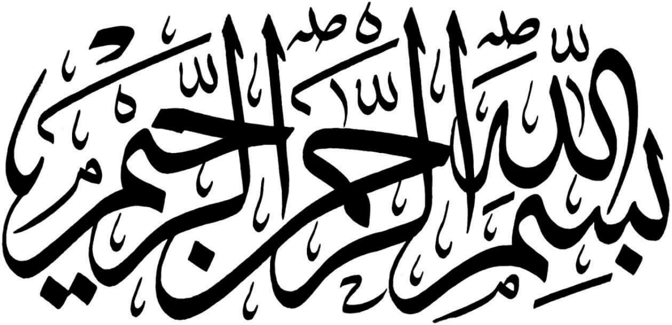
بسم الله الرحمن الرحيم

Université Ibn Khaldoun. Tiaret. Algérie
Département de Mathématiques

Sur Les Modèles Probabilistes (Loi des grands nombres)

Par

Boughandja Ahmed Elkhalil, Bouzar Belgacem
Kobci Tayeb et Sassi Mohamed

Encadrer par : **Dr. Hamza Daoudi**

Objectif

L'objectif principal de ce travail est d'étudier la convergence presque sûre et la convergences en probabilités de la lois des grands nombres, avec des variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées(i.i.d).

Plan de travail

Plan de travail

Plan de travail

Plan de travail

Plan de travail

Plan de travail

1. Introduction générale

Introduction

En mathématiques, la loi des grands nombres permet d'interpréter la probabilité comme une fréquence de réalisation, justifiant ainsi le principe des sondages, et présente l'espérance comme une moyenne. Plus formellement, elle signifie que la moyenne empirique, calculée sur les valeurs d'un échantillon, converge vers l'espérance lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini.
Plusieurs théorèmes expriment cette loi, pour différents types de convergence en théorie des probabilités. La loi faible des grands nombres met en évidence une convergence en probabilité, tandis que la loi forte des grands nombres donne une convergence presque sûre.

2 Rappels de théorie de mesure

Tribu

Definition

Une famille non vide τ de parties de E est une tribu sur E lorsqu'elle vérifie les trois conditions suivantes :

i) $E \in \tau$

ii) si $A \in \tau, alors A^{\complement} = E/A \in \tau$

iii) si $(A_n)_{n \in N}$ est une suite d'éléments de τ , alors $\bigcup_{n \in N} A_n \in \tau$

Definition

Si τ est une tribu de E, les éléments de τ sont dits τ-mesurables et le couple (E, τ) est appelé espace mesurable.

Mesure

On considére (X, A) un espace mesurable.

Definition

Une mesure μ sur (X, A) est une application de $A \to [0; +\infty]$ telle que :
i) $\mu(\phi) = 0$
ii) si $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite dénombrable d'ensembles de A deux á deux disjoints alors :

$$\mu(\bigcup A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty}(\mu(A_n))\sigma - \text{additivité}$$

Le triplet (X, A, μ) est appelé un espace mesuré (espace mesurable + mesure).

Tribu engendrées

Proposition

Soit γ une famille de parties de E. Il existe une plus petite tribu (au sens de l'inclusion) sur E contenant γ, c'est l'intersection de toutes les tribus contenant γ. On l'appelle tribu engendrée par γ et on la note $\sigma_E(\gamma)$
On dit aussi que γ est un sous-ensemble générateur de la tribu $\sigma_E(\gamma)$.

Tribu borélienne

Si l'ensemble$E$ possède une structure topologique, la notion de tribu engendrée permet de définir la plus petite tribu adaptée à cette structure.

Definition

1) Soit E un espace métrique (plus généralement topologique) et θ la famille des ouverts de E. On appelle tribu de Borel ou tribu borélienne et on la note $B(E)$ la tribu engendrée par la famille θ. Autrement dit, $B(E) = \sigma_E(\theta)$
2) On appelle borélien de E tout élément de la tribu $B(E)$.

Classes monotones

Definition

Une classe monotone d'ensembles est une famille d'ensembles qui,si elle contient une suite monotone d'ensembles, contient aussi la limite de cette suite. Rappelons qu'une suite d'ensembles $E_1, E_2, E_3, \cdots$ est croissante si $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$ Sa limite n'est autre que la réunion $E_1 \bigcup E_2 \bigcup E_3 \bigcup \cdots$ De même, si la suite(E_n) est décroissante, sa limite est l'intersection $E_1 \bigcap E_2 \bigcap E_3 \bigcap \cdots$

Applications mesurables

Definition

Soient (E, τ) et (E', τ') deux espaces mesurables et f une application de E dans E'.
1) L'application f est dite (E, τ)-mesurable si $f^{-1}(\tau') \subset \tau$,i.e pour tout A $\in \tau'$ $f^{-1}(A)$
2) Si τ et τ' sont les tribus de Borel respectives de E et E' espaces métrique, On dit encore que f est borélienne.

3. Notions de probabilités

Les variables aléatoires

Definition

On appelle variable aléatoire (va) toute application mesurable X d'un espace de probabilité (Ω,F,P) dans un espace mesurable $(B, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
En général, une variable aléatoire est à valeurs réelles, ie.$(B, \mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Vecteur aléatoire

Definition

On appelle également X vecteur aléatoire. Les v.a. réelles

$$X_i = \langle e_i, X \rangle = p_i \circ X$$

s'appelle marges de X, leurs lois marginales de X .

