Ministère De L'Enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

Université INB KHALDOUN TIARET

Préparée au Département des Mathématiques

Présenté par

***BENHAMOU KHADIDJA**

***BONCHOHRA MOKHTARIA**

***AISSAT LAHCEN MOUSSA**

Spécialité : Mathématique

Option : Analyse Fonctionnelle Et Application

Sujet de mémoire

Solutions intégrales pour quelque problèmes d'équations différentielles implicites d'ordre fractionnaires

Pour obtenir

Le diplôme de Master

Présentée et soutenue publiquement le 15/05/2018

devant le Jury composé de

MAAZOUZ KADA	***MCB***	***Président***
SOUID MOHHAMED SAID	***MCA***	***Encadreur***
MOKHTARI MOKHTAR	***MCB***	***Examinateur***

Promotion : **2017 \ 2018**

Dédicace

A mes très chers parents ***Habib*** *et* ***Amina*** *qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. J'espère qu'ils trouveront dans ce travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.*

A ma mère qui ma soutenu avec toute sa tendresse et son affectation .

A mes soeurs et frères (H, N, M, J, H, Z, I)

Au personnes exceptionnelles : pour leurs soutient et leurs entente dont j'avais besoin.

A mon fiancé "Amine".

A tous mes proches (Houcine et Smail)

Je dédie ce mémoire

Benhamou Khadidja

Dédicace

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père.

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon coeur, ma vie et mon bonheur, maman que j'adore.

Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, à tous mes frères Hocine, Miloude et ma soeur Fatima, et a tout ma famille AISSAT et OUARED.

je dédie ce travail dont le grand plaisir leurs revient en premier lieu pour leurs conseils, aides, et encouragements.

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études supérieures, mes aimables amis, collègues d'étude, et frères de coeur, et mes profs et a mon encadreur.

Aissat Lahcen Moussa

Dédicace

A mes chers parents (A.E.k et Houria),pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse,leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A mes soeurs et frères (L,F,F,K,K,A)pour leurs encouragement permanentes, et leur soutien moral.

A toute mes amis pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

Que ce travail soit l'accomplissement de vos voeux tant allégués, et le fuit de votre soutien infaillible.

Merci d'être toujours là pour moi.

Benchohra Mokhtaria

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que je réserve ces lignes en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

En tout premier lien, je tiens à remercier le **Dr. Souid Mohammed Said** d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été très précieux.

Je remercie vivement le **Dr. Maazouz Kada** de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Je remercie également le **Dr. Mokhtari Mokhtar** membres de jury pour l'honneur qu'il m'ont accordé en acceptant de juger mon travail et pour leur conseils durant la réalisation de ce mémoire.

Il m'aurait été impossible de réaliser ce travail sans le soutien de ma famille de l'affectation dont elle a su m'entourer depuis toujours.

Enfin, j'adresse également mes remerciement envers mes amis et mes collègues pour leur soutien.

Table des matières

1 préliminaire **13**

1.1 Calcul fractionnaire 13

1.1.1 Bref historique 13

1.1.2 La fonction Gamma et la fonction Béta 15

1.1.3 Transformation de Laplace 15

1.1.4 Intégrale fractionnaire 16

1.1.5 La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville . . 17

1.1.6 La dérivée fractionnaire de Caputo 17

1.2 Quelques lemmes et propositions 17

1.2.1 Critère de compacité de Kolmogorov 19

1.3 Fonction de Green 20

1.3.1 Définition 20

1.3.2 Existence et unicité 21

1.4 Quelques théorèmes du point fixe 23

1.4.1 Théorème du point fixe de Banach 23

1.4.2 Théorème du point fixe de Schauder 23

2 Solutions intégrables d'un problème á valeur initiales d'équation différentielle implicite d'ordre fractionnaire **25**

2.1 Introduction 26

2.2 Existence de solutions 27
2.3 Exemple : 33

3 Solutions intégrables pour un problème d'équation différentielle implicite d'ordre fractionnaire à conditions non locales 35
3.1 Introduction 36
3.2 Existence de solutions 37
3.3 Exemple 43

4 Solutions intégrables des problèmes aux limites pour les équations différentielles implicites d'ordre fractionnaire 45
4.1 Introduction 46
4.2 Existence de solutions 47
4.3 Problèmes à conditions non Locales 52
4.3.1 Introduction 52
4.3.2 Existence de solutions 53
4.4 Exemple 54

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est de présenter, des résultats d'existence et d'unicité des solutions intégrales pour quelque classe de problèmes á valeur initiales et aux limites pour des équations différentielles implicites non linéaires à dérivées fractionnaires au sens de Caputo.

Tous les problèmes étudiés sont considérés dans un espace de Banach.

La technique utilisée c'est de ramener l'étude de notre problème a la recherche d'un point fixe d'un opérateur intégral convenablement construit. En appliquant des théorèmes de point fixe. Le contenu de ce mémoire est basé sur les articles [9, 10, 11].
La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années, voir les monographies Abbas *et al.* [3], Kilbas *et al.* [19], Lakshmikantham *et al.* [20], et les articles de Agarwal *et al* [1, 2], Belarbi *et al.* [25], Benchohra *et al.* [6] et les références citées. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel. Par exemple, les équations différentielles fractionnaires sont sou-

vent applicables dans l'ingénierie, la physique, la chimie, la biologie,...etc (voir[5, 18, 21, 26, 22, 24]).
la littérature sur les solutions intégrales pour des équations différentielles fractionnaires sont très limitées. El-Sayed et Hachem [17] étudie l'existence des solutions intégrales et continues pour les équations intégrales quadratique. El-Sayed et Abd El Salam considéré L^p-Solutions pour un problème de Cauchy pour les équations différentielles ordinaire à dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville.
Ce mémoire se compose en quatre chapitres .

Dans le **premier Chapitre** (intitulé **"Préliminaire"**), nous donnons notations, définitions, quelques propriétés du calcul fractionnaire,et nous présentons quelques notions de base concernant les questions d'existence et d'unicité de la fonction de Green , et dans la dernière section on donne quelques théorèmes du point fixe.

Le deuxième chapitre traite de l'existence des Solutions intégrables d'un problème á valeur initiales d'équation différentielle implicite d'ordre fractionnaire suivantes :

$$^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t), ^c D^\alpha y(t)),\ 0 < \alpha < 1,\ t \in J := [0, T] \tag{1}$$

$$y(0) = y_0 \quad , \tag{2}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée $y_0 \in \mathbb{R}$ et $^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo,
Nous terminons ce chapitre par un exemple pour voir l'utilité de notre résultat.

Dans **Le troisième chapitre** nous étudions l'existence des solutions intégrables du problème d'équation différentielle implicite d'ordre fractionnaire à conditions non locales suivante :

$$^{c}D^{\alpha}y(t)=f(t,y(t),^{c}D^{\alpha}y(t)),\ 0<\alpha<1,\ t\in J:=(0.T] \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{m}a_{k}y(t_{k})=y_{0}\quad, \tag{4}$$

où $f:J\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction donnée $\quad y_0\in\mathbb{R},\ \ a_k\in\mathbb{R}$ et $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo
et $0<t_1<t_2<...,t_m<T,k=1,2,...,m$
et nous avons terminé ce chapitre avec un exemple .
Le quatrième chapitre est consacré à l'existence et l'unicité de solutions intégrables des problèmes aux limites pour les équations différentielles implicites d'ordre fractionnaire suivantes :

$$^{c}D^{\alpha}y(t)=f(t,y(t),^{c}D^{\alpha}y(t)),\qquad t\in J:=[0.T],\qquad 1<\alpha<2 \tag{5}$$

$$y(0)=y_0,\qquad y(T)=y_T\quad, \tag{6}$$

où $f:J\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction donnée $\quad y_0,y_T\in\mathbb{R},$ et $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.
Une autre section intitulé **"Problèmes aux limites à conditions non local"** est consacrée à certains résultats d'existence et d'unicité pour le problème suivante :

$$^{c}D^{\alpha}y(t)=f(t,y,^{c}D^{\alpha}y(t)),t\in J:=[0.T],1<\alpha<2 \tag{7}$$

$$y(0)=g(y),\qquad y(T)=y_T\quad, \tag{8}$$

où $g:\mathtt{L}^1(\mathtt{J},\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ une fonction continue.
Cette section est terminée par un exemple est aussi inclus pour illustrer les résultats principaux .

puis on donne une conclusion du travail effectué. Enfin on termine ce mémoire par une bibliographie.

Mots clés : Problème à valeur initiale, problème aux limites, dérivée factionnaire au sens de Caputo, équation différentielle implicite, espace de Banach, point fixe, conditions locales et non locales.

Chapitre 1

préliminaire

Dans ce chapitre nous présentons des notations, définitions et des théorèmes utilisés dans ce mémoire.

