left(\textstyle\int_U |f+g|^p du\right)^{\frac{1}{p}} &\leq 2^{\frac{p-1}{p}} \left[\textstyle\int_U |f|^p du + \int_U |g|^p du\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2^{1-\frac{1}{p}} \left(\left(\textstyle\int_U |f|^p du\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_U |g|^p du\right)^{\frac{1}{p}}\right),\end{aligned}$$

d'où

$$\left(\int_U |f+g|^p du\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_U |f|^p du\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_U |g|^p du\right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposition 1.3.2 *Soit U un ensemble mesurable, pour $1 \leq p \leq \infty$, on a :*

$$0 \leq g \leq f \quad p.p \Longrightarrow \|g\|_{L_p(U)} \leq \|f\|_{L_p(U)}$$

Preuve. 1) pour $1 \leq p < \infty$, on a :

$$\begin{aligned}0 \leq g \leq f \quad p.p &\Longrightarrow \int_U g^p du \leq \int_U f^p du \\ &\Longrightarrow \left(\int_U g^p du\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_U f^p du\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

d'où

$$\|g\|_{L_p(U)} \leq \|f\|_{L_p(U)}.$$

2) Pour $p = \infty$, on a : $0 \leq g \leq f$ $p.p$ et d'aprés la définition du sup-essentiel, on obtient :

$$ess\sup_U\ g \leq ess\sup_U\ f,$$

d'où

$$\|g\|_{L_\infty(U)} \leq \|f\|_{L_\infty(U)}.$$

Proposition 1.3.3 *Soit U un ensemble mesurable, pour $1 \leq p \leq \infty$ on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L_p(U)} = \|f\|_{L_p(U)}.$$

Preuve. D'aprés l'hypothése, on a :

1. f_n une suite de fonction positives et croissantes.

2. f existe tel que $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

On applique le théorème de la convergence monotone, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L_p(U)} &= \lim_{n\to\infty} \textstyle\int_U (f_n)^p \, d\mu \\
&= \textstyle\int_U \lim\limits_{n\to\infty} (f_n)^p \, d\mu \\
&= \textstyle\int_U \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)^p \, d\mu \quad (car\ p \geq 1) \\
&= \textstyle\int_U f^p d\mu = \|f\|_{L_p(U)}.
\end{aligned}$$

Proposition 1.3.4 *Soient U un ensemble mesurable et E un sous-ensemble de U, pour $1 \leq p \leq \infty$, on a :*

$$\mu(E) < \infty \Longrightarrow \|\mathcal{X}_E\|_{L_p(U)} < \infty$$

Preuve : Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a :

$$(\mu(E))^{\frac{1}{P}} = \left(\int_E (\mathcal{X}_E)^p \, du\right)^{\frac{1}{p}} = \|\mathcal{X}_E\|_{L_p(E)} < \infty.$$

Car :

si $1 \leq p < \infty$ $(\mu(E))^{\frac{1}{P}} \leq \mu(E) < \infty$

si $p = \infty$ $(\mu(E))^{\frac{1}{p}} = 1 < \infty$

Proposition 1.3.5 *Soit E un sous-ensemble de U,pour $1 \leq p \leq \infty$, on a :*

$$\mu(E) < \infty \ \Rightarrow \ \int_E f \, d\mu \leq C_E \|f\|_{L_p(E)}$$

Preuve. Pour $1 < p < \infty$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. On applique l'inégalité de Hölder et on prend $g = \mathcal{X}_E$, on obtient

$$\begin{aligned} \textstyle\int_E f\,d\mu &= \textstyle\int_E f\mathcal{X}_E\,d\mu \\ &\leq \left(\textstyle\int_E f^p\,du\right)^{\frac{1}{p}} \left(\textstyle\int_E (\mathcal{X}_E)^{p'}\,du\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C_E\|f\|_{L_p(E)} \end{aligned}$$

où $C_E = (\mu(E))^{\frac{1}{p'}}$. Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ sont evidents. $\square$

1.4 Inégalités multiplicatives

Proposition 1.4.1 *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, U un ensemble mesurable,*

$0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$, $\theta \in (0,1)$. *Alors*

$$\|f\|_{L_p(U)} \leq \|f\|^{\theta}_{L_{p_1}(U)} \|f\|^{1-\theta}_{L_{p_2}(U)}, \tag{1.1}$$

où

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}. \tag{1.2}$$

Preuve. 1) Soit $p_2 < \infty$. En appliquant l'inégalité de Hölder avec les paramétres $\dfrac{p_1}{\theta p}$ et $(\dfrac{p_1}{\theta p})' = \dfrac{p_2}{p(1-\theta)}$.

$$\int_U |f|^p\,dx = \int_U |f|^{\theta p} |f|^{(1-\theta)p}\,dx \leq \left(\int_U |f|^{p_1}\,dx\right)^{\frac{\theta p}{p_1}} \left(\int_U |f|^{p_2}\,dx\right)^{\frac{(1-\theta)p}{p_2}},$$

cela implique que

$$\|f\|_{L_p(U)} \leq \|f\|^{\theta}_{L_{p_1}(U)} \|f\|^{1-\theta}_{L_{p_2}(U)}.$$

2) Soit $p_2 = \infty$. Alors d'aprés (2) on a $\theta = \dfrac{p_1}{p}$ et

$$\begin{aligned}\int_U |f|^p\,dx &= \int_U |f|^{\theta p}|f|^{(1-\theta)p}\,dx \\ &\leq (\int_U |f|^{\theta p}\,dx)(\int_U |f|^{p_2}\,dx)^{\frac{1}{p_2}(1-\theta)p} \\ &= \|\,|f|^{\theta p}\,\|_{L_1(U)}\|\,|f|^{(1-\theta)p}\,\|_{L_\infty(U)} \\ &= \|f\|^{\theta p}_{L_{p_1}(U)}\|f\|^{(1-\theta)p}_{L_\infty(U)},\end{aligned}$$

d'où

$$\|f\|_{L_p(U)} \leq \|f\|^{\theta}_{L_{p_1}(U)}\|f\|^{(1-\theta)}_{L_\infty(U)}.$$

L'inégalité (1.1) **est l'une des plus simples des inégalités d'interpolation.**

□

1.5 Inégalités de Hardy

On consideré les opérateurs H_1 et H_2 défini par

$$(H_1 f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy, \quad \forall x > 0,$$

$(H_1 f)(x)$ est la valeur moyenne de la fonction f sur $(0, x)$.

$$(H_2 f)(x) = \frac{1}{x}\int_x^\infty f(y)\,dy, \quad \forall x > 0,$$

Théorème 1.5.1 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. $\forall f$ mesurable sur $(0,\infty)$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ on a :*

a) Si $\alpha < \dfrac{1}{p'}$

$$\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L_p(0,\infty)} \leq (\frac{1}{p'} - \alpha)^{-1}\|x^\alpha f(x)\|_{L_p(0,\infty)}. \tag{1.3}$$

b) Si $\alpha > \dfrac{1}{p'}$

$$\|x^\alpha (H_2 f)(x)\|_{L_p(0,\infty)} \leq (\alpha - \frac{1}{p'})^{-1}\|x^\alpha f(x)\|_{L_p(0,\infty)}. \tag{1.4}$$

Théorème 1.5.2 *Soient* $0 < p < 1$, $\alpha < \dfrac{1}{p'}$. *Alors existe une constante* $C_1 > 0$, *telle que* $\forall f$ *non négative monotone définie sur* $(0, \infty)$

$$\|x^\alpha (H_1 f)(x)\|_{L_p(0,\infty)} \leq C_1 \|x^\alpha f(x)\|_{L_p(0,\infty)}. \tag{1.5}$$

Si $\alpha > \dfrac{1}{p'}$, $\exists\, C_2 > 0$, *telle que* $\forall f$ *non négative décroissante on a :*

$$\|x^\alpha (H_2 f)(x)\|_{L_p(0,\infty)} \leq C_2 \|x^\alpha f(x)\|_{L_p(0,\infty)}. \tag{1.6}$$

□

1.6 Somme (différence) arithmétique

Définition 1.6.1 *Soit deux sous-ensembles* U_1 *et* U_2 *de* $\mathbb{R}^n$. *On désigne par* $U_1 + U_2$ *(respectivement* $U_1 - U_2$*) la somme (respectivement la différence) arithmétique de les sous-ensembles* U_1 *et* U_2 *definie comme suit :*

$$U_1 + U_2 = \{\ x \in \mathbb{R}^n\ : x = x_1 + x_2,\ \text{où}\ x_1 \in U_1\ \text{et}\ x_2 \in U_2\ \}.$$

Exemple 1.6.1 ***a)*** $[0, 1] + [0, 1] = [0, 2]$.

b) $[0, 1] - [0, 1] = [0, 1] + [-1, 0] = [-1, 1]$.

c) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $\forall r_1, r_2 > 0$, *on a :*

$$B(x_1, r_1) \pm B(x_2, r_2) = B(x_1 \pm x_2, r_1 \pm r_2),$$

où $B(x, r)$ *désigne la boule de centre* x *et de rayon* r.

Remarque 1. Dans l'étude, l'opérateurs T definit sur $L_{p_1(U)} \bigcup L_{p_2(U)}$ tels que

$$T : L_{p_k(U)} \longrightarrow L_{q_k(V)},\ k \in \{1, 2\},$$

ou

$$T : L_{p_k(U)} \longrightarrow L^{\star}_{q_k(V)},\ k \in \{1, 2\},$$

avec $0 < p_1,\, p_2,\, q_1,\, q_2 \leq \infty$ et $L^{\star}_{q_k(V)}$ sont des espaces de Marcinkiewicz.