Variables aléatoires indépendantes

Definition

Variables aléatoires indépendantes Soit $\{X_i, i \in I\}$ une famille de v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilité. Les $X_i, i \in I$ sont indépendantes si les tribus image réciproque sont indépendantes.

Variable aléatoire simple ou étagée

Definition

On appelle variable aléatoire étagée ou simple (à valeurs dans $\mathbb{R}^d$) une variable aléatoire définie sur Ω de la forme :

$$X = \sum_{j=1}^{r} a_j 1_{A_j}$$

Où les $A_j \in \mathcal{F}$ sont disjoints et où$a_j \in \mathbb{R}^d$.

Variable aléatoire simple ou étagée

Proposition

Toute variable aléatoire X est limite simple de variables aléatoires étagées. Si de plus X est réelle positive, la limite peut être choisie croissante.

Loi d'une variable aléatoire

Definition

Soit $X : \Omega \to (B, \mathcal{B})$, on appelle loi de X la mesure $\mathbb{P}_X$, mesure image sur $(B, \mathcal{B})$ de $\mathbb{P}$ par X :

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega : X(\omega) \in A), A \in \mathcal{B}$$

En effet, on vérifie facilement que $\mathbb{P}_X$ est σ -additive : pour des ensembles $A_i, i \geq 1$ mesurables disjoints, on a :

$$\mathrm{P}_X\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(X \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} \{X \in A_i\}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X \in A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_X\left(A_i\right)$$

fonction de répartition

Definition

(Répartition) On appelle fonction de répartition d'une variable aléa toire réelle $X : \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction F_X definie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x])$$

Variable aléatoire discrète

Definition

Une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\ B, \mathcal{B})$ est discrète si son support est au plus dénombrable. Autrement dit : X est à valeurs dans un ensemble au plus dénombrable.

Notons que $\mathcal{S}(X)$ est l'adhérence de l'ensemble des atomes de X (les atomes et leurs points d'accumulation).

4. Convergences de variables aléatoires

Convergence en probabilité

Definition

On dit qu'une suite de variables aléatoires $\{X_n, n \geq 1\}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X, si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0$$

On note $X_n \xrightarrow{P} X$.

Convergence en moyenne

Definition

On dit qu'une suite de variables aléatoires intégrables $\{X_n, n \geq 1\}$ converge en moyenne vers une variable aléatoire X, si

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|\right) = 0$$

On note $X_n \to X$ en moyenne.

Convergence presque sûre

Definition

On dit qu'une suite de variables aléatoires $\{X_n, n \geq 1\}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X, si

$$P\left\{\omega \in \Omega, \lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = 1$$

On note $X_n \longrightarrow X$ p. s.

Convergence en loi

Definition

Soient $\{X_n, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles, $\{F_n, n \geq 1\}$ la suite des fonctions de répartitions correspondantes. On dit que $\{X_n, n \geq 1\}$ converge en loi vers une variable aléatoire X de fonction de répar- tition F_X, si

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(t) = F_X(t)$$

pour tout point t où F_X est continue. On note

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

5. Application sur les Lois des grands nombres (LGN)

Application sur les Lois des grands nombres (LGN)

Soit $X_n, n \geq 1$ une suite de variables aléatoires indépendantes, Dans ce paragraphe on s'intéresse au comportement des moyennes arithmétiques

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Lois faibles des grands nombres

Proposition

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoire réelles indépendantes, centrées et de carré intégrable. Supposons que*

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\,(X_k) \longrightarrow 0$$

alors les moyennes $\left\{\overline{X}_n, n \geq 1\right\}$ *convergent vers 0 en probabilité. Comme corollaire direct de ce résultat, on obtient*

Lois faibles des grands nombres

Theorem

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoire réelles, indépendantes, intégrables et de même loi. Posons* $\mu = \mathbb{E}(X_1)$, *alors*

$$\overline{X}_n \longrightarrow \mu$$

en probabilité lorsque $n \to \infty$

Lois fortes des grands nombres

Theorem

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ *une suite de variables aléatoire réelles, indépendantes, intégrables et de même loi. Posons* $\mu = \mathbb{E}(X_1)$, *alors*

$$\overline{X}_n \longrightarrow \mu$$

presque surement lorsque $n \to \infty$

6 Conclusion et Perspectives

Conclusion

- Cette contribution est sur la lois des grands nombres, avec des variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées(i.i.d)
- Nous avons établi la convergence presque sûre et la convergences en probabilités de cette lois.

Perspectives

Dans la continuité de ce travail, cette recherche ouvre la voie à de nouveaux travaux sur le sujet.

- Etude la convergence presque complète de la lois des grands nombres, avec des variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées(i.i.d).
- Le cas des variables aléatoires réelles dépendantes identiquement distribuées.

Bibliographie

- Xavier Mary. Théorie de la Mesure et Intégration.
- Pierre Priouret. Probabilités. (2005)
- Olivier GARET. Mesure et Probabilités. (2003)
- Thierry Gallouët. Raphaèle Herbin, Mesure et intégration. (July 2004).

Bibliographie

- Y. Velenik. Probabilités et Statistique. (Octobre 2016).
- J. Féjoz. chapitres d'intégration et de probabilités. (2014).
- El Haj Laamri. Mesures, intégration, convolution et transformée de fourier des fonctions-rappel de cours et exercices corrigés. (janvier 2007).

Merci pour votre attention