Soit $\mathtt{L}^1(\mathtt{J})$ désigne la classe des fonctions intégrables de Lebesgue sur l'intervalle $J = [0, T]$ menu de la norme $\|u\|_{L_1} = \int_J |u(t)| dt$.

1.1 Calcul fractionnaire

1.1.1 Bref historique

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{eme} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigner la n^{eme} dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu :
Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?
Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme

le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est -à-dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Les dérivées non entières possèdent un effet de mémoire qu'elles partagent avec plusieurs matériaux tels que les matériaux viscoélastiques ou polymère. Ce fait est également une des raisons pour lesquelles le calcul fractionnaire a connu rècemment un grand intérêt. L'utilisation de l'effet mémoire des dérivées fractionnaire dans la construction des modèles matériels simples est livrée avec un coût élevé en ce qui concerne la résolution numérique. Tout en utilisant un algorithme de discrétisation des dérivées non entières on doit tenir compte de sa structure non locale qui signifie en général un haut stockage d'information et une grande complexité de l'algorithme. De nombreuses tentatives pour résoudre les équations faisant intervenir différents types d'opérateurs d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature.

Une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20^{eme} siècle, inclut :

P.S.Laplace(1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J.Liouville (1832-1873), B.Riemann (1847), H.Holmgren (1865-67), A.K.Grunwald (1867-1872), A.V.Letnikov (1868-1872), H.Laurent (1884), P.A.Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J.Hadamard (1892), O.Heaviside (1892-1912), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E.Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P.L'evy (1923), A.Marchaud (1927), H.T.Davis (1924-1936), A.Zygmund (1935-1945), E.R.Amour (1938-1996), A.Erd'elyi (1939-1965), H.Kober (1940), D.V.Widder (1941), M.Riesz (1949), Caputo (1967)

1.1.2 La fonction Gamma et la fonction Béta

1. La fonction Γ d'Euler est une fonction qui prolonge le factorielle aux valeurs réelles et complexes.

   Pour $Re(\alpha) > 0$ on définie $\Gamma(\alpha)$ par :
   $$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \tag{1.1}$$
   La fonction Γ s'étend (en une fonction holomorphe) a $\mathbb{C}\backslash Z^-$ tout entier

   On a $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ et pour n entier on a $n! = \Gamma(n+1)$.

2. La fonction Béta est définie par :
   $$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\beta-1}d\tau = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$
   avec $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$.

1.1.3 Transformation de Laplace

1. Si la fonction f est d' ordre exponentiel α (c' est á dire qu'il existe deux constantes positives M et T telles que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ pour $t > T$) alors la fonction F de la variable complexe s définie par :
   $$F(s) = L\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$$
   est appelée la transformée de Laplace de la fonction$f$.

2. On peut reconstituer f à partir de sa transformée F à l' aide de la transformée de Laplace inverse

   $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}F(s)ds \quad c = Re(s)$

3. La transformée de Laplace du produit de deux fonctions f et g qui sont nulles pour $t < 0$ est égale au produit de leur transformée de Laplace .

4. La transformée de Laplace d' une dérivée d' ordre entier est :

$$\begin{aligned} L[f^n(t)](s) &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \end{aligned}$$

5. La transformée de Laplace de la fonction t^{p-1} est :

$$L[t^{p-1}](s) = \Gamma(p) s^{-p}$$

1.1.4 Intégrale fractionnaire

Considérons une fonction h définie pour $t > a$
on pose

$$(Ih)(t) = \int_a^t h(s)ds, (I^2h)(t) = \int_a^t (Ih)(u)du = \int_a^t (\int_a^u h(s)ds)du$$

en répétant n fois on obtient d' aprés la formule de Cauchy

$$(I^n h)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} h(s)ds$$

en utilisent la fonction Γ d'Euler (1.1) on aura la définition suivante :

Définition 1.1.1 *([19],[23]) L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ de la fonction $h \in \mathtt{L}^1([\mathtt{a}, \mathtt{b}], \mathbb{R}_+)$ et continue est défini par :*

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma. si $a = 0$ on écrit $I^\alpha h(t) = h(t) * \varphi_\alpha(t)$, avec $\varphi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $t > 0$, et $\varphi_\alpha(t) = 0$ pour $t \leq 0$, et $\varphi_\alpha \to \delta(t)$ quand $\alpha \to 0$, où δ représente la fonction delta.

1.1.5 La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.1.2 *([19],[23]) La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction $h \in \mathtt{L}^1([a,b],\mathbb{R}_+)$,est donnée par :*

$$(D^{\alpha}_{a+}h)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dt})^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}h(s)ds$$

ici $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désigne la partie entière de α. si $\alpha \in (0,1]$, alors

$$(D^{\alpha}_{a+}h)(t) = \frac{d}{dt}I^{1-\alpha}_{a+}h(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{ds}\int_a^t (t-s)^{-\alpha}h(s)ds.$$

1.1.6 La dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.1.3 *([19]) La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction $h \in \mathtt{L}^1([a,b],\mathbb{R}_+)$ et continue est défnie par :*

$$({}^cD^{\alpha}_{a+}h)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}h^{(n)}(s)ds.$$

où $n = [\alpha] + 1$. si $\alpha \in (0,1]$ alors

$$({}^cD^{\alpha}_{a+}h)(t) = I^{1-\alpha}_{a+}\frac{d}{dt}h(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{ds}h(s)ds$$

1.2 Quelques lemmes et propositions

Proposition 1.2.1 *([19]) Soient α,$\beta > 0$. Alors on a*

(1) *$I^{\alpha} : \mathtt{L}^1(\mathbb{J},\mathbb{R}_+) \to \mathtt{L}^1(\mathbb{J},\mathbb{R}_+)$ et si $f \in \mathtt{L}^1(\mathbb{J},\mathbb{R}_+)$ alors*
$I^{\alpha}I^{\beta}f(t) = I^{\beta}I^{\alpha}f(t) = I^{\alpha+\beta}f(t)$.

(2) *Si $f \in \mathtt{L}^p(\mathbb{J},\mathbb{R}_+), 1 \le p \le +\infty$, alors $\| I^{\alpha}f \|_{\mathtt{L}_p} \le \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \| f \|_{\mathtt{L}_p}$.*

(3) *L'opérateur intégral d'ordre fractionnaire I^α est linéaire et borné de l'espace $\mathtt{L}^1(J)$ dans lui- même.*

(4) $\lim_{\alpha\to n} I^\alpha f(t) = I^n f(t), n = 1, 2, ...$ *uniformément.*

(5) $I_a^0 h(t) = I_d h(t) = h(t)$.

(6) *La dérivée fractionnaire de Caputo d'une constante est égale à zéro.*

(7) ${}^cD_a^\alpha$ *est non inverse à droit de* I_a^α *c-a-d* $I_a^{\alpha c}D_a^\alpha \neq I_d$ *mais* ${}^cD_a^\alpha I_a^\alpha = I_d$.

(8) *La dérivée fractionnaire de Caputo et Riemann-Liouville sont linéaires.*

Lemme 1.2.1 *([19]) Soit $\alpha > 0$, l'équation différentielle*

$$({}^cD^\alpha h)(t) = 0$$

admet les solutions

$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}$, $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n-1,\ n = [\alpha]+1.$

Lemme 1.2.2 *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, alors*

$$I^{\alpha c}D_a^\alpha h(t) = h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k.$$

Le lemme 1.2.2 est écrit autrement ce la forme

Lemme 1.2.3 *([19]) Soit $\alpha > 0$ alors*

$$I^{\alpha c}D^\alpha h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1},$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n-1, n = [\alpha] + 1..$

Définition 1.2.1 *Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ un opérateur*

1. *T est dit **continu** si pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ dans E tel que $(x_n)_{n\in N}$ converge vers x dans E, la suite $(Tx_n)_{n\in N}$ converge vers Tx.*
2. *T est dit **compact**, si pour tout borné B de E, $T(B)$ est relativement compact .*
3. *T est dit **complètement continu** si T est continue et si l'image de tout borné B de E est relativement compact .*

Définition 1.2.2 *Soit $C(J, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J de $\mathbb{R}$ dans l'espace de Banach X, M un sous ensemble de $C(J, \mathbb{R})$*

1. *M est dit **équicontinu** si est seulement si :*
   $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t_1, t_2 \in J$:
   $\|t_1 - t_2\| \leq \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon, \ \forall f \in M.$
2. *M est dit **uniformément borné** si et seulement si :*
   $\exists c > 0 : \|f(t)\| \leq c, \quad \forall t \in J \quad et \quad \forall f \in M.$

1.2.1 Critère de compacité de Kolmogorov

Théorème 1.2.4 *([15]) Soit $\Omega \subseteq \mathrm{L}^p([0,T], \mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$ si*

(i) *Ω est borné dans $\mathrm{L}^p([0,T], \mathbb{R})$ et*

(ii) *$u_h \to u$ quand $h \to 0$ uniformément pour $u \in \Omega$, alors Ω est relativement compact dans $\mathrm{L}^p([0,T], \mathbb{R})$,*
où $u_h(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(s)ds$.