Définition 1.6.2 *Soinet $L_{p_1(U)}$ et $L_{p_2(U)}$ deux espaces de Lebesgue. On désigne par $L_{p_1(U)} + L_{p_2(U)}$ la somme arithmétique c'est-à-dire la somme arithmétique des ensembles des fonctions dans les espaces $L_{p(U)}$*

$$L_{p_1(U)} + L_{p_2(U)} = \{f \in L_{p_1(U)} \bigcup L_{p_2(U)} : f = f_1 + f_2 \ \textit{où}\ f_1 \in L_{p_1(U)}\ \textit{et}\ f_2 \in L_{p_2(U)}\ \}.$$

$\square$

CHAPITRE 2

THÉORÈME DE RIESZ-THORIN

2.1 Préliminaires

Dans cette section, les scalaires peuvent être des nombres complexes.

Soit T est un opérateur linéaire de $L_p = L_p(U, du)$ dans $L_q = L_q(V, d\nu)$, celà signifie que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$. On peut écrire :

$$T : L_P \longrightarrow L_q.$$

Si en plus T est borné ,(i.e) si

$$M = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_{L_q}}{\|f\|_{L_p}}$$

est finie où M est la norme de l'opérateur T.

Lemme 2.1.1 ***(Le principe de Phragmén-Lindelöf)*** *Soit Ω une bande de $\mathbb{C}$ telle que $\Omega = \{z \ : \ x_1 < z < x_2\}$, x_1 et x_2 sont des réels.*

Soit F une fonction analytique sur Ω, continue sur sa frontière et s'il existe trois constante strictement positives M, K, A telles que :

$$\begin{cases} |F(z)| \leq K & \text{, sur la frontière de } \Omega \\ \dfrac{|F(z)|}{(Im(z))^A} \leq M & \text{, sur } \Omega \end{cases}$$

Alors

$$\forall z \in \Omega,\ |F(z)| \leq K.$$

Théorème 2.1.1 ***(Théorème d'Hadamard des trois droites)*** *Supposons que $F(z)$ une fonction analytique (holomorphe) sur la bande ouverte $0 < Re\, z < 1$ et bornée continue sur la bande fermée $0 \leq Re\, z \leq 1$. Si*

$$|F(it)| \leq M_0\ ,\ |F(1+it)| \leq M_1\ ,\ -\infty < t < +\infty.$$

Alors, on a :

$$|F(\theta + it)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}\ ,\ -\infty < t < +\infty, \forall \theta \in [0,1].$$

Preuve. Soient $\varepsilon \geq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, posons

$$F_\varepsilon(z) = F(z) e^{(\varepsilon z^2 + \lambda z)} \tag{2.1}$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} |F_\varepsilon(z)| &= |F(z) e^{(\varepsilon z^2 + \lambda z)}| \\ &= |F(z)| e^{(\varepsilon (Re\, z^2) + \lambda Re\, z)} \\ &\leq |F(z)| e^{(\varepsilon (1 - (Im\, z)^2) + \lambda Re\, z)} \end{aligned}$$

Quand $\quad Im\, z \longrightarrow \pm\infty$, $\quad |F_\varepsilon(z)| \longrightarrow 0.$

De plus, pour $-\infty < t < +\infty$

$$\begin{aligned}|F_\varepsilon(it)| &= |F(it)|e^{(\varepsilon(Re\,(it))^2+\lambda Re\,(it))}\\ &= |F(z)|e^{Re(-\varepsilon t^2+i\lambda t)}\\ &= |F(it)|e^{-\varepsilon t^2} \leq |F(it)|,\end{aligned}$$

d'où

$$|F_\varepsilon(it)| \leq |F(it)| \leq M_0.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}|F_\varepsilon(1+it)| &= |F(1+it)|e^{(\varepsilon(Re\,(1+it))^2+\lambda Re\,(1+it))}\\ &= |F(z)|e^{Re(\varepsilon+2i\varepsilon t-\varepsilon t^2+\lambda+i\lambda t)}|F_\varepsilon(1+it)|\\ &= |F(1+it)|e^{\varepsilon-\varepsilon t^2+\lambda} \leq |F(1+it)|e^{\varepsilon+\lambda}\\ &\leq |F(1+it)|e^{\varepsilon+\lambda} \leq M_1 e^{\varepsilon+\lambda}.\end{aligned}$$

D'aprés le principe de Phragmèn-Lindelöf avec $A = 1$ et $K = \max(M_0, M_1e^{\varepsilon+\lambda})$, on obtient :

$$|F_\varepsilon(z)| \ \leq \max(M_0, M_1e^{\varepsilon+\lambda}).$$

C'est-à-dire :

$$-\infty < t < +\infty,\ \forall\theta \in [0,1],\ |F_\varepsilon(\theta+it)| \leq \max(M_0, M_1e^{\varepsilon+\lambda}).$$

Depuis (2.1), on a : $|F(z)| = |F_\varepsilon(z)|e^{-\varepsilon(Re\,z)^2-\lambda Re\,z}$, alors

$$|F(\theta+it)| = |F_\varepsilon(\theta+it)|e^{-\varepsilon(\theta^2-t^2)}.$$

Cela imlique que : pour $-\infty < t < +\infty$ et $\forall\theta \in [0,1]$

$$\begin{aligned}|F(\theta+it)| &\leq |e^{-\varepsilon(\theta+it)^2-\lambda(\theta+it)}|max(M_0, e^{\varepsilon+\lambda}M_1)\\ &\leq e^{-\varepsilon(\theta^2-t^2)-\lambda\theta}max(M_0, e^{\varepsilon+\lambda}M_1)\\ &\leq e^{-\varepsilon(\theta^2-t^2)}max(M_0e^{-\lambda\theta}, e^{\varepsilon+(1-\theta)\lambda}M_1).\end{aligned}$$

Fixons $\forall\theta \in [0,1]$ et $-\infty < t < +\infty$, on peut passer à la limite $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}|F(\theta + it)| &\leq \max(M_0 e^{-\lambda\theta}, M_1 e^{\varepsilon+\lambda}) \\ &\leq \max(M_0 \rho^{-\theta}, M_1 \rho^{1-\theta})\end{aligned}$$

où $e^{-\lambda} = \rho$. Optimisons en ρ : le seconde membre est minimum lorsque

$M_0\rho^{-\theta} = M_1\rho^{1-\theta}$, c'est-à-dire $\rho = \frac{M_0}{M_1}$. Avec ce choix, on obtient :

$$|F(\theta + it)| \leq M_0^{1-\theta} M_0^{\theta}. \qquad \square$$

2.2 Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin

Théorème 2.2.1 *Soient p_0, q_0, p_1 et q_1 des réels tels que $p_0 \neq p_1$ et $q_0 \neq q_1$. On considère l'opérateur linéaire borné T tel que :*

$$T : L_{p_0}(U, d\mu) \longrightarrow L_{q_0}(V, d\nu),$$

de norme M_0, et

$$T : L_{P_1}(U, d\mu) \longrightarrow L_{q_1}(V, d\nu),$$

de norme M_1. Alors

$$T : L_p(U, d\mu) \longrightarrow L_q(V, d\nu),$$

de norme M, tel que :

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}, \tag{2.2}$$

où $0 < \theta < 1$ et

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \tag{2.3}$$

D'aprés (2.2) on a que M est logarithmiquement convexe (i.e) $\log M$ est convexe, on note aussi la signification géometrique de (2.3) sont les points sur le segment de droite *entre* $\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right)$ *et* $\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right)$. *Dans* [1] *on prouve aussi le théoreme de l'interpolation de Riesz-Thorin au moyen des méthodes abstraites.*

Preuve. Soient q, q' des exposants conjugués $\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,\ h \in L_q \text{ et } g \in L_{q'}\right)$.

On définit :

$$< h, g >= \int_V h(y)g(y)\, d\nu.$$

Alors

$$| < h, g > | = \left| \int_V h(y)g(y)\, d\nu \right| \leq \int_V |h(y)g(y)|\, d\nu.$$

D'apré l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$| < h, g > | \leq \int_{\mathbb{V}} |h(y)g(y)|\, d\nu \leq \|h\|_{L_p} \|g\|_{L_{q'}}.$$

Donc

$$\|h\|_{L_q} \geq \frac{| < h, g > |}{\|g\|_{L_{q'}}},$$

d'où

$$\|h\|_{L_q} = \sup_{\|g\|_{L_{q'}}=1} \{| < h, g > |\}.$$

On a :

$$\begin{aligned} T : L_p &\longrightarrow L_q \\ f &\longrightarrow Tf \end{aligned}$$

et

$$< Tf, g >= \int_V Tf(y)g(y)\, d\nu.$$

Alors

$$| < Tf, g > | = \left| \int_V Tf(y)g(y)\, d\nu \right| \leq \int_V |Tf(y)g(y)|\, d\nu.$$

Puisque q et q' sont conjugués et d'aprés l'inégalité de Höder, on obtient :

$$| < Tf, g > | \leq \int_V |Tf(y)g(y)|\, d\nu \leq \|Tf\|_{L_q} \|g\|_{L_{q'}}. \tag{2.4}$$

Comme T est borné, on a :

$$\|Tf\|_{L_q} \leq M\|f\|_{L_p}. \tag{2.5}$$

On majoré (2.4) par (2.5), on obtient :

$$|< Tf, g >| \leq M\|f\|_{L_p}\|g\|_{L_{q'}}.$$

Alors

$$M \geq \frac{|< Tf, g >|}{\|f\|_{L_p}\|g\|_{L_{q'}}},$$

d'où

$$M = \sup\{|< Tf, g >|, \|f\|_{L_p} = \|g\|_{L_{q'}} = 1\}. \tag{2.6}$$

Comme $p < \infty$ et $q' < \infty$, on suppose que f et g sont bornées et à support compact et $\|f\|_{L_p} = \|g\|_{L_{q'}} = 1$ d'aprés (2.6).

Pour $0 \leq Re(z) \leq 1, z \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_0}, \frac{1}{q'(z)} = \frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1},$$

et

$$\varphi(z) = \varphi(x, z) = |f(x)|^{\frac{p}{p(z)}} \frac{f(x)}{|f(x)|}, x \in U$$
$$\psi(z) = \varphi(y, z) = |g(y)|^{\frac{q'}{q'(z)}} \frac{g(y)}{|g(g)|}, y \in V$$

pour $f(x) \neq 0$ et $g(y) \neq 0$, on a $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont des fonctions analytiques (holomorphes). De plus, on a :

$$|\varphi(z)| = |\varphi(x, z)| = \left| |f(x)|^{\frac{p}{p(z)}} \frac{f(x)}{|f(x)|} \right|,$$

d'où

$$|\varphi(z)| = |f(x)|^{\frac{p}{p(z)}} = |f(x)|^{\frac{p}{p(Re\, z)}},$$

et

$$|\psi(z)| = |\psi(y,z)| = \left| |g(y)|^{\frac{q'}{q'(z)}} \frac{g(y)}{|g(y)|} \right|,$$

d'où

$$|\psi(z)| = |g(y)|^{\frac{q'}{q'(z)}} = |g(y)|^{\frac{q'}{q'(Re\, z)}}.$$

• Montrons que $\varphi(z) \in L_{p_j}$, $j = 0, 1$.

On a $|\varphi(z)| = |\varphi(x,z)| = |f(x)|^{\frac{p}{p(z)}}$ alors $|\varphi(z)|^{p_j} = (|f(x)|^{\frac{p}{p(z)}})^{p_j}$ et comme $f \in L_p$, donc f est mesurable, ainsi

$$|\varphi(z)|^{p_j} = |f(x)|^{p(\frac{p_j}{p(z)})}.$$

est mesurable, de plus

$$\int_{\mathbb{U}} |\varphi(z)|^{p_j}\, d\mu = \int_{\mathbb{U}} |f(x)|^{p(\frac{p_j}{p(z)})}\, d\mu \, < \infty.$$

D'où $\varphi(z) \in L_{p_j}$, $j = 0, 1$.

• Montrons que $\psi(z) \in L_{q'_j}$, $j = 0, 1$.

On a $|\psi(z)| = |\psi(y,z)| = |g(y)|^{\frac{q'}{q'(z)}}$, alors $|\psi(z)|^{q'_j} = (|g(y)|^{\frac{q'}{q'(z)}})^{q'_j}$ et comme $g \in L_{q'}$, donc g est mesurable, ainsi

$$|\psi(z)|^{q'_j} = |g(y)|^{q'(\frac{q'_j}{q'(z)})}$$

est mesurable, de plus

$$\int_{\mathbb{V}} |\psi(z)|^{q'_j}\, d\nu = \int_{\mathbb{V}} |g(y)|^{q'(\frac{q'_j}{q'(z)})}\, d\nu \, < \infty.$$

• Montrons que $T\varphi \in L_{q_j}$, $j = 0, 1$.

On a T est borné, alors $\|T\varphi\|_{L_{q_j}} \leq C\|\varphi\|_{L_{p_j}}$ et puisque $\|\varphi\|_{L_{p_j}}$ est finie, donc

$$\|T\varphi\|_{L_{q_j}} < \infty,$$

d'oú $T\varphi \in L_{q_j}$, $j = 0, 1$.

• Montrons que $\varphi'(z) \in L_{p_j}$, $j = 0, 1$

On a :

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= |f(x)|^{(\frac{p}{p(z)})-1} f(x) \\ &= |f(x)|^{p(\frac{(1-z)}{p_0}+\frac{z}{p_1}+\frac{1}{p})} f(x) \\ &= e^{p(\frac{(1-z)}{p_0}+\frac{z}{p_1}+\frac{1}{p}) \ln|f(x)|} f(x). \end{aligned}$$

Alors

$$\varphi'(z) = p(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}) \ln|f(x)| e^{p(\frac{(1-z)}{p_0}+\frac{z}{p_1}+\frac{1}{p}) \ln|f(x)|} f(x),$$

d'où

$$\varphi'(z) = p(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}) \ln|f(x)| \varphi(z).$$

On pose $\lambda = p(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0}) \ln|f(x)|$, alors on obtient :

$$\varphi'(z) = \lambda\varphi(z),$$

et comme $\varphi(z) \in L_{p_j}$, $j = 0, 1$, donc

$$\varphi'(z) \in L_{p_j},\ j = 0, 1.$$

D'une manière analogue on prouve que :

$$\psi'(z) \in L_{q_j},\ j = 0, 1$$

• Montrons que $T\varphi' \in L_{q_j}$, $j = 0, 1$

On a T est borné et $(T\varphi)' = T\varphi'$, alors $\|(T\varphi)'\|_{L_{q_j}} = \|T\varphi'\|_{L_{q_j}} \leq C_1\|\varphi'\|_{L_{p_j}}$ où $j = 0, 1$, et comme $\varphi' \in L_{p_j}$ alors $\|\varphi'\|_{L_j}$ est finie,donc $\|(T\varphi)'\|_{L_{q_j}} < \infty$, d'où

$$T\varphi' \in L_{q_j},\ j = 0, 1$$

• Montrons l'existence de $F(z)$ pour $0 \leq Re\, z \leq 1$

$$F(z) =< T\varphi(z), \psi(z) >= \int_V T\varphi(z)\psi(z)\, d\nu$$

Alors,

$$F(z) \leq |F(z)| \leq \int_V |T\varphi(z)\psi(z)\ | \,d\nu$$

Comme $T\varphi(z) \in L_{q'_j}$,$\psi(z) \in L_{q'_j}$ avec $j = 0, 1$ et q_j conjuqué de q'_j donc, d'aprés l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$F(z) \leq |F(z)| \leq \int_V |T\varphi(z)\psi(z)\ | \,d\nu \leq \|T\varphi\|_{L_{q_j}} \|\psi\|_{L_{q'_j}}$$

Donc $F(z) < \infty$ (car $\|T\varphi\|_{L_{q_j}} et\, \|\psi\|_{L_{q'_j}}$ sont finies). Ainsi l'existence de $F(z)$ est prouvée.

• Montrons que $F(z)$ est analytique (holomorphe) sur $0 < Re\, z < 1$.

Comme φ et ψ sont des fonctions analytiques (car sont des exponentienlles), alors il faut montrer que $F'(z)$ existe.

On a $F(z) =< T\varphi(z), \psi(z) >$, alors

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{\partial < T\varphi(z), \psi(z) >}{\partial z} \\ &= < \tfrac{T(\partial\varphi(z))}{\partial z}, \psi(z) > + < T\varphi(z), \tfrac{\partial\psi(z)}{\partial z} > \\ &= < T\varphi'(z), \psi(z) > + < T\varphi(z), \psi'(z) > . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} F'(z) &\leq |F'(z)| \\ &\leq |< T\varphi'(z), \psi(z) > | + | < T\varphi(z), \psi'(z) > |. \end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$F'(z) \leq |F'(z)| \leq \|T\varphi'\|_{L_{q_j}} \|\psi\|_{L_{q'_j}} \|T\varphi\|_{L_{q_j}} \|\psi'\|_{L_{q'_j}}$$

Donc $F'(z) < \infty$ (i.e) $F'(z)$ existe et alors $F(z)$ est analytique (holomorphe) sur $0 < Re\, z < 1$.

- Montrons que $F(z)$ est bornée continue sur $0 \leq Re\, z \leq 1$

a) Montrons que $F(z)$ est continue

Comme elle est composée de fonctions continues, alors $F(z)$ est continue sur $0 \leq Re\, z \leq 1$.

b) Montrer que F est bornée

$\forall Re\, z \in [0, 1]$:

$$|F(z)| \leq \int_V |T\varphi(z)\psi(z)| \; d\nu$$

D'aprés l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$|F(z)| \leq \|T\varphi\|_{L_{q_j}} \|\psi\|_{L_{q'_j}},$$

d'où $F(z)$ est bornée.