Définition 1.2.3 *Une fonction $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **Carathéodory** si :*

(i) *La fonction* $t \to f(t,x,y)$ *est mesurable pour chaque* $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(ii) *La fonction* $(x,y) \to f(t,x,y)$ *est continue presque par tout* $t \in J$.

1.3 Fonction de Green

Soit $p, q, f \in C([a,b])$ où $p \in C^1([a,b]), a < b$ et $(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall i = 1, 2$
$|\alpha_1| + |\alpha_2|, |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$ on considère les équations différentielles ordinaires
(H) $(py\prime)\prime + qy = 0$
(NH) $(py\prime)\prime + qy = f$
ainsi que les conditions aux bords associées :

$$(CB)_h \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y\prime(a) = 0 \\ \beta_1 y(b) - \beta_2 y\prime(b) = 0 \end{cases}$$

$$(CB)_{nh} \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y\prime(a) = \gamma \\ \beta_1 y(b) - \beta_2 y\prime(b) = \delta \end{cases}$$

1.3.1 Définition

Définition 1.3.1 *On appelle fonction de Green associée au problème homogène* $(H) - (CB)_h$ *une fonction* $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ *vérifiant les propriétés :*

(a) G *est continue sur* $[a,b] \times [a,b]$ *;*

(b) G *est symétrique :* $G(x,y) = G(y,x), \forall (x,y) \in [a,b]^2$ *;*

(c) $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)$ *est continue pour tout* $x \neq y$

(d) $\frac{\partial G}{\partial x}(y^+, y) - \frac{\partial G}{\partial x}(y^-, y) = \frac{1}{p(y)}$ *pour tout* $y \in [a, b]$ *;*

(e) *La fonction partielle* $x \to G(x, y)$ *est solution de l'équation* (H) *pour tout* $x \neq y$ *;*

(f) *La fonction partielle* $x \to G(x, y)$ *vérifie les conditions* $(CH)_h$ *pour tout* $y \in [a, b]$*.*

1.3.2 Existence et unicité

Théorème 1.3.1 (Existence et unicité de la fonction de Green) *Supposons que le problème homogène* $(H) - (CB)_h$ *n'admet pas de solution non triviale. Alors, il existe une (et une seule) fonction* G *ne dépendant pas de* f*, et dite fonction de Green telle que, pour toute fonction* f*, la solution* y *de problème non homogène* $(NH) - (CB)_h$ *s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$y(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds.$$

(i) Méthode de Calcul la fonction G

Soit ϕ_1 et ϕ_2 les solutions respectives des problèmes à condition initiales

$$(H) + \begin{cases} \phi_1(a) = \alpha_2 \\ \phi_1'(a) = -\alpha_1 \end{cases} \quad et \ (H) + \begin{cases} \phi_2(b) = \beta_2 \\ \phi_2'(b) = \beta_1. \end{cases}$$

Alors, $\phi_1, \phi_2 \not\equiv 0$ sont linéairement indépendantes car sinon ϕ_1 (et aussi ϕ_2) serait solution du problème $(P_0) := (H) + (CB)_h$ contredisant l'hypothèse. Soit donc $W \neq 0$ leur **Wronskien** et G la fonction de Green définie par

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{\phi_1(t)\phi_2(s)}{p(t)W(t)}, \ a \leq \ t \leq s, \\ \frac{\phi_1(s)\phi_2(t)}{p(s)W(s)}, \ s \leq \ t \leq b. \end{cases}$$

Remarquons que le produit pW est constant

(ii) Existence et unicité d'une solution :

1) La fonction F définie par

$$F(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds = \frac{\phi_2(t)}{pW}\int_a^t \phi_1(s)ds + \frac{\phi_1(t)}{pW}\int_t^b \phi_2(s)f(s)ds$$

est solution du problème $(NH) + (CB)_h$.

2) La fonction H définie par

$$H(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds = \frac{\phi_2(t)}{pW}\int_a^t \phi_1(s)ds + \frac{\phi_1(t)}{pW}\int_t^b \phi_2(s)f(s)ds + \psi_1(t) + \psi_2(t)$$

est solution du problème $(NH) + (CB)_{(nh)}$, où $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$ les uniques solutions des problèmes :

$$(H) + \begin{cases} \alpha_1\psi_1(a) + \alpha_2\psi_1'(a) = \gamma \\ \beta_1\psi_1(b) - \beta_2\psi_1'(b) = 0 \end{cases} \quad et\ (H) + \begin{cases} \alpha_1\psi_2(a) + \alpha_2\psi_2'(a) = 0 \\ \beta_1\psi_2(b) - \beta_2\psi_2'(b) = \delta \end{cases}$$

Exemple : Considérons le problème

$$\begin{cases} y'' = f(t),\ a < t < b \\ y(a) = \gamma,\ y(b) = \delta. \end{cases} \tag{1.2}$$

Constructions les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 solutions des problèmes

$$\begin{cases} \phi_1''(t) = 0, \\ \phi_1(a) = 0, \\ \phi_1(a) = -1. \end{cases} ET \begin{cases} \phi_2''(t) = 0, \\ \phi_2(b) = 0, \\ \phi_2(b) = -1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Alors $\phi_1(t) = (a-t)$, $\phi_2(t) = (b-t)$ et $W(\phi_1, \phi_2) = b - a$

D'ou la fonction de Green :

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(t-a)(s-b)}{(b-a)},\ a \leq\ t \leq s, \\ \frac{(s-a)(t-b)}{(b-a)},\ s \leq\ t \leq b. \end{cases}$$

La solution unique du problème **(1.2)** est donnée par

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds = \frac{\phi_2(t)}{pW}\int_a^t \phi_1(s)ds + \frac{\phi_1(t)}{pW}\int_t^b \phi_2(s)f(s)ds + \psi_1(t) + \psi_2(t)$$

$$= \frac{t-b}{b-a}\int_a^t (s-a)f(s)ds + \frac{t-a}{b-a}\int_t^b (s-b)f(s)ds + \delta\frac{t-a}{b-a} + \gamma\frac{b-t}{b-a}$$

1.4 Quelques théorèmes du point fixe

1.4.1 Théorème du point fixe de Banach

Définition 1.4.1 *Soit* (X,d)*un espace métrique . une application* $T : X \to X$ *est dite Lipschitzienne s'il existe une constante* k *(appelée constante de Lipschitz) telle que :*

$$d(T(x),T(y)) \leq kd(x,y) \qquad \textit{pour tout } x,y \in X$$

une application Lipschitzienne avec une constante de Lipschitz $k < 1$ *est appelée contraction.*

Théorème 1.4.1 *(Théorème du point fixe de Banach)*
Soit (X,d)*un espace métrique complet. une application* $T : X \to X$ *est une contraction avec la constante de Lipschitz* k*. Alors* T *a un point fixe unique* $x \in X$*.*

1.4.2 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 1.4.2 *([15]) :Soit* E *un espace de Banach et* Q *un sous-ensemble convexe de* E *et* $F : Q \to Q$ *est un compact, et une carte continue alors* F *a au moins un point fixe dans* Q*.*

Chapitre 2

Solutions intégrables d'un problème á valeur initiales d'équation différentielle implicite d'ordre fractionnaire

2.1 Introduction

dans ce chapitre on étudié l'existence de solutions intégrables pour un problème de valeur initial pour les équations différentielles implicites d'ordre fractionnaire.
Les résultats suivants sont basés sur le théorème du point fixe de Schauder et le théorème du point fixe du principe de contraction de Banach .

Soit le problème suivant :

$$^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t), ^c D^\alpha y(t)), t \in J := [0, T] \tag{2.1}$$

$$y(0) = y_0 \quad , \tag{2.2}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ une fonction donnée , $y_0 \in \mathbb{R}$ et $^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo.
Dans ce qui suite on donne deux résultats, le premier est basé sur le théorème du point fixe de Schauder et le deuxième sur le principe de contraction de Banach.
Un exemple est donné pour démontrer l'application de notre résultat principal.

2.2 Existence de solutions

Començons par définir ce que nous entendons par solution intégrale pour le problème (2.1)-(2.2).

Définition 2.2.1 *Une fonction* $y \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$ *est une solution de problème* $(2.1)-(2.2)$ *si* y *satisfait* (2.1) *et* (2.2).

Pour l'existence de solutions au problème $(2.1)_-(2.2)$ nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant.