Pour $-\infty < t < +\infty$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\varphi(it)\|_{L_{p_0}} &= \left(\int_U \left| |f(x)|^{\frac{p}{p(it)}} \frac{f(x)}{|f(x)|} \right|^{p_0} \; d\mu\right)^{1/p_0} \\
&= \left(\int_U |f(x)|^{\frac{p}{p(it)} p_0} \; d\mu\right)^{1/p_0} \\
&= \left(\int_U |f(x)|^{\frac{p}{p(Re\,(it))} p_0} \; d\mu\right)^{1/p_0} \\
&= \left(\int_U |f(x)|^{\frac{p}{p_0} p_0} \; d\mu\right)^{1/p_0} \\
&= \left(\int_U |f(x)|^{p} \; d\mu\right)^{\frac{1}{p_0}\frac{p}{p}} \\
&= \left(\int_U |f(x)|^{p} \; d\mu\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{p_0}} ,
\end{aligned}$$

comme $\|f\|_{L_p} = 1$ [1], d'où

$$\|\varphi(it)\|_{L_{p_0}} = (\|f(x)\|_{L_p})^{\frac{p}{p_0}} = 1.$$

Et aussi

$$\begin{aligned}
\|\varphi(1+it)\|_{L_{p_1}} &= \left(\int_U \left| |f(x)|^{\frac{p}{p(1+it)}} \frac{f(x)}{|f(x)|}\right|^{p_1} d\mu\right)^{1/p_1} \\
&= \left(\int_U |f(x)|^{\frac{p}{p(1+it)}p_1} d\mu\right)^{1/p_1} \\
&= \left(\int_U |f(x)|^{\frac{p}{p(Re\,(1+it))}p_1} d\mu\right)^{1/p_1} \\
&= \left(\int_U |f(x)|^{\frac{p}{p_1}p_1} d\mu\right)^{1/p_1} \\
&= \left(\int_U |f(x)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p_1}\frac{p}{p}} \\
&= \left(\int_U |f(x)|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{p_1}},
\end{aligned}$$

alors

$$\|\varphi(1+it)\|_{L_{p_1}} = (\|f(x)\|_{L_p})^{\frac{p}{p_1}} = 1.$$

De même

$$\|\psi(it)\|_{L_{q'_0}} = \|\psi(1+it)\|_{L_{q'_1}} = 1.$$

Par hypothèse, on a : $|F(it)| \leq \int_V |T\varphi(it)\psi(it)| \, d\nu$ où $j = 0, 1$. D'aprés l'inégalité de Hölder et comme $T\varphi \in L_{q_0}$et $\psi \in L_{q'_0}$, on obtient :

$$|F(it)| \leq \|T\varphi(it)\|_{L_{q_0}} \|\psi(it)\|_{L_{q'_0}}, \tag{2.7}$$

comme T est borné, alors

$$\|T\varphi(it)\|_{L_{q_0}} \leq M_0 \|\varphi(it)\|_{L_{p_0}}. \tag{2.8}$$

On majoré (2.7) par (2.8), on obtient :

$$|F(it)| \leq M_0 \|\varphi(it)\|_{L_{p_0}} \|\psi(it)\|_{L_{q'_0}},$$

1. $M = \sup\{| < Tf, g > |, \|f\|_{L_p} = \|g\|_{L_{q'}} = 1\}$

d'où $|F(it)| \leq M_0$ avec $-\infty < t < +\infty$.

D'une manière analogue pour $|F(1+it)|$, on obtient :

$|F(1+it)| \leq M_1$ où $-\infty < t < +\infty$

Pour $0 < \theta < 1$, on pose $\varphi(\theta) = f$ et $\psi(\theta) = g$, alors

$$F(\theta) = < Tf, g >$$

D'aprés le théorème d'Hadamard des trois droites, on obtient :

$$|F(\theta)| = |< Tf, g >| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

Comme $M = \sup\{|< Tf, g >|, \|f\|_{L_p} = \|g\|_{L_{q'}} = 1\}$, alors on obtient :

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}. \qquad \square$$

2.3 Applications du théorème de Riesz-Thorin

Dans cette section, nous allons donner deux applications simples du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin. Nous les incluons pour illustrer le rôle du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin.

Dans les applications qui suivent, nous considerons le cas $U = V = \mathbb{R}^n$ et $d\mu = d\nu = dx$ (mesure de Lebesgue).

2.3.1 Inégalité de Hausdorff-Young

Théorème 2.3.1 *Soient* $1 \leq p \leq 2$, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, *où* $(\mathcal{F}f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{i<x,\xi>}dx$. *Alors :*

$$\|\mathcal{F}f\|_{L_{p'}} \leq (2\pi)^{\frac{n}{p'}} \|f\|_{L_p},\ \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Preuve. Soit T la transformation de Fourier notée par $\mathcal{F}$ telle que :

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i<x,\xi>}\,dx$$

où $< x, \xi >= x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$ avec $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$.

Alors on a :

$$\begin{aligned} |(\mathcal{F}f)(\xi)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i<x,\xi>}\,dx\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|e^{-i<x,\xi>}\,dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx. \end{aligned}$$

D'aprés la formule de Parseval :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(\mathcal{F}f)(\xi)|^2\,dx = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\,dx,$$

et

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\mathcal{F}f)(\xi)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

donc

$$\|(\mathcal{F}f)\|_{L_2} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\|f\|_{L_2}.$$

De plus, on a :

$$|(\mathcal{F}f)(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \|f\|_{L_1}$$

En passant à la borne supèrieure, on obtient :

$$\|\mathcal{F}f\|_{L_\infty} \leq \sup_{\xi} |(\mathcal{F}f)(\xi)| \leq \|f\|_{L_1}.$$

L'opérateur $\mathcal{F}$ est est donc définit comme suit :

$\mathcal{F} : L_1 \longrightarrow L_\infty$, de norme $M_0 \leq 1$,

$\mathcal{F} : L_2 \longrightarrow L_2$, de norme $M_1 = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$.

On applique le théorème de Riesz-Thorin à l'opérateur $\mathcal{F}$ et on obtient :

$$\mathcal{F} : L_p \longrightarrow L_q,\ \textit{de norme } M, \tag{2.9}$$

pour $p_0 = 1$, $p_1 = 2$, $q_0 = \infty$ et $q_1 = 2$, on a :

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2},\ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2},\ \theta \in]0,1[.$$

Comme suite :

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{\theta}{2},\ \frac{1}{q} = \frac{\theta}{2},\ \theta \in]0,1[.$$

En eliminant θ, on sait que $\dfrac{1}{p} = 1 - \dfrac{1}{q}$ (i.e) $p' = q = \dfrac{\theta}{2}$ où $1 < p < 2$. La norme M de l'opérteur (2.9) est bornée par $(2\pi)^{n(\frac{\theta}{2})} = (2\pi)^{\frac{n}{p'}}$ car $M_0 = 1$, $M_1 = (2\pi)^{\frac{n}{2}\theta}$ et comme $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$, on obtient :

$$M \leq (2\pi)^{\frac{n}{2}\theta} = (2\pi)^{n(\frac{\theta}{2})} = (2\pi)^{\frac{n}{p'}}.$$

Donc, on a prouvé l'inégalité de Hausdorff-Young (i.e) si $1 \leq p \leq 2$ on a :

$$\|\mathcal{F}f\|_{L_{p'}} \leq (2\pi)^{\frac{n}{p'}} \|f\|_{L_p}. \qquad \square$$

2.3.2 Inégalité de Young

Théorème 2.3.2 *Si $K \in L_\rho$ et $f \in L_p$ où $1 < \rho < \rho'$, alors $(k * f) \in L_q$ pour $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\rho'}$ et*

$$\|(k * f)\|_{L_q} \leq \|K\|_{L_\rho} \|f\|_{L_p}.$$

Preuve. Soit T l'opérateur de convolution définit par :

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y)\, dy = (K * f)(x),$$

où K la fonction donnèe dans L_p. Alors

$$\|Tf\|_{L_\rho} = \left\| \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y) f(y)\, dy \right\|_{L_\rho}$$

D'aprés les inégalitées de Minkowsky, Fubini et Hölder on obtient :

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L_\rho} &\leq \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \|K(x-y) f(y)\|_{L_\rho}\, dy \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \|K(x-y)\|_{L_\rho} |f(y)|\, dy \\ &\leq \|K(x-y)\|_{L_\rho} \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy, \end{aligned}$$

par conséquent on obtient :

$$\|Tf\|_{L_\rho} \leq \|K\|_{L_\rho} \|f\|_{L_1}. \tag{2.10}$$

De plus, on a pour tout x

$$|Tf(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |K(x-y) f(y)|\, dy$$

D'aprés l'inégalité de Hölder où ρ,ρ' sont des conjugués, on obtient :

$$|Tf(x)| \leq \|K\|_{L_\rho} \|f\|_{L_{\rho'}},$$

donc

$$\|Tf\|_{L_\infty} \leq \|K\|_{L_\rho} \|f\|_{L_{\rho'}}. \tag{2.11}$$

D'aprés (2.10) et (2.11), l'opérateur T est donc définit comme suit :

$T : L_1 \longrightarrow L_\rho$, de norme $M_0 = \|K\|_{L_\rho}$.

$T : L_{\rho'} \longrightarrow L_\infty$, de norme $M_1 = \|K\|_{L_\rho}$.

On peut appliquer le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin à l'opérateur T, et on obtient :

$$T : L_p \longrightarrow L_q, \tag{2.12}$$

où

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{\rho'},\ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\rho} + \frac{\theta}{\infty}\ et\ 0 < \theta < 1.$$

En éliminant θ, on a $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\rho'}$ et $1 \leq p \leq \rho'$. La norme M de l'opérateur (2.12) est majorée par $\|K\|_{L_\rho}$ (i.e)

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_0^{\theta} \leq (\|K\|_{L_\rho})^{1-\theta+\theta} = \|K\|_{L_\rho}$$

Donc, on a prouvé l'inégalité de Young : Si $K \in L_\rho$ et $f \in L_p$ où $1 < \rho < \rho'$, alors $(k * f) \in L_q$ pour $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\rho'}$ et

$$\|(k * f)\|_{L_q} \leq \|K\|_{L_\rho} \|f\|_{L_p}. \qquad \square$$

CHAPITRE 3

THÉORÈME DE MARCINKIEWICZ

3.1 Fonctions de disrtribution

Définition 3.1.1 *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. La fonction de distribution de f est la fonction $\lambda(f,\sigma)$ définie par l'égalité suivante :*

$$\lambda(f,\sigma) = \mu\{x \ : |f(x)| > \sigma\}, \forall \sigma \in [0,\infty)$$

où μ désigne la mesure de Lebesgue.

Proposition 3.1.1 *$\lambda(f,\sigma)$ est une fonction positive, décroissante de σ et continue à droite.*

Preuve. a) soient σ_1,σ_2 deux réels positifs tels que : $\sigma_1 \leq \sigma_2$, on a l'inclusion :

$$\{x \ : |f(x)| > \sigma_1\} \supset \{x \ : |f(x)| > \sigma_2\},$$

d'où

$$\mu\{x\ :|f(x)|>\sigma_1\}\geq\mu\{x\ :|f(x)|>\sigma_2\}.$$

Alors

$$\lambda(f,\sigma_1)\geq\lambda(f,\sigma_2),$$

donc $\lambda(f,\sigma)$ est décroissante.

$b)$ Montrons la continuité à droite :

$\lambda(f,\sigma)$ est une fonction décroissante de σ alors il suffit de montrer que

$\lim_{n\to\infty}\lambda(f,\sigma+\frac{1}{n})=\lambda(f,\sigma)$.

On a la suite d'ensembles $A_n=\{x\ :|f(x)|>\sigma+\frac{1}{n}\}$ est décroissante pour l'inclusion

où $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\mu(\cap_{n=1}^{\infty}A_n) &= \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\lambda(f,\sigma+\tfrac{1}{n})\\ &= \lambda(f,\sigma),\end{aligned}$$

alors $\lambda(f,\sigma)$ est continue à droite.

Proposition 3.1.2 *Pour $1\leq p\leq\infty$, on a :*

$$\|f\|_{L_p}=(p\int_0^{\infty}\sigma^p\lambda(f,\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma})^{\frac{1}{p}},\ si\ 1\leq p<\infty. \tag{3.1}$$

$$\|f\|_{L_\infty}=\inf\{\sigma:\ \lambda(f,\sigma)=0\} \tag{3.2}$$

Preuve. Pour $1\leq p<\infty$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\sigma^{p-1}\lambda(f,\sigma)\,d\sigma &= \int_0^{\infty}\tfrac{\sigma^p}{\sigma}\lambda(f,\sigma)\,d\sigma\\ &= \int_0^{\infty}\tfrac{\sigma^p}{\sigma}\left(\int_{\{x\ :|f|>\sigma\}}d\mu\right)d\sigma\\ &= \int_0^{\infty}\tfrac{\sigma^p}{\sigma}\left(\int_U 1_{\{x\ :|f|>\sigma\}}\,d\mu\right)d\sigma\,;\end{aligned}$$

d'aprés le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \tfrac{\sigma^p}{\sigma} \int_{\mathbb{U}} 1_{\{x\,:|f|>\sigma\}}\, d\mu d\sigma &= \int_{\mathbb{U}} \left(\int_0^{|f(x)|} \tfrac{\sigma^p}{\sigma}\, d\sigma \right) d\mu \\
&= \int_U \tfrac{1}{p} |f(x)|^p\, dx = \tfrac{1}{p} \int_U |f(x)|^p\, dx \\
&= \tfrac{1}{p} \|f\|_{L_p}^p,
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^\infty \sigma^p \lambda(f,\sigma)\, \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{1}{p} \|f\|_{L_p}^p,$$

$$\|f\|_{L_p}^p = p \int_0^\infty \sigma^p \lambda(f,\sigma)\, \frac{d\sigma}{\sigma},$$

et

$$\|f\|_{L_p} = \left(p \int_0^\infty \sigma^p \lambda(f,\sigma)\, \frac{d\sigma}{\sigma} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$ on a par défintion :

$$\|f\|_{L_\infty} = \inf \left\{ \sigma \geq 0,\ \mu\{x \in U :\ |f(x)| > \sigma\} = 0 \right\},$$

et d'aprés la définition de $\lambda(f,\sigma)$

$$\|f\|_{L_\infty} = \inf\{\sigma\ :\ \lambda(f,\sigma) = 0\}.$$

3.2 Espaces de Marcinkiwiecz(espaces faibles)

Définition 3.2.1 *Soient $0 < p \leq \infty$, U un ensemble mesurable $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Pour $0 < p < \infty$, on dit que $f \in L_p^\star$ (espace de Marcinkiewicz ou espace faible) si f est mesurable sur U et*

$$\|f\|_{L_p^\star}^{(1)} = \sup_{\sigma \in [0,\infty)} \sigma (\lambda(f,\sigma))^{\frac{1}{p}} \qquad < \infty,$$

dans le cas $p = \infty$, on a : $L_\infty^\star = L_\infty$.

Lemme 3.2.1 ***(Inégalités multiplicatives)*** *Soient $U \in \mathbb{R}^n$,U un ensemble mesurable, $0 < p_1 < p < p_2 < \infty$. Alors*

$$\|f\|_{L_p^\star(U)} \leq \|f\|_{L_{p_1}^\star(U)}^{1-\theta} \|f\|_{L_{p_2}^\star(U)}^{\theta}, \tag{3.3}$$

et

$$\|f\|_{L_p(U)} \leq \left[\frac{p(p_2 - p_1)}{(p - p_1)(p_2 - p)}\right]^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p_1}(U)}^{1-\theta} \|f\|_{L_{p_2}(U)}^{\theta}, \tag{3.4}$$

où $\theta \in (0,1)$ est définie par l'égalité $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_1} + \dfrac{\theta}{p_2}$.

Lemme 3.2.2 *Pour σ_1, σ_2 positifs tels que $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, et pour f,g des fonction mesurables,*

on a :

$$\lambda(f + g, \sigma) = \lambda(f, \sigma_1) + \lambda(g, \sigma_2).$$

Preuve. Il suffit de constater que :

$$\{x : |(f + g)(x)| > \sigma\} \subset (\{x : |f(x)| > \sigma_1\} \cup \{x : |g(x)| > \sigma_2\}),$$

Pour cela on montre que :

$$(\{x : |f(x)| > \sigma_1\} \cup \{x : |g(x)| > \sigma_2\})^c \subset (\{x : |(f + g)(x)| > \sigma\})^c.$$

Soit $(\{x : |f(x)| > \sigma_1\} \cup \{x : |g(x)| > \sigma_2\})^c$, alors :

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma.$$

Ainsi

$$x \in (\{x : |(f + g)(x)| \leq \sigma\}),$$

d'où

$$\{x : |(f + g)(x)| > \sigma\} \subset \{x : |f(x)| > \sigma_1\} \cup \{x : |g(x)| > \sigma_2\}.$$

Cela implique que :

$$\mu(\{x : |(f+g)(x)| > \sigma\}) \leq \mu(\{x : |f(x)| > \sigma_1\}) + \mu(\{x : |g(x)| > \sigma_2\}),$$

donc

$$\lambda(f+g,\sigma) = \lambda(f,\sigma_1) + \lambda(g,\sigma_2). \tag{3.5}$$

Définition 3.2.2 *Soit $\|.\|$ une application de X dans $\mathbb{R}$ où X un espace vectoriel. On dit que $\|.\|$ est une quasi-norme si :*

(i) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, pour tou α de $\mathbb{R}$ et x de X

(iii) il existe $k > 1$ tel que $\|x+y\| \leq k(\|x\| + \|y\|)$, pour tout x et y de X

Proposition 3.2.1 *Pour $0 < p < \infty$, $\left(L_p^\star, \|.\|_{L_p^\star}\right)$ est un espace quasi-normé.*

Preuve. (i) si $\|f\|_{L_p^\star} = 0$ alors pour tout $\sigma > 0$, $\lambda(f,\sigma) = 0$ et par définition de $\lambda(f,.)$, on déduit que f est nulle presque partout.

(ii) pour tout réel α , on a :

$$\lambda(\alpha f,\sigma) = \mu\{x :\ |f(x)| > \frac{\sigma}{|\alpha|}\},$$

alors

$$\|\alpha f\|_{L_p^\star} = \sup_{\sigma\geq 0} \sigma(\lambda(\alpha f,\sigma))^{\frac{1}{p}} = \sup_{\sigma\geq 0} \sigma(\lambda(f,\frac{\sigma}{|\alpha|}))^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \sup_{\frac{\sigma}{|\alpha|}\geq 0} \frac{\sigma}{|\alpha|}(\lambda(f,\frac{\sigma}{|\alpha|}))^{\frac{1}{p}} = |\alpha|\|f\|_{L_p^\star}.$$

(iii) D'aprés l'inégalité $(a+b)^{\frac{1}{p}} \leq a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}}$, le lemme (3.1.2) et pour $\sigma_1 = \sigma_2 = \dfrac{\sigma}{2}$, on obtient : $\forall \sigma \geq 0$

$$(\lambda(f+g,\sigma))^{\frac{1}{p}} \leq \left(\lambda(f,\frac{\sigma}{2})\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\lambda(g,\frac{\sigma}{2})\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda(f+g,\sigma))^{\frac{1}{p}} &\leq \sigma\left(\lambda(f,\tfrac{\sigma}{2})\right)^{\frac{1}{p}} + \sigma\left(\lambda(g,\tfrac{\sigma}{2})\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2\left(\tfrac{\sigma}{2}\lambda(f,\tfrac{\sigma}{2})\right)^{\frac{1}{p}} + 2\left(\tfrac{\sigma}{2}\lambda(g,\tfrac{\sigma}{2})\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2\left(\tfrac{\sigma}{2}\lambda(f,\tfrac{\sigma}{2})^{\frac{1}{p}} + \tfrac{\sigma}{2}\lambda(g,\tfrac{\sigma}{2})^{\frac{1}{p}}\right), \end{aligned}$$

en passant à la borne supèrieure, on obtient :

$$\|f+g\|_{L_p^\star} \leq 2(\|f\|_{L_p^\star} + \|g\|_{L_p^\star}). \qquad \square$$

Les espaces $L_p^\star$ sont en particulier des espaces de Lorentz L_{pr}, en utilisant un autre concept.