Lemme 2.2.1 *La solution du problème* $(2.1)-(2.2)$ *peut être exprimer par l'équation intégrale :*

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds, \tag{2.3}$$

où x *est la solution de l'équation intégrale fonctionnelle*

$$x(t) = f\left(t, y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds, x(t)\right) \tag{2.4}$$

Preuve Soit ${}^cD^\alpha y(t) = x(t)$ dans l'équation (2.1) ,alors

$$x(t) = f(t, y(t), x(t)) \tag{2.5}$$

et

$$y(t) = y(0) + I^\alpha x(t)$$

$$= y(o) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds \tag{2.6}$$

supposons les hypothèses suivantes :

(H1) $f : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est mesurable dans $t \in [0, T]$, pour tout $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, et continue dans $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, presque partout $t \in [0, T]$,

(H2) Il existe une fonction positive $a \in L^1[0, T]$ et constantes $b_i > 0$; $i = 1, 2$ tel que :

$$|f(t, u_1, u_2)| \leq a(t) + b_1|u_1| + b_2|u_2|, \forall (t, u_1, u_2) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$$

Le premier résultat est basé sur le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 2.2.2 *Supposons que les hypothèses* ***(H1)-(H2)*** *sont satisfait . Si*

$$\frac{b_1 T^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{b_2 T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{2.7}$$

alors le problème $(2.1) - (2.2)$ *admet au moins une solution* $y \in L^1(J, \mathbb{R})$

Preuve : Transformer le problème $(2.1) - (2.2)$ en un problème de point fixe.

Considérons l'opérateur :

$$H : L^1(J, \mathbb{R}) \to L^1(J, \mathbb{R})$$

définie par :

$$(Hx)(t) = y(0) + I^{\alpha}x(t) \tag{2.8}$$

où

$$x(t) = f(t, y_0 + I^{\alpha}x(t), x(t))$$

L'opérateur H est bien défini, en effet pour tout $x \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$ les hypothèses **(H1)** et **(H2)** donnent :

$$
\begin{aligned}
\|Hx\|_{\mathtt{L}_1} &= \int_0^T |Hx(t)|dt \\
&= \int_0^T |y_0 + I^\alpha x(t)|dt \\
&\leq T|y_0| + \int_0^T \left(\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x(s)|ds \right) dt \\
&\leq T|y_0| + \int_0^T \left(\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |f(s, y_0 + I^\alpha x(s), x(s))|ds \right) dt \\
&\leq T|y_0| + \int_0^T \left(\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |a(s) + b_1(y_0 + I^\alpha x(s)) + b_2 x(s)|ds \right) dt \\
&\leq T|y_0| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|a\|_{\mathtt{L}_1} + \frac{b_1|y_0|T^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{b_2 T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|x\|_{\mathtt{L}_1} \\
&+ b_1 \int_0^T \left(\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I^\alpha |x(s)|ds \right) dt \\
&\leq T|y_0| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|a\|_{\mathtt{L}_1} + \frac{b_1|y_0|T^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{b_2 T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|x\|_{\mathtt{L}_1}
\end{aligned}
$$

$$
+\frac{b_1 T^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\|x\|_{\mathtt{L}_1} < +\infty. \tag{2.9}
$$

Soit

$$
r = \frac{T|y_0| + \left(\frac{T^\alpha \|a\|_{\mathtt{L}_1} + b_1|y_0|T^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \right)}{1 - \left(\frac{b_1 T^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{b_2 T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right)}.
$$

On considère l'ensemble :

$$
B_r = \{x \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R}) : \|x\|_{\mathtt{L}_1} \leq r\}.
$$

Clairement B_r est non vide , borné, convexe et fermé.
Maintenant, nous allons montrer que $HB_r \subset B_r$, effectivement pour chaque $x \in B_r$.
de (2.7) et (2.9) on obtient :

$$\begin{aligned}\|Hx\|_{L_1} &\leq T|y_0| + \left(\frac{T^\alpha\|a\|_{L_1} + b_1|y_0|T^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\ &+ \left(\frac{b_1T^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{b_2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\|x\|_{L_1} \\ &\leq r.\end{aligned}$$

Alors $HB_r \subset B_r$. L'hypothèse $(H1)$ implique que H est continue. Maintenant , nous montrerons que H est compact, ceci est HB_r est relativement compact .
Clairement HB_r est borné dans $\mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$ (c-à-d) la condition **(i)**du critère de compacité de Kolmogorov est satisfaite .
Il reste à montrer $(Hx)_h \to (Hx)$ dans $\mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$ pour tout $x \in B_r$.
Soit $x \in B_r$. Alors on a :

$$\begin{aligned}&\|(Hx)_h - (Hx)\|_{L_1} \\ =& \int_0^T |(Hx)_h(t) - (Hx)(t)|dt \\ =& \int_0^T \left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(Hx)(s)ds - (Hx)(t)\right|dt \\ \leq& \int_0^T \left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h}|(Hx)(s) - (Hx)(t)|ds\right)dt \\ \leq& \int_0^T \left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h}|I^\alpha x(s) - I^\alpha x(t)|ds\right)dt \\ \leq& \int_0^T \frac{1}{h}\int_t^{t+h}|I^\alpha f(s, y_0 + I^\alpha x(s), x(s)) - I^\alpha f(t, y_0 + I^\alpha x(t), x(t))|dsdt\end{aligned}$$

Comme $x \in B_r \subset \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$ et l'hypothèse $(H2)$ implique $f \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$,la proposition 1.2.1(3) donne $I^\alpha f \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$. Alors on a :

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} |I^\alpha f(s, y_0{+}I^\alpha x(s), x(s)){-}I^\alpha f(t, y_0{+}I^\alpha x(t), x(t))|ds \to 0 \; quand \; h \to 0, t \in J$$

Par conséquent

$$(Hx)_h \to (Hx) \;\; uniformement \;\; quand \;\; h \to 0.$$

D'après la critère de compacité de Kolmogorov, HB_r est relativement compact. Par conséquence du théorème du point fixe de Schauder le problème $(2.1) - (2.2)$ admet au moins une solution dans B_r

Le résultat suivant est basé sur le principe de contraction de Banach.

Théorème 2.2.3 *Supposons que* $(H1)$ *et la condition suivante sont vérifies.*

(H3) *Il existe des constantes* $k_1, k_2 > 0$ *tel que*

$$|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)| \leq k_1|x_1-x_2|+k_2|y_1-y_2|, t \in [0,T], x_1,x_2,y_1,y_2 \in \mathbb{R}$$

si

$$\frac{k_1 T^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{k_2 T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{2.10}$$

alors le problème $(2.1) - (2.2)$ *a une solution unique* $y \in \mathtt{L}^1([0,T],\mathbb{R})$

Preuve : on utilise le principe de la contraction de Banach pour prouver que H défini par (2.8) a un point fixe.
Soient $x, y \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J},\mathbb{R})$ et $t \in J$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
|(Hx)(t)-(Hy)(t)| &= |I^\alpha[f(t,y_0+I^\alpha x(t),x(t)) - f(t,y_0+I^\alpha y(t),y(t))]| \\
&\leq k_1 I^{2\alpha}|x(t)-y(t)| + k_2 I^\alpha |x(t)-y(t)| \\
&\leq \frac{k_1}{\Gamma(2\alpha)}\int_0^t (t-s)^{2\alpha-1}|x(s)-y(s)|ds \\
&+ \frac{k_2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s)-y(s)|ds.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|(Hx)-(Hy)\|_{\mathtt{L}_1} &\leq \frac{k_1 T^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\|x-y\|_{\mathtt{L}_1} + \frac{k_2 T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|x-y\|_{\mathtt{L}_1} \\
&\leq \left(\frac{k_1 T^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{k_2 T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\|x-y\|_{\mathtt{L}_1}
\end{aligned}$$

Par conséquent ,de (2.10) H est une contraction. En conséquent du principe de Banach nous déduisons que H a un point fixe qui est une solution du problème (2.1)-(2.2).

2.3 Exemple :

Considérons le problème suivant :

$$ {}^{c}D^{\alpha}y(t) = \frac{e^{-t}}{(e^{t}+8)(1+|y(t)|+|{}^{c}D^{\alpha}y(t)|)}, \ t \in J := [0,1], \ \alpha \in (0,1] \tag{2.11} $$

$$ y(0) = 1. \tag{2.12} $$

Soit

$$ f(t,y,z) = \frac{e^{-t}}{(e^{t}+8)(1+y+z)}, (t,y,z) \in J \times [0,+\infty) \times [0,+\infty) $$

Soit $y, z \in [0,+\infty)$ et $t \in J$ alors on a :

$$ \begin{aligned} |f(t,y_1,z_1) - f(t,y_2,z_2)| &= \left| \frac{e^{-t}}{(e^{t}+8)} \left(\frac{1}{1+y_1+z_1} - \frac{1}{1+y_2+z_2} \right) \right| \\ &\leq \frac{e^{-t}(|y_1-y_2|+|z_1-z_2|)}{(e^{t}+8)(1+y_1+z_1)(1+y_2+z_2)} \\ &\leq \frac{e^{-t}}{(e^{t}+8)}(|y_1-y_2|+|z_1-z_2|) \\ &\leq \frac{1}{9}|y_1-y_2| + \frac{1}{9}|z_1-z_2| \end{aligned} $$

d'où l'hypothèse **(H3)** vérifie pour $k_1 = k_2 = \frac{1}{9}$. Nous allons vérifier que la condition (2.10) est satisfait avec T=1. En effet

$$ \frac{k_1 T^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{k_2 T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{9\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{1}{9\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{2.13} $$

D'après le théorème 2.2.3 , le problème (2.11)-(2.12) a une unique solution intégrable dans [0,1].