3.3 Espaces de Lorentz

Définition 3.3.1 *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, U un ensemble mesurable, $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, une fonction mesurable. On appelle réarrangement de la fonction f dans un ordre décroissant, la fonction $f^\star$ définie par l'égalité : $\forall t \in [0,\infty)$*

$$f^\star(t) = \inf\{\sigma \in [0,\infty) : \ \lambda(\sigma, f) \leq t\} \tag{3.6}$$

Les propriété de la fonction $f^\star$ sont comme suit :

1) $f^\star \geq 0$, décroissante et continue à droite.

2) $\lambda_{f^\star} = \lambda_f$ sur $[0,\infty)$. $\qquad (3.6)'$

3) $f^\star(t) = |f(t)|^\star$.

4) $\sigma = f^\star(t) \Leftrightarrow t = \lambda(f,\sigma)$. $\qquad (3.6)''$

Remarque 1 $\forall f \in L^\star_{p(U)}$, $0 < p \leq \infty$ *on a :*

$$\|f\|^{(2)}_{L_p^\star(U)} = \sup_{t\in[0,\infty)} t^{\frac{1}{p}} f^\star(t)$$

Lemme 3.3.1 $\forall f \in L^{\star}_{p(U)}$, *on a :*

$$\|f\|^{(1)}_{L^{\star}_{p}(U)} = \|f\|^{(2)}_{L^{\star}_{p}(U)}.$$

Preuve. Si pour un σ donné, il y a un t tel que $f^{\star}(t) = \sigma$, d'aprés (4), on a :

$$\lambda(f, \sigma) \leq t,$$

ainsi

$$\sigma(\lambda(f, \sigma))^{\frac{1}{p}} \leq t^{\frac{1}{p}} f^{\star}(t),$$

d'où par passage au sup par rapport à σ ensuite par rapport à t, on obtient :

$$\|f\|^{(1)}_{L^{\star}_{p}(U)} \leq |f\|^{(2)}_{L^{\star}_{p}(U)}. \tag{3.7}$$

D'autre part, pour $\varepsilon \geq 0$ et d'aprés la définition carctéristique du sup, on obtient :

$$\|f\|^{(2)}_{L^{\star}_{p}(U)} \leq t^{\frac{1}{p}} f^{\star}(t) + \varepsilon$$

et d'aprés $(***)$, on a :

$$\|f\|^{(2)}_{L^{\star}_{p}(U)} \leq \sigma(\lambda(f, \sigma))^{\frac{1}{p}} + \varepsilon,$$

en passant à la borne supèrieure, on a :

$$\|f\|^{(2)}_{L^{\star}_{p}(U)} \leq \|f\|^{(1)}_{L^{\star}_{p}(U)}, \tag{3.8}$$

alors d'aprés (3.7) et (3.8) on obtient

$$\|f\|^{(1)}_{L^{\star}_{p}(U)} = \|f\|^{(2)}_{L^{\star}_{p}(U)}.$$

Lemme 3.3.2 *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable, $f, g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables,* $\forall$ t_1,$t_2$$\in [0, \infty)$

$$(f + g)^{\star}(t_1 + t_2) \leq f^{\star}(t_1) + g^{\star}(t_2), \tag{3.9}$$

et

$$(fg)^\star(t_1+t_2) \le f^\star(t_1)g^\star(t_2). \tag{3.10}$$

Le théorème suivant est prouvé dans [2].

Théorème 3.3.1 *Soient $0 < p \le \infty$, $U \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble mesurable,une fonction f mesurable sur U, alors*

$$\|f\|_{L_p(U)} = \|f^\star\|_{L_p(0,\infty)} = \|f^\star\|_{L_p[0,mes\,U)}. \tag{3.11}$$

Définition 3.3.2 *Pour $1 \le p \le \infty$, on définit l'espace de Lorentz, noté L_{pr}, par :*
$\|f\|_{L_{pr}(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^\star(t))^r \, \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,\ 1 \le r < \infty,$
$\|f\|_{L_{p\infty}(U)} = \|f\|^{(2)}_{L_p^\star(U)} = \sup_{t\ge 0}(t^{\frac{1}{p}} f^\star(t)) < \infty.$

Proposition 3.3.1 *Soit $1 \le p \le \infty$. Alors*

1) $\|f\|_{L_{pp}(0,\infty)} = \|f\|_{L_p(0,\infty)}$,

2) $\|f\|_{L_{p\infty}(U)} = \|f\|^{(2)}_{L_p^\star(U)} = \|f\|^{(1)}_{L_p^\star(U)}$.

Preuve. 1) Si $r = p$, alors

$$\|f\|_{L_{pp}(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty (f^\star)^p(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|f^\star\|_{L_p(0,\infty)},$$

d'aprés (3.1) et (3.1)$'$, on obtient :

$$\|f^\star\|_{L_p(0,\infty)} = (p\int_0^\infty \sigma^p \lambda(f^\star,\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma})^{\frac{1}{p}},$$

alors

$$(p\int_0^\infty \sigma^p \lambda(f^\star,\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma})^{\frac{1}{p}} = (p\int_0^\infty \sigma^p \lambda(f,\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma})^{\frac{1}{p}}, = \|f\|_{L_p(0,\infty)}$$

d'où

$$\|f\|_{L_{pp}(0,\infty)} = \|f\|_{L_p(0,\infty)}.$$

2) Si $r = \infty$, voir la preuve du lemme (3.2.3).

Remarque 2 *En général, les espaces de Lorentz sont des espaces qausi-normé mais dans le cas où* $p > 1$*, il est possible de remplacer la qausi-norme par une norme et donc les* L_{pr} *devient des espaces de Banach.* $\square$

3.4 Théorème d'interpolation de Marcinkiewicz

On montre avec certaines suppositions supplémentaires relatives aux paramètres, que le théorème de Riesz-Thorin peut-être renforcé, c'est à dire que la bornétude de l'opérateur $T : L_{p(U)} \longrightarrow L_{q(V)}$ peut-être établie sur des conditions plus faibles par rapport à l'opérateur

$$T : L_{p_k(U)} \longrightarrow L_{q_k(V)}, \quad (k = 1, 2);$$

c'est-à-dire qu'on peut considérer des opérateurs plus généraux et non seulement linéaires.

Définition 3.4.1 *L'opérateur $T : L_{p(U)} \longrightarrow L_{q'(V)}$ est dit sub-additif :*

1) *Si son domaine de définition contient les fonctions f, g et leur somme arithmétique $f + g$, de plus est vérifiée l'inégalité suivante :*

$$|T(f + g)| \leq |Tf| + |Tg|.$$

2) *Si son domaine de définition contient f et αf $\forall \alpha \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ et est vérifiée l'inégalité*

$$|T(\alpha f)| \leq |\alpha||f|.$$

Théorème 3.4.1 (Théorème d'interpolation de Marcinkiewicz) *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ des ensembles mesurables,*

$$0 < p_1 \leq q_1 \leq \infty, \; 0 < p_2 \leq q_2 \leq \infty, \; q_1 \neq q_2; \tag{3.12}$$

un opérateur sub-additif défini sur $L_{p_1(U)} + L_{p_2(U)}$, tel que

$$T : L_{p_1(U)} \longrightarrow L^{\star}_{q_1(V)}, \; T : L_{p_2(U)} \longrightarrow L^{\star}_{q_2(V)}, \tag{3.13}$$

de plus

$$\|T\|_{L_{p_1(U)}\longrightarrow L^\star_{q_1(V)}} < \infty, \quad \|T\|_{L_{p_2(U)}\longrightarrow L^\star_{q_2(V)}} < \infty. \tag{3.14}$$

Alors quelque soit p et q tels que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2} \ , \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}, \tag{3.15}$$

pour un certain $\theta \in (0,1)$,

$$T : L_{p(U)} \longrightarrow L_{q(V)}, \tag{3.16}$$

existe la constante $C > 0$, dépendant seulement de p_1, p_2, q_1, q_2, p et q, telle que

$$\|T\|_{L_{p(U)}\longrightarrow L_{q(V)}} \leq C\|T\|^{1-\theta}_{L_{p_1(U)}\longrightarrow L^\star_{q_1(V)}} \|T\|^{\theta}_{L_{p_2(U)}\longrightarrow L^\star_{q_2(V)}}. \tag{3.17}$$

Remarque 3 ***1.*** *Géometriquement les conditions* (3.12) *et* (3.15) *peuvent être interpretées comme suit : les points* $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ *avec* $0 < \theta < 1$*, parcourent l'intervalle reliant les points* $\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right)$ *et* $\left(\frac{1}{p_2}, \frac{1}{q_2}\right)$ *qui se trouve sur la bissectrice du* 1^{er} *quart du plan des coordonnées.*