Chapitre 3

Solutions intégrables pour un problème d'équation différentielle implicite d'ordre fractionnaire à conditions non locales

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudié l'existence de solution intégrable du problème non local pour les équations différentielles implicites d'ordre fractionnaire à condition non local.
Les résultats suivants sont basés sur le théorème du point fixe de Schauder et le théorème du point fixe du principe de contraction de Banach
Soit le probème :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t), ^{c}D^{\alpha}y(t)), t \in J := (0.T], \quad 0 < \alpha < 1, \tag{3.1}$$

$$\sum_{k=1}^{m} a_k y(t_k) = y_0 \quad , \tag{3.2}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée $y_0 \in \mathbb{R}$, $a_k \in \mathbb{R}$ et $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo
et $0 < t_1 < t_2 < ..., t_m < T, k = 1, 2, ..., m$

Dans ce qui suite on donne deux résultats, le premier est basé sur le théorème du point fixe de Schauder et le deuxième sur le principe de contraction de Banach
Un exemple est donné pour démontrer l'application de notre résultat principal. Mentionnons que la plus part des résultats existants pour l'équation différentielle d'ordre fractionnaire sont consacrées à des solutions continues ou carathéodorielles.

3.2 Existence de solutions

Començons par définir ce que nous entendons par solution intégrale pour le problème nonlocal (3.1)-(3.2).

Définition 3.2.1 *Une fonction* $y \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$ *est une solution de problème* $(3.1) - (3.2)$ *si* y *satisfait* (3.1) *et* (3.2)*.*

Dans ce qui suit, on suppose que $\sum_{k=1}^{m} a_k \neq 0$. Soit

$$a = \frac{1}{\sum_{k=1}^{m} a_k}$$

Pour l'existence de solutions au problème (3.1)$_{-}$(3.2) nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant.

Lemme 3.2.1 *Le problème non-local* $(3.1)-(3.2)$ *est équivalente à l'équation intégrale*

$$y(t) = ay_0 - a\sum_{k=1}^{m} a_k \int_0^{t_k} \frac{(t_k - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s)ds + \int_0^{t} \frac{(t - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s)ds \quad (3.3)$$

où x *est la solution de l'équation intégrale fonctionnel*

$$x(t) = f\left(t, ay_0 - a\sum_{k=1}^{m} a_k \int_0^{t_k} \frac{(t_k - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s)ds + \int_0^{t} \frac{(t - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s)ds, x(t)\right) \quad (3.4)$$

Preuve : Soit ${}^cD^\alpha y(t) = x(t)$ dans l'équation (3.1) ,alors

$$x(t) = f(t, y(t), x(t)) \tag{3.5}$$

et

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + I^\alpha x(t) \\ &= y(o) + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s)ds \end{aligned} \tag{3.6}$$

Soit $t = t_k$ dans (3.6) , on obtient

$$y(t_k) = y(0) + \int_0^{t_k} \frac{(t_k-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s)ds,$$

et

$$\sum_{k=1}^m a_k y(t_k) = \sum_{k=1}^m a_k y(0) + \sum_{k=1}^m a_k \int_0^{t_k} \frac{(t_k-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s)ds \tag{3.7}$$

Substituer de (3.2) dans (3.7) on obtient

$$y_0 = \sum_{k=1}^m a_k y(0) + \sum_{k=1}^m a_k \int_0^{t_k} \frac{(t_k-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s)ds$$

et

$$y(0) = a\left(y_0 - \sum_{k=1}^m a_k \int_0^{t_k} \frac{(t_k-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s)ds\right) \tag{3.8}$$

substituer de (3.8) dans (3.6) et (3.5) , nous obtenons (3.3) et (3.4).
Pour compléter la preuve , nous prouvons que l'équation (3.3) satisfait le problème non-local (3.1)-(3.2). Différencier (3.3) nous obtenons

$${}^cD^\alpha y(t) = x(t) = f(t, y(t), {}^c D^\alpha y(t))$$

Soit $t = t_k$ dans (3.3) on obtient

$$\begin{aligned} y(t_k) &= ay_0 - a\sum_{k=1}^m a_k \int_0^{t_k} \frac{(t_k-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s)ds + \int_0^{t_k} \frac{(t_k-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s)ds \\ &= ay_0 + \left(1 - a\sum_{k=1}^m a_k\right) \int_0^{t_k} \frac{(t_k-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s)ds \end{aligned}$$

alors

$$\sum_{k=1}^{m} a_k y(t_k) = \sum_{k=1}^{m} a_k a y_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \left(1 - a \sum_{k=1}^{m} a_k\right) \int_0^{t_k} \frac{(t_k - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s) ds = y_0$$

Ceci complète la preuve de l'équivalent entre le problème non-local (3.1)-(3.2) et l'équation intégrale (3.3).

Supposons les hypothèses suivantes :

(H1) $f : [\mathtt{0}, \mathtt{T}] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable dans $t \in [\mathtt{0}, \mathtt{T}]$, pour tout $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, et continue dans $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, pour presque tout $t \in [\mathtt{0}, \mathtt{T}]$,

(H2) Il existe une fonction positive $a \in \mathtt{L}^1[\mathtt{0}, \mathtt{T}]$ et constantes $b_i > 0$; $i = 1, 2$ tel que :

$$|f(t, u_1, u_2)| \leq a(t) + b_1 |u_1| + b_2 |u_2|, \forall (t, u_1, u_2) \in [\mathtt{0}, \mathtt{T}] \times \mathbb{R}^2$$

Le premier résultat est basé sur le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 3.2.2 *Supposons que les hypothèses **(H1)-(H2)** sont satisfait . Si*

$$\frac{2 b_1 T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + b_2 < 1 \tag{3.9}$$

alors le problème $(3.1) - (3.2)$ *a au moins une solution* $y \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$.

Preuve : Transformer le problème non local $(3.1) - (3.2)$ en un problème de point fixe.

Considérons l'opérateur :

$$H : \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R}) \to \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$$

définie par :

$$(Hx)(t) = f\left(t, ay_0 - a\sum_{k=1}^{m} a_k \int_0^{t_k} \frac{(t_k-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x(s)ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x(s)ds, x(t)\right) \tag{3.10}$$

soit

$$r = \frac{Tab_1y_0 + \|a\|_{\mathtt{L}_1}}{1 - \left(\frac{2b_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + b_2\right)}$$

on considère l'ensemble

$$B_r = \{x \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R}) : \|x\|_{\mathtt{L}_1} \leq r\}$$

Clairement B_r est non vide , borné, convexe et fermé.

Maintenant, on montre que $HB_r \subset B_r$, effectivement pour chaque $x \in B_r$. de (3.9) et (3.10) on obtient :

$$\begin{aligned}
& \|Hx\|_{\mathtt{L}_1} \\
= & \int_0^T |Hx(t)|dt \\
= & \int_0^T \left| f\left(t, ay_0 - a\sum_{k=1}^{m} a_k \int_0^{t_k} \frac{(t_k-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x(s)ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x(s)ds, x(t)\right)\right| dt \\
\leq & \int_0^T \left[|a(t)| + b_1|ay_0 - a\sum_{k=1}^{m} a_k I^\alpha x(t)|_{t=t_k} + I^\alpha x(t) + b_2|x(t)| \right] dt \\
\leq & Tab_1y_0 + \|a\|_{\mathtt{L}_1} + \frac{b_1 a \sum_{k=1}^m a_k t_k^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|x\|_{\mathtt{L}_1} + \frac{b_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|x\|_{\mathtt{L}_1} + b_2\|x\|_{\mathtt{L}_1} \\
\leq & Tab_1y_0 + \|a\|_{\mathtt{L}_1} + \left(\frac{2b_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + b_2\right)\|x\|_{\mathtt{L}_1} \\
\leq & r
\end{aligned}$$