2. *Il est aussi utilisé la terminologie suivante. Si l'opérateur T est borné en tant que opérateur de $L_{p(U)}$ vers $L_{q(V)}$, alors on dit que T est un opérateur de type fort (p,q) et s'il est borné de $L_{p(U)}$ vers $L^\star_{q(V)}$, alors on dit que T est un opérateur de type faible (p,q). A l'aide de cette terminologie, le théorème peut-être formulé comme suit :*
Si la condition (3.12) *est vérifiée et si l'opérateur sub-additif T est au même temps un opérateur de type faible (p_1,q_1) et (p_2,q_2), alors pour les points q indiqués dans le théorème, T est du type fort (p,q).*

3. *Du théorème, il s'ensuit que pour établir pour un certain $C_0 > 0$, $\forall f \in L_{p(U)}$*

$$\|Tf\|_{L_{q(V)}} \leq C_0\|f\|_{L_{p(U)}}, \tag{3.18}$$

il suffit de prouver deux inégalités pour lesquelles $C_1 > 0$, $C_2 > 0$

$$\|Tf\|_{L^\star_{q_1(V)}} \leq C_1 \|f\|_{L_{p_1(U)}} \ \ et\ \ \|Tf\|_{L^\star_{q_2(V)}} \leq C_2 \|f\|_{L_{p_2(U)}}, \tag{3.19}$$

où dans la 1^{ere} *inégalité* $\forall f \in L_{p_1(U)}$ *et dans la* 2^{eme} *inégalité* $\forall f \in L_{p_2(U)}$, *avec* p, q , p_1, q_1 *et* p_2, q_2 *qui sont liés par* (3.12) *et* (3.15).

Le lemme suivant est prouvé dans [2].

Lemme 3.4.1 *Soient* $U \subset \mathbb{R}^n$, U *un ensemble mesurable,* f *une fonction mesurable sur* U. *Alors* $\forall \xi \in (0, \infty)$, *il existe des fonctions* $f_{1,\xi}$ *et* $f_{2,\xi}$ *mesurables sur* U , *telles que* $f = f_{1,\xi} + f_{2,\xi}$ *sur* U *et* $\forall p \in (0, \infty]$

$$\|f_{1,\xi}\|_{L_p(U)} = \|f^\star\|_{L_p(0,\xi)} \ \ , \ \ \|f_{2,\xi}\|_{L_p(U)} = \|f^\star\|_{L_p(\xi,\infty)}. \tag{3.20}$$

Conséquence Si $0 < p_1 < p < p_2 \leq \infty$, $f \in L_{p(U)}$, alors $\forall \xi \in (0, \infty)$

$$f_{1,\xi} \in L_{p_1(U)} \ \ , \ \ f_{2,\xi} \in L_{p_2(U)}.$$

Preuve. D'une part en vertu l'inégalité de Hölder on a :

$$\|f_{1,\xi}\|_{L_{p_1(U)}} = \|f^\star\|_{L_{p_1}(0,\xi)}.$$

En prenant comme paramètres $\dfrac{p}{p_1}$ et $\left(\dfrac{p}{p_1}\right)' = \dfrac{p}{p-1}$ dans l'inégalité de Hölder pour $(f^\star)^{p_1}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|f^\star\|_{L_{p_1}(0,\xi)} = \left(\int_0^\xi (f^\star)^{p_1}\, dx\right)^{\frac{1}{p_1}} &\leq \left[\|(f^\star)^{p_1}\|_{L_{\frac{p}{p_1}}} |\xi|^{\frac{p-p_1}{p}}\right]^{\frac{1}{p_1}} \\
&= \xi^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}} \|f^\star\|_{L_p(0,\xi)} \\
&\leq \xi^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(0,\xi)} \ < \infty,
\end{aligned}$$

et d'autre part pour $p_2 < \infty$

$$\|f_{2,\xi}\|_{L_{p_2(U)}} = \|f^\star\|_{L_{p_2(\xi,\infty)}} = \left(\int_\xi^\infty |(f^\star)(t)|^{p_2}\, dt\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$= f^\star(\xi)\left(\int_\xi^\infty \left|\frac{f^\star(t)}{f^\star(\xi)}\right|^{p_2} dt\right)^{\frac{1}{p_2}} = I.$$

Comme $\left|\dfrac{f^\star(t)}{f^\star(\xi)}\right| < 1$, alors

$$\left|\frac{f^\star(t)}{f^\star(\xi)}\right|^{p_2} < \left|\frac{f^\star(t)}{f^\star(\xi)}\right|^{p},$$

d'où

$$I \leq f^\star(\xi)\left(\int_\xi^\infty \left|\frac{f^\star(t)}{f^\star(\xi)}\right|^{p} dt\right)^{\frac{1}{p_2}} = |f^\star(\xi)|^{1-\frac{p}{p_2}} \|f^\star\|_{L_p(\xi,\infty)}^{\frac{p}{p_2}}$$

$$\leq |f^\star(\xi)|^{1-\frac{p}{p_2}} \|f\|_{L_p(\xi,\infty)}^{\frac{p}{p_2}} < \infty.$$

Si $p = \infty$

$$\|f_{2,\xi}\|_{L_\infty(U)} = \|f^\star\|_{L_\infty(\xi,\infty)} = f^\star(\xi) < \infty.$$

On a pris en considération le fait que $\forall \xi \in (0,\infty)$, $f^\star(\xi) < \infty$ et $f^\star$ décroissante sur $(0,\infty)$.

Preuve. (Théorème d'interpolation de Marcinkiewicz)

1. Soit $p_1 \neq p_2$. On prouve le théorème pour $p_1 = q_1$ et $p_2 = q_2$, pour la preuve dans le cas général on peut consulter [8] et [11].

Alors $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_1} + \dfrac{\theta}{p_2}$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{p_1} + \dfrac{\theta}{p_2}$, d'où $p = q$.

On pose

$$M_1 = T : L_{p_1(U)} \longrightarrow L^\star_{p_1(V)} \quad , \quad M_2 = T : L_{p_2(U)} \longrightarrow L^\star_{p_2(V)}$$

2. Au début on prouve que l'opérateur :

$$T : L_{p(U)} \longrightarrow L_{p(V)} \text{ est borné.}$$

Soit $f \in L_{p(U)}$, $\forall \xi \in (0,\infty)$, $f_{1,\xi}$ et $f_{2,\xi}$ des fonctions du lemme (3.4.1). Comme T est sub-additif, alors d'aprés le lemme (3.3.2) et la remarque 3 on a :

$$(Tf)^{\star}(2\xi) = |Tf|^{\star}(2\xi) \le (|Tf_{1,\xi}| + |Tf_{2,\xi}|)^{\star}(2\xi)$$

$$\le (Tf_{1,\xi})^{\star}(\xi) + (Tf_{2,\xi})^{\star}(\xi).$$

En vertu du théorème (3.3.1) et de l'ingalité de Minkowsky on obtient :

$$\|Tf\|_{L_{p(V)}} = \|(Tf)^{\star}(\xi)\|_{L_p(0,\infty)} = 2^{\frac{1}{p}}\|(Tf)^{\star}(2\xi)\|_{L_p(0,\infty)},\ \textit{on pose } \xi = \frac{z}{2}$$

$$\le 2^{\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p}-1\right)_+}\left(\|(Tf_{1,\xi})^{\star}(\xi)\|_{L_p(0,\infty)} + \|(Tf_{2,\xi})^{\star}(\xi)\|_{L_p(0,\infty)}\right),$$

on pose $a_+ = a = \left(\dfrac{1}{p} - 1\right)$ si $a \ge 0$, $a_+ = 0$ si $a < 0$.

D'aprés la conséquence du lemme (3.4.1) $f_{k,\xi} \in L_{p_k}$, $(k \in \{1,2\})$ et en vue des définitions (3.2.1) et (3.3.1) (Définition de l'espace de $L^{\star}_{p_k(U)}$) et en prenant en compte (2) et (3) $\forall t \in (0,\infty)$ et en particulier $t = \xi$ on a :

$$(Tf_{k,\xi})^{\star} \le M_k t^{-\frac{1}{p_k}}\|f_{k,\xi}\|_{L_{p_k}(U)},\ k \in \{1,2\}.$$

Par conséquence d'aprés l'inégalité (3.20) du lemme (3.4.1), on trouve :

$$\|(Tf_{1,\xi})^{\star}(\xi)\|_{L_p(0,\infty)} \le M_1 \left\|\xi^{-\frac{1}{p_1}}\|f_{1,\xi}\|_{L_{p_1}(U)}\right\|_{L_p(0,\infty)}$$

$$= M_1 \left\|\xi^{-\frac{1}{p_1}}\|f^{\star}\|_{L_{p_1}(0,\infty)}\right\|_{L_p(0,\infty)}$$

$$= M_1 \| \left(\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi}(f^{\star}(t))^{p_1}dt\right)^{\frac{1}{p_1}} \|_{L_p(0,\infty)}$$

$$= M_1 \left\|\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi}(f^{\star}(t))^{p_1}\,dt\right\|^{\frac{1}{p_1}}_{L_{\frac{p}{p_1}}(0,\infty)}. \tag{3.21}$$

De la même manière pour $p_2 < \infty$, on a :

$$\|(Tf_{2,\xi})^{\star}(\xi)\|_{L_p(0,\infty)} \le M_2 \left\|\frac{1}{\xi}\int_{\xi}^{\infty}(f^{\star}(t))^{p_2}\,dt\right\|^{\frac{1}{p_2}}_{L_{\frac{p}{p_2}}(0,\infty)}. \tag{3.22}$$

En appliquant l'inégalité de Hardy avec $\dfrac{p}{p_1} > 1$ et celle avec $\dfrac{p}{p_2} < 1$ respectivement à (3.21) et (3.22) à la fonction $f^\star$ qui est décroissante, on obtient :

$$\|(Tf_{1,\xi})^\star(\xi)\|_{L_p(0,\infty)} \leq C_1 M_1 \, \|(f^\star)^{p_1}\|^{\frac{1}{p_1}}_{L_{\frac{p}{p_1}}(0,\infty)}$$

$$= C_1 M_1 \|f^\star\|_{L_p(0,\infty)} = C_1 M_1 \|f\|_{L_p(U)},$$

et d'une manière analogue pour $p_2 < \infty$ on obtient :

$$\|(Tf_{2,\xi})^\star(\xi)\|_{L_p(0,\infty)} \leq C_2 M_2 \|f\|_{L_p(U)},$$

où C_1 et C_2 dépendant seulement de p_1, p_2 et p.