Alors $HB_r \subset B_r$. L'hypothèse $(H1)$ implique que H est continue. Maintenant , nous montrerons que H est compact, ceci est HB_r est rela-

tivement compact . Clairement HB_r est borné dans $\mathtt{L}^1(\mathtt{J},\mathbb{R})$ c-a-d la condition **(i)**du critère de compacité de Kolmogorov est satisfaite .
Il reste à montrer $(Hx)_h \to (Hx)$ dans $\mathtt{L}^1(\mathtt{J},\mathbb{R})$ pour tout $x \in B_r$.
Soit $x \in B_r$. alors on a :

$$\begin{aligned}
&\|(Hx)_h - (Hx)\|_{\mathtt{L}_1} \\
= \ & \int_0^T |(Hx)_h(t) - (Hx)(t)|dt \\
= \ & \int_0^T \left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(Hx)(s)ds - (Hx)(t)\right|dt \\
\leq \ & \int_0^T \left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h}|(Hx)(s) - (Hx)(t)|ds\right)dt \\
\leq \ & \int_0^T \frac{1}{h}\int_t^{t+h}|f\left(t, ay_0 - a\sum_{k=1}^m a_k \int_0^{s_k}\frac{(s_k-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x(\tau)d\tau\right. \\
& \left. + \int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x(\tau)d\tau, x(s)\right) \\
& -f\left(t, ay_0 - a\sum_{k=1}^m a_k \int_0^{t_k}\frac{(t_k-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x(s)ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x(s)ds, x(t)\right)|dsdt.
\end{aligned}$$

Car $x \in B_r \subset \mathtt{L}^1(\mathtt{J},\mathbb{R})$ et l'hypothèse $(H2)$ cela ipmlique que
$f \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J},\mathbb{R})$,il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left|f\left(t, ay_0 - a\sum_{k=1}^m a_k \int_0^{s_k}\frac{(s_k-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x(\tau)d\tau + \int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x(\tau)d\tau, x(s)\right)\right. \\
&\left. -f\left(t, ay_0 - a\sum_{k=1}^m a_k \int_0^{t_k}\frac{(t_k-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x(s)ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x(s)ds, x(t)\right)\right|ds \to 0
\end{aligned}$$

$quand \ h \to 0.$

Par conséquent

$$(Hx)_h \to (Hx) \ uniformement \ quand \ h \to 0.$$

Par la critère de compacité de Kolmogorov, HB_r est relativement compact. Par conséquence du théorème du point fixe de Schauder le problème non local$(3.1) - (3.2)$ a au moins une solution dans B_r.
Le résultat suivant est basé sur le principe de contraction de Banach.

Théorème 3.2.3 *Supposons que* $(H1)$ *et les hypothèses suivantes sont satisfaites :*
(H3) *Il existe des constantes* $k_1, k_2 > 0$ *tel que :*

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq k_1|x_1 - x_2| + k_2|y_1 - y_2|, t \in [0, T], x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

si

$$\frac{2k_1 T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + k_2 < 1 \tag{3.11}$$

alors le problème $(3.1) - (3.2)$ *a une solution unique* $y \in \mathtt{L}^1([0, T], \mathbb{R})$.

Preuve On utilise le principe de la contraction de Banach pour prouver que H défini par (3.10) a un point fixe. Soient $x, y \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$,et $t \in J$. Alors on a

$$\begin{aligned}
|(Hx)(t) - (Hy)(t)| &= \Big| f(t, ay_0 - a\sum_{k=1}^{m} a_k I^\alpha x(t)|_{t=t_k} + I^\alpha x(t), x(t)) \\
&- f(t, ay_0 - a\sum_{k=1}^{m} a_k I^\alpha y(t)|_{t=t_k} + I^\alpha y(t), y(t)) \Big| \\
&\leq k_1 a \sum_{k=1}^{m} a_k \int_0^{t_k} \frac{(t_k - s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x(s) - y(s)| ds \\
&+ k_1 \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |x(s) - y(s)| ds + k_2 |x - y|
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|(Hx)-(Hy)\|_{L_1} &\leq \frac{k_1 t_k^\alpha a \sum_{k=1}^m a_k}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^T |x(t)-y(t)|dt + \frac{k_1 T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^T |x(t)-y(t)|dt \\ &+ k_2 \int_0^T |x(t)-y(t)|dt \\ &\leq \frac{2k_1 T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|x-y\|_{L_1} + k_2 \|x-y\|_{L_1} \\ &\leq \left(\frac{2k_1 T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + k_2 \right) \|x-y\|_{L_1} \end{aligned}$$

D'après la condition (3.11) H est une contraction. D'après le théorème de contraction de Banach nous déduisons que H a un point fixe qui est une solution du problème non local (3.1)-(3.2).

3.3 Exemple

Considérons le problème non local suivant :

$$^cD^\alpha y(t) = \frac{1}{(e^t+5)(1+|y(t)|+|^cD^\alpha y(t)|)}, \; t \in J := [0,1], \; \alpha \in (0,1] \tag{3.12}$$

$$\sum_{k=1}^m a_k y(t_k) = 1 \quad , \tag{3.13}$$

où $a_k \in \mathbb{R}, \quad 0 < t_1 < t_2 < ... < 1$

Soit

$$f(t,y,z) = \frac{1}{(e^t+5)(1+y+z)}, (t,y,z) \in J \times [0,+\infty) \times [0,+\infty)$$

soit $y, z \in [0, +\infty)$ et $t \in J$ alors on a

$$\begin{aligned}
|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| &= \left|\frac{1}{(e^t + 5)}\left(\frac{1}{1 + y_1 + z_1} - \frac{1}{1 + y_2 + z_2}\right)\right| \\
&\leq \frac{(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)}{(e^t + 5)(1 + y_1 + z_1)(1 + y_2 + z_2)} \\
&\leq \frac{1}{(e^t + 5)}(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|) \\
&\leq \frac{1}{6}|y_1 - y_2| + \frac{1}{6}|z_1 - z_2|
\end{aligned}$$

D'où la condition **(H3)** vérifie avec $k_1 = k_2 = \frac{1}{6}$ nous allons vérifier que la condition (3.11) est satisfait .

En effet

$$\frac{2k_1}{\Gamma(\alpha + 1)} + k_2 = \frac{1}{3\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{1}{6} < 1 \tag{3.14}$$

Puis par le théorème 3.2.2 , le problème (3.12)-(3.13) a une unique solution intégrable dans [0,1].

Chapitre 4

Solutions intégrables des problèmes aux limites pour les équations différentielles implicites d'ordre fractionnaire

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter des nouveaux résultats sur l'existence de solutions intégrables pour une classe des problèmes aux limites pour des équations différentielles implicites d'ordre fractionnaire concernant la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.
Les résultats suivants sont basés sur le théorème du point fixe de Schauder et le théorème du point fixe du principe de contraction de Banach.
Soit le problème :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t), {}^{c}D^{\alpha}y(t)), \qquad t \in J := [0.T], \qquad 1 < \alpha < 2 \quad (4.1)$$

$$y(0) = y_0, \qquad y(T) = y_T \ , \quad (4.2)$$

où $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ une fonction donnée $y_0, y_T \in \mathbb{R}$ et $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo
Dans ce qui suite on donne deux résultats, le premier est basé sur le théorème du point fixe de Schauder et le deuxième sur le principe de contraction de Banach.

4.2 Existence de solutions

Començons par définir ce que nous entendons par solution intégrale pour le problème (4.1)-(4.2) .

Définition 4.2.1 *Une fonction $y \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$ est une solution de problème $(4.1)-(4.2)$ si y satisfait (4.1) et (4.2).*

Pour l'existence de solutions au problème $(4.1)_-(4.2)$ nous avons besoin du lemme auxiliaire suivant

Lemme 4.2.1 *Soit $1 < \alpha \leq 2$ et soit $x \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$.*
Le problème $(4.1)-(4.2)$ est équivalent à l'équation intégrale :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t,s)x(s)ds + y_0 + \frac{(y_T - y_0)t}{T} \tag{4.3}$$

où x est la solution de l'équation intégrale fonctionnelle

$$x(t) = f\left(t, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t,s)x(s)ds + y_0 + \frac{(y_T - y_0)t}{T}, x(t)\right) \tag{4.4}$$

et $G(t,s)$ est la fonction de Green définie par :

$$G(t,s) := \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} - \frac{t(T-s)^{\alpha-1}}{T} & 0 \leq s \leq t \leq T, \\ \frac{-t(T-s)^{\alpha-1}}{T} & 0 \leq t \leq s \leq T \end{cases} \tag{4.5}$$

Preuve : Soit ${}^cD^\alpha y(t) = x(t)$ dans l'équation (4.1) ,alors

$$x(t) = f(t, y(t), x(t)) \tag{4.6}$$

et lemme 4.1.2 implique que

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s)ds$$

de (4.2) un calcul simple donne

$$c_0 = y_0$$

et

$$c_1 = -\frac{1}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}x(s)ds + \frac{(y_T - y_0)}{T}$$

d'où on obtient l'équation (4.3). Inversement, on prouve que l'équation (4.3) satisfait le problème $(4.1)-(4.2)$.