Finalement, on a :

$$\|Tf\|_{L_p(V)} \leq C_3(M_1 + M_2)\|f\|_{L_p(U)}, \tag{3.23}$$

avec $C_3 = \max(C_1, C_2)$.

3. Pour la preuve de l'inégalité (3.17) on utilise le lemme (3.4.1) avec $a\xi$ à la place de ξ où $a > 0$. Alors (3.21) devient

$$\|(Tf_{1,a\xi})^\star(a\xi)\|_{L_p(0,\infty)} \leq M_1 \left\| \frac{1}{a\xi} \int_0^{a\xi} (f^\star(t))^{p_1}\, dt \right\|^{\frac{1}{p_1}}_{L_{\frac{p}{p_1}}(0,\infty)}$$

$$\leq M_1 a^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}} \left\| \frac{1}{\xi} \int_0^{\xi} (f^\star(t))^{p_1}\, dt \right\|^{\frac{1}{p_1}}_{L_{\frac{p}{p_1}}(0,\infty)}.$$

D'une manière analogue à la place (3.22) on obtient respectivement une inégalité analogue à la précèdente avec $a^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p}}$ à la place de $a^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}}$

$$\|(Tf_{2,a\xi})^\star(a\xi)\|_{L_p(0,\infty)} \leq M_2 a^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p}} \left\| \frac{1}{\xi} \int_\xi^{\infty} (f^\star(t))^{p_2}\, dt \right\|^{\frac{1}{p_2}}_{L_{\frac{p}{p_2}}(0,\infty)}.$$

Par conséquent à la place de (3.23), on obtient :

$$\|Tf\|_{L_p(V)} \leq C_3(M_1 a^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p}} + M_2 a^{\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p}})\|f\|_{L_p(U)}. \tag{3.24}$$

On recherche le minimum de la partie droite de (3.24) par rapport à $a > 0$, d'où le résultat :

$$\|Tf\|_{L_p(V)} \leq C_4 M_1^{1-\theta} M_2^{\theta} \|f\|_{L_p(U)},$$

où C_4 ne dépend que de p_1, p_2 et p. $\square$

3.5 Applications du théorème de Marcinkiewicz

On considérer une génèralisation de l'inégalité de Hausdorff-Young. Soient l'espace mesurable $(\mathbb{R}^n, \mu)$ et μ mesure de Lebesgue, soit ω une fonction de poids (elle est mesurable et positive dans $\mathbb{R}^n$). Alors on désigne $L_p(\omega)$ l'espace L_p avec la mesure ωdx et la norme dans $L_p(\omega)$ est :

$$\|f\|_{L_p(\omega)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Avec ces notations, on a le théorème suivant.

Théorème 3.5.1 *Soient $f \in L_p$, $1 \leq p \leq 2$. Alors*

$$\|\mathcal{F}f\|_{L_p(|\xi|^{-n(2-p)})} \leq C_p \|f\|_{L_p}. \tag{3.25}$$

Preuve. On définit l'opérateur T tel que :

$$(Tf)(\xi) = |\xi|^n \mathcal{F}f(\xi).$$

Par la formule de Parseval, on a :

$$\|Tf\|_{L_2(|\xi|^{-2n})} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-2n} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 |\xi|^{2n}\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathcal{F}f\|_{L_2} \leq C_2 \|f\|_{L_2}.$$

Par l'inclusion des espaces de Lebesgue dans les espaces de Marcinkiewicz (i.e) $(L_2^{\star}(|\xi|^{-2n})) \supset (L_2(|\xi|^{-2n}))$, on peut conclure que :

$$T : L_2 \longrightarrow L_2^{\star}(|\xi|^{-2n}). \tag{3.26}$$

Nous avons aussi

$$T : L_1 \longrightarrow L_1^\star(|\xi|^{-2n}). \tag{3.27}$$

Pour montrer (3), nous introduisons l'ensemble suivant :

$$E_\sigma = \{\xi \, tel \, que \; |\xi|^n |\mathcal{F}f(\xi)| > \sigma\}.$$

On utilise la mesure $\nu = |\xi|^{-2n} d\xi$ et on suppose $\|f\|_{L_1} = 1$. D'aprés la définition de la transformation de fourier, on a pour tout ξ de $\mathbb{R}^n$ $|\mathcal{F}f(\xi)| \leq 1$. Ainsi pour $\xi \in E_\sigma$, on a $\sigma \leq |\xi|^n$. Par suite :

$$\lambda(Tf, \sigma) = \nu(E_\sigma) = \int_{E_\sigma} |\xi|^{-2n} \, d\xi \leq \int_{|\xi|^n \geq \sigma} |\xi|^{-2n} \, d\xi \leq C\sigma^{-1}.$$

On a prouvè que :

$$\forall \sigma > 0, \; \sigma \lambda(Tf, \sigma) \leq C_1 \|f\|_{L_1},$$

et donc

$$\|Tf\|_{L_1^\star(|\xi|^{-2n})} \leq C_1 \|f\|_{L_1}.$$

On peut appliquer le théorème de Marcinkiewicz à l'opérateur T, on obtient :

$$T : L_p \longrightarrow L_{q(|\xi|^{-2n})} \tag{3.28}$$

avec

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2} = \frac{1}{q}.$$

Donc $q = p$ et la norme de l'opérateur (3.28)est majorée par C_p tel que :

$$M \leq C_\theta C_1^{1-\theta} C_2^\theta = C_p.$$

Car θ ne dépend que de p. D'où

$$\|\mathcal{F}f\|_{L_p(|\xi|^{-n(2-p)})} \leq C_p \|f\|_{L^p}. \qquad \square$$

CONCLUSION

Le présent travail est en quelque sorte une introduction à la théorie d'interpolation. C'est un thème d'actualité et qui a beaucoup d'applications dans les différentes branches de mathématiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bergh.J, Löfström.J, *Interpolation Spaces An Introduction.* Springer-Verlag, 1976.

[2] Burenkov.V.I, *Functional spaces main integral inequalities.* Masson, 1989.

[3] Brezis.H, *Analyse fonctionnelle théorie et applications.* Édition Masson, 1983.

[4] Caldéron.A.P., Zygmund.A, *A note on the interplation of linear operators.* Studia Math.-1951.- V. 12.

[5] Caldéron.A.P.,Zygmund.A, *A note on the interplation of sublinear operators.* Amer. J.Math.-1956.- V. 78.-p.282-288.

[6] Kolmogorov.A, Fomine.S, *Élément de la thórie des fonctions et d'analyse fonctionnelle.* 2^{eme} édition. Édition Mir. Moscou, 1973.

[7] Kufner.A, Jhon.O, Puŏik .S, *Function spaces.* -Prague : Academia, 1977.

[8] Krasnoclskü M.A, Zabreiko p.p, Poustiluik F.I. *les opérateurs intégraux dans les espaces de fonctions sommables .*

[9] Lorentz.G.G, *Some new funotional spaces.* Ann.Math.- 1950.- v. 51.-p. 37-55.

[10] Marcinkiewicz.J, *Sur l'interpolation d'opérateurs.* C.r.aoad. soi.Paris.- 1939.- v.30.- P. 120-142.

[11] Stein E.M, Veiss G. *Introduction en analyse harmonique dans les espaces Euclidiens* . M- Mir, 1974.

[12] Kufner.A, Jhon.O, Puŏik .S, *Function spaces.* Aota Math.- 1962.- v. 49.- p. 465-497.

[13] Riesz.M, *Sur les maxima des formes bilinéaire et sur les fonctionelles linéaire.* Aota Math.- 1926.- v. 49.- p. 465-497.

[14] Stein.E.M, Wreiss.G, *An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its application.* J.Math.Meoh.- 1959.- v. 8.

[15] Talenti.G, *Observazion sopra una classe di disugualianze.* Rend.Semin.Math. e Fis.Milano.- 1969.- v 39.- p. 171-185.

[16] Tomaselli.G, *A class of inequalities theorem* . Bull.Union Mat.Ital. - 1969. -v. 2. N 6. -p. 622-631.

[17] Triebel.H, *Théorie d'interpolation, espace fonctionels et opérateurs differentiels.* M- Mir 1980. LIR.SS.