Différencier (4.3) on trouve

$$^cD^\alpha y(t) = x(t) = f(t, y(t), ^c D^\alpha y(t))$$

par (4.3) et (4.5) on a

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}x(s)ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}x(s)ds + y_0 + \frac{(y_T - y_0)t}{T} \tag{4.7}$$

un calcul simple donne $y(0) = y_0$ et $y(T) = y_T$. Ceci complète la preuve de l'équivalent entre le problème $(4.1)-(4.2)$ et l'équation intégral (4.3).

Soit

$$G_0 := max\,\{|G(t,s)|, (t,s) \in \mathtt{J} \times \mathtt{J}\}$$

et supposons les hypothèses suivantes :

(H1) $f : [\mathtt{0}, \mathtt{T}] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est mesurable dans $t \in [\mathtt{0}, \mathtt{T}]$, pour tout $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, et continue dans $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, presque partout $t \in [\mathtt{0}, \mathtt{T}]$,

(H2) Il existe une fonction positive $a \in \mathtt{L}^1[\mathtt{0}, \mathtt{T}]$ et constantes $b_i > 0;\ i = 1, 2$ tel que :

$$|f(t,u_1,u_2)| \leq a(t) + b_1|u_1| + b_2|u_2|, \forall (t,u_1,u_2) \in [\mathtt{0},\mathtt{T}] \times \mathbb{R}^2$$

Le premier résultat est basé sur le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 4.2.2 *Supposons que les hypothèses **(H1)-(H2)** sont satisfait . Si*

$$\frac{b_1 G_0 T}{\Gamma(\alpha)} + b_2 < 1 \tag{4.8}$$

alors le problème $(4.1) - (4.2)$ *a au moins une solution* $y \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J},\mathbb{R})$.

Preuve : Transformer le problème $(4.1)-(4.2)$ en un problème de point fixe.

Considérons l'opérateur

$$H : \mathtt{L}^1(\mathtt{J},\mathbb{R}) \to \mathtt{L}^1(\mathtt{J},\mathbb{R})$$

définie par :

$$(Hx)(t) = f\left(t, \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T G(t,s)x(s)ds + y_0 + \frac{(y_T - y_0)t}{T}, x(t)\right) \tag{4.9}$$

où G est donné par (4.5). Soit

$$r \geq \frac{b_1(|y_0|+|y_T|)T + \|a\|_{\mathtt{L}_1}}{1 - \left(\frac{b_1 G_0 T}{\Gamma(\alpha)} + b_2\right)}$$

Considérons l'ensemble

$$B_r = \{x \in \mathtt{L}^1([0,T],\mathbb{R}) : \|x\|_{\mathtt{L}_1} \leq r\}.$$

Clairement B_r est non vide , borné, convexe et fermé.

Maintenant, nous allons montrer que $HB_r \subset B_r$, pour chaque $x \in B_r$, l'hypothèse **(H2)** et (4.8) donnent :

$$\begin{aligned}
\|Hx\|_{\mathtt{L}_1} &= \int_0^T |Hx(t)|dt \\
&= \int_0^T \left| f\left(t, \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T G(t,s)x(s)ds + y_0 + \frac{(y_T - y_0)t}{T}, x(t)\right)\right| dt \\
&\le \int_0^T \left[|a(t)| + b_1 \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T G(t,s)x(s)ds - (\frac{t}{T} - 1)y_0 + \frac{t}{T}y_T \right| + b_2|x(t)| \right] dt \\
&\le \|a\|_{\mathtt{L}_1} + \frac{b_1 G_0 T}{\Gamma(\alpha)}\|x\|_{\mathtt{L}_1} + b_1(|y_0| + |y_T|)T + b_2\|x\|_{\mathtt{L}_1} \\
&\le b_1(|y_0| + |y_T|)T + \|a\|_{\mathtt{L}_1} + \left(\frac{b_1 G_0 T}{\Gamma(\alpha)} + b_2\right) r \\
&\le r.
\end{aligned}$$

Alors $HB_r \subset B_r$. L'hypothèse $(H1)$ implique que H est continue. Maintenant , on montre que H est compact, ceci est HB_r est relativement compact . Clairement HB_r est borné dans $\mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$ (c-à-d)la condition **(i)**du critère de compacité de Kolmogorov est satisfaite .
Il reste à montrer $(Hx)_h \to (Hx)$ dans $\mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$ pour tout $x \in B_r$.
Soit $x \in B_r$. alors on a :

$$\begin{aligned}
& \|(Hx)_h - (Hx)\|_{\mathtt{L}_1} \\
= & \int_0^T |(Hx)_h(t) - (Hx)(t)|dt \\
= & \int_0^T \left| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} (Hx)(s)ds - (Hx)(t) \right| dt \\
\le & \int_0^T \left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} |(Hx)(s) - (Hx)(t)|ds \right) dt \\
\le & \int_0^T \left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left| f(s, \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T G(s,\tau)x(\tau)d\tau + y_0 + \frac{(y_T - y_0)s}{T}, x(s)) \right.\right. \\
- & \left.\left. f(t, \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T G(t,s)x(s)ds + y_0 + \frac{(y_T - y_0)t}{T}, x(t)) \right| ds \right) dt
\end{aligned}$$

Comme $x \in B_r \subset \mathtt{L}^1(\mathtt{J},\mathbb{R})$ et l'hypothèses $(H2)$ cela implique que $f \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J},\mathbb{R})$.

Alors on a :

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left|f(s,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T G(s,\tau)x(\tau)d\tau + y_0 + \frac{(y_T-y_0)s}{T},x(s))\right.$$

$$\left.-f(t,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T G(t,s)x(s)ds + y_0 + \frac{(y_T-y_0)t}{T},x(t))\right|ds \to 0 \;\; quand \;\; h \to 0, t \in \mathtt{J}$$

par conséquent

$$(Hx)_h \to (Hx) \;\; uniformement \;\; quand \;\; h \to 0$$

puis par la critère de compacité de Kolmogorov, HB_r est relativement compact. Par conséquence du théorème du point fixe de Schauder le problème $(4.1)-(4.2)$ a au moins une solution dans B_r.
Le résultat suivant est basé sur le principe de contraction de Banach.

Théorème 4.2.3 *Supposons que* $(H1)$ *et la condition suivante sont vérifies*
(H3) *il existe des constantes* $k_1, k_2 > 0$ *tel que :*

$$|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)| \leq k_1|x_1-x_2|+k_2|y_1-y_2|, t \in [0,T], x_1,x_2,y_1,y_2 \in \mathbb{R}$$

si

$$\frac{k_1 T G_0}{\Gamma(\alpha)} + k_2 < 1. \tag{4.10}$$

Alors le problème $(4.1)-(4.2)$ *a une solution unique* $y \in \mathtt{L}^1([0,T],\mathbb{R})$.

Preuve : On utilise le principe de la contraction de Banach pour prouver que H défini par (4.9) a un point fixe.

Soient $x, y \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$ et $t \in J$. Alors on a

$$\begin{aligned}
|(Hx)(t) - (Hy)(t)| &= \left| f\left(t, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t,s)x(s)ds + y_0 + \frac{(y_T - y_0)t}{T}, x(t)\right)\right. \\
&- \left. f\left(t, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t,s)y(s)ds + y_0 + \frac{(y_T - y_0)t}{T}, y(t)\right)\right| \\
&\leq \frac{k_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |G(t,s)(x(s) - y(s))|ds + k_2|x(t) - y(t)| \\
&\leq \frac{k_1 G_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |x(s) - y(s)|ds + k_2|x(t) - y(t)|.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|(Hx) - (Hy)\|_{\mathtt{L}_1} &\leq \frac{k_1 T G_0}{\Gamma(\alpha)} \|x - y\|_{\mathtt{L}_1} + k_2 \int_0^T |x(t) - y(t)|dt \\
&\leq \frac{k_1 T G_0}{\Gamma(\alpha)} \|x - y\|_{\mathtt{L}_1} + k_2 \|x - y\|_{\mathtt{L}_1} \\
&\leq \left(\frac{k_1 T G_0}{\Gamma(\alpha)} + k_2\right) \|x - y\|_{\mathtt{L}_1}.
\end{aligned}$$

La condition (4.10) implique que H est une contraction. En conséquence du principe de contraction de Banach, nous déduisons que H a un point fixe qui est une solution du problème (4.1) – (4.2).

4.3 Problèmes à conditions non Locales

4.3.1 Introduction

Cette section est consacrée à certains résultats d'existence et d'unicité pour la classe suivante de problèmes à conditions non locales.

$$^cD^\alpha y(t) = f(t, y, ^c D^\alpha y(t)), t \in J := [0.T], \quad 1 < \alpha < 2 \tag{4.11}$$

$$y(0) = g(y), \qquad y(T) = y_T, \tag{4.12}$$

où $g : \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
La condition non local peut être appliquée en physique avec un meilleur effet que la condition initial classique $y(0) = y_0$
Par exemple $g(y)$ peut être donné par :

$$g(y) = \sum_{i=1}^{p} c_i y(t_i),$$

où $c_i, i = 1, 2..., p$ sont des constantes données et $0 < ... < t_p < T$.
Les conditions non locales ont été initiées par Byszewski lorsqu'il a prouvé l'existence et l'unicité de solutions douces et classiques de problèmes de Cauchy non locales.
Comme la remarqué Byszewski, la condition non local peut être plus utile que la condition standard pour décrire certains phénomènes physiques.

4.3.2 Existence de solutions

Supposons l'hypothèse suivante sur la fonction g

(H4) Il existe une constante $\tilde{k} > 0$ telle que :

$$|g(y) - g(\tilde{y})| \leq \tilde{k}|y - \tilde{y}|, \text{ pour chaque } y, \tilde{y} \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$$

Théorème 4.3.1 *Supposons que les hypothèses **(H1)**,**(H3)** et **(H4)** sont satisfaites et*
si

$$\frac{2k_1 T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + k_1 \tilde{k} + k_2 < 1, \tag{4.13}$$

alors le problème (4.11)-(4.12) a une solution unique $y \in \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R})$
Transformer le problème (4.11)-(4.12) en un problème de point fixe.

considérons l'opérateur

$$\tilde{H} : \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R}) \to \mathtt{L}^1(\mathtt{J}, \mathbb{R}),$$

définie par :

$$(\tilde{H}x)(t) = f\left(t, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t,s)x(s)ds + g(y) + \frac{(y_T - g(y))t}{T}, x(t)\right) \tag{4.14}$$

Preuve : Clairement, les points fixes de l'opérateur $\tilde{H}$ sont la solution du problème (4.11)-(4.12)
On prouve facilement montrer que $\tilde{H}$ est une contraction

4.4 Exemple

Considérons le problème suivant :

$$^cD^\alpha y(t) = \frac{e^{-t}}{(e^t + 6)(1 + |y(t)| + |^cD^\alpha y(t)|)}, t \in J := [0.T], 1 < \alpha < 2 \tag{4.15}$$

$$y(0) = 1, \qquad y(1) = 2. \tag{4.16}$$

Soit

$$f(t, y, z) = \frac{e^{-t}}{(e^t + 6)(1 + y + z)}, (t, y, z) \in J \times [0, +\infty) \times [0, +\infty)$$

Soit $y, z \in [0, +\infty)$ et $t \in J$, alors on a :

$$\begin{aligned}
|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| &= \left|\frac{e^{-t}}{e^t + 6}\left(\frac{1}{1 + y_1 + z_1} - \frac{1}{1 + y_2 + z_2}\right)\right| \\
&\leq \frac{e^{-t}(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|)}{(e^t + 6)(1 + y_1 + z_1)(1 + y_2 + z_2)} \\
&\leq \frac{e^{-t}}{(e^t + 6)}(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|) \\
&\leq \frac{1}{7}|y_1 - y_2| + \frac{1}{7}|z_1 - z_2|
\end{aligned}$$

D'où l'hypothèse **(H3)** vérifie pour $k_1 = k_2 = \frac{1}{7}$

Nous allons vérifier que la condition (4.10) est satisfaite avec T=1.En effet

$$\frac{k_1 T G_0}{\Gamma(\alpha)} + k_2 = \frac{G_0}{7\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{7} < 1 \tag{4.17}$$

D'après le théorème 4.2.3, le problème (4.15)-(4.16) admet une solution intégrable unique sur [0.1] pour les valeurs de α qui vérifies la condition (4.17)

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons abordé l'étude de l'existence et l'unicité des solutions intégrales pour quelques classe de problèmes à valeurs initiales et aux limites associés à des équations différentielles implicites non linéaires à dérivées fractionnaires au sens de Caputo, Les équations (ou systèmes) considérées sont ordinaires, Les résultats obtenus sont basés sur quelques théorèmes de point fixe dans les espaces de Banach,. . .) permettant de traiter de tels problèmes et voir comment on peut prendre en compte le cas où les conditions locales et non locales.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. Belmekki and M. Benchohra, A survey on semilinear differential equations and inclusions involving Riemann-Liouville fractional derivative. *Adv Differ. Equat.* **2009**(2009) Article ID 981728, 1-47.

[2] R.P Agarwal, M. Benchohra and S. Hamani, A survey on existence result for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions, *Acta. Appl. Math.* **109** (3) (2010), 973-1033.

[3] S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata, *Topics in Fractional Differential Equations*, Springer, New York, 2012.

[4] S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata, *Avanced Fractional Differential and Integral Equations*, Nova Science Publishers, New York, 2015.

[5] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo, *Fractional Calculus Models and Numerical Methods*, World Scientific Publishing, New York, 2012.

[6] M. Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas and A. Ouahab, Existence results for functional differential equations of fractional order, *J. Math. Anal. Appl.* **338** (2008), 1340-1350.

[7] M. Benchohra, S. Hamani, and S.K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, *Nonlinear Anal.* **71** (2009), 2391-2396.

[8] M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order, *Surveys Math. Appl.* **3** (2008), 1-12.

[9] M. Benchohra and M. S. Souid, Integrable Solutions for Implicit Fractional Order Differential Equations. *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics* **6** (2014), No. 2, 101-107.

[10] M. Benchohra and M. S. Souid, L^1-Solutions of Boundary Value Problems for Implicit Fractional Order Differential Equations, Surveys in Mathematics and its Applications **10** (2015), 49 - 59.

[11] M. Benchohra and M. S. Souid, L^1-Solutions for Implicit Fractional Order Differential Equations with Nonlocal Condition, Filomat 30 :6 (2016), 1485-1492.

[12] L. Byszewski, Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem, *J. Math. Anal. Appl.* **162** (1991), 494-505.

[13] L. Byszewski, *Existence and uniqueness of mild and classical solutions of semilinear functional-differential evolution nonlocal Cauchy problem.* Selected problems of mathematics,25-33, **50** th Anniv. Cracow Univ. Technol. Anniv. Issue, 6, Cracow Univ.Technol., Krakw, 1995

[14] L. Byszewski and V. Lakshmikantham, Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space, *Appl. Anal.* **40** (1991), 11-19.

[15] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985.

[16] A. M. A. El-Sayed, Sh. A. Abd El-Salam, L^p-solution of weighted Cauchy-type problem of a differ-integral functional equation, *Intern. J. Nonlinear Sci.* **5** (2008) 281-288.

[17] A.M.M. El-Sayed, H.H.G. Hashem, Integrable and continuous solutions of a nonlinear quadratic integral equation, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2008, No. **25**, 1-10.

[18] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.

[19] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V. Amsterdam, 2006.

[20] V. Lakshmikantham, S. Leela and J. Vasundhara, *Theory of Fractional Dynamic Systems*, Cambridge Academic Publishers, Cambridge, 2009.

[21] F. Mainardi, *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. An introduction to mathematical models.* Imperial College Press, London, 2010.

[22] M. D. Ortigueira, *Fractional Calculus for Scientists and Engineers.* Lecture Notes in Electrical Engineering, 84. Springer, Dordrecht, 2011.

[23] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

[24] V. E. Tarasov, *Fractional Dynamics : Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles*, Fields and Media, Springer, Heidelberg ; Higher Education Press, Beijing, 2010.

[25] A. Belarbi, M. Benchohra and A. Ouahab, Uniqueness results for fractional functional differential equations with infinite delay in Fréchet spaces, *Appl. Anal.* **85** (2006), 1459-1470.

[26] K.B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, London, 1974.

Résumé

L'objectif de ce travail est de présenter, des résultats d'existence et d'unicité des solutions intégrales pour quelque classe de problèmes á valeur initiales et aux limites pour des équations différentielles implicites non linéaires à dérivées fractionnaires au sens de Caputo.
Tous les problèmes étudiés sont considérés dans un espace de Banach.
La technique utilisée c'est de ramener l'étude de notre problème a la recherche d'un point fixe d'un opérateur intégral convenablement construit. En appliquant des théorèmes de point fixe. Le contenu de ce mémoire est basée sur les articles [9, 10, 11].

♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣ ♣

The purpose of this work is to present, results of existence and Uniqueness of Integral Solutions for Any Class of Value Problems initials and limits for implicit differential equations no Linear fractional derivatives in the sense of Caputo.
All the problems studied are considered in a Banach space.
The technique used is to reduce the study of our problem to the search for a fixed point of an integral operator appropriately built. By applying fixed point theorems. The content of this memory is based on the article [9, 10, 11].